Тоді множина $\{n \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\} \subset \left\{n \mid |a_n - a_N| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$ – не більш ніж скінченна. Тому існує $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Теорему доведено.

5. Висновки

Методика викладання теми „Границя послідовності” на основі альтернативного означення 2 границі послідовності дозволяє в термінах скінченності довести основні властивості границь послідовності. Ця методика, поряд з традиційною, сприяє, на нашу думку, більш свідомому, компетентному засвоєнню розділу „Границя послідовності”, базового у нормативному курсі математичного аналізу для студентів математичних та педагогічних спеціальностей. Міркування у доведенні теореми про арифметичні дії над границями послідовностей пропедевтичні для курсів теорії міри та теорії ймовірностей.

Запропонована методика може бути використана при вивченні теми „Підпослідовності. Часткові границі”.

Література

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких переменных. – М.: Наука, 1972. – 622 с.
2. Черный Саша. Иероглифы // Избранная проза. — М.: Книга, 1991. С. 46 – 52.
3. Привалов И.И., Гальперн С.А. Основы анализа бесконечно малых. – М.: Наука, 1966. – 256 с.
4. Михалін Г.О., Дюженкова Л.І. Границя і неперервність функції. – К.: УДПУ, 1997. – 96 с.
5. Курченко О. О. Про границю послідовності // У світі математики. – Вип 20, 1991. с. 160 – 167.
6. Овчарук О. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. // Стратегія реформування освіти в Україні. – К.: „К.І.С.”, 2003. – С. 13 – 41.
7. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Частина 1. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.

Ломаєва Т.В., Шаповалова Н.В.

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,

м. Київ

Деякі застосування ідей Лобачевского в механіці та фізиці

Досить цікаві спроби вивчити статистику і кінематику твердого тіла в просторі Лобачевського, які були зроблені Де-Тілі, Джаннокі, Ліндеманом, Андрадом та іншими привели до того ж результату, що й аналогія між статикою і кінематикою твердого тіла, яка має місце для евклідового простору (це відображено в роботах Пуансо, а саме в «Thèorie nouvelle de la rotation des corps» повинна існувати і в механіці неевклідових просторів. Тому цілком природно, що математична обробка цих двох галузей механіки вимагала нової побудови теорії векторів. До кінця XIX сторіччя в теорії векторів, тобто в тих геометричних теоріях, в яких доводиться мати справу з величинами, які пов’язані напрямком або положенням прямої, вектор завжди зображався або напрямленим відрізком, або впорядкованою сукупністю двох точок – початку та кінця вектора. Але оскільки в неевклідових просторах виконується принцип двоїстості не тільки для проективних, а й для метричних властивостей, то це наводить на думку про необхідність поряд з фігурою, утвореною двома точками, розглядати як елемент теорії векторів фігуру, що утворена двома площинами (точкою і площиною), а потім і фігуру, яка утворена двома прямими.

Вихідним пунктом для нової теорії векторів неевклідових просторів є задача про додавання двох векторів $\bar{p}$ та $\bar{q}$, які мають спільний початок. Закон додавання векторів (сил, швидкостей) в евклідовому просторі виражається в двох різних формах – геометричній (правило трикутника та правило паралелограма) та аналітичній – сукупності рівностей:

$$\frac{|\bar{p}|}{\sin(\bar{q},\bar{r})} = \frac{|\bar{q}|}{\sin(\bar{r},\bar{p})} = \frac{|\bar{r}|}{\sin(\bar{p},\bar{q})}, \qquad (1)$$

де $|\bar{p}|, |\bar{q}|, |\bar{r}|$ - довжини складових векторів $\bar{p}$ та $\bar{q}$ і їх суми $\bar{r}$, а $(\bar{q},\bar{r})$ $(\bar{r},\bar{p})$ $(\bar{p},\bar{q})$ - кути між ними.

Яким же буде закон додавання векторів в неевклідовому просторі? Чи може він також виражатися в двох вище наведених формах? Це питання виникає перед нами коли вивчаємо механіку неевклідових просторів.

Якщо в неевклідовому просторі будемо розглядати нескінченно малі вектори, наприклад, нескінченно малі переміщення, то ми можемо без будь-яких змін застосовувати до них правило трикутника та правило паралелограма, а також формули (1), оскільки геометрія нескінченно малого околу неевклідового простору співпадає з геометрією Евкліда.

Для додавання скінчених векторів ми не можемо користуватися вище згаданими правилами, бо паралелограмів скінчених розмірів в неевклідовому просторі не існує. Інша справа з формулами (1). Оскільки вони однорідні відносно довжин векторів $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$, то зрозуміло, що вони залишаться справедливими і для таких скінчених векторів, які одержуються з нескінченно малих переміщень шляхом поділу їх на нескінченно малий проміжок часу. Звідси випливає, що формули (1) не містять внутрішнього протиріччя і ніщо не заважатиме нам застосовувати закон додавання векторів в аналітичній формі до скінчених векторів і в неевклідовому просторі. Тому бажаючи мати закон додавання векторів в аналітичній формі, ми повинні йти двома шляхами: прийняти формулу (1) за означення операції додавання і з неї виводити ті властивості, які мають місце при додаванні векторів, або рухатись іншим, оберненим шляхом — припустивши деякі властивості операції додавання і з їх допомогою одержати (1). Цей шлях обрали такі вчені, як Джаннокі та Андрад. Обираючи останній шлях, ми можемо для виводу аналітичної форми операції додавання використати доведення правила паралелограма в евклідовому просторі, яке й наводить Бернуллі, а потім вдосконалює Даламбер.

Припустимо, що операція додавання має наступні властивості:

1. Комутативність та асоціативність.
2. Геометрична сума векторів перетворюється в алгебраїчну тоді, коли вектори належать одній прямій.
3. Сума $\overline{r}$ двох рівних векторів $\overline{p}$, кут між якими дорівнює $2x$, напрямлена вздовж бісектриси кута між складовими і довжина її обчислюється наступним чином:

$$\overline{r} = 2\overline{p}\, f(x),$$

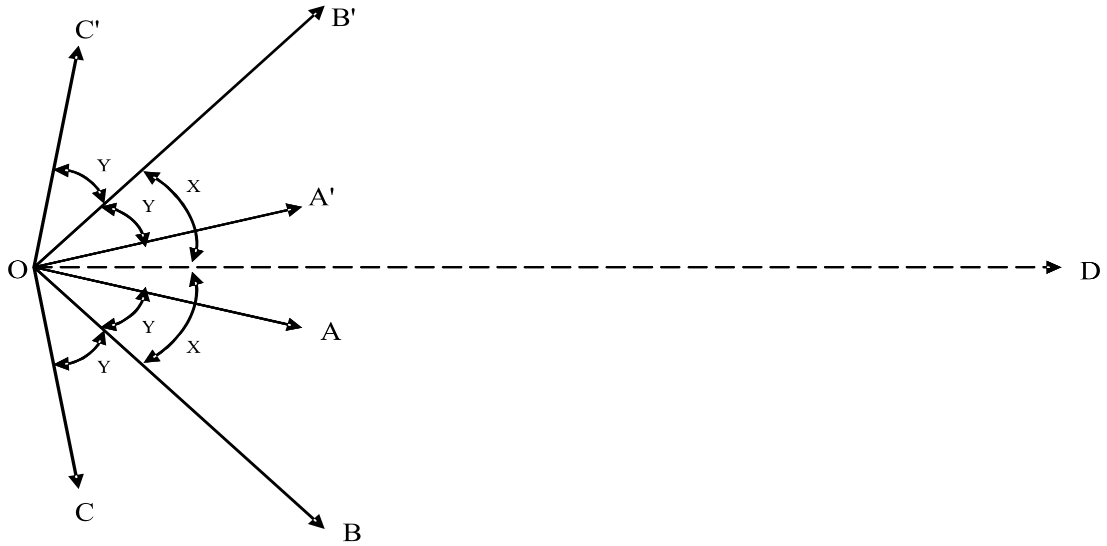
де $f(x)$ — невідома поки функція (неперервна для $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$).

Надаючи міркуванням Бернуллі і Даламбера аналітичну форму неважко довести, що формули (1) і в неевклідовому просторі дають нам геометричну суму двох векторів, якщо вони справедливі для двох рівних векторів $\overline{p}$ і $\overline{q}$, які мають однакову довжину і нахилені один до одного під кутом $2x$. Тоді формули додавання мають вигляд

$$\overline{r} = 2\overline{p}\cos 2x, \quad \left(\overline{r}, \overline{p}\right) = \left(\overline{q}, \overline{r}\right) = x.$$

Щоб впевнитися в справедливості останніх формул проведемо через точку O в одній і тій же площині прямі OC, OB, OA, OA', OB', OC' таким чином, щоб $\angle COB = \angle B \quad OA = \angle A'OB' = \angle B'OC' = y$, $\angle BOB' = 2x$, і припустимо, що на прямих OC, OA, OA', OC' розташовані вектори $\overline{OC}$, $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ і

$\overline{OC'}$ однакової довжини р (мал.1).



Мал. 1

Їх суму можна побудувати двома способами: 1) додаючи вектори $\overline{OA}$ з $\overline{OC}$, $\overline{OA'}$ з $\overline{OC'}$, одержуємо два вектора $\overline{OB}$ і $\overline{OB'}$, які мають однакову довжину $2pf(y)$, які напрямлені вздовж прямої OD, яка поділяє навпіл кути $\angle AOA'$, $\angle BOB'$, $\angle COC'$;

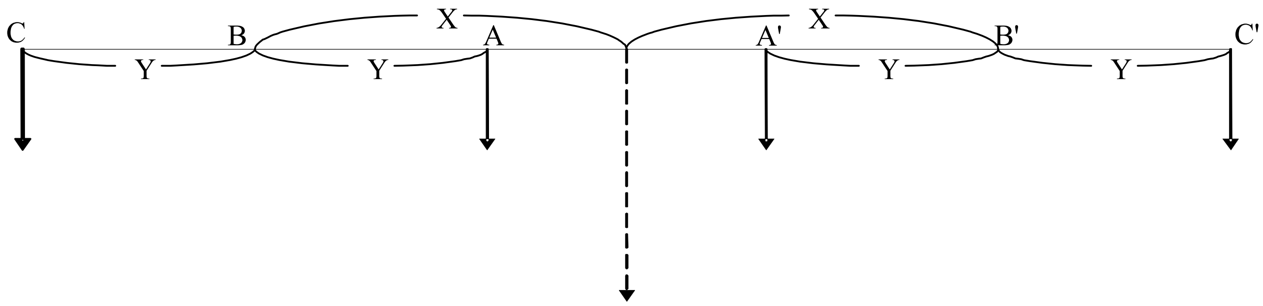
2) додаючи вектори $\overline{OC}$ і $\overline{OC'}$, $\overline{OA}$ і $\overline{OA'}$, маємо два вектори $2pf(x+y)$ і $2p'f(x-y)$, що співпадають з OD і що додаються, утворюючи один $2pf(x+y)+2p'f(x-y)$. Отже, $2pf(x+y)+2p'f(x-y)= 4pf(y)f(x)$, звідки маємо, що

$$f(x+y)+f(x-y)= 2f(y)f(x) \tag{2}$$

Таким чином, приходимо до відомого функціонального рівняння, яке вперше одержав Даламбер. Воно має розв’язок:

$f(x)=\cos kx$, де $k=const$ (k - довільна стала).

Ця стала k повинна дорівнювати 1, бо $f(x)\geq 0$, а $x=\frac{\pi}{2}$. А враховуючи припущення 2, ми повинні одержати $r=2p\,f(x)=2p\cos kx\frac{\pi}{2}$. Подібним чином можемо визначити також суму двох рівних векторів, які лежать в одній площині на прямих, які перетинаються. При цьому слід припущення 3 замінити аналогічним припущенням 4, а саме: сума $\bar{r}$ двох векторів рівної довжини p, які лежать в одній і тій же площині, перпендикулярні до прямої AA', яка з'єднує їх початки, і напрямлені в один бік, проходить через середину відрізка $AA'=2x$, перпендикулярна до відрізка AA' та міститься в одній площині з складовими векторами і дорівнює $2pf(x)$, де $f(x)$ — невідома поки функція (неперервна при $x\geq 0$).
Візьмемо на прямій в певному порядку шість точок C, B, A, A', B', C' (мал. 2) так, щоб $CB=BA=A'B'=B'C'=y$, причому $BB'=2x$.



Мал. 2

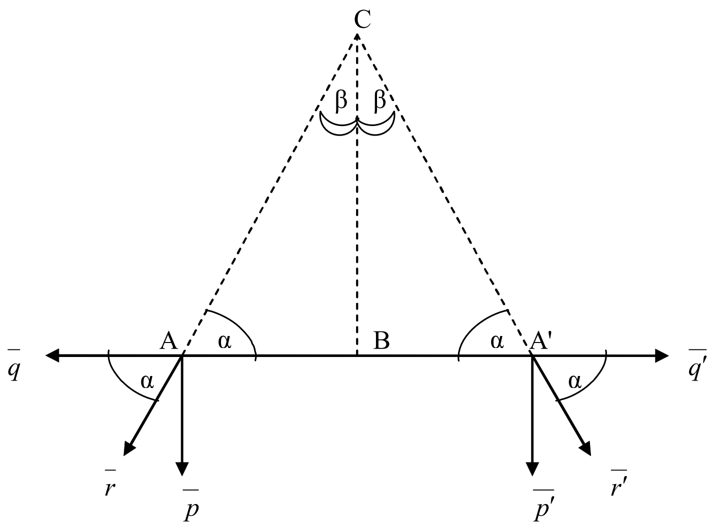
Проведемо в одній і тій же площині через точки C, A, A', C' чотири прямі, які перпендикулярні до CC'. Візьмемо на них чотири вектори рівної довжини p. Додаючи їх двома різними способами, як і в попередньому випадку, ми одержимо для визначення $f(x)$ рівняння Даламбера (2). Таким чином, геометрична сума двох векторів довжини p в цьому випадку буде:

$$\left|\bar{r}\right|=2\left|\bar{r}\right|\cos kx,$$

де $2x$ є відстань між їх початками.

Нас цікавить питання про те, яке значення маємо брати для довільної сталої k? Зроблене вище припущення не дає змоги визначити її так просто, як у випадку векторів, що мають спільний початок. Для визначення k Джаноккі порівняв вираз $2\bar{p}\cos 2x$ з тим же результатом, який ми одержимо, якщо рівні довжини p будемо додавати способом, який застосовується в статиці евклідового простору для додавання паралельних сил. При цьому зробимо ще одне припущення, а саме: сума двох векторів не зміниться, якщо один з них перенести вздовж прямої, до якої він належить.

Візьмемо два вектори $\bar{p}$ і $\bar{p}'$ (мал.3), які мають рівні довжини p, однаковий напрямок та перпендикулярні до прямої, що з'єднує їх початки A *і* A', а також два інших вектори $\bar{q}$ і $\bar{q}'$, які належать до прямої AA', мають рівні довжини q і протилежні напрямки.



Мал. 3

Два останніх вектори $\overline{q}$ і $\overline{q'}$ взаємно знищуються, і сума всіх чотирьох векторів буде такою ж, як і сума двох векторів $\overline{p}$ і $\overline{p'}$. Нехай вектор $\overline{r}$ є сумою $\overline{p}$ і $\overline{q}$, а $\overline{r'}$ є сумою $\overline{p'}$ і $\overline{q'}$. Введемо позначення:

$$\angle\overline{r}A\overline{q} = \angle\overline{r}'A'\overline{q}' = \alpha;$$

Оскільки $\angle\overline{p}A\overline{q} = \angle\overline{p}'A'\overline{q}' = \frac{\pi}{2}$, то враховуючи попередні позначення, згідно формули (1) маємо:

$$\left|\overline{r}\right| = \left|\overline{r}'\right| = \frac{p}{\sin\alpha} = \frac{q}{\cos\alpha},$$

Внаслідок симетрії, прямі, на яких лежать вектори $\overline{r}$ і $\overline{r}'$ перетнуться в точці *C*, яка належить перпендикуляру *CB*, де В - середина відрізка *AA'*. Отже, пряма *CB* буде бісектрисою кута $\angle ACA'=2\beta$, причому сума $\overline{r}$ і $\overline{r}'$ (за припущеннями 5 і 3) дорівнює:

$$2r\cos\beta = 2p\,\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Це і буде разом з тим сума векторів $\overline{p}$ і $\overline{p'}$. Отже, порівнюючи одержаний результат з попереднім, одержимо:

$$2p\cos kx = 2p\,\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$

звідси

$$\cos kx\sin\alpha = \cos\beta, \tag{3}$$

де $AA'=2x$.

Рівність (3) виражає співвідношення між катетом і кутами прямокутного трикутника *ABC* в залежності від того чи буде *k* дорівнювати 0, чи дійсному або чисто уявному числу, з рівності (3) одержимо:

1) якщо $\cos kx = 1$, то $\cos\beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \sin\alpha$;

2) якщо $\cos kx < 1$, то $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) < \sin\alpha$; (4)

3) якщо $\cos kx > 1$, то $\sin(\frac{\pi}{2} - \beta) > \sin\alpha$.

В першому випадку сума кутів трикутника *ABC* буде дорівнювати π, в другому буде більшою за π, і в третьому – меншою за π. Таким чином три геометрії евклідова або параболічна, неевклідова гіперболічна і неевклідова еліптична випливають з однієї і тієї ж самої формули (3).

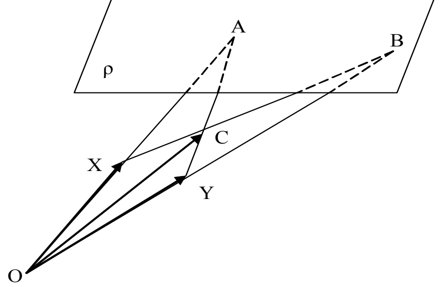
Незалежність формул (1) від постулату Евкліда і можливість їх застосування в механіці неевклідового простору пояснюється тим, що автори самих перших робіт з вищезгаданої теми користувалися законами додавання векторів в його аналітичній формі, яка визначає метод, покладений в основу наведених робіт. В них переважне значення мають метричні співвідношення і метрична геометрія.

Питання про геометричну інтерпретацію операцій додавання векторів у неевклідовому просторі було поставлено і розроблено в роботі А.П. Котєльнікова [1], в основі якої покладено закон додавання векторів в формі правила чотирикутника.

Питання про те, як потрібно буде змінити закон паралелограма для неевклідового простору – невизначене: можна дати різні узагальнення цього закону, але найбільш простим є наступне:

1. Назвемо вектором $\overline{OX}$ сукупність двох точок – початку *O* і кінця *X*; променем відповідного вектора – орієнтовану пряму, яка проходить через початок і кінець.

2. Розглянемо правило чотирикутника (мал. 4). Для того, щоб скласти два вектори $\overline{OX}$ і $\overline{OY}$, які мають спільний початок *O*, будуємо площину *ρ*, полярну до початку О відносно абсолюта, і продовжуємо промені *OX* і *OY* до перетину з площиною *ρ* відповідно в точках *A* і *B*. Прямі *AY* і *BX* перетнуться в точці *C*.



Мал. 4

Вектор $\overline{OC}$ є геометричною сумою векторів $\overline{OX}$ і $\overline{OY}$:

$$\overline{OX} + \overline{OY} = \overline{OC}.$$

В евклідовому просторі площина ρ являє собою нескінченно віддалену площину цього простору, а чотирикутник $OXCY$ буде паралелограмом, а правило чотирикутника стає правилом паралелограма. Для кожного вектора ми розглядаємо дві величини: довжину вектора

$$\alpha = \left|\overline{OX}\right|$$

і тензор вектора

$$g = \frac{1}{k} tg(k\alpha),$$

де k – дійсна величина для еліптичного простору, чисто уявна для гіперболічного і дорівнює «нулеві» для параболічного. Модуль числа k, коли воно відмінне від нуля, залежить від одиниці вимірювання довжини, яку завжди можна вибрати так, що $k = 1$ або $k = 0$, в залежності від того, чи буде це простір Рімана, чи Лобачевського, чи Евкліда. Очевидно, що для евклідового простору тензор вектора дорівнює його довжині.

Література

1. Котельников А.П. Проективная теория векторов. Известия Казанского физ. мат. общества, 2-е серия.
2. Фок В. Атом водорода и неевклидова геометрия. Изд. АН. СССР, отд. мат и естеств. наук, 1935.— 169 с.

Л.В. Процак

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Київ

Навчання вищої математики в умовах модульно-рейтингової системи

Відповідно до наказу Міністерства освіти та науки України №48 від 23.01.2004 ”Про проведення педагогічного експерименту з кредитно-модульної системи організації навчального процесу” ряд підрозділів Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова перейшли до модульної системи організації навчального процесу.

Згідно з означенням професора В.І. Бондаря “Модуль навчальної дисципліни – це не просто її частина (тема чи розділ), а інформаційний вузол, який у свою чергу є одиницею, що уніфікує підхід до структурування цілого на частини, тобто на окремі модулі”.

Модульне навчання – це процес засвоєння навчального матеріалу, організованого у вигляді модулів, який включає в себе такі компоненти:

- мету та завдання;
- мотивацію на якісне засвоєння;
- зміст (навчальний модуль);
- методи і форми опосередкованої самостійної навчально-пізнавальної діяльності;
- корекцію, самооцінку й оцінку результатів засвоєння знань умінь та навичок.

Позитивним моментом впровадження модульного навчання є звуження ролі інтерактивних форм самостійної роботи студентів під керівництвом викладача. При модульному навчанні той, хто навчається більш самостійно чи абсолютно самостійно може працювати із запропонованою йому навчальною програмою, що містить у собі цільову програму дій, банк інформації та методичне керівництво щодо досягнення поставлених дидактичних цілей.

Одним із варіантів організації модульного навчання є модульно-рейтингова система, при якій вивчення студентом навчальної дисципліни відбувається шляхом послідовного і ґрунтовного опрацювання навчальних модулів, а оцінювання якості його роботи та рівня здобутих вмінь і знань здійснюється безпосередньо за рейтинговою системою.

Модульно-рейтингова система передбачає:

- стимулювання систематичної роботи студентів протягом усього семестру і підвищення якості їхніх знань;
- підвищення об’єктивності оцінювання знань студентів;
- запровадження здорової конкуренції в навчанні;
- виявлення творчих здібностей студентів.

Найважливішим моментом модульно-рейтингової системи, окрім розбиття матеріалу на змістовні модулі, є організація та проведення рейтингового контролю. Рейтингова система оцінювання навчальної роботи студента – це така методика визначення якості його роботи та рівня здобутих знань, яка передбачає оцінювання в балах усіх результатів, досягнутих під час поточного та підсумкового контролю. Навчальний рейтинг студента визначається з усіх видів робіт, передбачених навчальним планом за семестр, конкретні числові