Зеленська Т.С.
Європейський університет (м. Київ)

Використання пакету Mathcad при розв'язуванні диференціальних рівнянь в частинних похідних

На сьогоднішній день економіка України потребує фахівців, які б професійно були обізнані з спеціальними прикладними комп'ютерними програмами, що застосовуються для оптимізації тієї чи іншої галузі промисловості. Особливо це стосується студентів, які навчаються на технічних спеціальностях.

Однією з універсальних прикладних програм фізико-математичного спрямування є пакет Mathcad, за допомогою якого, зокрема, можливо розв'язувати диференціальні рівняння в частинних похідних [2]. Диференціальні рівняння, перш за все, основа для всіх фізичних та хімічних розрахунків, що застосовуються в промисловості чи в науці. І тому без диференціальних рівнянь не може обійтись в рамках своєї професійної діяльності ні один спеціаліст технічного та природничого профілю [4], [5].

Відомо, що диференціальні рівняння в частинних похідних є доволі складним матеріалом для сприйняття та засвоєння його студентами, але візуалізація цих рівнянь в Mathcad може значно полегшити процес навчання. Однак, на цей час недостатньо методичних матеріалів стосовно використання пакета Mathcad при розв'язуванні диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Розглянемо доцільність використання пакету Mathcad при розв'язуванні диференціальних рівнянь в частинних похідних при вивченні дисциплін «Чисельні методи в інформатиці», «Прикладне програмне забезпечення», «Теорія алгоритмів та чисельні методи (додаткові глави)» студентами напрямів «Комп'ютерні науки» та «Програмна інженерія» галузі знань «Інформатика і обчислювальна техніка».

При вивченні диференціальних рівнянь в частинних похідних студенти розуміють, що диференціальним рівнянням в частинних похідних називається рівняння відносно функції кількох змінних, яке може містити саму функцію і обов'язково повинно містити її частинні похідні за різними аргументами.

Такі рівняння характеризуються тим, що для їх розв'язування не існує єдиного універсального методу, і більшість задач потребує використання евристичних методів.

Самі рівняння в частинних похідних (дещо умовно) можна поділити на три основних типи:

- *параболічні* – містять першу похідну за однією змінною і другу – за іншими, причому всі ці похідні входять в рівняння з однаковим знаком;
- г*іперболічні* – містять першу похідну за однією змінною і другу похідну за іншими змінними, причому похідні входять в рівняння з різними знаками;
- *еліптичні* – містять тільки другі похідні, причому одного знаку.

Деякі більш складні рівняння не можна однозначно підвести під наведену класифікацію, тоді говорять про гібридні типи рівнянь.

Розглянемо можливості використання пакету Mathcad для розв'язування деяких з наведених вище рівнянь.

Хвильове рівняння – диференціальне рівняння в частинних похідних, якими описується процес розповсюдження хвиль різної природи в деякому середовищі, має вигляд $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$. Це найпростіше рівняння гіперболічного типу.

Рівняння та системи рівнянь такого типу з'являються при аналізі різних коливань та хвильових процесів (телеграфне рівняння тощо).

У випадку малих коливань та однорідного ізотропного середовища хвильове рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

де x, y, z – просторові змінні, t – час, $u = u(x, y, z)$ – вихідна функція, яка характеризується коливаннями в точці (x, y, z) в момент часу t, a – швидкість розповсюдження коливання. Якщо u залежить тільки від двох (однієї) просторових змінних, то хвильове рівняння спрощується і називається двовимірним (одновимірним).

Приклад. Знайти розв'язок хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, що описує поздовжні коливання стержня постійного поперечного перерізу довжиною *L*, один кінець $x = 0$ якого жорстко закріплений. При цьому стержень був підданий розтягуванню під дією постійної сили *F*, яка прикладена до кінця стержня $x = L$; v – швидкість коливання стержня. В початковий момент часу дія сили *F* миттєво зупиняється і кінець стержня $x = L$ залишається вільним. Модуль Юнга стержня рівний *E*, а площа поперечного перерізу – S.

Розв'язування.

Запишемо необхідні для розв'язування задачі постійні величини:

$E := 2.1 \cdot 10^{11}$ – модуль Юнга сталі, *Па*.

$\rho := 7850$ – густина сталі, $кг / м^3$.

$v := \left(\frac{E}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$ – швидкість поздовжньої хвилі, м/с.

$v = 5.172 \times 10^3$.

$F := 1000$ – сила, яка діє на кінець стержня, *Н*.

$S := 0.0001$ – площа поперечного перерізу стержня, $м^2$.

Створимо сітку для розв'язування задачі за методом скінченних різниць:

$N := 20 \qquad N1 := 40$.

$i := 0..N$

$i1 := 1..N-1$

$j := 0..N1$

$j1 := 1..N1-1$

$t\_end := 0.00005 \qquad t\_begin := 0$ час коливань

$L\_\max := 1 \qquad L\_\min := 0$ довжина стержня

$h\_x := \frac{L\_\max - L\_\min}{N} = 0.05$

$h\_t := \frac{t\_end - t\_begin}{N1} = 1.25 \times 10^{-6}$

$\frac{v \cdot h\_t}{h\_x} \le 1$ розв'язок стабільний

$x_i := 0 + h\_x \cdot i \qquad t_j := 0 + h\_t \cdot j$.

Запишемо початкові та граничні умови:

$u1(x) := F \cdot \frac{x}{E \cdot S}$ початкове зміщення стержня

$u2(x) := 0$ початкова швидкість

$U_{i,0} := u1(x_i)$

$U_{i,1} := u1(x_i) + h\_t \cdot u2(x)$ початкові умови

$U_{0,j} := 0$ граничні умови

Маємо рівняння в скінченних різницях:

$$r := \frac{v \cdot h\_t}{h\_x}$$

$$U_{i1,\, j1+1} := \left(2 - 2 \cdot r^2\right) \cdot U_{i1,\, j1} + r^2 \cdot \left(U_{i1+1,\, j1} + U_{i1-1,\, j1}\right) - U_{i1,\, j1-1} .$$

Графічне зображення результатів розв'язування подано на рис.1.

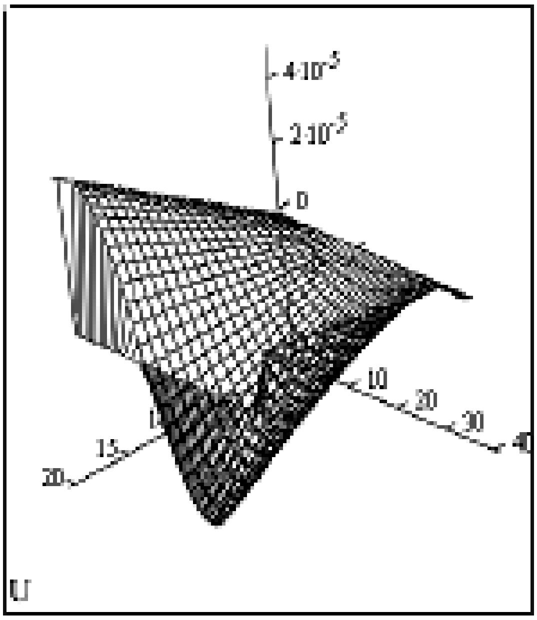

Рис. 1

$$x_{20} = 1$$

$$t_{20} = 2.5 \cdot 10^{-5}$$

Точний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{8 \cdot F \cdot L\_max}{\pi^2 \cdot E \cdot S} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2 \cdot n - 1)^2} \cdot \cos\left[\frac{(2 \cdot n - 1) \cdot \pi \cdot v \cdot t}{2 \cdot L\_max}\right] \cdot \sin\left[\frac{(2 \cdot n - 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L\_max}\right].$$

За допомогою Mathcad можливо отримати розв'язок, використовуючи формулу

$$u1(x,t) := \frac{8 \cdot F \cdot L\_max}{\pi^2 \cdot E \cdot S} \cdot \sum_{n=0}^{20} \frac{(-1)^{n+1}}{(2 \cdot n - 1)^2} \cdot \cos\left[\frac{(2 \cdot n - 1) \cdot \pi \cdot v \cdot t}{2 \cdot L\_max}\right] \cdot \sin\left[\frac{(2 \cdot n - 1) \cdot \pi \cdot x}{2 \cdot L\_max}\right],$$

$$U1_{i,j} := u1(x,t).$$

Результат подано на рис. 2 та рис. 3.

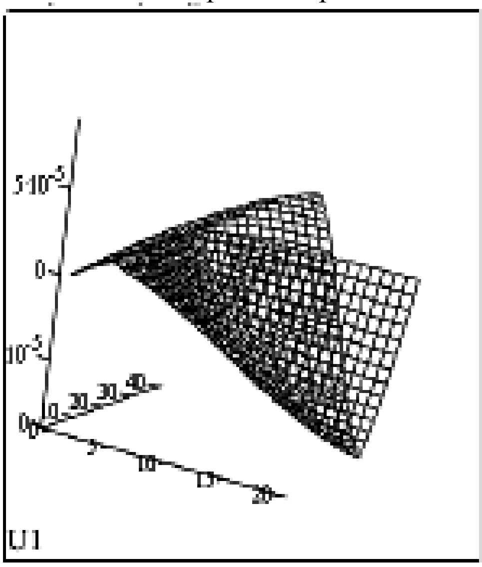

Рис.2

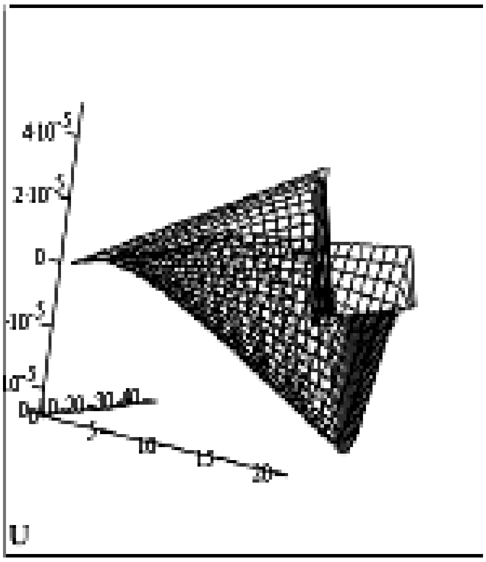

Рис.3

Розглянемо ***параболічне рівняння*** в частинних похідних, яке залежить від трьох змінних – двох просторових x та y, а також від часу t.

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) + \phi(x,y,t,u).$$

Вираз в дужках в правій частині рівняння (сума двох просторових похідних від функції u, її часто для скорочення позначають у вигляді оператора Лапласа: Δu).

Це рівняння називається двовимірним рівнянням теплопровідності. Воно описує динаміку розподілу температури $u(x,y,z)$ на поверхні (наприклад, на металічній пластині) в залежності від часу.

Припустимо, що ми розглядаємо розподіл тепла не на плоскій поверхні, а на видовженому тілі типу металічного стержня. В цьому випадку залежність від координати y в загальному рівнянні теплопровідності зникає. І отримуємо одновимірне рівняння:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \phi(x,t,u) .$$

Одновимірне рівняння набагато простіше двовимірного, оскільки об'єм розрахунків для реалізації його розв'язування набагато менший.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння розподілу тепла в стальному стержні

$\frac{\partial u}{\partial t} = k\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, що задовольняє умовам:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 ,\ u(x,0) = \frac{x\cdot(L-x)}{L^2} .$$

Розв'язок.

$\lambda := 45.4$ коефіцієнт теплопровідності сталі, $Вт/(м\cdot К)$.

$C_p := 460$ питома теплоємність сталі, $Дж/(кг\cdot К)$.

$\rho := 7850$ густина сталі, $кг/м^3$.

$k := \frac{\lambda}{C_p\cdot\rho}$ коефіцієнт температуропровідності.

$k = 1.257\times 10^{-5}$.

Створюємо сітку для розв'язування за методом скінченних різниць.

$N := 100 \qquad N1 := 20$.

$i := 0..N$

$i1 := 1..N-1$

$j := 0..N1$

$t\_end := 4 \qquad t\_begin := 0$ час коливань

$L\_\max := 2 \qquad L\_\min := 0$ довжина стержня

$h\_x := \frac{L\_\max - L\_\min}{N} \qquad h\_t := \frac{t\_end - t\_begin}{N1}$

$h\_x = 0.02 \qquad h\_t = 0.2$

$\frac{v\cdot h\_t}{h\_x} = 1$ розв'язок стабільний

$x_i := 0 + h\_x\cdot i \qquad t_j := 0 + h\_t\cdot j$

Задамо початкові та граничні умови:

$u1(x) := \frac{x\cdot(L\_\max - x)}{L\_\max^2}$ початковий розподіл температури

$U_{i,0} := u1(x_i)$ початкові умови

$U_{0,j} := 0$

$U_{N,j} := 0$ граничні умови

Рівняння в скінченних різницях

$$U_{i1,j+1} := \left(1 - \frac{2\cdot k\cdot h\_t}{h\_x^2}\right)\cdot U_{i1,j} + \frac{k\cdot h\_t}{h\_x^2}\cdot(U_{i1-1,j} + U_{i1+1,j}) .$$

Графічне зображення результатів розв'язування подано на рис. 4 та рис. 5.

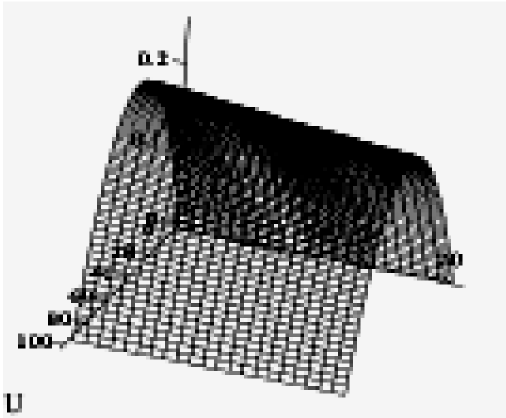

Рис. 4

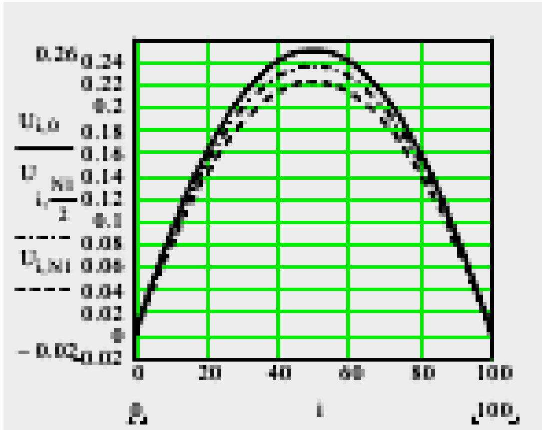

Рис. 5

Точний розв’язок

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2\cdot n+1)^3}\cdot e^{\frac{-(2n+1)^2\cdot\pi^2\cdot k\cdot t}{L\_max^2}}\cdot\sin\left[\frac{(2\cdot n+1)\cdot\pi\cdot x}{L\_max}\right]\right].$$

В Mathcad можливо провести розв’язування використовуючи формулу:

$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^3}\cdot\sum_{n=0}^{20}\left[\frac{1}{(2\cdot n+1)^3}\cdot e^{\frac{-(2n+1)^2\cdot\pi^2\cdot k\cdot t}{L\_max^2}}\cdot\sin\left[\frac{(2\cdot n+1)\cdot\pi\cdot x}{L\_max}\right]\right],$$

$U1_{i,j} := u1(x_i, t_j)$.

Розв’язок подано на рис. 6.

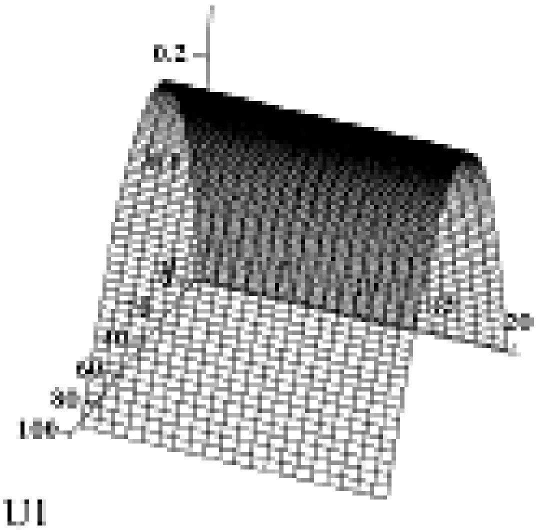

Рис. 6

При розв’язуванні прикладних задач диференціального числення є необхідним застосування прикладних комп’ютерних програм таких, як Mathcad. Використання цього пакету при вивченні даної теми полегшує сприйняття та засвоєння студентами доволі складного матеріалу. До того ж, візуалізація розв’язків та побудова двовимірних та тривимірних графіків в Mathcad розвиває образне мислення та просторову уяву студентів. При використанні пакету Mathcad значно спрощується алгоритм розв’язування, при цьому витрачається менше часу на проміжні громіздкі арифметичні розрахунки.

Література

1. Васильев А.Н. Mathcad13 на примерах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.
2. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001 и Mathcad11. –М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 832 с.
3. Поршнев С.В. Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. –СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: МГУ, 1987. – 198 с.

5. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М., 2001. – 550 с.