який багатий внесок і різноманітності внесла в цю область неевклідова геометрія. Крім того, бачимо, що інші ідеї і результати, які мають значення для евклідової геометрії, виникають і розвиваються на грунті неевклідової геометрії. Такими є, наприклад, ті різні геометричні відображення, пов'язані з поняттям про вектор, різні форми операції їх додавання і випливаючи з них наслідки.

Таким чином, сам історичний екскурс в геометрію Лобачевського свідчить про те, що неевклідова геометрія завдяки різнобічності своїх образів, з одного боку, і тісному зв'язку між ними – з другого, є інколи більш простою порівняно з геометрією Евкліда, а іноді більш прямий і легкий шлях до геометрії Евкліда проходить через неевклідові простори.

У зв'язку підвищення рівня викладання математики, особливо в школах з її поглибленим вивченням, необхідність знайомства як майбутніх вчителів, так і школярів з вище викладеними питаннями з історії розвитку геометрії очевидна.

В програмі факультативного курсу з геометрії для вищезгаданих шкіл є питання, яке стосується неевклідової геометрії, зокрема, гіперболічної геометрії. У зв'язку з цим робиться наголос на різних аксіоматиках, їх відмінностях між собою.

При вивченні геометрії у педагогічних університетах природно висвітлення історії розвитку аксіоматичних теорій, вклад в їх створення різних вчених. Досить важливо підкреслити роль школи М.І.Кованцова – видатного українського геометра у розвиток питань про геометрії як теорії інваріантів неперервних груп перетворень.

Досить велика увага при викладанні геометрії в педагогічних вузах відводиться вивченню аксіоматичного методу та побудові аксіоматичних теорій. У значній мірі саме математичне осмислення теорії М.Лобачевського збудило до життя той аксіоматичний напрямок, яким зараз пройняті багато галузей математики. При цьому виникли такі важливі ідеї сучасної математики, як реалізація аксіоматики або її моделювання всередині іншої математичної системи, ізоморфізм математичних систем та інші. Тому вірними є слова видатного вітчизняного математика П.С.Александрова, який стверджував, що Лобачевський є також одним з фундаторів сучасної абстрактної течії в математиці. Хоча, потрібно сказати, що самого М.Лобачевського при вивченні ним нового неевклідового простору більш цікавила не аксіоматична точка зору, а питання про те, якими є властивості нашого фізичного, реального простору. Крім того, було б значною прогалиною не відмітити велике значення застосування геометрії Лобачевського в теорії функцій комплексної змінної, адже у 80-х роках Ф.Клейн і А.Пуанкаре показали, що геометрія Лобачевського може бути застосованою до розв'язування найбільш глибоких питань теорії функцій, а саме: до побудови так званих автоморфних функцій, яка є в деякому розумінні однією з вершин всієї теорії функцій комплексної змінної. Отже, саме та робота А.Пуанкаре, яка прославила французьку науку другої половини XIX століття, мала в основі відкриття М.Лобачевського.

Література:

1. Александров П.С. Что такое неевклидовая геометрия. – М.: Гостехиздат, 1943. – 56 с.
2. Лобачевский Н.И. Избранные труды по геометрии. – М.: Изд-во Акад. Наук СССР, 1956. – 343 с.
3. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. – Т.1. – М.: Гостехиздат, 1946. – 272 с.
4. Сенкевич А.К. Математика. Воспитание через предмет. – Куйбышев, 1965. –196 с.
5. Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидову геометрию. – М.: Просвещение, 1988. – 123, [2] с.
6. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к неевклидовой (вокруг абсолюта): – М.: Просвещение, 1979. – 158 с.

Розуменко А.О.
Сумський державний педагогічний університет ім. А.С.Макаренко

Зміст семінарсько-практичних занять з історії математики у вищих навчальних педагогічних закладах.

Курс історії математики має на меті: формування наукового світогляду студентів; розширення їх історико-математичного кругозору; надання майбутнім вчителям історичних знань, необхідних їм для правильного розв'язування методичних і методологічних питань, які виникають в процесі викладання математики.

Як бачимо, мета курсу є глобальною. Історія математики містить цікавий фактичний матеріал, широкі можливості його викладу. Але на вивчення такого змістовного курсу передбачено „аж" 30 годин, з них 20 годин – лекції, 10 годин – семінарські заняття. Перед викладачем стає проблема вибору змісту і методики викладання курсу історії математики. На наш погляд, проведення традиційних семінарських занять, коли студенти заздалегідь готують виступи по окремих питаннях, а потім обговорюють їх на занятті, є недостатньо ефективним. З метою підвищення пізнавальної активності студентів, їх зацікавленості, ми пропонуємо поєднати такі форми, як семінарське заняття і практичне заняття. Обгрунтування доцільності такого поєднання є метою нашої статті. Тобто поруч з обговоренням теоретичних питань пропонувати задачі для розв'язування. Такі заняття ми називаємо семінарсько-практичними. Зміст семінарсько-практичних занять розроблено нами з урахуванням таких вимог:

1) відповідність програмі педагогічних вузів з історії математики;
2) доступність запропонованих математичних завдань (їх формулювання та ідеї розв'язання);
3) взаємозв'язок з навчальним матеріалом шкільного курсу математики.

Теми занять і характеристика діяльності студентів подано в таблиці 1.

Таблиця 1.

№ п/п	Тема заняття	Кількість годин	Форма заняття	Діяльність студентів
1	Задачі стародавнього Єгипту	2	Практичне	Розв'язування стародавніх задач з елементарної математики сучасними методами
2-3	Задачі стародавньої Греції. Три знамениті задачі давнини	4	Семінарсько - практичне	Доповіді студентів, розв'язування запропонованих завдань (задачі на побудову, задачі на доведення)
4-5	Деякі проблеми сучасної математики	4	Семінарське	Доповіді студентів

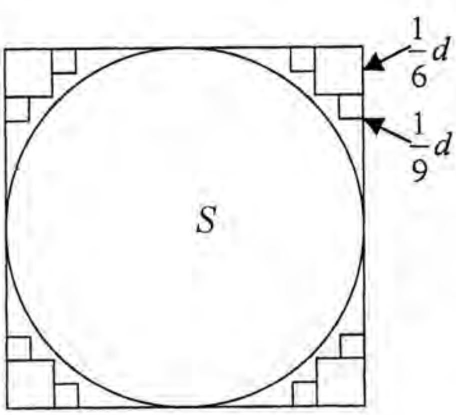
На занятті 1 „Задачі стародавнього Єгипту" студентам пропонується дати загальну характеристику країни, розкрити специфічні особливості нумерації та рахунку, проаналізувати зародження алгебраїчних методів та рівень розвитку геометричних знань, зробити висновок про історичну роль єгипетської математики. Після обговорення цих питань студентам пропонуються стародавні задачі. Кожну задачу необхідно прокоментувати з точки зору рівня розвитку єгипетської математики і сучасного шкільного курсу математики (відповідна тема, розділ, клас). Так, наприклад, студентам пропонується задача: єгиптяни, замінюючи площу круга площею рівновеликого квадрата, брали за його сторону $\frac{8}{9}$ діаметра круга. Яке наближення числа π відповідає цьому правилу?

Після повторення відомих фактів (площа круга, площа квадрата, рівновеликі фігури) отримують відповідь $\pi \approx 3{,}1605$. На наш погляд, необхідно зауважити, що для розуміння того, яким чином вчені стародавніх часів дістали той чи інший результат, треба поставити себе на їх місце, тобто спробувати розв'язати запропоновану задачу тільки на основі знань і прийомів обчислення того часу. Саме так роблять дослідники стародавніх текстів, але розв'язання, що вони знаходять не обов'язково „ті самі". Часто для однієї задачі пропонується декілька можливих варіантів розв'язання.

Щодо формули площі круга, то правдоподібною є гіпотеза дослідника А.Е.Раїка, яка полягає в тому, що площа круга діаметра d порівнюється з площею описаного навколо нього квадрата, у якого вирізають квадрати із сторонами $\frac{1}{6}d$ і $\frac{1}{9}d$ (мал. 1).

В таких позначеннях обчислення будуть такі:

$$S \approx d^2 - 4\left(\frac{1}{6}d\right)^2 = d^2\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}d^2$$



Мал. 1

$$S \approx \left(1-\frac{1}{9}\right)d^2 - 8\left(\frac{1}{9}d\right)^2 = \left(1-\frac{1}{9}\right)d^2 - \frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}d^2 =$$

$$= \left(1-\frac{1}{9}\right)d^2 - \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)d^2 = \left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)d^2 =$$

$$= \left(1-\frac{1}{9}\right)^2 d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

В підтримку цієї гіпотези свідчать аналогічні обчислення в одній із задач Московського папірусу, де пропонують обчислити $\left(1-\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)$.

Ці зауваження сприяють формуванню наукового світогляду та критичного мислення студентів, дозволяють майбутнім учителям переконатися в можливості використовування історичних задач на уроках з різних тем шкільного курсу математики.

На занятті 2-3 „Задачі стародавньої Греції. Три знамениті задачі давнини" розглядають такі питання:

1. Геометрична алгебра.
2. Задача про квадратуру круга.
3. Задача про трисекцію кута.
4. Задача про подвоєння куба.

При обговоренні першого питання акцентується увага на причини виникнення геометричної алгебри, об'єкти її вивчення. Пояснюється „монополія" лінійки та циркуля при розв'язуванні задач на побудову, формулюються постулати Евкліда, які можна розглядати як аксіоматичне обгрунтування використання названих інструментів. Студентам пропонується сформулювати і розв'язати основні задачі на побудову шкільного курсу геометрії, а також розв'язати так звані параболічну, гіперболічну та еліптичну задачі геометричної алгебри.

Три знамениті задачі давнини розглядаються за такою схемою:

1. Історія виникнення задачі.
2. Формулювання задачі.
3. Обгрунтування неможливості розв'язання задачі за допомогою циркуля і лінійки.
4. Розв'язання задачі штучними методами.

З метою активізації пізнавальної діяльності студентів в процесі обговорення цих питань студентам пропонуються завдання типу: обгрунтуйте висновок, виконайте побудову, розв'яжіть задачу. Наведемо фрагмент змісту такого заняття при аналізі задачі про квадратуру круга.

Формулювання задачі: побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.

Найбільш давня і популярна задача серед знаменитих математичних задач. Вчені різних часів, відшукуючи її розв'язання, збагатили математику цілою низкою видатних відкриттів. Ймовірно, що задача була відома за дві тисячі років до нашої ери в Стародавньому Єгипті і Вавилоні. Але перше пряме посилання на неї відносять до V століття до н.е. Давньогрецький історик Плутарх розповідає про те, що філософ Анаксагор, перебуваючи у в'язниці, намагався квадрувати круг. Про популярність цієї задачі свідчить, зокрема, той факт, що відомий грецький комедіограф V-IV ст. до н.е. Аристофан згадує про неї в одному із своїх творів:

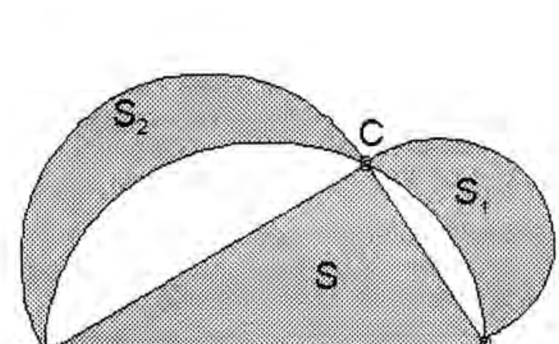
„…Візьму лінійку, проведу пряму я,
І раптом круг квадратом обернеться." („Птахи").

Великий внесок в розв'язання задачі про квадратуру круга зробив Гіппократ Хіоський (друга половина V ст. до н.е.), який зумів „квадрувати" ряд фігур, відомих під назвою „*гіппократові серпки*".

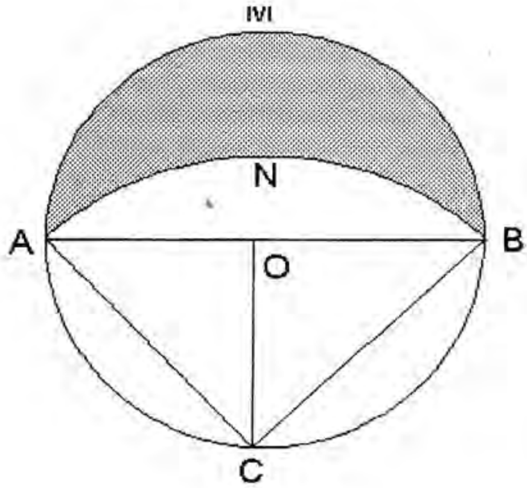
Задача 1. Довести, що сума площ серпків Гіппократа, що лежать між дугою півкруга, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, як на діаметрі, і дугами півкругів, побудованих на катетах цього прямокутного трикутника, як на діаметрах, дорівнюють площі заданого трикутника (мал. 2).

Задача 2. Довести, що серпок, який утворився відкиданням від півкруга *AMBA* сегмента *ANBA*, радіус якого дорівнює стороні *AC* або *CB* рівнобедреного трикутника, вписаного у півколо, а хордою - діаметр даного круга, є рівновеликим трикутнику *ACB* (мал. 3).

Гіппократ знайшов три типи квадровних серпків. Лише в 1840 р. було знайдено ще два типи квадровних серпків. Вже в XX ст. радянські математики М.Г.Чеботарьов і А.В.Дороднов, користуючись сучасними методами, вивели необхідну і достатню умову квадрованості серпків, утворених двома коловими дугами. Ця умова має вигляд: $\alpha : \sin^2\frac{\alpha}{2} = \beta : \sin^2\frac{\beta}{2}$, де α і β - радіанні міри зовнішньої і внутрішньої дуг відповідно.



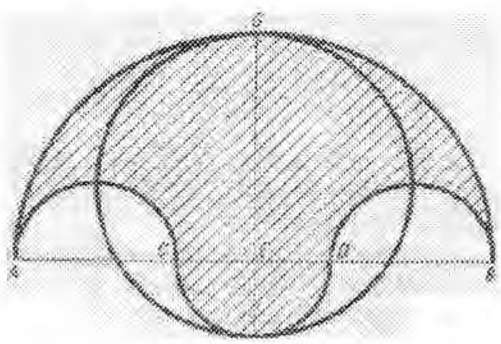
Мал. 2



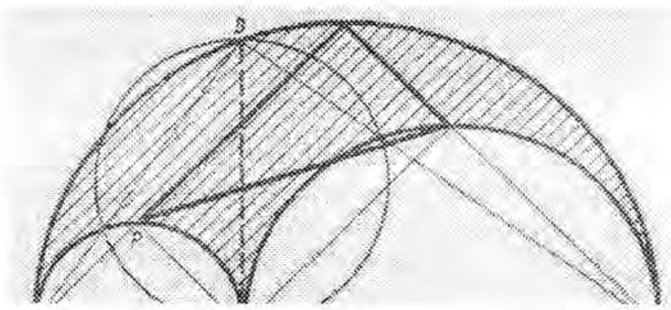
Мал. 3

Зокрема, якщо α і β сумірні, то квадровними будуть лише ті п'ять типів серпків, про які згадувалось вище.

Задача 3. (*салiон Архiмеда*). Довести, що площа заштрихованої фігури (*салiон* - бочонок для солі) (мал. 4) дорівнює площі круга.



Мал. 4



Мал. 5

Задача 4. $BD \perp AC$ (мал. 5). На AD і DC як на діаметрах, проведено два півкола. Довести, що площа утвореної фігури - *арбелона*, або *„ножа шевця"*, рівновелика площі круга, побудованого на BD, як на діаметрі.

В задачах 1, 2 мова йде про серпки Гіппократа, рівновеликі деякому трикутнику, від якого можна легко перейти до рівновеликого квадрата. В задачах 3, 4 серпки рівновеликі деякому кругу. Виникає питання: чи не можна від площі даного круга перейти до рівновеликих серпків, а від них до рівновеликого квадрату?

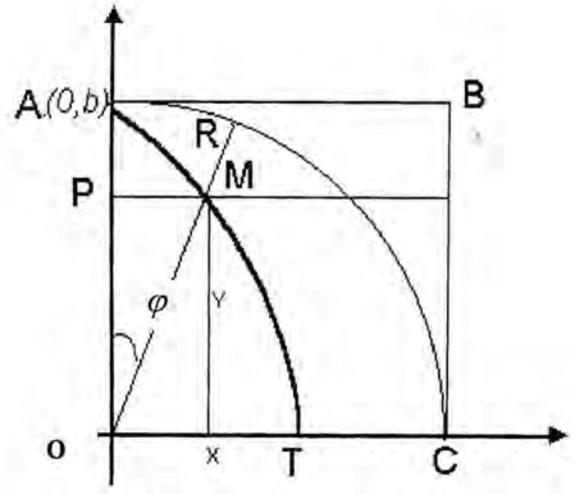
Якщо прийняти радіус даного кола за одиницю, то його площа, як нам тепер відомо, дорівнює π. Отже, квадратура круга зводиться до побудови квадрата, із стороною $\sqrt{\pi}$, якщо дано одиничний відрізок. Іншими словами, питання про можливість розв'язати проблему квадратури круга циркулем і лінійкою - це питання про побудовність числа $\sqrt{\pi}$, виходячи з поля раціональних чисел. Оскільки побудовність числа $\sqrt{\pi}$ рівносильна побудовності числа π, то вся проблема зводиться до природи числа π.

Ми знаємо тепер, що π - трансцендентне число, тобто не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння з раціональними коефіцієнтами. Це і означає, що воно не може бути побудоване циркулем і лінійкою, виходячи з поля раціональних чисел, тобто задача квадратури круга не може бути розв'язана циркулем і лінійкою.

Факт трансцендентності числа π був встановлений лише в 1882 році німецьким математиком Фердинандтом Ліндеманом (1852-1939). Цим завершився багатовіковий період спроб розв'язати проблему квадратури круга, а також численні дослідження арифметичної природи числа π.

Але задача про квадратуру круга може бути розв'язана, якщо розширити засоби побудов. Це було відомо ще стародавнім грекам.

При розв'язуванні задач штучними методами особливу увагу доцільно приділити цікавим кривим. Ми пропонуємо розглянути властивості квадратриси, цисоїди Діоклеса, конхоїди Нікомеда, спіралі Архімеда.



Мал. 6

Нехай у квадраті $OABC$ із стороною b (мал. 6) сторона OA рівномірно обертається навколо точки O, як центра, за годинниковою стрілкою до положення OC і проходить цей шлях за t одиниць часу. Одночасно пряма AB, перпендикулярна до OA, рівномірно переміщується від положення AB до положення OC (залишаючись весь час паралельною собі) і проходить цей шлях за той самий час. Множина точок перетину в кожний момент часу рухомого відрізка OA і рухомої прямої AB утворюють криву лінію - *квадратрису*.

З побудови квадратриси випливає її основна властивість: для будь-яких точок квадратриси кути, на які обертається рухомий промінь, пропорційні відстаням, що їх проходить за відповідний час рухома пряма.

Для виведення рівняння цієї кривої введемо декартову прямокутну систему координат так, щоб її початок збігся з точкою O, а вісь абсцис пішла по стороні OC. Якщо весь час, протягом якого рухомий радіус повернеться на кут $\frac{\pi}{2}$, а рухома сторона пройде відстань $OA=b$, прийняти за одиницю, то за час $t,\left(0\le t\le 1\right)$ радіус повернеться на кут $\varphi=\frac{\pi}{2}t$, а сторона переміститься на віддаль $AP=bt$. Тому координати відповідної точки M квадратриси дорівнюють:

$$y=b-bt=b\left(1-t\right),\quad x=y\,ctg\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=b\left(1-t\right)ctg\frac{\pi}{2}\left(1-t\right)$$

Виключаючи з цих рівностей параметр t, дістанемо рівняння квадратриси:

$$x=y\,ctg\frac{\pi}{2b}y.$$

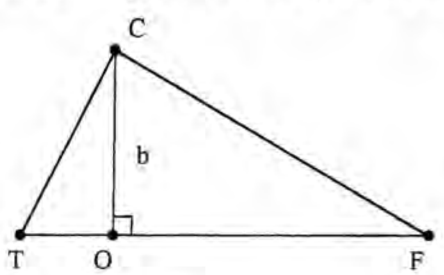
Ми бачимо, що квадратриса є трансцендентною кривою, вона була першою трансцендентною кривою в історії математики. Квадратрису можна досить легко побудувати механічно, шляхом фактичного поєднання прямолінійного і обертового рухів, або скористатися можливостями комп'ютера.

Діностpат здійснив квадратуру круга за допомогою квадратриси. А саме, він використав відрізок OT, що його відтинає квадратриса на вісі абсцис. Використовуючи методи математичного аналізу, ми тепер легко можемо обчислити абсцису точки T. На підставі відомої границі $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{tgz}=1$ дістанемо:

$$OT=\lim_{y\to 0}\frac{y}{tg\frac{\pi}{2b}y}=\frac{2b}{\pi},\ \text{де } b=OA.$$

Отже, маючи відрізок OT, можна побудувати циркулем і лінійкою відрізок довжиною π, а значить і квадрат із стороною $\sqrt{\pi}$.

Діностpат прийшов до того ж результату, але за допомогою складних міркувань (які в неявній формі включали зроблений нами граничний перехід).



Мал. 7

ARC - чверть кола, розміщеного в квадранті AOC, AMT - квадратриса цього квадранта (мал. 6). За властивістю квадратриси:

$$ARC:OC=OC:OT,\quad \mathrm{ARC}=\frac{OC^2}{OT}=\frac{L}{4},\quad \text{де } L \text{ -}$$

довжина кола.

ARC побудуємо як четвертий пропорційний відрізок (мал. 7):

$OF = ARC = \frac{2\pi b}{4}, (R = b)$; якщо радіус прийняти за 1, то $OF = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, $2OF = \pi$. Сторону шуканого квадрата $\sqrt{\pi}$ можна побудувати як середнє геометричне відрізків π і b.

На заняттях 4-5 „Деякі проблеми сучасної математики" студентам пропонуються такі питання:

1. Перша проблема Гільберта.
2. Проблема Ферма.

При викладенні змісту цих проблем особливий акцент доцільно зробити на можливість обговорення їх з учнями старшої школи (на факультативних чи гурткових заняттях з математики) з метою формування їх наукового світогляду.

Досвід нашої роботи показує, що організація активної діяльності, демонстрація можливості і доцільності використання елементів історизму при викладенні математики в школі значно підвищує позитивну мотивацію навчальної діяльності студентів при вивченні курсу історії математики.

Література:

1. Конфорович А.Г. Визначні математичні задачі. - Київ, Рад. школа, 1981.-188 с.
2. Чистяков В.Д. Три знаменитые задачи древности. – Москва, Учпедгиз, 1963.-95 с.
3. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Про можливе і неможливе в геометрії циркуля і лінійки. – Київ, Рад. школа, - 1962.-126 с.

Сиваківський Б.Я.
Вінницький державний педагогічний університет
ім. Михайла Коцюбинського

Формування сучасного світогляду учнів в контексті історичного досвіду розвитку і навчання математики

Кардинальні зміни в суспільному розвитку, потреба забезпечення національних інтересів України у світовому співтоваристві, започаткована докорінна реформа системи освіти загострюють проблеми формування світогляду підростаючого покоління. Оскільки найважливішим завданням усієї навчально-виховної роботи в школі вважається формування наукового світогляду учнів, зміст цього поняття в сучасних умовах потребує всебічного обгрунтування.

В даній статті розглянуто методологічні підходи до формування світогляду учнів, з'ясовується вплив історичного розвитку математики на методичні концепції, а також окреслено можливі напрями формування наукового світогляду учнів в процесі навчання математики.

За часів Радянського Союзу світогляд визначала ідеологія марксизму-ленінізму. З цих позицій написана, зокрема, вся тогочасна науково-методична література, в тому числі й література з методики математики. Цілеспрямоване формування світогляду було віднесене до однієї з найважливіших складових комуністичного виховання, яке, у свою чергу, підпорядковувалось стратегічній меті створення суспільства без антагоністичних класів. Уособленням такого суспільства ставала "нова історична спільність" – радянський народ. Про "воспитание в духе преданности коммунизму" писалося в усіх тогочасних посібниках з методики викладання математики (В.М.Брадіс, С.А. Гастєва та ін.).

Сутність комуністичного виховання неможливо збагнути, не беручи до уваги особливого характеру марксистсько-ленінської доктрини, яка з'явилася на хвилі посилення авторитету, суспільного впливу наукових знань. В XIX ст. вражаючі здобутки природознавства, успіхи науково-технічної революції призвели до появи образу Людини-Повелителя, котрій підкорена природа і підвладні її закони. Цей образ активно культивувала призначена для молоді науково-фантастична література (Ж. Верн, О. Бєляєв, Гр. Адамов, М. Трублаїні), його в повній мірі використали ідеологи революційного перетворення природи і суспільства. Натхненне прорікання В. Лєніна "Ум человеческий открыл много диковинного в природе и откроет ещё больше, увеличивая тем свою власть над ней…" (Повне зібрання творів, т.18, с.298) втілювалося згодом у "підкоренні" Півночі і атома, цілини і Космосу... За часів Сталіна ідеологія доповнила риси Повелителя рисами Завойовника. "У нас создаётся новый человек… Социалистический человек хочет завоевать мир, и не только мир, существующий на земном шаре…". Войовнича ідеологія спричинила навіть відповідне слововживання в науково-популярній математичній літературі: "вторжение математики продолжается – и со всё возрастающей интенсивностью… математическая экспансия стала привычной…".

В період розмивання основ радянського суспільного устрою фразеологія комуністичного виховання поступово втрачала категоричність, зміст його поступово трансформується – поряд з порадами щодо формування матеріалістичного світогляду, атеїстичного виховання з'являються, наприклад, мотиви екологічного виховання, виховання почуття патріотизму.

Тим часом ставлення до наукових знань в сучасних умовах зазнало глибокої кризи, оцінка ролі науки набула негативного відтінку. Проблеми довкілля, Чорнобиль, переорієнтація соціальних та морально-етичних цінностей зумовили помітну втрату інтересу молоді до занять наукою. В суспільній свідомості посилився вплив