УДК.531.18

Авдонін К. В., Шут А.М.,
Київський національний університет технологій та дизайну

НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

У роботі розглядаються неінерціальні системи відліку при довільному обертальному русі системи координат. Запропонований шлях отримання співвідношень для сил інерції та метод знаходження параметрів квазіінерціальних систем відліку.

Ключові слова. *Неінерціальність, система, відлік, обертання, сила.*

Вступ. У більшості підручників з фізики і теоретичної механіки, наприклад: в роботах [1], [2] та інших, при викладанні розділу «Неінерціальні системи відліку» розглядається частинний випадок обертального руху системи координат неінерціальної системи відліку – обертання навколо однієї осі Z. Але складний рух деталей реальних механізмів не обмежується таким простим випадком. Тому, викладений у даній роботі розгляд сил інерції при складному обертальному русі, можна використати для вдосконалення і доповнення учбових посібників, що буде сприяти підвищенню якості підготовки фахівців інженерно-технічного напряму.

Постановка задачі. Для опису обертального руху системи координат неінерціальної системи відліку будемо користаємось трьома кутами Ейлера, позначаючи їх наступним чином: ψ - кут власного обертання; φ - кут прецесії; ϑ - кут нутації, які зображені на рисунку 1.

Координати матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку K будемо позначати через: (x_1, x_2, x_3); координати відносно рухомої системи K' через: (x'_1, x'_2, x'_3). Зв'язок між координатами, відносно різних систем відліку, можна представити у вигляді:

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x'_j \quad ; \tag{1}$$

$$x'_j = \sum_{k=1}^{3} c_{kj} x_k \quad , \tag{2}$$

де компоненти матриці c_{ij} залежать від кутів Ейлера наступним чином:

$c_{11} = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi$; $c_{12} = \sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi$;

$c_{13} = \sin\vartheta\sin\varphi$; $c_{21} = \cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi$;

$c_{22} = \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi$; $c_{23} = -\sin\vartheta\cos\varphi$;

$c_{31} = -\sin\psi\sin\varphi$; $c_{32} = \cos\psi\sin\vartheta$; $c_{33} = \cos\vartheta$. (3)

Метою роботи є отримання співвідношень для сил інерції та метод знаходження параметрів квазіінерціальних систем відліку.

Сили інерції у випадку довільного обертання системи координат. Для знаходження проекцій миттєвої кутової швидкості обертання системи K' на вісі координат системи K треба покласти: $x_i' = const$, тобто, вважати матеріальну точку нерухомою відносно системи K' . Тоді, беручи першу похідну по часу від координат (1), знаходимо проекції миттєвої швидкості руху матеріальної точки на вісі системи K :

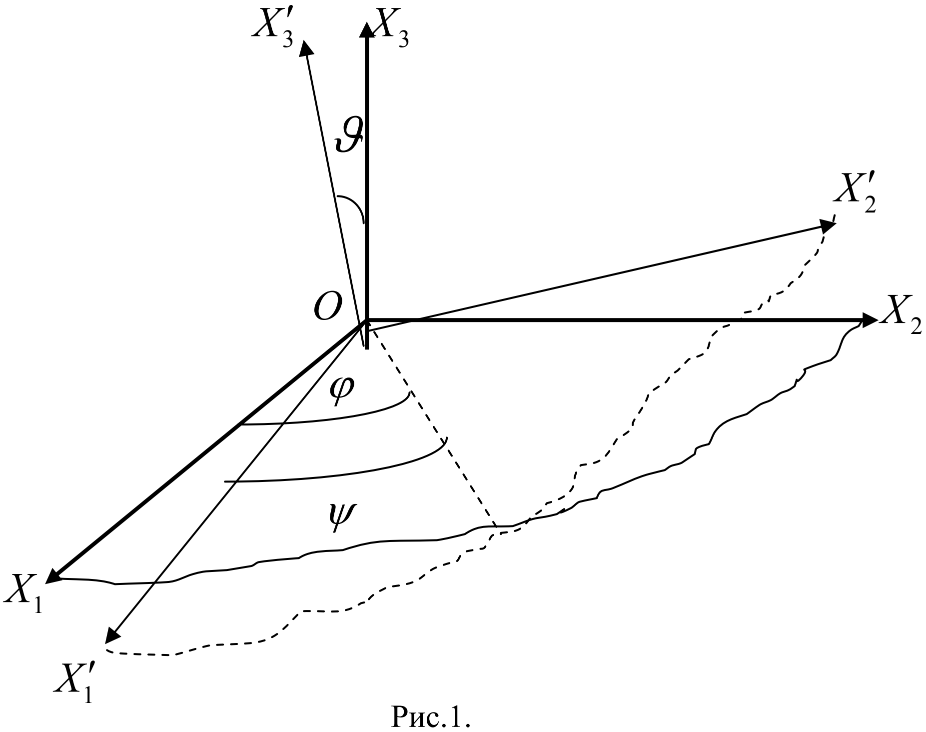

Рис.1.

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3} \dot{c}_{ij} x_j' \quad . \tag{4}$$

Підставляючи зворотні перетворення координат (2) у рівність (4) та перегруповуючи доданки маємо:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \dot{c}_{ij} c_{kj} x_k = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \dot{c}_{ij} c_{kj}\right) x_k \quad . \tag{5}$$

Запровадимо позначення:

$$\Omega_{ik} = \sum_{j=1}^{3} \dot{c}_{ij} c_{kj} \quad , \quad \upsilon_i = \dot{x}_i \, ,$$

тоді, вираз (5) набуває вигляду:

$$\upsilon_i = \sum_{k=1}^{3} \Omega_{ik} x_k \quad . \tag{6}$$

Отримана сукупність величин Ω_{ik} - це тензор кутової швидкості, антисиметричний тензор другого рангу. Використовуючи вирази (3) обчислюємо компоненти тензора кутової швидкості:

$$\Omega_{11}=\Omega_{22}=\Omega_{33}=0\ ;\quad \Omega_{21}=-\Omega_{12}=-\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\vartheta\ ;$$

$$\Omega_{13}=-\Omega_{31}=\dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta+\dot{\vartheta}\sin\psi\ ;$$

$$\Omega_{32}=-\Omega_{23}=-\dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta+\dot{\vartheta}\cos\psi\ .$$

Якщо ввести позначення:

$$\omega_1=-\dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta+\dot{\vartheta}\cos\psi\ ;$$

$$\omega_2=\dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta+\dot{\vartheta}\sin\psi\ ;\quad \omega_3=-\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\vartheta\ , \tag{7}$$

то антисиметричний тензор Ω_{ik} буде еквівалентний вектору миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$, проекції якого на вісі координат системи K визначаються співвідношеннями (7), і записати вектор миттєвої швидкості $\vec{\upsilon}$ у вигляді векторного добутку миттєвої кутової швидкості і радіус-вектора матеріальної точки, нерухомої відносно системи K':

$$\vec{\upsilon}=\left[\vec{\omega}\,;\vec{r}\,\right]\ . \tag{8}$$

Вважаючи, що матеріальна точка рухається відносно системи K' візьмемо другу похідну по часу від перетворення координат (1):

$$\ddot{x}_i=\sum_{j=1}^{3}\left(\ddot{c}_{ij}x'_j+2\dot{c}_{ij}\dot{x}'_j+c_{ij}\ddot{x}'_j\right)\ ; \tag{9}$$

Друга похідна по часу від координати є проекцією прискорення на відповідну вісь координат, тому ліва частина виразу (9) це проекції вектора прискорення $\vec{a}$ руху точки, відносно системи K, на вісі координат системи K, тобто: $\ddot{x}_i=a_i$.

Оскільки проекції векторів, при переході до іншої системи координат перетворюються так само як і координати, то проекції вектора прискорення $\vec{a}$ на вісі координат системи K', згідно виразу (2), дорівнюють:

$$a'_k=\sum_{i=1}^{3}c_{ik}a_i\ ; \tag{10}$$

Підставляючи проекції (9) у перетворення (10) маємо:

$$a'_k=\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}c_{ij}c_{ik}\right)\ddot{x}_j+\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\dot{c}_{ij}c_{ik}\right)\dot{x}_j+\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\ddot{c}_{ij}c_{ik}\right)x_j\ . \tag{11}$$

Використовуючи вирази (3), (5) і (7) знаходимо:

$$\sum_{i=1}^{3}c_{ij}c_{ik}=\delta_{jk}\ ; \tag{12}$$

де δ_{jk} - символ Кронекера,

$$\sum_{i=1}^{3}\dot{c}_{ij}c_{ik}=\Omega_{jk}\left(1-\delta_{jk}\right)\ ; \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \ddot{c}_{ij} c_{ik} = (-1)^{\delta_{jk}} \omega_j \omega_k + \dot{\Omega}_{jk} \left(1 - \delta_{jk}\right) \quad . \tag{14}$$

Підставляючи співвідношення (12), (13) та (14) у перетворення проекцій (11) одержуємо проекції вектора прискорення $\vec{a}$ на вісі координат системи K'. Підставляючи знайдені проекції у розклад (15) вектора $\vec{a}$ по одиничним базисним векторам системи K':

$$\vec{a} = \vec{i}' a_1' + \vec{j}' a_2' + \vec{k}' a_3' \quad , \tag{15}$$

одержимо:

$$\vec{a} = \vec{w} - 2\left[\vec{\upsilon}' ; \vec{\omega}\right] - \omega^2 \vec{r}' - \left[\vec{r}' ; \vec{\varepsilon}\right] + \vec{\omega}\left(\vec{\omega}\vec{r}'\right) \quad ; \tag{16}$$

де: $\vec{r}' = \vec{i}' x_1' + \vec{j}' x_2' + \vec{k}' x_3'$; $\vec{\upsilon}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt}$; $\vec{w} = \dfrac{d\vec{\upsilon}'}{dt}$ – радіус-вектор, швидкість та прискорення матеріальної точки відносно системи K', $\vec{\omega} = \vec{i}'\omega_1 + \vec{j}'\omega_2 + \vec{k}'\omega_3$; $\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ – вектори, аналогічні кутовій швидкості і кутовому прискоренню.

Помножуючи обидві частини рівності (16) на масу m маємо:

$$m\vec{w} = m\vec{a} + 2m\left[\vec{\upsilon}' ; \vec{\omega}\right] + m\omega^2 \vec{r}' + m\left[\vec{r}' ; \vec{\varepsilon}\right] - m\vec{\omega}\left(\vec{\omega}\vec{r}'\right) \quad . \tag{17}$$

Запровадимо такі позначення для сил:

$\vec{F}'_{рівн} = m\vec{w}$ – рівнодійна сила, відносно системи K';

$\vec{F}_{рівн} = m\vec{a}$ – рівнодійна сила, відносно системи K;

$\vec{F}_C = 2m\left[\vec{\upsilon}' ; \vec{\omega}\right]$ – сила Коріолісу;

$\vec{F}_T = m\left[\vec{r}' ; \vec{\varepsilon}\right]$ – тангенціальна сила інерції;

$\vec{F}_V = m\omega^2 \vec{r}'$ – загальна відцентрова сила;

$\vec{F}_S = -m\vec{\omega}\left(\vec{\omega}\vec{r}'\right)$ – сила зміщення,

тоді рівнодійна сила, відносно рухомої системи K', дорівнює сумі сил:

$$\vec{F}'_{рівн} = \vec{F}_{рівн} + \vec{F}_C + \vec{F}_V + \vec{F}_T + \vec{F}_S \quad . \tag{19}$$

Таким чином, у випадку довільного обертання системи координат, вирази для сил Коріолісу та тангенціальної сили інерції співпадають з їх визначенням у випадку одновимірного обертання, а замість відцентрової сили запропоновано розглядати дві нові сили: загальну відцентрову силу і силу зміщення.

Для випадку одновимірного обертання навколо осі Z : $\omega_x = \omega_y = 0$; $\omega = \left|\omega_z\right|$, тоді сума загальної відцентрової сили і сили зміщення дорівнює:

$$\vec{F}_V + \vec{F}_S = \omega^2 \vec{r}' - \omega_z^2 \vec{k}' = \omega^2 \left(\vec{i}' x' + \vec{j}' y'\right) \quad .$$

Таким чином, при обертанні тільки навколо осі Z , сума загальної відцентрової сили і сили зміщення дорівнює звичайній відцентровій силі.

Квазіінерціальні системи відліку. Систему відліку будемо називати квазіінерціальною, якщо відносно неї сума всіх сил інерції дорівнює нулю. Звідси випливає, що прискорення руху відносно систем K і K' будуть рівними: $\vec{w} = \vec{a}$. Якщо вважати рівняння руху, швидкість та прискорення матеріальної точки відносно системи K заданими, то швидкість і рівняння руху точки відносно системи K' (для квазіінерціальної системи відліку) можна знайти наступним чином:

$$\upsilon_i'(t) = \sum_{j=1}^{3} \left\{ c_{ji}^{(0)} \upsilon_{0j} + \int_0^t c_{ji}(t_1) a_j(t_1) dt_1 \right\} \quad ; \tag{20}$$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \left\{ c_{ji}^{(0)} \left(x_{0j} + \upsilon_{0j} t \right) + \int_0^t \int_0^\tau c_{ji}(t_1) a_j(t_1) dt_1 d\tau \right\} \quad , \tag{21}$$

тоді, як випливає з рівності (17), для знаходження залежності кутів Ейлера від часу маємо інтегро-диференціальне рівняння:

$$2\left[\vec{\upsilon}' ; \vec{\omega}\right] + \omega^2 \vec{r}' + \left[\vec{r}' ; \vec{\varepsilon}\right] - \vec{\omega}\left(\vec{\omega}\vec{r}'\right) = 0 \quad . \tag{22}$$

Помножуючи рівняння (22) скалярно на вектор $\vec{r}'$ одержимо рівняння, яке не містить похідних по часу від проекцій кутової швидкості:

$$2\vec{r}'\left[\vec{\upsilon}' ; \vec{\omega}\right] + \omega^2 \left(r'\right)^2 - \left(\vec{\omega}\vec{r}'\right)^2 = 0 \quad . \tag{23}$$

З рівняння (23) випливає, що у квазіінерціальній системі відліку незалежними будуть тільки дві проекції кутової швидкості, а третя проекція визначається співвідношенням (23).

Розглянемо найпростіший, частинний випадок квазіінерціальної системи відліку, для якого:

$$\vec{a} = \vec{w} = 0 \, ; \; x_1' = A(t+b) ; \; x_2' = B(t+b) ; \; x_3' = C(t+b) ,$$

і будемо шукати проекції кутових швидкостей у вигляді:

$$\omega_i = \frac{D_i}{t+b} \quad , \quad \text{де : } D_i = const \; ; \; b = const \, . \tag{24}$$

У цьому випадку існування дійсних розв’язків рівняння (23) можливе тільки при виконанні умови:

$$\left[\vec{\omega} ; \vec{r}'\right] = 0 \quad . \tag{25}$$

З співвідношень (23), (24), (25) одержуємо проекції кутової швидкості:

$$\omega_1 = \frac{\mu}{t+b} \; ; \; \omega_2 = \frac{\mu B}{A(t+b)} \; ; \; \omega_3 = \frac{\mu C}{A(t+b)} \, , \text{ де: } \mu = const \quad . \tag{26}$$

Безпосередньою підстановкою можна перевірити, що розв’язки (26) задовольняють рівнянню (22) для кутів Ейлера.

Висновки. У роботі був показаний шлях отримання виразів, які визначають сили інерції, що діють на матеріальну точку при довільному обертанні системи координат неінерціальної системи відліку, який можна використовувати у посібниках та підручниках з курсу фізики та теоретичної механіки.

Співвідношення (16) дозволяє знаходити поле прискорень руху точок деталей складних механізмів, яке дає можливість проводити аналіз внутрішніх механічних напруг, що виникають під час руху.

Отримані інтегро-диференціальні рівняння (22), які для квазіінерціальних систем відліку визначають залежність кутів Ейлера від часу та наведений приклад їх частинного розв'язку у випадку рівномірного руху матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку.

Список використаної літератури

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. – М.: Наука, 1979. – Т. 1 Механика, 520 с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – Т. 2 Динамика. – М.: Наука 1983, 364с.
3. L.C.B. Crispino, A. Higuchi, G.E.A. Matsas "The Unruh effect and its applications" Reviews of Modern Physics. 2008. Vol.80. No.3. P.787-838.
4. R. Mueller Decay of accelerated particles, Phys. Rev. D 56, 953—960 (1997).
5. D. A. T. Vanzella and G. E. A. Matsas, Decay of accelerated protons and the existence of the Fulling-Davies-Unruh effect, Phys. Rev. Lett. 87, 151301 (2001).
6. H. Suzuki and K. Yamada, Analytic Evaluation of the Decay Rate for Accelerated Proton, Phys. Rev. D 67, 065002 (2003).

Авдонин К.В., Шут А.Н. Неинерциальные системы отсчета.

В работе рассмотрены неинерциальные системы отсчета при произвольном вращательном движении, относительно неподвижной точки. Предложен метод получения выражений, определяющих силы инерции, который можно использовать в пособиях и учебниках по физике и теоретической механике. Показано, что в случае произвольного вращения, вместо центробежной силы необходимо рассматривать две силы инерции, которые были названы общей центробежной силой и силой смещения.

Показано, что в случае одномерного вращательного движения сумма общей центробежной силы и силы инерции смещения равна обычной центробежной силе. Найденные соотношения для сил инерции позволяют построить поле ускорений движения точек сложных механизмов и провести анализ внутренних напряжений, возникающих в процессе работы.

Получены интегро-дифференциальные уравнения для квазиинерциальных систем отсчета, позволяющие находить зависимость углов Эйлера от времени, найдено их частное решение.

Ключевые слова. *Неинерциальность, система, отсчет, вращение, сила..*

Avdonin K., Shut A. Non-inertial reference system.

In this paper we consider Non-inertial reference system with any rotation of coordinate system. We propose the ways to obtain relations for the forces of inertia and the method of parameter non-inetial reference systems.

Keywords. *Non-inertial reference system, rotation, force.*