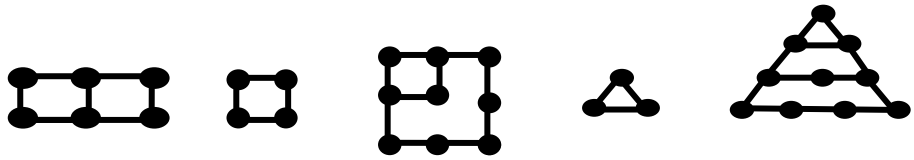
На уроках математики, или в качестве дополнительного домашнего задания школьники могут рассмотреть, например, „плоские” и „треугольные” числа и попробовать самим составить „квадратные” и



6=2*3 4=2^2 9=3^2 3=1+2 10=1+2+3+4 8=2^3

„плоское” „квадратные” „треугольные” „телесное”

Фиг. 3

„телесные” числа.

В VIII веке в Индии, Шридхара рассматривает на базе конкретных практических задач способы конструирования и счета разных размещений из ***n*** элементов. Интересен его пример, представленный в [1, стр.160]: „Повар использует шесть разных специй – острую, горькую, терпкую, кислую, соленую и сладкую на вкус. Скажи, дружок, сколько всех разновидностей вкуса?”

Школьникам будет интересно узнать, что сам автор дал ответ на эту задачу – 63, тем самым не считая “безвкусный вкус” – C_n^0, получая формулу $C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^2 - 1$.

Епископ Виболд из Камбре [3] сопоставлял каждой добродетели конкретный набор бросаний трех игральных костей еще в 960 году. При счете он не принимал во внимание “индивидуальность” костей и тем самым получил, что возможные варианты – 56.

В заключение. Примеры из истории, биографические данные, конкретные задачи прошедших времен и рассуждения великих умов должны присутствовать обязательно в процессе обучения математике. Они не только обогащают познания школьников, но и способствуют рефлексивному анализу развития человеческой мысли по данному вопросу. Примеры истории позволяет детям с повышенным интересом к математике (и может быть к психологии), сравнить собственную линию рассуждений с мышлением великих ученых.

Связь математики с известными заранее именами, с общей историей и практикой, является еще одной линией, смягчающей неоправданную „сухость” математики в популярном восприятии многих людей.

Литература

1. Бевс В. Г., Практикум з історії математики, НПУ ім. М.П. Драгоманова, Київ, 2004
2. Ганчев, И., Идея за методически аналог на “Началата” на Евклид, Математика и математическо образование, 34-та Пролетна конференция - Боровец, стр. 305-315, София, 2005
3. Гнеденко Б.В., Курс теории вероятностей, “Наука”, Москва, 1988
4. Додунеков, С., Математика 10 клас, Задължителна подготовка, Регалия 6, София, 2002
5. Колягин, Ю., Сидоров, Ю., Ткачева, М., Федорова, Н., Шабунин, Алгебра и начала анализа 11 класс – учебник для общеобразовательных учереждений, Мнемозина, Москва, 2004
6. Паскалев, Г., Паскалева, З., Математика 10 клас, Второ равнище, Архимед, София, 2001
7. Розин, В., Этапы генезиса математических знаний, сб. Методологические проблемы. Ежегодник, Москва, 1987
8. Слепкань, З.,Соколовська, І, Методика вивчення елементів комбінаторики, початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в загальноосвітніх навчальних закладах, Математика, Київ, 2004
9. Шкиль, М., Слепкань, З., Дубинчук, О., Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладіу, 11 класс, “Зодіак-Еко”, Київ, 2002
10. www.margaritta.dir.bg – журнал Маргарита, 07.05.2005

А.О. Розуменко

Державний педагогічний університет ім. А.С. Макаренка

Суми

Одна лекція з курсу „Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів

Введення в шкільний курс математики ймовірносно-статистичної змістової лінії зумовлює необхідність перегляду змісту та вдосконалення методики викладання елементів стохастики в вищих педагогічних навчальних закладах. Збільшилась кількість годин на вивчення курсу „Теорія ймовірностей та математична статистика”. За державним стандартом на його засвоєння відводиться 4 кредити, тобто 216 годин, половина з яких планується на самостійне опрацювання матеріалу. Отже, потребує уточнення і відповідна навчальна програма.

Мета статті: обґрунтувати необхідність та виділити методичні особливості викладання теми „Статистичні методи в педагогічних дослідженнях” в курсі „Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів математичних спеціальностей педагогічних вузів.

Відповідно до державного стандарту [1] у названому навчальному курсі виділено окремий розділ „Елементи статистики. Метод Монте-Карло.”, який містить такі питання:

- основні задачі статистики;
- статистичні оцінки параметрів розподілу;
- надійна ймовірність;
- надійні інтервали;
- статистична перевірка гіпотез;
- поняття про метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло).

Серед умінь, які повинен мати випускник вищого навчального закладу виділені вміння володіти понятійним апаратом теорії ймовірностей і математичної статистики, методами, прийомами, способами розв’язування основних задач стохастики, статистичного опрацювання експериментальних даних та мати уявлення про метод статистичного моделювання.

Традиційно на вивчення розділу „Елементи математичної статистики” в педагогічних вузах планувалося 5 лекцій та 5 практичних занять. Пропонувалися такі теми лекцій:

1. Поняття про генеральну сукупність та вибірку. Полігон, гістограма.
2. Оцінки параметрів генеральної сукупності за вибіркою. Поняття про незміщену, спроможну, ефективну оцінки параметрів розподілу. Оцінки математичного сподівання та дисперсії.
3. Довірчі інтервали. Надійність. Довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу.
4. Перевірка статистичних гіпотез. Критерії узгодження „Хі-квадрат” Пірсона, Колмогорова.
5. Поняття про лінійну кореляцію. Поняття про функцію регресії. Розрахунок прямих регресій.

Теми практичних занять відповідають навчальному матеріалу лекційного курсу [1].

На нашу думку, вивчення статистичного матеріалу необхідно доповнити темою „Статистичні методи в педагогічних дослідженнях”. Такий підхід зумовлений цілим рядом причин.

По-перше, це дозволить ознайомити майбутнього вчителя математики із специфікою використання статистичних методів при організації та проведенні саме педагогічних досліджень, сформувати у нього відповідні професійні вміння щодо коректної організації експерименту та правильної інтерпретації отриманих результатів.

По-друге, опрацювання названої теми буде сприяти формуванню у студентів умінь проводити самостійні педагогічні експериментальні дослідження в ході виконання дипломних та магістерських робіт, що стає особливо актуальним в умовах різнорівневої підготовки фахівців.

По-третє, усвідомлення професійного спрямування навчального матеріалу сприяє розвитку позитивної мотивації навчальної діяльності студентів.

Тема „Статистичні методи в педагогічних дослідженнях” може містити такі питання:

1. Структура педагогічного експерименту.
2. Елементи теорії вимірювань.
3. Типові задачі аналізу даних у педагогічних дослідженнях.
4. Методи опрацювання даних. Вибір статистичних критеріїв.

1. Структура педагогічного експерименту.

Мета педагогічного експерименту полягає в емпіричному підтвердженні або спростуванні гіпотези дослідження та (або) справедливості теоретичних результатів. В ході педагогічного експерименту досліджують зміни стану деякого об’єкту. Об’єктом можуть бути група, колектив, індивід, що навчаються.

Стан об’єкта вимірюється тими чи іншими показниками за критеріями, які відображають його суттєві характеристики.

Під критерієм розуміють ознаку, на основі якої здійснюють оцінку, класифікацію чогось. Показник – це конкретний кількісний або якісний прояв ознаки, який визначає її рівень [2].

Прикладами критеріїв можуть бути: успішність, рівень знань; прикладами характеристик – час виконання завдань, кількість правильних відповідей, кількість помилок тощо.

Педагогічний експеримент полягає в цілеспрямованій дії на об’єкт, яка повинна змінити його певним чином. Прикладами такої дії можуть бути: зміст і форми, методи, засоби навчання тощо. При цьому треба обґрунтувати, що стан об’єкта змінився в потрібному напрямку і саме за рахунок виконаної дії. Для обґрунтування цього факту необхідно вибрати аналогічний об’єкт, на який виділена дія не впливає. Традиційно ці два об’єкти називають відповідно експериментальна (яка навчається за новою методичною системою) та контрольна (яка навчається за традиційною методикою) групи.

Алгоритм дій дослідника може бути таким:

1. Встановити „співпадання” початкового стану експериментальної та контрольної груп.
2. Реалізувати дію на експериментальну групу.
3. Встановити відмінності кінцевого стану експериментальної та контрольної груп[3].

Статистичні методи використовують для того, щоб коректно та достовірно обґрунтувати співпадання та відмінності експериментальних та контрольних груп.

2. Елементи теорії вимірювань.

Інформація, яка є про початкові і кінцеві стани експериментальної та контрольної груп, визначається проведеними вимірюваннями. Будь–яке вимірювання проводиться за тією чи іншою шкалою. Вибрана шкала визначає тип даних і множину операцій, що можна здійснювати над цими даними.

Шкала – це числова система, в якій відношення між різними властивостями явищ, процесів, що вивчаються переведені у властивості чисел (це множина можливих значень оцінок за критерієм) [3].

Розрізнюють такі види шкал:

1) шкала відношень – дозволяє оцінити у скільки разів один об’єкт, що вимірюється більше (менше) іншого об’єкта, який приймається за еталон. Для таких шкал існує початок відліку. Шкалами відношень вимірюються майже всі фізичні величини. В педагогічних дослідженнях ця шкала має місце при вимірюванні часу на виконання завдань, при підрахунку кількості помилок або кількості правильно розв’язаних завдань тощо;
2) шкала інтервалів – для такої шкали не існує природного початку відліку і одиниць вимірювання. Прикладом таких шкал є шкали температур за Цельсієм або за Фаренгейтом. Такий тип шкал використовують досить рідко;
3) порядкова шкала – тільки впорядковує об’єкти, надає їм ті чи інші ранги. Цей тип шкал широко використовують у педагогіці (дванадцятибальна система оцінювання, рейтингова оцінка тощо);
4) шкала найменувань – фактично не пов’язана з поняттям „величина”. Такі шкали використовують тільки з метою розпізнавання об’єктів (прізвища учнів, номери респондентів тощо).

При аналізі результатів вимірювання дослідники часто використовують похідні показники, виконуючи при цьому перетворення отриманих результатів. Тип шкали визначає допустимі перетворення результатів. Для шкали найменувань допустимими є тільки взаємно-однозначні перетворення, для порядкової – строго монотонні; для інтервальної – лінійні (множення на додатне число і додавання сталого числа); для шкали відношень – перетворення подібності. Потужність шкал росте в такому порядку: шкала найменувань, шкала рангів, шкала інтервалів, шкала відношень. При опрацюванні результатів вимірювання можливим є перехід від більш потужної шкали до менш потужної, але не навпаки (це так звана проблема адекватності, яка розв’язується в теорії вимірювання).

Припустимо, що контрольна група складається з N студентів (учнів) та експериментальна група з M студентів (учнів). В результаті вимірювання отримали такі вибірки.

X : $x_1, x_2, x_3, \dots x_N$, де x_i – кількість правильних відповідей студентів контрольної групи при виконанні тестових завдань.

Y : $y_1, y_2, y_3, \dots y_M$, де y_j – кількість правильних відповідей студентів експериментальної групи при виконанні тестових завдань.

В даному випадку результати отримали в шкалі відношень.

Розглянемо конкретні результати виконання тестових завдань (всього 30 завдань) з теорії ймовірностей, які пропонувалися студентам двох груп четвертого курсу. В одній групі, яку будемо вважати контрольною (441група) тестування пройшли 22 студента і результати виявилися такими (таблиця 1). В іншій групі, яку будемо вважати експериментальною (442 група), тестування пройшли 28 студентів і результати виявилися такими (таблиця 2).

Таблиця 1.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
x_i	**18**	**12**	**25**	**14**	**8**	**17**	**16**	**23**	**9**	**11**	**16**	**26**	**7**	**17**	**13**	**9**	**22**	**18**	**13**	**24**	**18**	**12**

Таблиця 2.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_j	**21**	**15**	**7**	**18**	**24**	**18**	**14**	**12**	**9**	**26**	**18**	**24**	**16**	**19**
j	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
y_j	**20**	**17**	**10**	**15**	**17**	**15**	**11**	**22**	**16**	**18**	**23**	**9**	**17**	**25**

Результати можна перевести в порядкову шкалу. Виділимо три рівня знань студентів, а саме: низький, середній, високий. При цьому будемо вважати рівень знань низьким, якщо кількість правильних відповідей студента не більше 10; середнім, якщо кількість правильних відповідей не менше 10 і не більше 20; високим – більше 20. Характеристикою групи буде кількість її членів, які мають один з трьох рангів.

$N = n_1 + n_2 + n_3$, де n_i – кількість студентів контрольної групи з відповідним рівнем знань.

$M = m_1 + m_2 + m_3$, де m_i - кількість студентів експериментальної групи з відповідним рівнем знань.

За ранговою шкалою отримаємо результати (таблиця 3).

Таблиця 3.

Рівень знань	Контрольна група (22 студента)	Експериментальна група (28 студентів)
Низький	$n_1 = 4$	$m_1 = 4$
Середній	$n_2 = 13$	$m_2 = 17$
Високий	$n_3 = 5$	$m_3 = 7$

3. Типові задачі аналізу даних у педагогічних дослідженнях.

Можна виділити три типи задач:

1) опис даних;
2) встановлення співпадання характеристик двох груп (експериментальної та контрольної груп перед початком експериментального навчання);
3) встановлення відмінностей характеристик двох груп (експериментальної та контрольної груп після закінчення експериментального навчання).

Розглянемо розв'язання названих типів задач на нашому числовому прикладі.

3.1 Опис даних.

На практиці виникає задача компактного опису сукупності результатів вимірювань окремих характеристик. Для цього використовують методи описової статистики.

Якщо результати отримали за шкалою відношень (таблиця 1), то знаходять:

- показники положення (максимальний і мінімальний елементи, середнє значення, мода, медіана);
- показники розсіювання (вибіркова дисперсія, розмах вибірки);
- показники асиметрії (положення медіани відносно середньої);
- будують гістограми тощо.

Студентам пропонується знайти названі показники самостійно за допомогою відповідних прикладних програм [4].

Якщо результати вимірювань отримали за порядковою шкалою (шкалою рангів), то єдиним показником описової статистики є гістограми.

3.2. Загальні підходи до визначення достовірності співпадань і відмінностей.

Для визначення достовірності співпадань і відмінностей характеристик двох груп використовують метод статистичних гіпотез. Зміст цього методу та правила прийняття (спростування) гіпотез були розглянуті раніше. У випадку педагогічних досліджень статистичні гіпотези формулюються таким чином:

- гіпотеза про відсутність відмінностей характеристик двох груп (нульова гіпотеза);
- гіпотеза про значущість відмінностей характеристик двох груп (альтернативна гіпотеза).

В педагогічних дослідженнях критичні значення статистичних критеріїв визначають для рівня значущості α = 0,05. Статистичні критерії вибирають у залежності від того, яка шкала вимірювань використовується і який об'єм вибірки опрацьовується.

При використанні шкали відношень доцільно використовувати такі статистичні критерії:

- критерій Крамера – Уелча (дозволяє перевірити гіпотезу про рівність вибіркових середніх);
- критерій Манна–Уітні (дозволяє перевірити гіпотезу про те, що вибірки „однакові", як за середніми, так і за іншими характеристиками).

Другий критерій є більш потужним, але і більш громіздким. Розглянемо названі критерії більш докладно.

Для використання критерію Крамера – Уелча необхідно обчислити (за таблицею 1,2):

1) середні вибіркові: $\overline{x}$ і $\overline{y}$;
2) вибіркові дисперсії D_x, D_y;
3) емпіричне значення критерію $Темп = \dfrac{\sqrt{M \cdot N} \cdot \left|\overline{x} - \overline{y}\right|}{\sqrt{M \cdot D_x + N \cdot D_y}}$.

Критичне значення критерію $Ткр$ (α = 0,05) = 1,96.

Якщо виконується умова $Темп \le Ткр$, то приймається нульова гіпотеза. Тобто можна стверджувати, що характеристики вибірок співпадають на заданому рівні значущості.

Студентам пропонується самостійно на практичному занятті виконати обчислення і зробити висновок про співпадання чи про відмінності характеристик груп, в яких вони навчаються (в результаті повинні отримати $Темп$ = 0,79 і зробити висновок про співпадання характеристик).

Критерій Манна–Уітні оперує не з абсолютними значеннями елементів двох вибірок, а з результатами їх парних порівнянь. Для кожного елемента x_i ($i = 1, 2, ..., N$) визначають кількість a_i елементів другої вибірки, які за значенням більше даного. Тобто кількість всіх y_i таких, що $y_i > x_i$. Сума всіх $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_N = U$. Далі обчислюють емпіричне значення статистичного критерію за формулою :

$$W_{емп} = \frac{\left|\frac{N \cdot M}{2} - U\right|}{\sqrt{\frac{N \cdot M \cdot (N + M + 1)}{12}}}.$$

Критичне значення критерію $Wемп$ (α = 0,05) = 1,96.

Якщо виконується умова $Wемп \leq Wкр$, то приймається нульова гіпотеза. Тобто можна стверджувати, що характеристики вибірок співпадають на заданому рівні значущості.

Якщо виконується умова $Wемп > Wкр$, то можна зробити висновок про те, що достовірність відмінностей характеристик двох груп складає 95%.

Студентам пропонується виконати обчислення на практичному занятті (за даними вибірок повинні отримати результат $Wемп$ =0,49 і підтвердити попередній висновок).

При використанні порядкової шкали доцільно використовувати статистичний критерій χ^2 (хі-квадрат).

Емпіричне значення критерію обчислюють за формулою: $\chi^2_{емп} = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^{i=L} \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i}$, де L – кількість виділених рангів. В нашому випадку L =3, рівень значущості α = 0,05. Критичне значення критерію $\chi^2_{кр} = 5{,}99$. За результатами вимірювання за порядковою шкалою (таблиця 3) отримуємо результат $\chi^2_{емп} = 0{,}15$. Виконується умова прийняття нульової гіпотези, а саме $\chi^2_{емп} \leq \chi^2_{кр}$. Студентам пропонується перевірити результат на практичному занятті.

Якщо при вимірюванні за порядковою шкалою дослідник виділяє тільки два ранги, то використовуються критерій Фішера.

Будемо вважати, що всі студенти, у яких при виконанні тестових завдань більше 10 правильних відповідей мають достатній рівень знань, а всі решта – недостатній. Тоді результати будуть такими (таблиця 4):

Таблиця 4.

Рівень знань	Контрольна група (22 студента)	Експериментальна група (28 студентів)
Задовільний	n_1 = 4	m_1 = 4
Незадовільний	n_2 = 18	m_2 = 24

Для обчислення емпіричного значення критерію Фішера вводять величини $p = \frac{n_2}{N}, q = \frac{m_2}{M}$, де n_2 - кількість студентів контрольної групи, що мають задовільний рівень знань , m_2 - кількість студентів експериментальної групи, що мають задовільний рівень знань. Емпіричне значення критерію Фішера обчислюють за формулою: $\phi_{емп} = \left|2 \cdot \arcsin\sqrt{p} - 2 \cdot \arcsin\sqrt{q}\right| \cdot \sqrt{\frac{N \cdot M}{N + M}}$. Критичне значення критерію $\phi_{кр}$ (α = 0,05)=1,64.

Якщо виконується умова $\phi_{емп} \leq \phi_{кр}$, то приймається нульова гіпотеза. Тобто можна стверджувати, що характеристики вибірок співпадають на заданому рівні значущості. Студентам пропонується на практичному занятті перевірити виконання нульової гіпотези за критерієм Фішера ($\phi_{емп} = 0{,}17$).

При опрацюванні результатів тестування ми переконалися в тому , що дві групи студентів мають „однакові” характеристики на вибраному рівні значущості. З метою самостійного опрацювання всіх розглянутих статистичних критеріїв викладач пропонує таке завдання: дві групи студентів виконували планову контрольну роботу з математичної статистики, до змісту якої були включені задачі основних типів. Максимальна кількість балів, яку студент міг отримати за виконання контрольної роботи дорівнювала 20. Контрольна група студентів (441) виконувала контрольну роботу до виконання комплексного графічно –

розрахункового завдання з математичної статистики, в якому пропонувалися аналогічні задачі. Результати виконання контрольної роботи студентами цієї групи подані в таблиці 5. Студенти експериментальної групи (442) спочатку виконували комплексне графічно – розрахункове завдання, усно пояснювали викладачу розв'язання задач, а потім виконували контрольну роботу. Результати виконання контрольної роботи цими студентами подані в таблиці 6.

Таблиця 5.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
x_i	**8**	**2**	**9**	**14**	**8**	**10**	**12**	**7**	**10**	**11**	**16**	**12**	**10**	**14**	**3**	**9**	**12**	**15**	**13**	**14**	**8**	**12**

x_i - кількість балів студента контрольної групи.

Таблиця 6.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y_j	**11**	**15**	**17**	**8**	**14**	**18**	**14**	**12**	**19**	**12**	**18**	**4**	**18**	**18**
j	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
y_j	**12**	**17**	**10**	**15**	**17**	**15**	**11**	**10**	**6**	**8**	**13**	**16**	**16**	**12**

y_j - кількість балів студента експериментальної групи.

За наведеними даними на практичному занятті необхідно перевірити нульову гіпотезу про співпадання характеристик цих двох груп за допомогою всіх розглянутих критеріїв на заданому рівні значущості $\alpha = 0{,}05$.

За результатами обчислень ($Темп$ = 2,82; $Wемп$ = 2,26) студенти приходять до висновку про достовірність відмінностей двох груп. При використанні критеріїв χ^2 і Фішера треба домовитися про виділення рангів, що само по собі є проблемою для дослідника. Бажано переконати студентів у тому, що виконання комплексних графічно – розрахункових завдань підвищує ефективність засвоєння ними навчального матеріалу.

В межах теми, що розглядається доцільно було б обговорити із студентами ще такі питання : репрезентативність вибірки; кореляційний взаємозв'язок різних показників, необхідність якісного обґрунтування ефективності запропонованої методичної системи тощо. Але для цього однієї лекції замало. Більш глибокий розгляд даної теми можна запропонувати при навчанні майбутніх магістрів.

Запропонований зміст лекції є тільки одним з можливих варіантів, але, тема „Статистичні методи в педагогічних дослідженнях", на нашу думку, є необхідною в курсі теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів педагогічних вищих навчальних закладів.

Література

1. Галузеві стандарти вищої освіти. Напрям підготовки 0101 Педагогічна освіта. Спеціальність 6.010100 Педагогіка і методика середньої освіти. Математика. Затверджено наказом МОН України від 02.10.2002 року №546.
2. Алексєєнко Т.А., Сушанко В.В. Основи педагогічного експерименту і кваліметрії. – Чернівці: Рута, 2003. – 42с.
3. Новиков Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). –М.- МЗ – Пресс, 2004.-67с.
4. Жалдак М.І. та ін. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології: Навч.пос.–К.: Вища школа, 1995.– 351с.