**Костюченко А.О.**
Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г.Шевченка

# Що потрібно знати програмістові, який працює з комп'ютерною побудовою графіків функцій

Побудова графіків функцій сьогодні, не є досить складним завданням. Існує багато програмних засобів, за допомогою яких можна виконувати такі побудови. Серед них можна виділити більш прості у використанні: Gran1, Advanced grapher, Gnuplot та програмні засоби, в яких передбачено набагато більший спектр математичних чи геометричних обчислень з можливістю побудови графіків функцій – Gran2d, Derive, MathCad. MathLab та ін.. Проте інколи виникає необхідність організувати побудову графіків функцій в особистій розробці. В такому випадку необхідно пам'ятати про деякі особливості використання комп'ютера для побудови графіків функцій, серед яких можна виділити: відмінність розміщення системи координат в колі виведення від більш звичної математичної системи координат та виведення графіка функції на дискретний носій.

При роботі з графікою доводиться працювати з двома системами координат. Перша система – це система координат елемента виведення чи екранна система координат. Координатами точки в цій системі є номер пікселя в рядку X та номер рядка пікселів Y (Рис. 1):

$$0 \le X \le Xmax,$$
$$0 \le Y \le Ymax.$$

Початок координат розміщується в лівому верхньому кутку елемента виведення. Параметри екранної системи координат (максимальне число пікселів в рядках *Xmax* та максимальне число рядків пікселів *Ymax*) залежать від поточного графічного режиму та розмірів елемента виведення. Таким чином, ця система координат певним чином пов'язана з конкретним графічним пристроєм та режимом його функціонування.

Друга система координат – так звана математична або Декартові. Ця система координат $(x, y)$, яку визначає програміст і яка є незалежною від конкретного графічного пристрою виведення:

$$xmin < x < xmax,$$
$$ymin < y < ymax.$$

Параметри, якими задаються діапазони зміни $x$ і $y$ ($xmin, ymin, xmax, ymax$), визначають прямокутну область в математичному двовимірному просторі. Ці параметри залежать лише від конкретної задачі.

Математичні координати і координати елемента виведення зв'язані між собою простим відношенням:

$$X = X\max \cdot \left( \frac{x - x\min}{x\max - x\min} \right)$$

$$Y = Y\max \cdot \left[ 1 - \left( \frac{y - y\min}{y\max - y\min} \right) \right].$$

Формула для екранної координати $Y$ дещо відрізняється від формули для координати $X$ в силу того, що в екранній системі координат $OY$ напрямлена вниз.

Для того, щоб кожного разу, коли буде виникати необхідність в перетворенні координат із однієї системи в іншу, не писати ці вирази, зручно оформити обчислення $X$ та $Y$ у вигляді функцій. Наприклад їх опис мовою Pascal може мати такий вигляд:

```
Function XMathToWin(x : Extended) : Integer;
Begin
  XMathToWin:=round(XMaxWin*(x-xmin)/(xmax-xmin));
End;
```

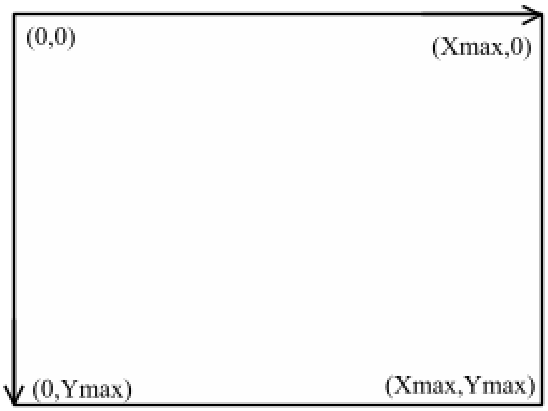



Рис. 1

```
Function YMathToWin(y : Extended) : Integer;
Begin
  YMathToWin:=round(YMaxWin*(1-(y-ymin)/(ymax-ymin)));
End;

Function XWinToMath (x : Integer) : Extended;
Begin
  XWinToMath:=(xmax-xmin)*x/XMaxWin+xmin;
End;

Function YWinToMath (y : Integer) : Extended;
Begin
  YWinToMath:=(ymax-ymin)*(YMaxWin-x)/YMaxWin+ymin;
End;
```

де *xmin, ymin, xmax, ymax* – межі області побудови в декартових координатах; *XMaxWin, YMaxWin* – межі елемента виведення в екранних координатах; *XMathToWin, YMathToWin* – функції переведення координат з декартових в екранні; *XWinToMath, YWinToMath* – функції переведення координат з екранних в декартові.

Розгляд побудови графіка функції будемо проводити на прикладі неперервної функції, оскільки для точної побудови графіка розривної функції необхідний більш детальний аналіз.

Побудова графіків функцій в загальному випадку відбувається за одним і тим самим принципом. Беруть дві осі координат, вибирають масштаби вздовж осей, тобто відрізки одиничної довжини і таким чином оцифровують їх. Масштаби вздовж осей можуть бути довільними, рівномірними чи ні, наприклад лагорифмічними, експоненціальними чи іншими. Вибір масштабу, який застосовують в конкретному випадку, залежить від багатьох чинників, але одна з головних вимог – графік має бути інформативним і наглядним. Далі беремо функцію, наприклад $y=\frac{x}{2}-\sin(x)$, і обчислюємо з кроком, наприклад, 1 значення функції на деякому відрізку. В результаті отримуємо таблицю і потім графік вказаної функції (Рис. 2).

На перший погляд наче все просто і зрозуміло – протабулювавши функцію, можна побудувати деяку послідовність базових точок. У випадку такої побудови на папері можна з'єднати дані точки плавною лінією і таким чином отримати неперервний графік функції, зрозуміло, що з деякою неточністю. У випадку комп'ютерної побудови отриманий графік буде розривним, а з'єднання базових точок прямими лініями взагалі може його спотворити. Тому для отримання більш плавної лінії може виникнути природне бажання отримати більшу кількість базових точок, зменшивши крок побудови в 10, 100 а то й в 1000 разів. Таким чином на даному відрізку [-10; 10] при кроці 0.001 ми отримаємо $\frac{10-(-10)}{0.001}=20000$ обчислень, такі обчислення за допомогою комп'ютера не становлять проблем. З математичної точки зору наведені дії приводять до більш точних результатів для побудови графіка функції, проте не слід забувати, що даний графік нам необхідно буде будувати в деякій графічній області на екрані монітора.

Проблема полягає в тому що монітор – це дискретний прилад. Він має скінченну ширину та висоту і між будь-якими двома точками міститься скінченна і за математичними мірками невелика кількість так званих елементів зображення – пікселів, тому при побудові графіка, наприклад, в області розміром $800\times600$ значна кількість точок буде втрачена в основному за рахунок переведення з декартових до екранних координат.

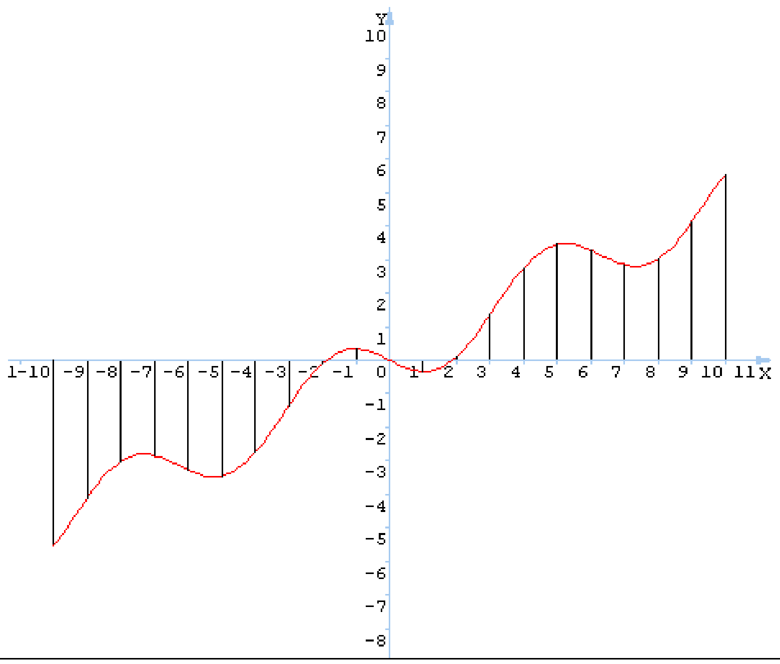
Розглянемо побудову більш детально. Спробуємо спочатку перенести графік даної функції на прямокутник розміру $21\times21$ (пікселів). Очевидно що кількість точок в яких необхідно буде обчислювати значення функції, повинна дорівнювати 21, тобто 1 піксель – одне обчислення значення функції, або іншими словами можна сказати, що через 1 піксель визначається крок аргумента (*dx*).

Перше, на що необхідно звернути увагу, це те, що координати всіх точок, які можна відобразити на екрані монітора, повинні мати цілочисельні значення. Природним виходом з даної ситуацiє є округлення отриманої координати точки до найближчого ціочисельного значення. Першу точку нашого графіка з ординатою *y=-5.5*, розмістимо на місці точки з ординатою *y=-6*. Зрозуміло, що виконуючи такі дії, ми спотворюємо графік. Продовживши вищевказані побудови отримаємо точки графіка, зафарбовані сірим кольором. Щоб графік був неперервним, додамо ще чотири точки з плюсами в середині. Як видно, ці точки на вертикалі (Рис. 3).

Можна зазначити, що з вибором масштабу вздовж осей абсцис і ординат та прямокутник виведення (в пікселях) на екрані монітору, фактично задано фізично координати всіх точок цього прямокутника.

Поглянемо більш детально, які координати вони мають.

| *x* | *y* |
|---|---|
| -10 | -5,5 |
| -9 | -4,1 |
| -8 | -3,0 |
| -7 | -2,8 |
| -6 | -3,3 |
| -5 | -3,5 |
| -4 | -2,8 |
| -3 | -1,4 |
| -2 | -0,1 |
| -1 | 0,3 |
| 0 | 0 |
| 1 | -0,3 |
| 2 | 0,1 |
| 3 | 1,4 |
| 4 | 2,8 |
| 5 | 3,5 |
| 6 | 3,3 |
| 7 | 2,8 |
| 8 | 3,0 |



| | |
|---|---|
| 9 | 4,1 |
| 10 | 5,5 |

Рис. 2

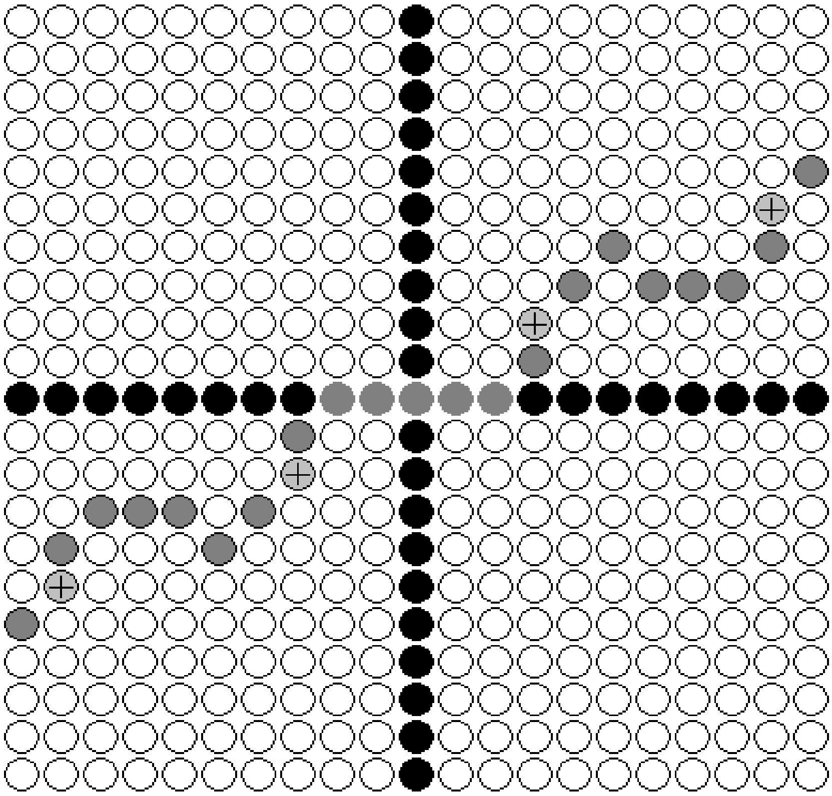


Рис.3

Нехай *X1, X2* – початок та кінець відрізка осі абсцис, де розглядається функція, *w* і *h* ширина та висота, відповідно, прямокутника виведення. Обчислимо крок вздовж осі абсцис $dx = \frac{X2 - X1}{w}$ та вздовж осі ординат $dx = \frac{Y\max - Y\min}{h}$, де *Ymax* та *Ymin* – максимальне та мінімальне значення функції на відрізку *X1, X2*.

На рис. 4 вказано піксель в який перетворюються всі точки, які потрапляють в прямокутник з розмірами $dx \times dy$ (зображений штрихованою лінією).

З вищевказаного можна зробити висновок: Будь-яку точку графіка, на екрані монітора, можна розмістити з невизначеністю $dx \times dy$.

Проте ці відомості будуть корисні не лише програмістові, а й користувачеві, який буде працювати з побудовою графіка функції за допомогою певного програмного засобу. Розглядаючи випадок, коли на зображенні крива буде доторкатися до осі абсцис, не можна з впевненістю сказати, що там буде існувати точка дотику. Лише можна сказати, що точка осі абсцис і точка графіка попали в один і той самий прямокутник $dx \times dy$. А у випадку коли *dy* буде великим числом, користувач може зробити і хибний висновок.

Зрозуміло, що побудова графіка функції за допомогою комп’ютера полегшує задачу навіть у випадку збільшення області побудови. Автоматизувавши роботу, можна обчислювати значення функції будь-яку кількість разів.

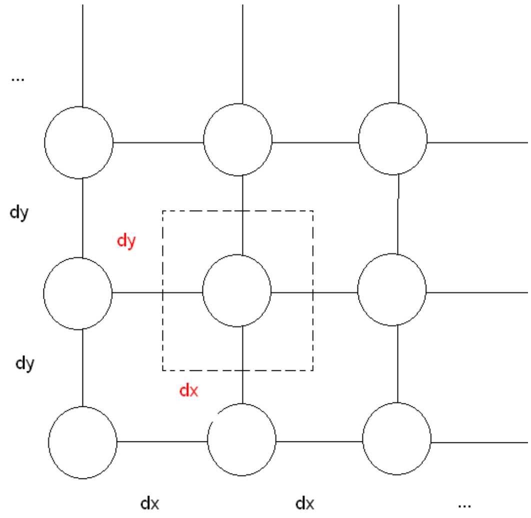



Рис. 4

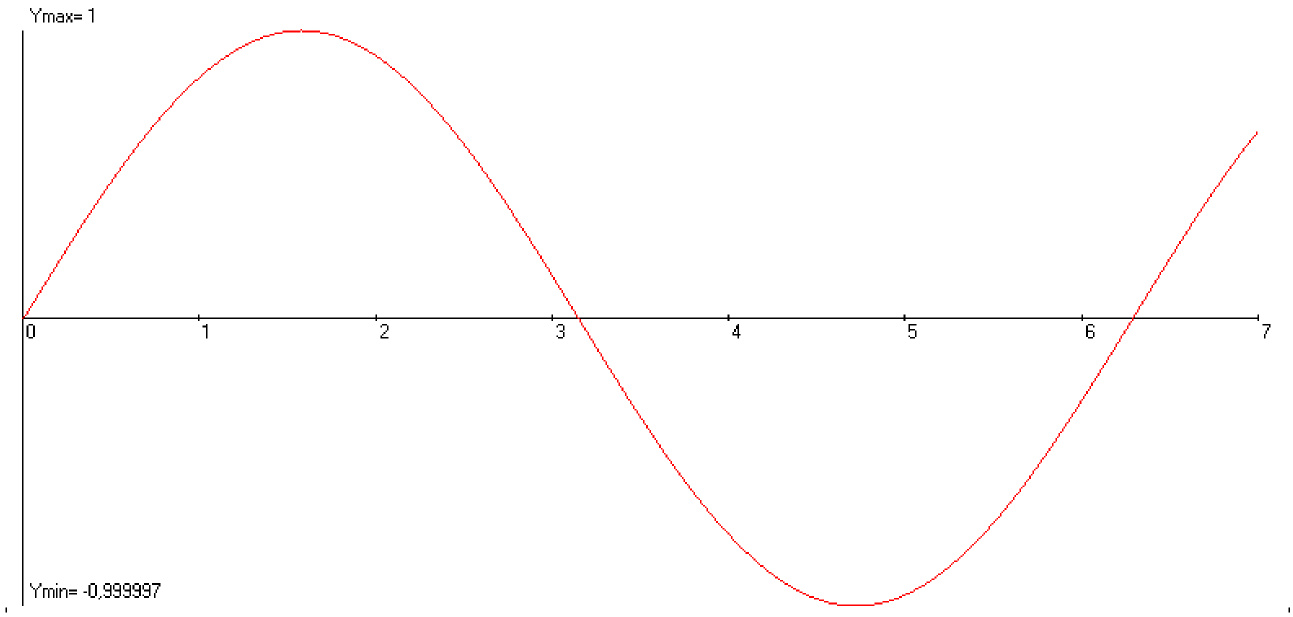



Рис. 5

Графік розглядуваної функції є неперервною кривою. Це добре, проте чим більша відстань між точками, в яких обчислюються значення функції, тим більше відомостей втрачається. Якщо взяти інтервал побудови великим, а прямокутник виведення, навпаки, маленьким, то отримана крива навряд чи буде мати щось спільне з графіком функції, за якою відбувалася побудова. В такому режимі можна розглядати лише асимптоти, якщо вони є. Отже, якість залежить від розміру прямокутника виведення, і чим меншим буде відрізок побудови графіка, тим якість буде кращою. Це і зрозуміло, адже деталізація графіка збільшується. Отже: якість графіка тим вища, чим більший прямокутник виведення і чим менший відрізок на осі абсцис, на якому розглядається функція. Іншими словами, чим менша невизначеність $dx \times dy$, тим графік точніший.

Розглянемо деякі особливості відображення періодичних функцій за вказаним методом. Розглянемо функцію *sin(x)* На Рис. 5 наведено графік одного періоду цієї функції.

Збільшивши інтервал побудови до 400 одиниць, отримаємо наступний вигляд графіка (Рис. 6). Вздовж горизонталі вийшло 12 пікселів на період і в результаті вже дещо важко орієнтуватися в отриманому зображенні.

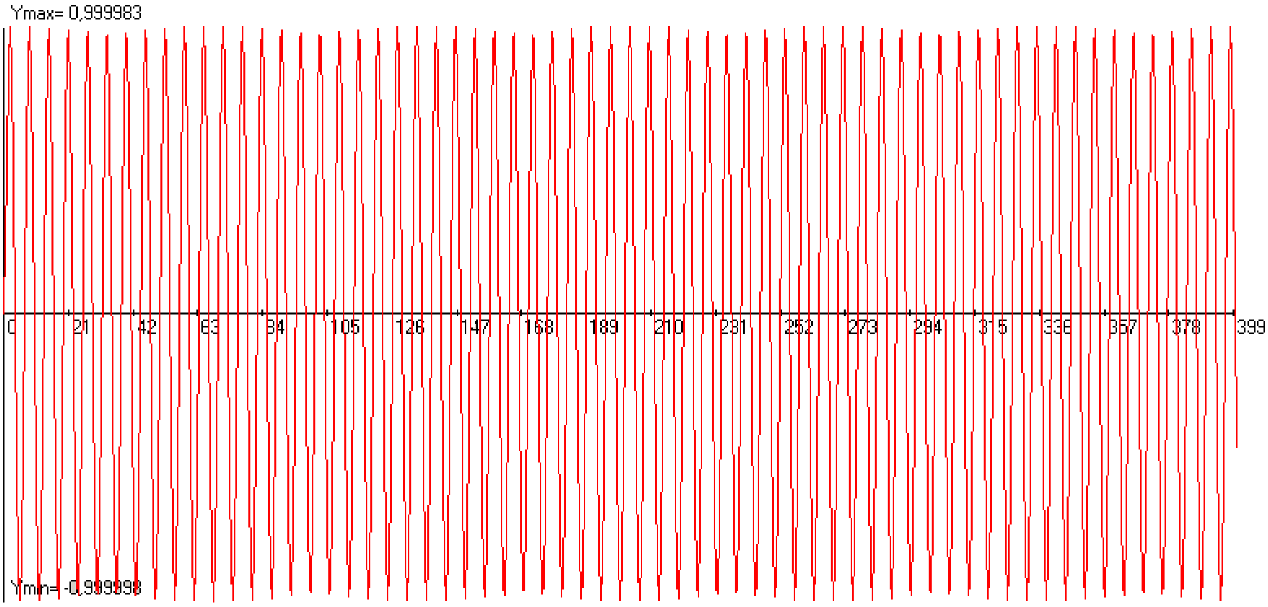



Рис. 6

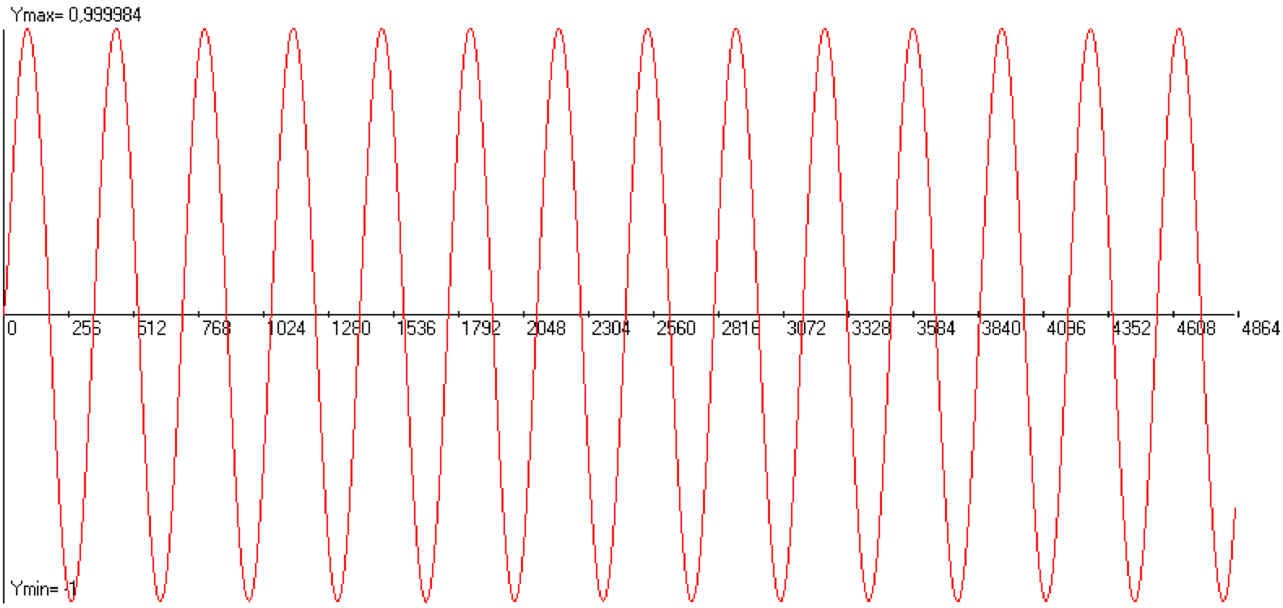



Рис. 7

Тепер, якщо збільшити інтервал до 4850 одиниць, отримаємо знову синусоїду досить доброї якості (Рис. 7). Але, якщо придивитися уважніше, то можна бачити, що період отриманого графіка дивний. Проте не потрібно відразу звинувачувати програму, даний графік швидше норма, ніж помилка. Справа в тому, що із збільшенням відрізка побудови [*X1, X2*] збільшується $dx = \frac{X2 - X1}{w}$ і коли *dx* стає набагато більшим, ніж період функції, то при побудові отримується не основна синусоїда, а її субгармоніка. При подальшому збільшенні відрізка можна отримати менше трьох періодів і знову побачимо синусоїду, але з іншим періодом. Дізнатися про таку підміну можна, просто змінивши розміри вікна – якщо зображення не змінюється, то отримано те, що потрібно.

Отже зважаючи на сказане, можна зазначити, що в програмі побудови графіків функцій має потрібно передбачити зміну кроку *dx* залежно від вибраних параметрів вікна та відрізка побудови, оскільки за програмою з постійним кроком коректно відображати швидкозмінювані функції не з0авжди вдається.

## Література

1. Бевз Г.П., Алгебра: Пробний підручник для 7-9 кл. серед. шк.. – 3-тє вид. – К.: Освіта, 2001. – 303 с.
2. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф., Математика з комп'ютером. – Київ.: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2009.- 282с.
3. Лук'янова В.В. Комп'ютерний аналіз даних: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2003. – 344 с.
4. Погорєлов О.В. Геометрія: Підручник для 7-11 класів середньої школи. – К.: Радянська школа, 1992. – 352 с.