

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Науковий часопис

НАЦІОНАЛЬНОГО
ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА

СЕРІЯ 3

ФІЗИКА І МАТЕМАТИКА У ВИЩІЙ І
СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

ВИПУСК 9

Київ 2012

Фахове видання, затверджене Президією ВАК України, протокол № 1-05/8 від 22.12.2010р.

НАУКОВИЙ ЧАСОПИС НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі: 3б. наукових праць – К.:НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – № 9. – 175 с.

У часописі розглядаються актуальні питання викладання фізики і математики у вищій школі, висвітлюються актуальні проблеми методики навчання фізики і математики у загальноосвітніх закладах та пропонуються шляхи їх вирішення.

Свідectво про державну *реєстрацію друкованого засобу масової інформації*
КВ № 8809 від 01.06.2004 р.

Редакційна рада:

Андрущенко В.П.	доктор філософських наук, професор, член-кореспондент НАН України, академік НАПН України, ректор НПУ імені М.П. Драгоманова (<i>голова Редакційної ради</i>)
Авдієвський А.Т.	почесний доктор, професор, академік НАПН України
Бех В.П.	доктор філософських наук, професор
Биковська О.В.	доктор педагогічних наук, професор
Бондар В.І.	доктор педагогічних наук, професор, академік НАПН України
Волинка Г.І.	доктор філософських наук, професор, (<i>заступник голови Редакційної ради</i>)
Дмитренко П.В.	кандидат педагогічних наук, професор
Дробот І.І.	доктор історичних наук, професор
Жалдак М.І.	доктор педагогічних наук, професор, академік НАПН України
Мацько Л.І.	доктор філологічних наук, професор, академік НАПН України
Падалка О.С.	доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України
Синьов В.М.	доктор педагогічних наук, професор, академік НАПН України
Сидоренко В.К.	доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України
Шкіль М.І.	доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАПН України
Шут М.І.	доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАПН України

Відповідальні редактори

Шут М.І.

Працьовитий М.В.

Відповідальні секретарі

Шкільний О.В., Мініч Л.В.

Технічний редактор

Дерев'янюк О.С.

Редакційна колегія:

Бурда М.І.	доктор педагогічних наук, професор, академік НАПН України
Бевз В.Г.	доктор педагогічних наук, професор
Благодаренко Л.Ю.	доктор педагогічних наук, професор
Грищенко Г.О.	кандидат фізико-математичних наук, професор
Гончаренко Я.В.	кандидат фізико-математичних наук, доцент
Горбачук І.Т.	кандидат фізико-математичних наук, професор
Жалдак М.І.	доктор педагогічних наук, професор, академік НАПН України
Касперський А.В.	доктор педагогічних наук, професор
Кондратьєв Ю.Г.	доктор фізико-математичних наук, професор
Ляшенко О.І.	доктор педагогічних наук, професор, академік НАПН України
Мартинюк М.Т.	доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України
Михалін Г.О.	доктор педагогічних наук, професор
Працьовитий М.В.	доктор фізико-математичних наук, професор
Сергієнко В.П.	доктор педагогічних наук, професор
Сиротюк В.Д.	доктор педагогічних наук, професор
Сусь Б.А.	доктор педагогічних наук, професор
Торбін Г.М.	доктор фізико-математичних наук, професор
Шкіль М.І.	доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАПН України
Шкільний О.В.	кандидат фізико-математичних наук, доцент
Шут М.І.	доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАПН України
Швець В.О.	кандидат педагогічних наук, професор

*Рекомендовано Вченою радою НПУ імені М.П. Драгоманова
(протокол № 2 від 26 вересня 2012 р)*

Зміст

Фізика

Благодаренко Л.Ю. Зошит для лабораторних робіт як засіб регуляції та стимуляції пізнавальної діяльності учнів..... **ст.5-13**

Горбачук І.Т., Стариков С.М., Козеренко С.І. Дослідження екстраструмів замикання і розмикання в електричному колі джерела постійного струму з RLC елементами..... **ст.14-22**

Закусило А.І., Касперський А.В. Математичне моделювання фізико-механічних задач засобами інтегрального числення у процесі підготовки магістрів технологічної освіти..... **ст.23-29**

Кульчицький В.І. Вивчення законів постійного електричного струму на основі системи фундаментальних фізичних понять.....**ст.30-38**

Литвинов Ю.В. Дослідження швидкоплинних та довготривалих процесів з допомогою комп'ютерного вимірювального комплексу «Навчальна лабораторія ІТМ»..... **ст.39-46**

Литвинов Ю.В. Комп'ютерна підтримка демонстраційного експерименту з дослідження властивостей електричних кіл..... **ст.47-58**

Мартинюк М.Т., Хитрук В.І., Декарчук М.В. Інтегративно-предметний підхід як засіб вивчення фізико-технічних знань в умовах впровадження нового змісту навчання **ст.59-65**

Сусь Б.А., Шут А.М., Шут М.І. Дослідження дифракції світла..... **ст.66-72**

Хован І.В. Психолого-педагогічні аспекти дослідної діяльності учнів на уроках з фізики...**ст.73-79**

Математика

Горбачук В.О. Математичне моделювання інвестиційної діяльності підприємництва ... **ст.80-92**

Гроза В.А., Лещинський О.Л., Томащук О.П., Тихонова В.В. Пропедевтика методів поліноміальної апроксимації в процесі викладання дисципліни «Математика» у вищих навчальних закладах I-II рівнів акредитації **ст.93-101**

Краснитський С.М., Курченко О.О. <i>Про поведінку функції в околі локального екстремуму</i>	ст.102-107
Сушко О.С. <i>Застосування узагальненого методу найменших квадратів</i>	ст.108-120
Трунова О.В. <i>Методичні особливості компетентнісного підходу щодо навчання стохастики у ВЗО</i>	ст.121-127
Філімонова М.О., Швець В.О. <i>Графічний метод розв'язання текстових задач</i>	ст.128-131
Шаповалова Н.В., Панченко Л.Л. <i>Проективна геометрія у формування професійних компетентностей майбутніх вчителів математики</i>	ст.132-140
Шевченко С.М. <i>Дослідження готовності викладача до управління процесом розвитку аналітичного мислення студентів технічних університетів</i>	ст.141-147
Шкільний О.В. <i>Проблема захисту від угадування текстових завдань ДПА та ЗНО з математики</i>	ст.148-163
Гончаренко Я.В. <i>Теоретико-методологічні аспекти підготовки магістерських робіт студентами спеціальності “Математика (Фінансова математика)”</i>	ст. 164-172

ЗОШИТ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ЯК ЗАСІБ РЕГУЛЯЦІЇ ТА СТИМУЛЯЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ

Благодаренко Л.Ю.,

*доктор пед. наук, професор,
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова*

У статті здійснено аналіз основних причин, які зумовлюють недостатню ефективність фронтальних лабораторних робіт з фізики в основній школі. Визначено функції зошита для лабораторних робіт як навчального посібника.

В статье осуществлен анализ основных причин, обуславливающих недостаточную эффективность фронтальных лабораторных работ по физике в основной школе. Определены функции тетради для лабораторных работ в качестве учебного пособия.

The analysis of principal reasons which predetermine insufficient efficiency of frontal laboratory works from physics at basic school is carried out in the article. The functions of notebook are certain for laboratory works as train aid.

Після розроблення нової програми з фізики для основної школи почався інтенсивний пошук форм і методів навчання, які б дозволили найбільш ефективно розв'язати ті завдання, які були поставлені перед шкільною фізичною освітою Державним стандартом базової фізичної освіти. Нова програма визначила напрям на підвищення наукового рівня викладання фізики, відповідно підвищені й державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів.

Модернізація програми з фізики значно відобразилась на її практичній складовій, зокрема, на змісті і кількості фронтальних лабораторних робіт. Якщо у програмі з фізики, впровадженій у 2001 році, на фронтальні лабораторні роботи у 7 - 9-х класах відводилось 11,8% від загальної кількості навчальних годин, то у новій програмі ця цифра складає 20,6%. При цьому з 36 фронтальних лабораторних робіт 22 роботи запропоновані для виконання вперше.

Така увага до практичної складової програми з фізики цілком виправдане. Протягом багатьох останніх років учителі-практики, методисти, науковці досліджують питання, пов'язані з методичними підходами до проведення фронтальних лабораторних робіт. Проте, незважаючи на широкий вибір різноманітних методик організації фронтальних лабораторних робіт, проблема якості експериментаторської підготовки учнів загальноосвітніх навчальних закладів, розвитку їх дослідницьких здібностей не є розв'язаною. Рівень підготовки випускників з фізики різко погіршився. Студенти, які вступають на навчання за спеціальностями фізичного, фізико-математичного та фізико-технічного профілів, не підготовлені до засвоєння знань з фізики відповідно до програм вищих навчальних закладів не лише на теоретичному, але й на практичному рівні. Суттєві ускладнення викликає в них виконання лабораторних робіт, оскільки у студентів, особливо перших курсів, відсутні навички щодо планування та проведення експерименту, визначення його завдань, використання вимірювальних приладів. Повну необізнаність виявляють студенти і в теорії похибок. Досить часто стан виконання студентом лабораторних робіт не дозволяє йому отримати позитивну оцінку під час складання екзамену з

фізики. Таким чином, рівень загальноосвітньої підготовки учнів з фізики визначається в значній мірі сформованістю в них експериментаторських і дослідницьких умінь і навиків. Отже, слід віддати належне представникам авторського колективу, який працював над розробленням діючої програми з фізики, які посилили практичну спрямованість курсу фізики загальноосвітніх навчальних закладів і підвищили вимоги до експериментаторських та дослідницьких умінь учнів.

Кардинальні зміни практичної складової програми з фізики вимагали розроблення навчально-методичного забезпечення, яке б надало відповідної допомоги у виконанні вимог Державного стандарту базової середньої освіти як учителям фізики, так і учням основної школи. Робота у цьому напрямі була спрямована, насамперед, на створення такого навчального посібника, як «Зошит для лабораторних робіт». Сьогодні зошити для лабораторних робіт є найбільш популярними навчальними посібниками для проведення фронтальних лабораторних робіт, що зумовлює їх широке використання у загальноосвітніх навчальних закладах.

Отже, метою статті є висвітлення методичних підходів до змістовного наповнення структурних компонентів зошиту для лабораторних робіт в основній школі.

Слід зазначити, що не всі учителі дотримуються однакової думки з приводу доцільності таких зошитів у навчально-виховному процесі з фізики. Деякі з них вважають, що виконання учнем лабораторної роботи за єдиним шаблоном зі строгим дотриманням інструкції може призвести до того, що учень, навіть у разі успішного виконання роботи, не усвідомить остаточно суті здійсненого експерименту. А це, в свою чергу, негативно вплине на розвиток його експериментаторських і дослідницьких умінь і навичок, а також на розвиток творчих здібностей учня.

З такою думкою ми рішуче не погоджуємось. Зошит для лабораторних робіт призначений, насамперед, для допомоги учням і учителям при підготовці та виконанні фронтальних лабораторних робіт і відіграє важливу роль в умовах обмеженості часу уроку. Якщо зошит для лабораторних робіт розроблений професійним фізиком і методистом з високим рівнем наукової кваліфікації, який є обізнаним у питаннях вікової психології, то його використання забезпечить інтеграцію наукових знань з індивідуально- психологічними особливостями учнів і буде сприяти їх інтелектуальному і особистісному розвитку. Відповідно, такий навчальний посібник має пройти конкурс і одержати рекомендації Міністерства освіти і науки України. На жаль, сьогодні у загальноосвітніх навчальних закладах розповсюджується велика кількість навчальних видань, створених авторами, у яких відсутня відповідна кваліфікація, і які розроблені без урахування вимог сучасних педагогічної і психологічної наук до навчальних видань такого роду.

На початку роботи зі структурування та змістовного наповнення зошитів для лабораторних робіт нами було визначено *основні причини, які зумовлюють низьку ефективність фронтальних лабораторних робіт.*

- Учні основної школи, особливо 7-го класу, мають дуже низький рівень мотивації до виконання лабораторної роботи і не сприймають експеримент як джерело знань та метод досліджень. Той факт, що пошукова мета не є для них мотивованою, зумовлений тим, що фронтальні лабораторні роботи з фізики в основній школі вперше виступають як засіб введення учнів у діяльність, яка визначається змістом навчального предмету.

- Пізнавальна діяльність учнів під час виконання лабораторної роботи

має виконавський характер, учні позбавлені певної свободи дій та регуляції цих дій на основі повної структури пізнавального процесу і при цьому обмежені чіткими часовими рамками. В таких умовах головною метою роботи учні вбачають в тому, щоб своєчасно встигнути виконати заплановані дії та одержати результати. Це сприяє набуттю певних експериментаторських (ніяк не дослідницьких!) навиків, але ускладнює формування індивідуальності і самостійності, ініціативи і творчості.

- В учнів виникають утруднення під час осмислення і узагальнення результатів лабораторної роботи, що унеможливорює процес інтеграції теоретичних знань і практичних дій. Це, в свою чергу, призводить до зниження активності учнів у пізнавальному процесі і виникненню в них незадоволення від виконаної роботи.

З урахування вищезазначених причин, нами були визначені *основні функції зошитів для лабораторних робіт як навчальних посібників*:

- забезпечення диференційованого підходу до виконання фронтальних лабораторних робіт, реалізація здібностей учнів, їх особистих мотивів і інтересів;
- забезпечення для кожного учня можливості повторення, закріплення і узагальнення знань, необхідних для виконання лабораторної роботи;
- ознайомлення учнів з фізичними приладами та правилами їх використання;
- полегшення роботи учнів при оформленні результатів, одержаних у процесі виконання лабораторної роботи, здійсненні необхідних розрахунків, рисунків, кресленні схем і графіків, обчисленні похибок вимірювань;
- надання учням допомоги при формулюванні висновків.

Очевидно, що для виконання зазначених функцій лабораторної роботи, насамперед, мають бути певним чином структуровані. На нашу думку, *найбільш адаптованою до конкретних можливостей навчально-виховного процесу у формі фронтальних робіт є така структура лабораторної роботи*:

- номер і назва роботи;
- мета роботи;
- прилади і матеріали;
- теоретичні відомості;
- виконання роботи;
- висновки;
- контрольні запитання;
- додаткове завдання.

Відповідно до такої структури лабораторної роботи учню пропонується п'ять етапів її виконання:

- перший етап – ознайомлення з метою лабораторної роботи, необхідним обладнанням, актуалізація інформаційного складу знань;
- другий етап – інтеграція теоретичних знань з практичними діями у процесі виконання завдань лабораторної роботи;
- третій етап – аналіз виконаних дій та одержаних результатів;

- четвертий етап – розв’язання теоретичних завдань, умови яких мають проблемний характер, і в яких йдеться про конкретні факти, що мають місце на практиці;
- п’ятий етап – виконання завдань на відтворення або описання фізичного явища (процесу) з наступним аналізом виконаних дій і одержаних результатів.

Зауважимо, що саме таке структурування лабораторної роботи забезпечує можливості для її індивідуалізації та диференціації. Дійсно, для кожного учня обов’язковими є лише три етапи виконання лабораторної роботи, які забезпечують йому одержання балів, що відповідають середньому рівню навчальних досягнень. Четвертий і п’ятий етапи виконання роботи учень може реалізувати залежно від своїх особистих потреб і можливостей. При цьому виконання завдань четвертого етапу забезпечує учню одержання балів, що відповідають достатньому, а п’ятого етапу – високому рівню навчальних досягнень. Таким чином, у процесі виконання лабораторної роботи учню надається право самостійного оцінювання своїх навчальних потреб і можливостей, а також вибору змісту навчання.

Нами розроблено навчальні посібники «Фізика. Лабораторні роботи: 7 клас», «Фізика. Лабораторні роботи: 8 клас», «Фізика. 9 клас: Зошит для лабораторних робіт» [1], [2], [3]. Розглянемо *методичні підходи до змістового наповнення структурних компонентів зошиту для лабораторних робіт*.

Мета роботи. Формулюється чітко і конкретно, зрозумілою для учнів мовою з дотриманням стилістичних норм, не містить невизначеностей та зайвої інформації, висвітлює як теоретичну, так і операційну спрямованість лабораторної роботи. Подана відповідним чином мета є відправним пунктом у активізації в учнів мислительних механізмів та формуванні мотивів їх навчальної діяльності. У процесі ознайомлення з метою роботи учні мають самостійно здійснити попереднє планування дій, які необхідно виконати для її досягнення, а також загальне планування результатів роботи.

Прилади і матеріали. Перераховуються всі прилади і матеріали, які будуть використані в роботі, із зазначенням (за необхідності) їх параметрів. Визначається, які прилади і матеріали необхідні для виконання основної частини роботи, а які будуть задіяні для додаткового завдання. Детальний перелік приладів і матеріалів дозволяє учням усвідомити форми і способи наступної пізнавальної діяльності. Для учителя це полегшує підготовку лабораторної роботи і заздалегідь забезпечує йому можливість заміни тих чи інших приладів і матеріалів у разі їх відсутності на інші.

Теоретичні відомості. Враховуючи, що перед уроком, на якому проводиться лабораторна робота, учні отримують завдання повторити навчальний матеріал, необхідний для її виконання, до теоретичних відомостей вноситься лише той мінімум змісту навчання, який підлягає засвоєнню учнями для реалізації практичних завдань. Відбір змісту навчального матеріалу для теоретичних відомостей необхідно здійснювати також на основі його співвіднесення з пізнавальними можливостями та інтересами учнів. До теоретичних відомостей необхідно вносити також той навчальний матеріал, який недостатньо висвітлений у підручнику, або має суто прикладний характер. Це, зокрема можуть бути описання будови приладів та правила користування цими приладами. Наприклад, до теоретичних відомостей лабораторної роботи №3 «Вимірювання часу (годинник секундомір, метроном)» (7 клас) внесено описання будови секундоміра і метронома та

правила користування ними. У лабораторній роботі №11 «Вимірювання температури за допомогою різних термометрів» (8 клас) теоретичні відомості містять описання будови рідинних та електронних термометрів. До теоретичних відомостей лабораторної роботи №2 «Вимірювання струму за допомогою амперметра» та лабораторної роботи №3 «Вимірювання електричної напруги за допомогою вольтметра» (9 клас) внесено описання відповідно амперметра і вольтметра та визначено правила користування цими приладами. У кожному прикладі теоретичні відомості забезпечені відповідними рисунками або фотографіями. Наявність теоретичних відомостей у структурі лабораторної роботи є необхідною, оскільки у процесі виконання роботи учні можуть звертатись до них для одержання відповідей на ті чи інші запитання, що виникають у ході їх практичної діяльності, не звертаючись за допомогою до учителя. Це підвищує рівень самостійності при виконанні лабораторної роботи, сприяє формуванню пізнавальної спрямованості учнів, виробленню в них психологічної настанови на подолання пізнавальних ускладнень.

Виконання роботи. Слід врахувати, що великі за обсягом описання практичних дій, які передбачені у ході виконання роботи, важко сприймаються учнями, оскільки вони при цьому не усвідомлюють логіку структури тексту і не можуть утримати у свідомості схему послідовності дій.

Тому в розроблених нами лабораторних зошитах цей структурний компонент лабораторної роботи містить стисло, чітко і послідовно викладений зміст практичних дій учнів у процесі одержання результатів. Якщо виконання роботи передбачає використання ілюстрацій (фотографій, рисунків, схем, графіків) або заповнення таблиць, то після кожного пункту порядку виконання роботи зазначається, до якої ілюстрації треба звертатись або до якої таблиці слід записувати одержані експериментальні результати. Ілюстрації виконані розбірливо у такому масштабі, який дозволяє визначити всі її складові елементи. Якщо, наприклад, ілюстрація представляє собою електричне коло, то всі елементи кола зображаються в тій послідовності, яка рекомендована у порядку виконання роботи. Як приклад, можна навести лабораторні роботи №№2-10 (9 клас). Особливої уваги приділено побудові таблиць. Величини (характеристики), які вимірюються або досліджуються розміщено у боковиках (заголовках рядків) чи у головці таблиці, а одержані результати, якими характеризується величина – у графах. Кожний заголовок над графою стосується всіх даних цієї графи, кожний заголовок рядка у боковику – всіх даних цього рядка. Всі заголовки в таблицях сформульовані коротко, а слова, що повторюються, винесені до об'єднувальних рубрик. Прикладами можуть слугувати таблиці, розроблені до лабораторних робіт: №2 «Ознайомлення з вимірювальними приладами. Визначення ціни поділки вимірювального приладу» (7 клас), №3 «Дослідження коливань маятника» (8 клас), №5 «Вивчення залежності електричного опору від довжини провідника і площі його поперечного перерізу, матеріалу провідника» (9 клас). Одиниці вимірювання фізичних величин, які входять до заголовків рядків або граф надруковані чітко, без скорочень. Заголовки рядків і граф починаються з великої літери. В тексті лабораторного зошиту всі таблиці наведено безпосередньо після того пункту порядку виконання роботи, в якому вона вперше згадується. Всі ілюстрації (таблиці) пронумеровані в межах зошиту. У тексті порядку виконання роботи передбачені також місця для самостійного виконання учнями рисунків або креслення схем чи графіків, якщо цього вимагає зміст роботи. Це зроблено, зокрема, у лабораторній роботі №11 «Утворення кольорової гами

світла шляхом накладання променів різного кольору» (7 клас), лабораторній роботі №1 «Вимірювання швидкості руху тіла» (8 клас), лабораторній роботі №1 «Дослідження взаємодії заряджених тіл» (9 клас). Якщо для виконання лабораторної роботи необхідно використовувати табличні значення фізичних величин, то відповідні таблиці містяться в тексті роботи, при цьому таблиця має назву, розміщену над таблицею. Наприклад, в лабораторній роботі №7 «Вимірювання коефіцієнта тертя ковзання» (8 клас) наведено таблицю 9 «Коефіцієнти тертя ковзання для деяких матеріалів», в лабораторній роботі №5 «Вивчення залежності електричного опору від довжини провідника і площі його поперечного перерізу, матеріалу провідника» (9 клас) наведено таблицю 7 «Питомі опори деяких речовин». На нашу думку, використання в основній школі під час виконання лабораторних робіт довідникової літератури є недоречним, оскільки учні ще не мають відповідних навичок роботи з літературою такого роду, що може негативно відобразитись на якості здійснення ними необхідних розрахунків.

Висновки. Відомо, що значні труднощі для учнів основної школи представляє формулювання висновків. Кожний учитель-практик знає, що у той момент, коли учні переходять до цього етапу виконання лабораторної роботи, головним є таке запитання до учителя: «Що писати у висновках?». У більшості випадків учитель вимушений відповідати учням на це запитання, що знижує рівень осмислення ними важливості отриманих результатів, значущості даної лабораторної роботи в курсі фізики. Тому нами було уперше впроваджено таку форму подання висновків, у якій визначено ті результати лабораторної роботи, які підлягають оцінюванню, осмисленню і узагальненню. Наведемо *приклад подання висновків* до деяких лабораторних робіт.

- Лабораторна робота №6 «Вимірювання маси тіл» (7 клас).

Зробіть *висновки* щодо способу вимірювання маси тіл, з яким ви ознайомились під час виконання лабораторної роботи, та точності цього способу.

- Лабораторна робота №5 «Конструювання динамометра» (8 клас).

Зробіть *висновки* щодо:

- неточностей, допущених при градуюванні динамометра;
- можливостей використання проградуваного вами динамометра;
- експериментаторських умінь і практичних навичок, яких ви набули при виконанні лабораторної роботи.

- Лабораторна робота №2 «Вимірювання сили струму за допомогою амперметра» (9 клас).

Зробіть *висновки* щодо:

- правила ввімкнення амперметра в електричне коло;
- значення сили струму на будь-якій ділянці послідовно з'єданого електричного кола;
- експериментаторських умінь і практичних навичок, яких ви набули при виконанні лабораторної роботи.

Подання висновків у такій формі полегшує і організовує роботу учнів на етапі їх формулювання, а також підвищує рівень самостійності учнів при теоретичному осмисленні результатів експериментальної діяльності. У деяких лабораторних роботах, які складаються з декількох частин, короткі висновки пропонується сформулювати до кожної з них, що дозволяє у процесі роботи систематизувати набуті знання, розподілити інформацію за блоками, а також зняти

навантаження на учнів на етапі завершення лабораторної роботи. Це сприяє також ефективному задіянню механізмів пам'яті учнів, оскільки при виконанні значної кількості пізнавальних дій протягом часу уроку частина одержаної інформації може для них загубитись за відсутності її поетапної систематизації і відповідного узагальнення. Такий підхід до подання висновків використаний у лабораторній роботі №6 «Вимірювання сил за допомогою динамометра. Вимірювання ваги тіл» (8 клас), у лабораторній роботі №5 «Вивчення залежності електричного опору від довжини провідника і площі його поперечного перерізу, матеріалу провідника» (9 клас).

Контрольні запитання. Мають на меті виявлення рівня оволодіння учнями того навчального матеріалу, який був підґрунтям для виконання лабораторної роботи. Найбільш ефективно контрольно-оцінювальна функція контрольних запитань реалізується в тому випадку, коли вони представлені у вигляді якісних завдань. При формулюванні таких завдань важливо правильно визначити рівень їх складності, оскільки підвищення або зниження цього рівня в однаковій мірі може призвести до згасання пізнавального інтересу учнів і викривлення показників виконання лабораторної роботи. Отже, контрольні запитання до лабораторних робіт сформульовані нами з урахуванням їх об'єктивної складності і доступності для виконання учнями 7-9 класів. При цьому зміст більшості контрольних запитань відповідає результатам, одержаним у роботі. Це набагато збільшує методичну цінність контрольних запитань, оскільки дозволяє учням у процесі відповідей на них використовувати конкретні практичні результати. Наведемо *приклад* контрольних запитань до деяких лабораторних робіт.

- Лабораторна робота №5 «Вимірювання об'єму твердих тіл, рідин і газів» (7 клас).

Контрольні запитання:

1. При використанні якого засобу вимірювання – лінійки чи мензурки - об'єм металевого бруска був визначений з більшою точністю?
2. Як можна виміряти об'єм тіла неправильної форми?
3. Де у побуті ви можете використати уміння, набуті при виконанні даної лабораторної роботи?

- Лабораторна робота №13 «Визначення питомої теплоємності речовини» (8 клас).

Контрольне запитання:

Які теплові втрати не враховані у даному методі визначення питомої теплоємності речовини?

- Лабораторна робота №10 «Складання найпростішого електромагніту і випробування його дії» (9 клас).

Контрольні запитання:

1. Як можна регулювати магнітну дію електромагніту, не змінюючи його конструкції?
2. Чи може електромагніт мати сильну магнітну дію, якщо струм у ньому є порівняно малим?

Додаткове завдання. Призначене для реалізації творчого розвитку учнів, оскільки дозволяє їм використати набуті теоретичні знання, експериментальні уміння, практичні навички, а також конкретні одержані результати для встановлення нових причинно-наслідкових зв'язків, для одержання нових продуктів навчальної діяльності. Рівень виконання учнями додаткових завдань

дозволяє встановити, чи не є знання учнів формальними, чи не працює їх мислення лише на запам'ятовування та відтворення. Досвід показує, що більшість учнів основної школи сприймають усвідомлені знання, але зазнають ускладнень у процесі застосування їх в нових навчальних ситуаціях. У результаті в учнів можуть сформуватись недостатньо повноцінні знання, оскільки вони будуть позбавлені системності і конкретності. Виконання додаткових завдань активізує процес пізнання і перетворює репродуктивну діяльність учнів на творчу. Всі додаткові завдання, які запропоновані нами у лабораторних зошитах, є логічним продовженням виконаної лабораторної роботи і передбачають використання результатів, одержаних у цій роботі. Але головною умовою виконання додаткового завдання є самостійне розроблення методики проведення експерименту (або здійснення інших підходів до виконання завдання), визначення його умов, вибір обладнання, виконання рисунку (або схеми) досліду, оцінювання результатів. При виконанні деяких додаткових завдань від учнів вимагається переконструювання завдань лабораторної роботи залежно від вимог додаткового завдання. В ході такої роботи ефективно відбувається осмислення зв'язків, визначених умовою завдання, актуалізація необхідних теоретичних знань і дослідницьких умінь, висунення гіпотез і застосування засобів, необхідних для виконання завдання. Відповідно, додаткові завдання задіюють логіку продуктивного мислення, що сприяє становленню творчих здібностей.

Наведемо *приклади додаткових завдань* до деяких лабораторних робіт.

- Лабораторна робота №4 «Вимірювання лінійних розмірів тіл та площі поверхні» (7 клас).

Додаткове завдання

Запропонуйте метод вимірювання товщини аркуша паперу у підручнику з фізики за допомогою лінійки. Намалюйте схему такого методу.

- Лабораторна робота №13 «Визначення питомої теплоємності речовини» (8 клас).

Додаткове завдання

Користуючись результатами експерименту, оцініть, на який процес витрачається більша кількість теплоти: на нагрівання води чи на нагрівання калориметра?

- Лабораторна робота №2 «Вимірювання сили струму за допомогою амперметра» (9 клас).

Додаткове завдання

Накресліть схему електричного кола з послідовно з'єднаних елементів: джерела постійного струму, амперметра, двох низьковольтних електричних ламп та вимикача. Складіть це коло. Замкніть вимикач та виміряйте силу струму в колі. Дослідіть, як зміниться сила струму в електричному колі з двома лампами порівняно з силою струму в електричному колі з однією лампою.

Отже, розроблені нами навчальні посібники «Фізика. Лабораторні роботи: 7 клас», «Фізика. Лабораторні роботи: 8 клас», «Фізика. 9 клас: Зошит для лабораторних робіт» ефективно сприяють реалізації однієї зі складових головної мети навчання фізики в основній школі, а саме: розвитку в учнів експериментаторських умінь і дослідницьких навичок, творчих здібностей і схильності до креативного мислення [4].

Використання вищеназваних навчальних посібників дозволяє реалізувати такі вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів:

- сформованість уявлень про методи постановки та здійснення експерименту;
- обізнаність у методиці вимірювань, будові і принципах дії приладів, призначених для вимірювання фізичних величин;
- наявність умінь щодо обчислення і пояснення похибок, які виникають в процесі вимірювання фізичних величин;
- набуття експериментаторських умінь і дослідницьких навиків;
- здатність до аналізу результатів експерименту і формулювання висновків щодо досягнення цілей лабораторної роботи, осмислення причин допущених помилок.

Очевидно, що формування в учнів експериментаторських умінь і дослідницьких навиків у процесі виконання фронтальних лабораторних робіт є одним з основних факторів реалізації фізичної компоненти Державного стандарту базової фізичної освіти. Але успішне розв'язання цього питання можливе лише при умові чіткої організації лабораторних робіт та ефективної методики їх проведення. Очевидно, що використання вищеописаних зошитів для лабораторних робіт є надзвичайно корисним як для учнів, так і для учителів, оскільки їх зміст і структура забезпечують системний підхід до здійснення продуктивних способів пізнання та формування основ навчальної діяльності у процесі виконання фронтальних лабораторних робіт.

Список використаної літератури

1. Благодаренко Л.Ю. Фізика. Лабораторні роботи: 7 клас. – Київ: Шлях, 2007. – 48 с.
2. Благодаренко Л.Ю. Фізика. Лабораторні роботи: 8 клас. – Київ: Шлях, 2008. – 64 с.
3. Благодаренко Л.Ю. Фізика. 9 клас: Зошит для лабораторних робіт. – Київ: Шлях, 2009. – 52 с.
4. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Фізика. Астрономія. 7-12 класи. – К.: ВТФ «Перун», 2006. – 80 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСТРАСТРУМІВ ЗАМИКАННЯ І РОЗМИКАННЯ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ ДЖЕРЕЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З RLC ЕЛЕМЕНТАМИ

Горбачук І.Т.,

завідувач кафедри ММНФМДВШ, професор,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,

Стариков С.М.,

завідувач лабораторії,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,

Козеренко С.І.,

кандидат пед. наук, доцент,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

У статті подані результати дослідження швидкоплинних електромагнітних процесів в електричному колі джерела постійного струму, що містить активний опір, ємність та індуктивність. Експериментальні дослідження проведені за допомогою універсального комп'ютерно – вимірювального комплексу з аналого – цифровим перетворювачем. Отримані результати аналізуються в межах представленої в роботі теорії. Дослідження проведені в режимі реального часу.

В статье представлены результаты исследования быстротекущих электромагнитных процессов в электрической цепи источника постоянного тока, содержащее активное сопротивление, емкость и индуктивность. Экспериментальные исследования проведены с помощью универсального компьютерно - измерительного комплекса с аналого - цифровым преобразователем. Полученные результаты анализируются в рамках представленной в работе теории. Исследования проведены в режиме реального времени

The paper presents the results of a study of fleeting electromagnetic processes in the circuit DC containing resistance, capacitance and inductance. Experimental studies were conducted using a universal computer - measuring system with an analog - digital converter. The results are analyzed in the framework presented in the theory. The studies were performed in real time.

Вступ. Сучасні фізичні експериментальні дослідження потребують створення складних установок, оскільки кількість аналогових параметрів, що мають вимірюватись може досягати, в окремих випадках, десятків. Діставати такий об'єм інформації аналоговими методами дуже складно, а інколи, взагалі неможливо.

В останні роки якість експериментальної техніки оновлюється і покращується. На заміну громіздким вимірювальним приладам прийшли пристрої, що мають не лише невеликі розміри, а й високу ступінь функціональності, що в десятки разів перевищує своїх попередників. Такими пристроями є аналого-цифрові перетворювачі (АЦП), які використовуються спільно зі стаціонарними комп'ютерами, ноутбуками чи планшетами. Серед причин, за яких експериментатори віддають перевагу вимірювальним комплексам з АЦП перед “застарілими” аналоговими приладами, можна назвати:

- обладнання має незначні габаритні розміри, що підвищує мобільність вимірювального комплексу;
- можливість підключення аналого-цифрових перетворювачів до ПК;

- вивіснення результатів вимірювань у вигляді цифрових таблиць, або графіків на екрані комп'ютера чи проекційного екрану;
- зменшення часу на аналіз та обробку отриманих результатів досліджень;
- електронні засоби сприяють створенню мініатюрних компонентів і підвищенню функціональних можливостей вимірювальних пристроїв;
- можливість експорту даних у формат Excel;
- одночасне вимірювання декількох фізичних величин;
- активізація процесу вимірювань за амплітудою вимірюваного сигналу, або за імпульсом зовнішньої синхронізації;
- створення мультимедійного проекту експерименту (в складі текстового файлу опису, відеоролика з поясненнями сутності експерименту, групи файлів з даними ходу експерименту) з подальшим відтворенням на будь-якому комп'ютері.

Отже, галузю використання вимірювальних комплексів з АЦП можуть бути не тільки наукові дослідження, а й навчальний процес у вищій та середній школах. Вони будуть підвищувати не лише рівень фундаментальної підготовки фахівців, а й стимулюватимуть молодь до навчання і виконання наукової роботи.

Формування завдань статті. Автори поставили за мету провести дослідження швидкоплинних електромагнітних процесів, що протікають в електричному колі, яке містить опір, ємність та індуктивність, за допомогою універсального комп'ютерно – вимірювального комплексу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Теорія. Нехай конденсатор C був заряджений до напруги U_c рівної ЕРС джерела живлення. Після замикання ключа K (рис.1) в положення 1 конденсатор почне розряджатися через опір R та котушку індуктивності L .

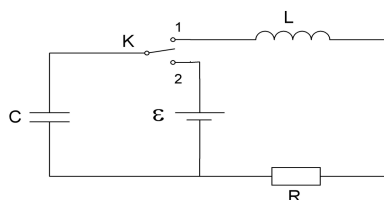


Рис.1

Запишемо для зазначеного контура диференціальне рівняння на основі II правила Кірхгофа та закону Ома:

$$U_c + U_R + U_L = 0 \text{ або } U_c + RI + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (1)$$

Струм у колі обумовлений зміною заряду q конденсатора

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_c}{dt}. \quad (2)$$

Врахувавши вираз (2) запишемо рівняння (1) у вигляді: $LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0$.

Поділимо всі доданки на LC та отримаємо

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{LC} U_c = 0. \quad (3)$$

Ми отримали лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку. Знайдемо розв'язок диференціального рівняння (3) методом Ейлера, а саме, у вигляді $U_c = e^{\lambda t}$, де λ – деяке невизначене стале число (дійсне або комплексне). Знайдемо похідні

$$U'_c = \lambda e^{\lambda t}; \quad U''_c = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad \text{і підставимо їх у рівняння (3): } P(U_c) = U''_c + a_1 U'_c + a_2 U_c;$$

$$P(e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2), \text{ де } a_1 = \frac{R}{L}; \quad a_2 = \frac{1}{LC}.$$

Отже, $U_c = e^{\lambda t}$ є розв'язком рівняння (3), якщо вираз у дужках рівний нулю

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (4)$$

Рівняння (4) є характеристичним рівнянням для диференціального рівняння (3). Розв'язком цього квадратного рівняння відносно невідомої λ будуть числа: $\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$, або

після підстановки значень a_1 і a_2 - $\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку (3) матиме такий вигляд

$$U_c = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

При $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння дійсні та від'ємні і розрядка

конденсатора має аперіодичний характер. При $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ корені λ_1 і λ_2 - спряжені комплексні і розрядка конденсатора має коливальний характер.

Розглянемо коливальний процес розрядки. В цьому випадку корені характеристичного рівняння спряжені і комплексні числа. А саме

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \lambda_2 = -\frac{R}{2L} - i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \text{ де } i = \sqrt{-1}.$$

Позначимо $\frac{R}{2L} = \delta$ - коефіцієнт затухання; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ - резонансна частота контура;

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - частота власних затухаючих коливань контура. Використовуючи введені позначення перепишемо вирази так

$$\lambda_1 = -\delta + i\omega, \quad \lambda_2 = -\delta - i\omega \quad (6)$$

Підставимо (6) у (5)

$$U_c = A_1 e^{(-\delta + i\omega)t} + A_2 e^{(-\delta - i\omega)t} = A_1 e^{-\delta t + i\omega t} + A_2 e^{-\delta t - i\omega t} = A_1 e^{-\delta t} e^{i\omega t} + A_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega t} = e^{-\delta t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) =$$

$$= e^{-\delta t} (A_1 \cos \omega t + \sin \omega t) \quad (7)$$

Для струму скористаємось виразом $I = -C \frac{dU_c}{dt}$ (знак “-” бо I тут струм розрядки)

$$I = -C e^{-\delta t} ((-\delta A_1 + A_2 \omega) \cos \omega t + (-\delta A_2 - A_1 \omega) \sin \omega t) \quad (8)$$

Сталі інтегрування A_1 і A_2 знайдемо з початкових умов ($t=0$): напруга на конденсаторі була рівна ЕРС джерела, а струму в електричному колі не було. Тому $U_c(0) = A_1 = \varepsilon$,

$$I(0) = -C(-\delta A_1 + A_2 \omega) = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{\delta \varepsilon}{\omega}.$$

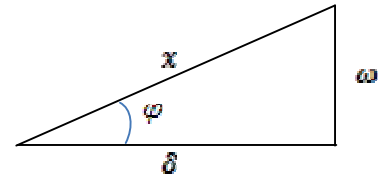
Підставляючи значення A_1 і A_2 у вираз (7) отримаємо

$$U_c = \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\delta t} (\omega \cos \omega t + \delta \sin \omega t) \quad (9)$$

Суму косинусоїдальної і синусоїдальної функцій можна замінити однією синусоїдальною функцією. Для цього покладемо $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega}{\delta}$.

$$\text{Тоді } \omega^2 + \delta^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2 + \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} = \omega \sqrt{LC}, \quad \cos \varphi = \frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 + \delta^2}} = \delta \sqrt{LC}.$$



Помножимо і поділимо (9) на $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$U_c = \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\delta t} (\omega \sqrt{LC} \cos \omega t + \delta \sqrt{LC} \sin \omega t) = \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\delta t} (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t)$$

Змінімо доданки і множники у дужках місцями

$$U_c = \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\delta t} (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi).$$

Скориставшись формулою синуса суми, остаточно отримаємо закон зміни напруги на конденсаторі з часом

$$U_c = \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\delta t} (\sin \omega t + \varphi), \text{ де } \varphi = \arctg \frac{\varphi}{\delta} \quad (10)$$

Для знаходження закону зміни сили струму з часом скористаємось виразом (2) враховуючи, що це струм розрядки

$$\begin{aligned} I &= -C \frac{dU_c}{dt} = -C \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \right) = -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot \frac{d}{dt} (e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)) = \\ &= -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot (e^{-\delta t} \cdot (-\delta) \cdot \sin(\omega t + \varphi) + e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega) = -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} (\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) - \delta \cdot \sin(\omega t + \varphi)) = \\ &= -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} (\omega (\cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi) - \delta (\sin \omega t \cdot \cos \varphi + \cos \omega t \cdot \sin \varphi)) = \\ &= -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} (\omega \cos \omega t \cdot \cos \varphi - \omega \sin \omega t \cdot \sin \varphi - \delta \sin \omega t \cdot \cos \varphi - \delta \cos \omega t \cdot \sin \varphi) \end{aligned}$$

Скористаємось виразами $\sin \varphi = \omega \sqrt{LC}$ та $\cos \varphi = \delta \sqrt{LC}$. Тоді попередній вираз буде мати вигляд

$$I = -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} (\omega \cos \omega t \cdot \delta \sqrt{LC} - \omega \sin \omega t \cdot \omega \sqrt{LC} - \delta \sin \omega t \cdot \delta \sqrt{LC} - \delta \cos \omega t \cdot \omega \sqrt{LC}) =$$

$$= -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} \left(-\omega^2 \sqrt{LC} \sin \omega t - \delta^2 \sqrt{LC} \sin \omega t \right) = -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} \left(-\sqrt{LC} \right) (\omega^2 + \delta^2) \sin \omega t$$

Вираз у дужках рівний $\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$I = -C \frac{\varepsilon}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} \left(-\sqrt{LC} \right) \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin \omega t = \frac{\varepsilon C}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin \omega t. \quad (11)$$

Закон зміни напруги з часом на котушці знайдемо із співвідношення $U_L = L \frac{dI}{dt}$

$$\begin{aligned} U_L &= L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon C}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega t \right) = L \frac{\varepsilon C}{\omega \sqrt{LC}} \cdot \left(e^{-\delta t} \cdot (-\delta) \cdot \sin \omega t + e^{-\delta t} \cdot \omega \cos \omega t \right) = \\ &= L \frac{\varepsilon C}{\omega \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} (\omega \cos \omega t - \delta \cdot \sin \omega t). \end{aligned}$$

Порівняємо даний вираз з виразом (10) та застосуємо аналогічний підхід для його спрощення

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{L \varepsilon C}{\omega \sqrt{LC} \cdot \sqrt{LC}} \cdot e^{-\delta t} (\omega \sqrt{LC} \cos \omega t - \delta \sqrt{LC} \cdot \sin \omega t) = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot e^{-\delta t} (\sin \varphi \cos \omega t - \cos \varphi \sin \omega t) = \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin (\varphi - \omega t) = -\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin (\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

Відповідно до формул (10)-(12) в контурі має місце коливальний розряд конденсатора з частотою ω . Коливальний процес має затухаючий характер через втрати енергії на резисторі R . Затухання відбуваються за експоненціальним законом зі швидкістю, що залежить від коефіцієнта δ . Приблизні часові діаграми відповідних функцій представлені на рис.2.

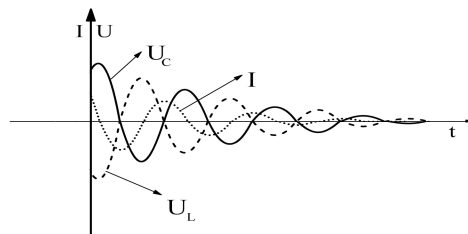


Рис. 2

Аперіодичний процес розрядки. Розглянемо процес розрядки конденсатора при

$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$. Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = 0. \quad (13)$$

Складемо характеристичне рівняння: $LCp^2 + RCP + 1 = 0$. Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (13) буде мати вигляд

$$U_c = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (14)$$

де $p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ - корені характеристичного рівняння, A_1 і A_2 - довільні сталі.

Скористаємось виразом (2) для знаходження сили струму

$$I = -C \frac{dU_c}{dt} = -C \frac{d}{dt} (A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) = -C (A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}). \quad (15)$$

Визначимо A_1 і A_2 з початкових умов. При $t=0$, $U_c=\varepsilon$, $I=0$. Підставимо їх у вирази (14) і (15)

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \varepsilon, \\ -C(A_1 p_1 + A_2 p_2) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{\varepsilon}{1} + \frac{\varepsilon p_1}{p_2 - p_1}, \\ A_2 = \frac{-\varepsilon p_1}{p_2 - p_1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{\varepsilon(p_2 - p_1) + \varepsilon p_1}{p_2 - p_1}, \\ A_2 = \frac{-\varepsilon p_1}{p_2 - p_1}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{\varepsilon p_2}{p_2 - p_1}, \\ A_2 = -\frac{\varepsilon p_1}{p_2 - p_1}. \end{cases} \quad (16)$$

Підставимо (16) у (14) і (15) та отримаємо

$$U_c = \frac{\varepsilon p_2}{p_2 - p_1} e^{p_1 t} - \frac{\varepsilon p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} = \frac{\varepsilon}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \quad (17)$$

$$I = -C \left(\frac{\varepsilon p_2}{p_2 - p_1} p_1 e^{p_1 t} - \frac{\varepsilon p_1}{p_2 - p_1} p_2 e^{p_2 t} \right) = \frac{-C p_1 p_2 \varepsilon}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}),$$

або врахувавши за теоремою Вієта $p_2 \cdot p_1 = \frac{1}{LC}$

$$I = -\frac{\varepsilon}{L \cdot (p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (18)$$

Напругу на котушці знайдемо як

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(-\frac{\varepsilon}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \right) = L \left(-\frac{\varepsilon}{L(p_2 - p_1)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \right) = -\frac{\varepsilon}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

Схематичне зображення аперіодичного процесу розрядки подано на рис.3.

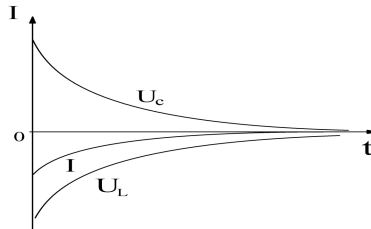


Рис. 3

Граничний аперіодичний розряд конденсатора на котушку і опір. При розгляді аперіодичного розряду конденсатора ми виходили із співвідношення між параметрами контура $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$. Тепер розглянемо той випадок, коли $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ - так званий граничний аперіодичний розряд конденсатора. Це можна зробити підібравши опір резистора R так, щоб

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. В такому випадку корні характеристичного рівняння будуть рівні та від'ємні:

$p_1 = p_2 = p = -\frac{R}{2L}$. Процес розрядки буде аперіодичний, але граничним з коливальним.

Загальний розв'язок диференціального рівняння запишеться у вигляді

$$U_c = (A_1 + A_2 t) e^{pt}. \quad (19)$$

Використовуючи (19) запишемо закон сили струму для цього випадку:

$$I = -C \frac{dU_c}{dt} = -C \frac{d}{dt} (A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt}) = -C (A_1 p e^{pt} + A_2 t p e^{pt} + A_2 e^{pt}) = -C e^{pt} (A_1 p + A_2 p t + A_2) \quad (20)$$

При початкових умовах $U_c(0) = \varepsilon$ і $I(0) = 0$: $A_1 = \varepsilon$; $A_2 = -\varepsilon p = \frac{R\varepsilon}{2L}$, використовуючи значення отриманих вище сталих інтегрування перепишемо (19) і (20)

$$U_c = (\varepsilon - \varepsilon p t) e^{pt} \text{ або } U_c = \varepsilon e^{pt} (1 - pt),$$

$$I = -C (\varepsilon p - \varepsilon p^2 t - \varepsilon p) e^{pt} = -C e^{pt} (-\varepsilon p^2 t) = C \varepsilon p^2 t e^{pt} = C \frac{R^2 \varepsilon}{4L^2} t e^{pt}.$$

Враховуючи, що $R^2 = 4 \frac{L}{C}$ остаточно отримаємо $I = \frac{C \varepsilon \cdot 4 L t e^{pt}}{C \cdot 4 L^2} = \frac{\varepsilon}{L} t \cdot e^{pt}$. Використовуючи попередній вираз знайдемо значення напруги на котушці U_L

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon}{L} \cdot t \cdot e^{pt} \right) = L \frac{\varepsilon}{L} (e^{pt} + t \cdot e^{pt} \cdot p) = \varepsilon e^{pt} (1 + pt).$$

Виклад основного матеріалу дослідження. Експеримент. Дослідження швидкоплинних процесів проводилось на спеціальному навчальному стенді, схематичний вигляд якого представлено на рис. 4.

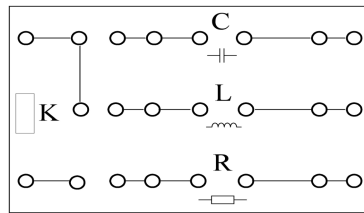


Рис.4.

В експерименті використовувалось джерело живлення постійної напруги 12В, батарея конденсаторів ємністю $0,5 \div 60$ мкФ, котушка індуктивності без залізного осердя на $1200 \div 3600$ витків, магазин опорів від 0,01 Ом до 10 кОм. Вимірювання проводились за допомогою універсального комп'ютерно – вимірювального комплексу, під'єднаного до стаціонарного комп'ютера через USB кабель. Було використано датчики напруги на ± 25 В та ± 12 В і датчик сили струму на ± 2 А.

Схему досліду зображено на рис. 5. На навчальному стенді було зібране електричне коло з послідовно з'єднаних джерела живлення ε , ключа К, магазину опорів R, батареї конденсаторів C, датчика сили струму на ± 2 А та котушки індуктивністю L.

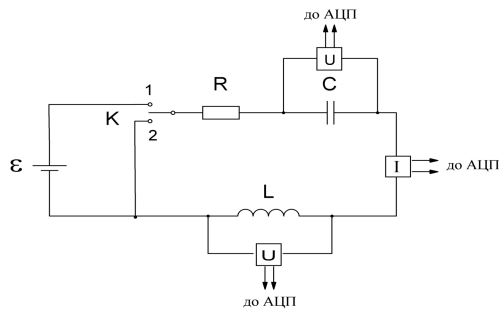


Рис.5.

До батареї конденсаторів С і котушки індуктивності L під'єднувались паралельно датчики напруги на $\pm 25\text{В}$ та $\pm 12\text{В}$ відповідно. Засобами програмного забезпечення встановлювався час вимірювання 200мкс.

Експеримент проходив так. При розімкнутому ключі К вмикалось джерело живлення на 2В. Потім відбувалось замикання ключа в положення 1, при якому батарея конденсаторів С заряджалась через магазин опорів R до значення прикладеної ЕРС джерела живлення. За повної зарядки батареї конденсаторів ключ К переводився у положення 2. В результаті відбувалась розрядка конденсаторів через магазин опір R та котушку індуктивності L. У серії дослідів L і С залишались сталими, а опір R змінювався у вибраному діапазоні. В експерименті використовувались конденсатори ємністю 5, 10, 20, 40 мкФ; котушки індуктивності на 1200, 2400, 3600 витків без осердя, опори в 1, 10, 100, 1000 Ом.

Результати експериментів. В результаті розрядки батареї конденсаторів на котушку індуктивності L і магазин опорів R на характер процесу впливало співвідношення між параметрами електричного кола R, L та C. При $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ спостерігався періодичний коливальний процес розрядки конденсатора. На рис.6 зображено типовий характер цього процесу для котушки в 3600 витків, ємності 20 мкФ та опору в 10 Ом

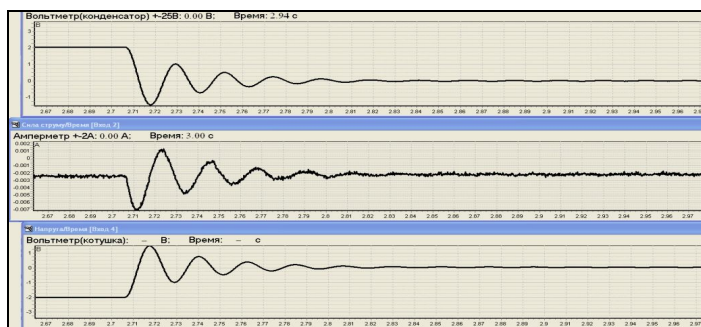


Рис. 6

При $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ спостерігався аперіодичний процес розрядки. На рис.7 зображено типовий характер цього процесу для котушки в 2400 витків, ємності 20 мкФ та опору в 1 кОм

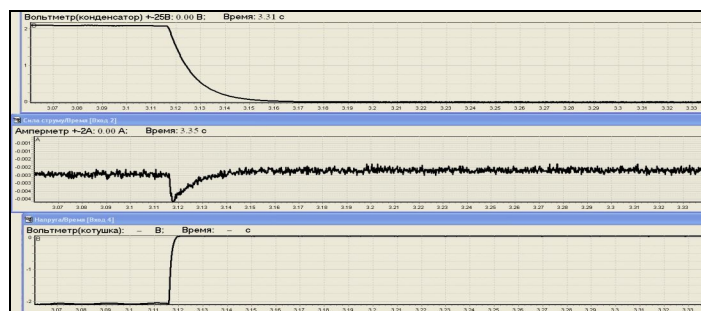


Рис. 7

При $\frac{R^2}{4L^2} \approx \frac{1}{LC}$ спостерігався граничний аперіодичний процес розрядки конденсатора. Графіки цього процесу зображено на рис.8 для електричного кола котушки в 1200 витків, ємності 40 мкФ та опору в 100 Ом.

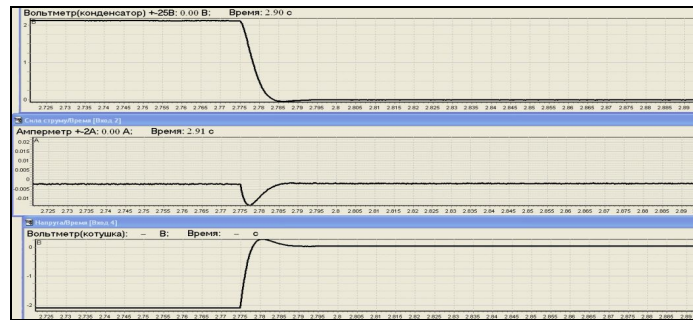


Рис.8

Процес зарядки конденсатора мав періодичний коливальний характер (рис.9) при значеннях опорів від 1-100 Ом та аперіодичний (рис.10) при опорі близько 1 кОма.

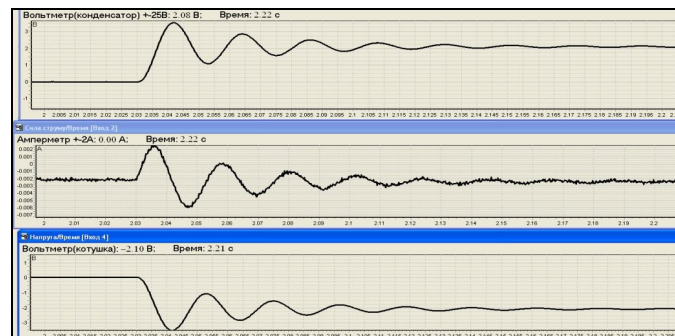


Рис. 9

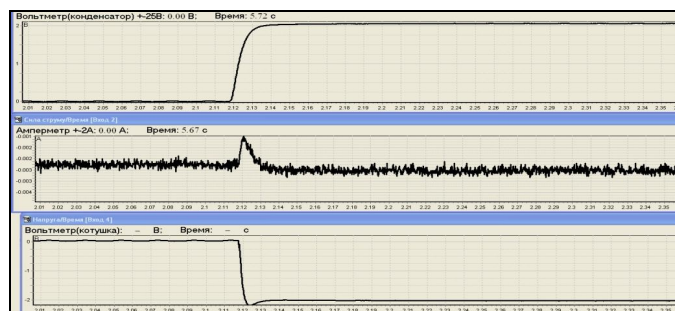


Рис. 10

Висновки. У роботі експериментально підтверджено характер процесів, що тривають протягом декількох мікросекунд у моменти заряджання та розряджання конденсатора через опір та котушку індуктивності. Експериментально підтверджений характер швидкоплинних процесів повністю відповідає теоретичним розрахункам. Проведення експерименту та аналіз отриманих даних став можливим завдяки використанню сучасного комп'ютерно - вимірювального комплексу на основі АЦП.

Список використаної літератури

1. Горбачук І.Т., Козеренко С.І., Левандовський В.В., Мусієнко Ю.А., Шут М.І., Янчевський Л.К. Дослідження будови та принципу дії елементів структури аналогово-цифрового перетворювача. Спеціальний фізичний практикум. Частина 3. // За заг.ред. проф. Горбачука І.Т. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2011. – 55 с.
2. Кучерук І. М., Горбачук І. Т., Луцик П. П. Загальний курс фізики: Навчальний посібник - Т. 2. Електрика і магнетизм. -К.: Техніка, 2003. - 452 с.
3. Калашников С. Г. Электричество. 5-е изд. -М: Наука, 1985. -576 с.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ ЗАДАЧ ЗАСОБАМИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ МАГІСТРІВ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ОСВІТИ

Закусило А.І.,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Касперський А.В.,

завідувач кафедри технічної фізики та математики,

доктор пед. наук, професор,

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Висвітлено роль і значення математичного моделювання в процесі пізнання і практичного використання явищ та процесів навколишнього світу. Обґрунтовано необхідність посилення фізико-математичного компонента фахової підготовки магістрів технологічної освіти. Наведено загальну схему і приклади розв'язування задач шляхом математичного моделювання засобами інтегрального числення.

Освещены роль и значение математического моделирования в процессе познания и практического использования явлений и процессов окружающего мира. Обоснована необходимость усиления физико-математического компонента профессиональной подготовки магистров технологического образования. Приведена общая схема и примеры решения задач путём математического моделирования средствами интегрального исчисления.

The role and significance of mathematical modelling in the process of cognition and practical use of phenomena and processes of surroundings are illustrated. The necessity of intensification of physics and mathematics component of the master of technological education training process has been proved. The general scheme and examples of task solutions by means of mathematical modelling by integral calculus has been given.

1. Математика є універсальною мовою, що широко використовується в усіх сферах людської діяльності. На сучасному етапі її значення у розвитку суспільства суттєво зростає. На протязі останніх декількох століть математика перетворилася з науки здебільшого теоретичної в науку з дуже широкою областю практичних застосувань. Розв'язування практичних задач пов'язане з їх формалізацією, тобто з необхідністю переведення їх на мову математичних символів, формул, відношень тощо.

Для успішної участі у сучасному суспільному житті фахівець повинен володіти певними математичними методами та навичками їх застосування до розв'язування практичних задач. Певної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає вивчення багатьох навчальних дисциплін, особливо технічних. Значні вимоги до володіння математикою у розв'язанні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах.

Розв'язування прикладних задач математичними методами підвищує інтерес майбутніх фахівців до вивчення математики. Оскільки застосування математики дає бажаний практичний результат, то математика стає "потрібною" майбутнім фахівцям. При розв'язуванні подібних задач природно відбувається інтеграція різних навчальних дисциплін у

процесі становлення сучасного фахівця-технолога. Розв'язування прикладних задач сприяє свідомому, якісному засвоєнню навчального матеріалу, активізує навчально-пізнавальну діяльність, створює умови для творчої самореалізації у процесі навчання. Розв'язування прикладних задач, безперечно, сприяє більш якісному засвоєнню математики, дозволяє здійснювати перенесення отриманих знань і умінь в ту чи іншу галузь, що у свою чергу, активізує інтерес до завдань прикладного характеру і вивчення математики в цілому.

2. Людство з давніх давен постійно *моделює* природні об'єкти, явища і процеси, оскільки моделі спрощують їх і допомагають людині глибше пізнати реальний світ. Більше того, будь-яка наука починається з розробки простих і адекватних моделей реальності.

Серед великої кількості різних моделей особливу роль відіграють математичні моделі. Так називають наближений математичний опис деякого реального об'єкта зовнішнього світу за допомогою математичної символіки у вигляді певних відношень, що замінює вивчення цього об'єкта складанням, розв'язуванням і дослідженням математичних задач. Вивчення явищ за допомогою математичних моделей називають *математичним моделюванням*. Суть математичної моделі полягає в тому, що складне, багатогранне явище реального світу замінюється його спрощеною схемою.

Отже, математична модель – це математичний об'єкт, що в процесі пізнання замінює об'єкт-оригінал, зберігаючи основні важливі для дослідження типові його риси. Інакше кажучи, це є наближений опис деякого явища зовнішнього світу мовою математики (за допомогою відповідних математичних об'єктів: рівнянь, нерівностей та їх систем тощо), що замінює вивчення цього явища дослідженням і розв'язуванням відповідної математичної задачі.

Математичне моделювання є потужним інструментом для дослідження різних процесів, який розширює творчі можливості фахівця у вирішенні цілого ряду професійних завдань, істотно підвищує його професійну кваліфікацію. Сучасному спеціалісту слід ґрунтовно знати математику, тобто не просто вміти використовувати її для простих розрахунково-обчислювальних операцій, а розуміти математичні методи дослідження та їх можливості. Тільки розуміння сутності математичного моделювання дозволяє ефективно використовувати цей метод у професійній діяльності.

Процес розв'язування прикладних задач починається з етапу математичного моделювання. Побудова математичної моделі є найбільш відповідальним і складним етапом розв'язування прикладної задачі. Реалізація цього етапу потребує багатьох важливих умінь: виділяти істотні фактори, що визначають досліджуване явище (процес); вибирати математичний апарат для побудови моделі; виділяти фактори, що викликають похибку при побудові моделі.

Важливо, що добре побудована математична модель часто дає деякі нові знання про об'єкт-оригінал. При цьому вміння працювати з однією математичною моделлю дає можливість знаходити розв'язання цілого ряду прикладних задач із різних галузей практичної діяльності людини.

У процесі розв'язування прикладної задачі звичайно виникає потреба побудови математичних моделей реальних об'єктів, про які йдеться в задачі. Математичні моделі

реального процесу або об'єкта можуть бути подані у рівнянь, нерівностей та їх систем тощо. У реальному житті є багато задач, які, на перший погляд, не мають між собою нічого спільного. Але часто для їх розв'язування можна використовувати одну й ту саму математичну модель. Тому вміння працювати навіть з однією математичною моделлю дає можливість знаходити розв'язання різних прикладних задач.

Математичне моделювання дає можливість не тільки обчислити конкретне значення якоїсь величини, але й досліджувати об'єкт або процес, про який йдеться в задачі, аналізуючи зміни значень шуканої величини при певних варіаціях даних величин, які містяться в умові задачі.

Величезна роль математичного моделювання в процесі пізнання і практичного використання явищ та процесів навколишнього світу на сьогодні не викликає жодних сумнівів. Математичні моделі, за допомогою яких дослідження явищ зовнішнього світу зводиться до розв'язування математичних задач, займають провідне місце серед інших методів дослідження і дозволяють не тільки пояснити явища, які спостерігаються, а й заглянути туди, де ще в принципі не могло бути дослідних, експериментальних даних. Саме так було, наприклад, при проведенні перших атомних і водневих вибухів. Більше того, існують сфери людської діяльності, де проведення експериментів, одержання експериментальних результатів є принципово неможливим.

Математичне моделювання проникає сьогодні майже у всі сфери діяльності людини – в економіку і біологію, екологію і лінгвістику, медицину і психологію, історію і соціологію тощо. Чим складніше об'єкт дослідження, тим більше значення приділяється математичній моделі явища, яке досліджується. З'являється ціла ієрархія математичних моделей, кожна з яких описує явище, що вивчається, все глибше, ширше, всебічніше.

З огляду на вищесказане має місце нагальна необхідність посилення фізико-математичного компонента фахової підготовки магістрів технологічної освіти.

3. Сучасна фізика і техніка ефективно й суттєво використовує математичний апарат, тому володіння ним давно перетворилося на світовий стандарт вищої освіти. Звичайно, що оволодіння сучасними математичними методами як надбанням сучасної науки є необхідним і для вітчизняних фахівців-технологів.

Одним із найважливіших математичних понять, походження і розвиток яких пов'язані з розв'язуванням прикладних задач, є поняття *інтеграла*. Це поняття і побудований на його основі метод застосовуються сьогодні в найрізноманітніших галузях науково-практичної діяльності людини, в тому числі у фізиці, хімії, технічних дисциплінах тощо.

При розв'язуванні певного класу фізичних задач (обчислення роботи, маси тощо) ефективним є застосування визначеного інтеграла для моделювання таких задач. Мова йтиме про обчислення фізичних величин шляхом підсумовування нескінченно малих елементів (наприклад, при обчисленні роботи змінної сили, маси змінної густини тощо).

Традиційно практичне застосування інтеграла ілюструється обчисленням площ різних фігур, об'ємів геометричних тіл та деяких фізичних застосувань ([1-3]). Однак слід зазначити, що інтегральне числення дає багатий математичний апарат для моделювання і дослідження різних об'єктів, явищ та процесів, що відбуваються в багатьох галузях науки і

техніки.

Існує цілий ряд задач, що мають важливе практичне значення, при розв'язуванні яких доцільно (а часто і необхідно) застосувати визначений інтеграл. При цьому потрібно користуватись *загальною схемою* застосування визначеного інтеграла для обчислення різних величин.

Нехай шукане значення A фізичної величини залежить від деякої змінної x , де $x \in [a, b]$. Розіб'ємо цей інтервал на n частинних інтервалів $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), де $x_0 = a$, $x_n = b$. Якщо значення A може бути одержане як сума тих величин, що відповідають всім частинним інтервалам $[x_i, x_{i+1}]$ розбиття інтервалу $[a, b]$, то кажуть, що ця величина має властивість адитивності. Такими величинами є площа, робота, шлях, статичний момент, момент інерції, сила тиску тощо.

Для обчислення таких величин є застосовною загальна схема, яка впливає з означення визначеного інтеграла як границі інтегральних сум. Згідно з цією схемою потрібно здійснити такі кроки:

1) Інтервал $[a, b]$ розбити на інтервали $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$), де $x_0 = a$, $x_n = b$.

2) Знайти наближене значення шуканої величини A на i -му частинному інтервалі. При цьому можуть бути застосовані різні припущення. Наприклад, малі криволінійні ділянки можна замінити прямолінійними; змінну силу на малих ділянках шляху можна замінити постійною силою тощо.

3) Застосовуючи властивість адитивності шуканої величини, записати інтегральну суму, що виражає наближене значення шуканої величини:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i,$$

де $f(x)$ – функція, яка визначається умовою задачі.

4) В інтегральній сумі перейти до границі при прямуванні довжини найбільшого із частинних

інтервалів до нуля, тобто обчислити шукану величину у вигляді визначеного інтеграла:

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

4. Наведемо приклади розв'язування задач.

Задача 1. Знайти силу, з якою кільце масою M і радіусом R діє на матеріальну точку C масою m , яка лежить на прямій, що проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини, якщо відстань від точки C до центра кільця дорівнює a .

Розв'язування. Розіб'ємо кільце на елементарні ділянки Δl_i , вважаючи кожна таку ділянку матеріальною точкою, що має масу $M_i = \rho \Delta l_i$, де $\rho = \frac{M}{L} = \frac{M}{2\pi R}$ – лінійна питома густина, L – довжина кільця.

Якщо $\Delta\varphi_i$ – кут, що відповідає ділянці дуги Δl_i , то $\Delta l_i = R\Delta\varphi_i$.

Отже,

$$M_i = \rho\Delta l_i = \frac{M}{2\pi R}\Delta l_i = \frac{M}{2\pi R}R\Delta\varphi_i = \frac{M}{2\pi}\Delta\varphi_i.$$

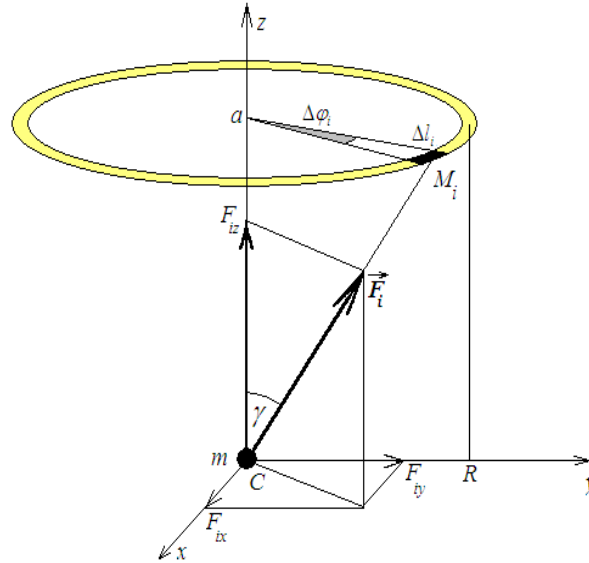


Рис. 1.

Знайдемо силу F_i взаємодії матеріальної точки C з малою ділянкою кільця Δl_i . Для цього подамо вектор \vec{F}_i цієї сили у вигляді розкладу за базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k},$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекції вектора \vec{F}_i на осі координат (рис. 1).

Шукана сила \vec{F} є рівнодійною всіх елементарних сил $\vec{F}_{ix}, \vec{F}_{iy}, \vec{F}_{iz}$ і визначається так:

$$\vec{F} = \vec{i} \sum_{i=1}^n F_{ix} + \vec{j} \sum_{i=1}^n F_{iy} + \vec{k} \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Очевидно, що внаслідок симетрії поставленої задачі

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

Таким чином, величина шуканої сили взаємодії визначається як сума проекцій F_{iz} векторів \vec{F}_i на вісь Oz . Знаходимо

$$F_{iz} = F_i \cos \gamma, \quad (1)$$

де γ – кут між віссю Oz і вектором \vec{F}_i , який є постійним для всіх $i = 1, 2, \dots, n$.

Із прямокутного трикутника COA маємо:

$$\cos \gamma = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}. \quad (2)$$

Згідно із законом взаємодії двох точкових мас величина F_i визначається таким чином:

$$F_i \approx k \frac{m \cdot M_i}{r^2} = \frac{kmM}{(R^2 + a^2)2\pi} \Delta\varphi_i. \quad (3)$$

Тоді, підставляючи (2) і (3) в (1), взявши суму по i , одержимо:

$$F \approx \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \Delta\varphi_i. \quad (4)$$

Точним значенням величини сили взаємодії є границя, до якої прямує інтегральна сума (4), коли довжина найбільшої із частинних ділянок $\max \Delta l_i \rightarrow 0$, а тому і

$$\lambda = \max \Delta\varphi_i \rightarrow 0:$$

$$\begin{aligned} F &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \Delta\varphi_i = \int_0^{2\pi} \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} d\varphi = \\ &= \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{(R^2 + a^2)^3}} \cdot 2\pi = \frac{kmMa}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{kmMa}{\sqrt{(R^2 + a^2)^3}}.$

Задача 2. Знайти момент інерції тіла, обмеженого параболоїдом обертання, відносно осі обертання, якщо радіус основи цього тіла дорівнює R , а висота H .

Розв'язування. Задане тіло обмежене поверхнею, що одержана в результаті обертання параболічного сегмента навколо осі Oz :

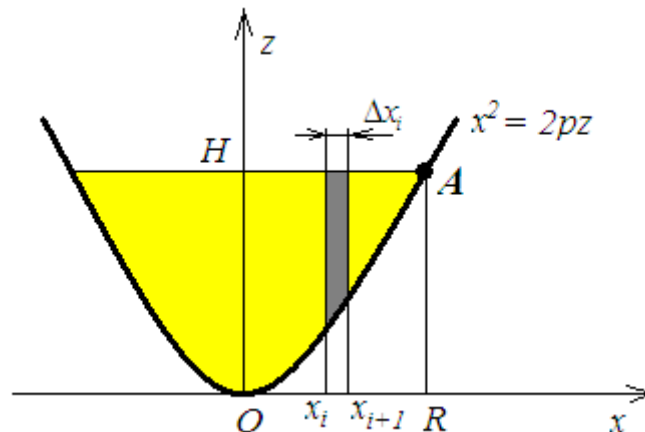


Рис. 2.

Рівняння параболі має вигляд $x^2 = 2pz$.

Для визначення параметра p підставимо в рівняння параболі координати точки

$A(R, H)$, що належить параболі (рис. 2). Тоді $R^2 = 2pH$, звідки $2p = \frac{R^2}{H}$, і рівняння

параболі запишеться у вигляді $x^2 = \frac{R^2}{H} z$. Рівняння поверхні обертання ми одержимо, коли

замінімо x^2 на $x^2 + y^2$, тобто рівняння заданого параболоїда обертання має вигляд:

$$z = \frac{H}{R^2} (x^2 + y^2).$$

При розв'язуванні задач на обчислення моменту інерції слід звернути увагу на те, що розбиття на елементарні ділянки слід проводити так, щоб всі точки i -ї ділянки

знаходилися на приблизно однаковій відстані від осі обертання. У нашій задачі цього можна досягти, коли параболоїд обертання розбити системою кругових циліндрів, осі яких збігаються з віссю обертання Oz . Тоді всі точки параболоїда, які лежать між циліндрами радіусів x_i та x_{i+1} , будуть знаходитися на приблизно однаковій відстані від осі обертання внаслідок малості Δx_i . Маса виділеної ділянки визначається як маса циліндричного кільця товщиною Δx_i і висотою h_i , де

$$h_i = H - z(x_i, 0) = H - \frac{H}{R^2} x_i^2 = \frac{H}{R^2} (R^2 - x_i^2).$$

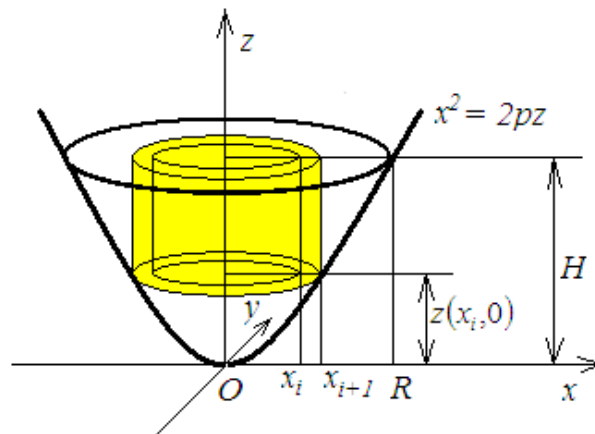


Рис. 3.

З огляду на зроблене розбиття виділену ділянку (рис. 3) можна розглядати як матеріальну точку, що має масу

$$m_i \approx \pi(x_i + \Delta x_i)^2 h_i - \pi x_i^2 h_i \approx 2\pi x_i \Delta x_i h_i = 2\pi x_i \frac{H}{R^2} (R^2 - x_i^2) \Delta x_i.$$

Тоді момент інерції i -ї ділянки наближено дорівнює:

$$I_i \approx \frac{2\pi H}{R^2} x_i^3 (R^2 - x_i^2) \Delta x_i.$$

Точне значення моменту інерції одержимо, коли візьмемо суму I_i за всіма $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ і перейдемо до границі в одержаній інтегральній сумі при $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0$:

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \int_0^R \frac{2\pi H}{R^2} (x^3 R^2 - x^5) dx = \frac{2\pi H}{R^2} \left(\frac{x^4 R^2}{4} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi R^4 H}{6}.$$

Відповідь: $\frac{\pi R^4 H}{6}.$

Список використаної літератури

1. Дороговцев А.Я. Интеграл та його застосування. К.: Вища школа, 1974.
2. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: приклади і задачі. Посібник. – К.: Академія, 2002. – 624 с.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: Книга 1. – К.: Либідь, 2010. – 592 с.

ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ПОСТІЙНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО СТРУМУ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ФІЗИЧНИХ ПОНЯТЬ

Кульчицький В.І.,

кандидат пед. наук, доцент кафедри фізики,

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

У роботі розглядається вивчення законів постійного електричного струму на основі системи фундаментальних фізичних понять симетрії, відносності, електромагнітної взаємодії в учнів профільних (фізичних, фізико-математичних, фізико-технічних) класів та студентів технічних спеціальностей вузів у процесі вивчення розділу «Електродинаміка».

В работе рассматривается изучение законов постоянного электрического тока на основе системы фундаментальных физических понятий симметрии, относительности, электромагнитного взаимодействия у учащихся профильных (физических, физико-математических, физико-технических) классов и студентов технических специальностей вузов в процессе изучения раздела «Электродинамика».

In the present paper a study of direct current laws on the basis of fundamental physical notions, namely a symmetry, a relativity, an electromagnetic interaction, within the “Electrodynamics” unit for specialized (physical, physical-mathematical, physical-technical) classes and students of technical specialities of university is considered.

У підручниках та методичних посібниках з фізики для профільних (фізичних, фізико-математичних, фізико-технічних) класів та студентів технічних спеціальностей вузів при вивченні законів постійного електричного струму обмежуються законами Ома [1, с. 100; 9, с. 192-251], не звертаючи уваги на природу та механізм виникнення стаціонарного електричного поля у провіднику зі струмом та наслідки, які впливають із законів Ома.

У науково-методичній літературі достатньо детально обґрунтований висновок про те, що заряджені частинки, які створюють однорідне стаціонарне електричне поле навколо циліндричного провідника, розташовані на його поверхні [1, с. 98-100; 2, с. 263-271; 3]. У [2, с. 263-313; 4] проаналізовано механізм виникнення електричного поля провідника з постійним струмом, розглянуто електромагнітну взаємодію між провідниками зі струмами та релятивістську природу стаціонарного електричного поля провідника зі струмом.

Але аналізу процесів, які відбуваються у замкнутому колі із ввімкненим гальванічним джерелом струму на основі системи фундаментальних фізичних понять симетрії, відносності, електромагнітної взаємодії, приділяється не достатньо уваги. Не досліджуються умови роботи джерела постійного струму та не достатньо аналізуються послідовне та паралельне з'єднання джерел струму.

Тому **метою статті** є дослідження процесів, які відбуваються у замкнутому колі із ввімкненим гальванічним джерелом струму та розробка методики вивчення законів постійного електричного струму та наслідків, які з них впливають, на основі системи фундаментальних фізичних понять симетрії, відносності, електромагнітної взаємодії в учнів профільних (фізичних, фізико-математичних, фізико-технічних) класів та студентів технічних спеціальностей вузів у процесі вивчення розділу «Електродинаміка» з точки зору сучасних фізичних теорій [6, с. 198-217; 7, с. 116-149; 8, с. 174-207]. Звичайно, теоретичний

рівень викладання даної теми у профільних класах та на технічних спеціальностях вузів відрізняються. Але запропонований підхід не лише дає змогу проаналізувати процеси, які відбуваються у замкнутому колі із ввімкненим гальванічним джерелом струму на основі закону збереження енергії, дослідити умови роботи джерела постійного струму, послідовне та паралельне з'єднання джерел, а й структурує навчальний матеріал розділу «Електродинаміка» для учнів профільних класів та студентів технічних спеціальностей вузів на основі ідей відносності, симетрії, електромагнітної взаємодії та без логічного конфлікту із знаннями, набутими раніше, підводить до вивчення та розуміння електромагнітного поля, як квантово-релятивістського об'єкта [2, с. 263-313; 4].

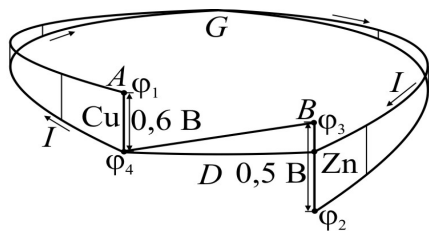
Зупинимось на основних моментах підходу, який ми пропонуємо.

Вивчивши закон Ома для ділянки однорідної ділянки кола, на якій не діють сторонні сили:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (1)$$

де I – сила струму, U – напруга на кінцях ділянки, R – опір даної ділянки, та закон Ома для нерозгалуженого замкнутого кола, яке має джерело струму з електрорушійною силою (EPC)

\mathcal{E} і внутрішнім опором r :



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad (2)$$

Рис. 1. Зміна потенціалу в колі з гальванічним елементом

ставимо проблематичне питання: якою буде сила струму на ділянці неоднорідного кола, між кінцями якого існує деяка різниця потенціалів і всередині якого є стрибки потенціалу, наприклад, ввімкнено гальванічне джерело струму чи акумулятор?

Розглянувши будову гальванічного джерела струму, підкреслюємо, що сторонні EPC не виникають у просторі між металевими пластинами, опущеними у сильний електроліт - наприклад, розчин сірчаної кислоти (H_2SO_4) у воді. У даному випадку є дві сторонні EPC , які зосереджені на поверхневих шарах пластин, (наприклад, цинковій та мідній) та розчину електроліту [6, с. 198-208]. Ці шари мають молекулярну товщину. У всьому іншому об'ємі розчину електроліту ніяких сторонніх EPC не існує. Робота сторонніх сил, яка виконується у джерелі струму за одиницю часу в одиниці об'єму витрачається на збільшення енергії електромагнітного поля, нагрівання провідника та на компенсацію енергії, яка витікає через поверхню, яка обмежує цей одиничний об'єм, за одиницю часу.

При з'єднанні пластин джерела струму провідником, у ньому тече струм від мідної пластини (позитивно зарядженого електрода) до цинкової пластини (негативно зарядженого електрода). У розчині між електродами струм тече від цинкової пластини до мідної. Отже, лінії постійного струму замкнені.

Аналізуємо зміни потенціалу у замкнутому колі із ввімкненим гальванічним джерелом струму (рис. 1) [6, с. 206-207]. Точки А і В відповідають поверхневим шарам контактів мідної та цинкової пластин із розчином, у яких діють сторонні EPC джерела струму. Їх різниця і є стороння EPC джерела струму, вона рівна зменшенню потенціалу на омичному опорі зовнішнього кола на ділянці АСВ і на омичному опорі електроліту на ділянці

BDA. Позначивши сторонню *EPC* джерела струму $\mathcal{E}_{\text{стор}}$, опір зовнішнього кола – R , внутрішній опір джерела струму – r , отримаємо закон Ома для всього кола у вигляді:

$$\mathcal{E}_{\text{стор}} = I(R + r). \quad (2^*)$$

Стороння *EPC* джерела струму визначається властивостями джерела струму та не залежить від сили струму у колі. Із (2*) випливає, що напруга у зовнішньому колі ($U = IR$) не дорівнює *EPC* джерела струму, і завжди менша від неї. Це і є напруга між затискачами працюючого джерела струму. Із збільшенням сили струму напруга у зовнішньому колі зменшується, причому тим швидше, чим більший внутрішній опір джерела струму.

Аналізуємо процеси, які відбуваються у замкнутому колі зі струмом на основі закону збереження енергії. Нехай A_1 – робота, яку виконує електричне поле (ЕП) при переміщенні заряду q по замкнутому колі, A_2 – робота сторонніх електрорушійних сил. ЕП виконує роботу на ділянках, де потенціал спадає від φ_1 до φ_2 (зовнішнє коло) і від φ_3 до φ_4 (за рахунок омичного опору розчину електроліту всередині джерела струму). Ця робота рівна:

$$A_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)q + (\varphi_3 - \varphi_4)q. \quad (3)$$

Робота сторонніх *EPC* у шарах молекулярної товщини приводить до зростання потенціалу від φ_4 до φ_1 на мідній пластині та від φ_2 до φ_3 на цинковій. Тому робота сторонніх *EPC* рівна:

$$A_2 = (\varphi_1 - \varphi_4)q + (\varphi_3 - \varphi_2)q = (\varphi_1 - \varphi_2)q + (\varphi_3 - \varphi_4)q, \quad (4)$$

Порівнюючи (3) і (4) робимо висновок, що $A_1 = A_2$, тобто робота, яка здійснюється у колі при проходженні струму, дорівнює роботі сторонніх *EPC*.

Оскільки $(\varphi_1 - \varphi_2) = IR$, $(\varphi_3 - \varphi_4) = Ir$, то

$$IR + Ir = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_3 - \varphi_4) = (\varphi_1 - \varphi_4) + (\varphi_3 - \varphi_2) = \mathcal{E}_{\text{стор}}.$$

Слід зазначити, що зменшення потенціалу у колі компенсується відповідним збільшенням потенціалу внаслідок дії сторонніх *EPC* на заряди. При проходженні струму у колі виконується робота і виділяється енергія, наприклад у формі теплоти. Сторонні *EPC* здійснюють роботу над зарядами, надаючи їм енергію. Тому вся робота, яка здійснюється постійним струмом, виконується за рахунок енергії сторонніх електрорушійних сил. Носієм енергії струму є електромагнітне поле, яке локалізоване як у провіднику, так і в оточуючому його просторі, а не заряджені частинки. У полі постійних струмів розподіл зарядів у просторі повинен бути стаціонарним. Але якщо поле стаціонарне, то воно повинно бути тотожне з електростатичним полем. Зміна одних носіїв заряду іншими у даній точці провідника зі струмом, внаслідок існування струму, не позначається на напруженості електричного поля, тому що макроскопічна густина заряду у кожній точці провідника залишається незмінною. Сили поля виконують роботу, а еквівалентне цій роботі тепло виділяється у провіднику. Оскільки процес стаціонарний, то вся енергія, яка виділяється у колі, неперервно компенсується за рахунок інших видів енергії. Еквівалентна цій енергії робота виконується сторонніми силами у джерелі *EPC* [2, с. 263-313; 4].

Розглянемо ділянку неоднорідного кола, яка складається із двох послідовно з'єднаних мідного і цинкового провідників (рис. 2).

Між різними провідниками існує стрибок потенціалу, обумовлений контактною різницею потенціалів. Її виникнення пояснюється тим, що кількість вільних електронів в одиниці об'єму, – концентрація електронного газу, – різна у різних металах. При з'єднанні металів відбувається дифузія електронів через контакт із того металу, де концентрація їх вища, у метал із нижчою концентрацією. У результаті між різними металами виникає різниця потенціалів. Величина цієї різниці потенціалів визначається тим, що у динамічній рівновазі, яка встановилася, дифузний потік електронів урівноважується зустрічним потоком, який створюється електричним полем, яке виникає у контактному шарі [5; 8, с. 476-484].

Приєднаємо тепер кінці провідників А і В до джерела постійного струму. Нехай потенціал лівого провідника - φ_1 , а правого провідника В - φ_2 (рис. 2). При проходженні струму у колі $\varphi_1 \neq \varphi_A$ і $\varphi_2 \neq \varphi_B$. Для послідовно з'єднаних провідників А і В маємо:

$$\varphi_1 - \varphi_A = IR_A, \quad (5)$$

де R_A – опір ділянки А.

$$\varphi_B - \varphi_2 = IR_B, \quad (6)$$

де R_B – опір ділянки В.

Додамо (5) до (6):

$$\varphi_1 - \varphi_A + \varphi_B - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_B - \varphi_A) = I(R_B + R_A). \quad (7)$$

Але $(\varphi_1 - \varphi_2) = U$, а $\varphi_B - \varphi_A$ – є стрибок потенціалу у контактному шарі металів, позначимо $\varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E}$ Тоді (7) можна записати:

$$I = \frac{U + \mathcal{E}}{R}, \quad (8)$$

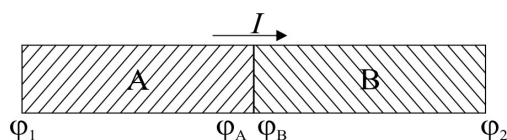


Рис. 2. Ділянка неоднорідного кола

де R – повний опір ділянки кола.

Якщо $\varphi_B - \varphi_A > 0$, то $\mathcal{E} > 0$ і стрибок підвищує значення потенціалу, а коли $\varphi_B - \varphi_A < 0$, то понижує. Стрибок потенціалу виникає в результаті дифузії електронів, тобто сил не електростатичного походження (не кулонівських, які називають сторонніми), обумовлених хаотичним рухом електронів. Відношення роботи сторонніх сил по переміщенню позитивного заряду на деякій ділянці кола до величини цього заряду, протилежно напрямку ЕП у контактному шарі, визначається величиною стрибка потенціалу.

Закон Ома у формі (8) є узагальненням (1) і (2). Дійсно, для однорідної ділянки $\mathcal{E} = 0$, і із (8) отримуємо (1), а для нерозгалуженого замкнутого кола $U = 0$ і із (8) отримуємо (2).

Аналізуємо процес заряджання акумулятора на основі закону збереження енергії. У цьому випадку струм у колі має напрямок, протилежний до струму при розряджанні акумулятора (рис.3) [7, с. 138-142; 8, с. 426-434]. Оскільки ЕРС акумулятора зменшує потенціал у колі у напрямку протікання струму, то згідно закону Ома для неоднорідної ділянки (8), сила струму у колі рівна:

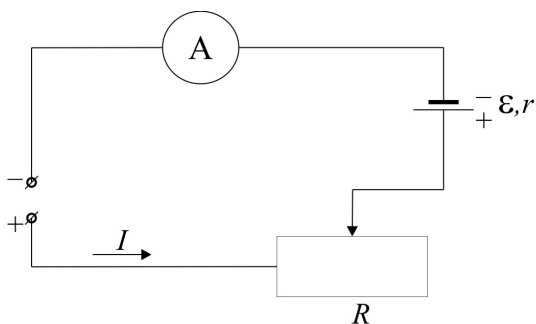


Рис. 3. Схема заряджання акумулятора

$$I = \frac{U - \mathcal{E}}{R + r}, \quad (9)$$

де r – внутрішній опір акумулятора, а R – опір, з допомогою якого регулюють величину зарядного струму. Струм протікатиме у вказаному напрямку лише за умови $\mathcal{E} < U$. Робота струму на всій ділянці дорівнює IU . При цьому виділяється кількість теплоти $I^2(R+r)$. Крім заряджання акумулятора та виділення тепла, ніяких інших енергетичних

перетворень у колі не відбувається. Згідно закону збереження енергії:

$$IU = I^2(R + r) + P_{\text{зар.}}, \quad (10)$$

де $P_{\text{зар.}}$ – потужність, яка витрачається на заряджання акумулятора. Підставляючи (10) у (9), отримуємо:

$$P_{\text{зар.}} = \frac{(U - \mathcal{E})U}{R + r} - \frac{(U - \mathcal{E})^2}{(R + r)^2}(R + r) = \frac{\mathcal{E}(U - \mathcal{E})}{R + r} = I\mathcal{E}. \quad (11)$$

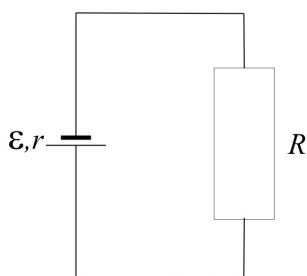


Рис. 4. Дослідження умов роботи джерела струму

Отже, при заряджанні акумулятор за одиницю часу отримує енергію, рівну $I\mathcal{E}$. Із міркувань симетрії випливає, що при розряджанні акумулятор розвиває потужність $I\mathcal{E}$.

Дослідимо умови роботи джерела постійного струму, яке замкнуте на зовнішній опір R (рис. 4) [8, с. 198], та яким повинен бути опір навантаження R , щоб отримати максимальні значення силу струму, корисної потужності та коефіцієнта корисної дії у колі?

Згідно із законом Ома (2), сила струму у колі рівна $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$. Повна потужність, яку розвиває джерело струму:

$$P_n = I\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}. \quad (12)$$

Корисна потужність, яка виділяється на опорі R :

$$P_k = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}. \quad (13)$$

Тому коефіцієнт корисної дії:

$$\eta = \frac{P_k}{P_n} = \frac{R}{R + r}. \quad (14)$$

Максимальне значення P_n отримуємо при $R=0$, тобто при короткому замиканні джерела струму (рис. 5, графік 1). При цьому із (13) та (14) слідує, що $P_k = 0$ і $\eta = 0$. Перетворимо (13):

$$P_{\kappa.} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2/R} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+2r+r^2)/R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R-2r+\frac{r^2}{R}+4r} = \frac{\mathcal{E}^2}{(\sqrt{R}-\frac{r}{\sqrt{R}})^2+4r}. \quad (15)$$

Знаменник у (15) мінімальний, коли

$\sqrt{R} - \frac{r}{\sqrt{R}} = 0$, тобто коли $R = r$. У цьому випадку

$P_{\kappa.}$ досягає максимального значення $P_{\kappa.} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$

(рис. 5, графік 2).

При збільшенні опору навантаження ($R \rightarrow \infty$) повна та корисна потужність прямують до нуля, а коефіцієнт корисної дії – до одиниці (рис. 5, графік 3).

На рис. 5 бачимо, що для отримання максимального струму опір навантаження повинен бути малим порівняно із внутрішнім опором

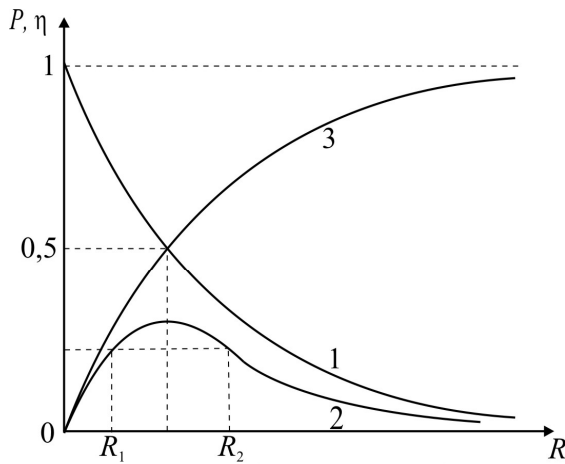


Рис. 5. Залежність потужності і к.к.д. джерела струму від опору навантаження

джерела, але при цьому корисна потужність і η теж дуже малі, - вся робота, яка здійснюється джерелом струму, йде на виділення тепла на внутрішньому опорі r . Щоб отримати від даного джерела струму максимальну корисну потужність, потрібно взяти $R = r$,

при цьому $P_{\kappa. \max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$, але $\eta = 0,5$. Як показує графік 2 на рис. 5, корисну потужність

$P_1 < P_{\kappa. \max}$ ми можемо отримати при двох значеннях R_1 та R_2 навантаження. При цьому слід брати навантаження з більшим значенням - R_2 , оскільки η при цьому більший. Для отримання к.к.д., близького до одиниці, потрібно брати навантаження з опором, набагато більшим внутрішнього опору джерела струму, але при цьому корисна потужність прямує до нуля.

Аналізуючи ізольоване замкнуте коло та формулу (2*) $\mathcal{E}_{\text{стор}} = I(R+r)$ приходимо до висновку: якщо у ізольованому замкненому колі є джерело сторонніх ЕРС, то сила струму у колі буде такою, щоб сумарний спад напруги на зовнішньому і внутрішньому опорі джерела дорівнював сторонній ЕРС джерела. Ставимо проблематичне запитання: а що буде, якщо у колі кілька джерел сторонніх ЕРС, або коло розгалужене?

Внаслідок закону збереження заряду у будь-якій точці кола, в тому числі і у вузлі, при проходженні постійного струму не може відбуватися нагромадження електричного заряду [8, с. 198-201]. Тому сума струмів, які входять у вузол, дорівнює сумі струмів, які виходять із нього (перше правило Кірхгофа):

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (16)$$

Приймаємо за додатний напрямок обходу кола обхід за годинниковою стрілкою (рис. 6). Знак ЕРС беремо додатним, якщо першим за напрямком обходу є від'ємний полюс джерела. Сила струму I буде додатною, якщо її напрямок співпадає з напрямком обходу;

якщо ж напрямок сили струму I протилежний напрямку обходу, то знак сили струму

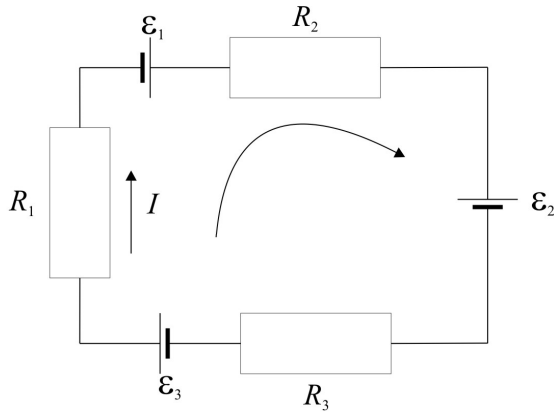


Рис. 6. Замкнуте коло з кількома джерелами е.р.с.

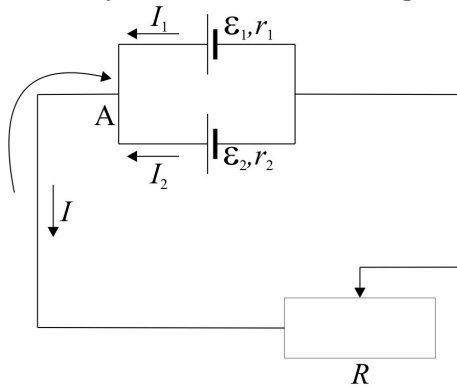


Рис. 7. Паралельне з'єднання джерел струму

від'ємний. Узагальнюємо закон Ома: добуток алгебраїчного значення сили струму на суму зовнішніх і внутрішніх опорів всіх ділянок замкнутого кола дорівнює сумі алгебраїчних значень сторонніх EPC у замкнутому контурі (друге правило Кірхгофа):

$$\pm I \sum_{k=1}^n R_k = \sum_{i=1}^m \pm \mathcal{E}_i. \quad (17)$$

Для застосування правил Кірхгофа розглядаємо умови роботи батареї із двох паралельно з'єднаних джерел EPC \mathcal{E}_1 та \mathcal{E}_2

(рис. 7) [9, с. 228-231]:

1) Для сил струмів у вузлі А згідно вибраного напрямку обходу (рис. 7):

$$I_2 + I_1 - I = 0; \quad (18)$$

2) Виберемо два довільних контури: один містить джерело EPC \mathcal{E}_1 і опір R , а другий містить два джерела EPC :

$$-I_1 r_1 - I_1 R = -\mathcal{E}_1, \text{ або } I_1 r_1 + I_1 R = \mathcal{E}_1 \quad (19)$$

$$-I_1 r_1 + I_2 r_2 = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \quad I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \quad (20)$$

Розв'язуючи (18), (19) та (20) відносно I , I_1 та I_2 , отримуємо:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}, \quad (21)$$

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(r_2 + R) - \mathcal{E}_2 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}, \quad (22)$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2(r_1 + R) - \mathcal{E}_1 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \quad (23)$$

Вираз для I_2 можна безпосередньо написати із виразу (22) замінюючи індекси $1 \leftrightarrow 2$, враховуючи симетрію схеми. Із (23) приходимо до висновку, що $I_2 > 0$ при $\mathcal{E}_2(r_1 + R) - \mathcal{E}_1 R > 0$, тобто:

$$\mathcal{E}_2 > \frac{\mathcal{E}_1 R}{r_1 + R}. \quad (24)$$

Отже, якщо напруга на затискачах першого джерела $U = \frac{\mathcal{E}_1 R}{r_1 + R} > \mathcal{E}_2$, то приєднуючи

\mathcal{E}_2 паралельно \mathcal{E}_1 ми заряджаємо друге джерело. Отриманий результат дає нам умови нормальної роботи другого джерела EPC , приєднаного паралельно до першого, в залежності від опору навантаження R : при малому опорі навантаження R друге джерело EPC працює нормально; при значенні R , яке визначається умовою $\mathcal{E}_2(r_1 + R) = \mathcal{E}_1 R$ сила струму через \mathcal{E}_2

дорівнює нулю, тобто при $R = \mathcal{E}_1 R / (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$ наявність цього джерела нічого не змінює у колі. При великих значеннях R підключення паралельно до \mathcal{E}_1 джерела ЕРС \mathcal{E}_2 приводить до зменшення сили струму через навантаження R .

Аналізуючи роботу двох паралельно з'єднаних джерел ЕРС, робимо висновок, що їх можна замінити одним еквівалентним джерелом ЕРС, параметри якого визначаються із

формули (21): $I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{R + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$. Тобто, для еквівалентного джерела ЕРС:

$$\mathcal{E}_{\text{екв}} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}, r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (25)$$

Досліджуємо умови нормальної роботи двох послідовно з'єднаних ЕРС (рис. 8).

Очевидно, що коли виконується умова:

$$\frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} > \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}, \quad (26)$$

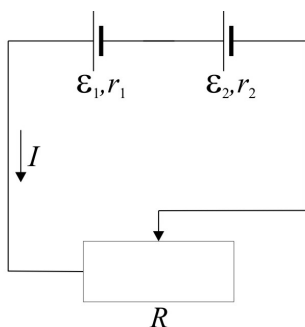


Рис. 8. Послідовне з'єднання джерел струму

то доцільно приєднувати послідовно до \mathcal{E}_1 друге джерело ЕРС \mathcal{E}_2 . Із (24) отримуємо:

$$\mathcal{E}_2 (r_1 + R) > \mathcal{E}_1 r_2, \text{ звідки } \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} > \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

Тобто, у останньому виразі зліва стоїть сила струму короткого замикання джерела ЕРС \mathcal{E}_2 , а справа - сила струму у колі, яке містить тільки перше джерело ЕРС \mathcal{E}_1 . Тому послідовне приєднання

другого джерела доцільно у випадку, коли сила струму його короткого замикання більше сили струму у колі з джерелом ЕРС \mathcal{E}_1 . Із учнями профільних класів та студентами технічних спеціальностей вузів доцільно зробити лабораторні роботи на застосування правил Кірхгофа: 1) місток Уїтстона; 2) порівняння ЕРС джерел струму методом Поггендорфа [8, с. 200-201].

Отже, нами розроблено методику вивчення законів постійного електричного струму та наслідків, які з них випливають, на основі системи фундаментальних фізичних понять симетрії, відносності, електромагнітної взаємодії, в учнів профільних (фізичних, фізико-математичних, фізико-технічних) класів та студентів технічних спеціальностей вузів у процесі вивчення розділу «Електродинаміка» з точки зору сучасних фізичних теорій. Пропонований підхід не лише дає змогу проаналізувати процеси, які відбуваються у замкнутому колі із ввімкненим гальванічним джерелом струму на основі закону збереження енергії, дослідити умови роботи джерел постійного струму, послідовне та паралельне з'єднання джерел, а й структурує навчальний матеріал розділу «Електродинаміка» для учнів профільних класів та студентів технічних спеціальностей вузів на основі ідей відносності, симетрії, електромагнітної взаємодії та без логічного конфлікту із знаннями, набутими

раніше, підводить до вивчення та розуміння електромагнітного поля, як квантово-релятивістського об'єкта.

Список використаної літератури

1. Гончаренко С.У. Формування наукового світогляду учнів під час вивчення фізики : посібник для вчителя / С.У. Гончаренко – К.: Рад. шк., 1990. – 208 с.
2. Коновал О.А. Теоретичні та методичні основи вивчення електродинаміки на засадах теорії відносності: монографія / О.А. Коновал; МОН України; КДПУ. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2009. – 346 с.: іл.
3. Коршак Є.В. Фізика, 10 кл. : [підруч. для загальноосв. навч. закл.] / Є. В. Коршак, О.І. Ляшенко, В.Ф. Савченко. – К.; Ірпінь : ВТФ «Перун», 2003. – 312 с. : іл.
4. Кульчицький В.І. Формування фундаментальних фізичних понять електромагнітна взаємодія та електромагнітне поле в учнів профільних класів під час вивчення спеціальної теорії відносності / В.І. Кульчицький // Фізика та астрономія в школі, 2010.– № 10. – С. 7-12.
5. Кульчицький В.І. Формування уявлень про квантову теорію провідності металів на основі фундаментальних фізичних понять : матеріали Всеукр. конф. / В.І. Кульчицький // [Науково-методичний збірник “Методичні особливості викладання фізики на сучасному етапі”]. – Кіровоград, 1998. – С. 112-114.
6. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм : [учеб. пособие] / А.Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1983. – 463 с.
7. Парселл Э. Электричество магнетизм. Серия "Берклевский курс физики" / Э Парселл. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – Т.2. – 416 с.
8. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Электричество / Д. В. Сивухин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – Т.3. – 688 с.
9. Salach Jadviga. Fizyka z astronomia II:[klase II liceum ogólnokształcącego o profilu podstawowym, biolog.-chem. i matematyczno-fizycznym. Wydanie dziewiate]. / Jadviga Salach, Barbara Sagnowska, Jerzy M. Kreiner. – Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 1996. – 320 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОПЛИННИХ ТА ДОВГОТРИВАЛИХ ПРОЦЕСІВ З ДОПОМОГОЮ КОМП'ЮТЕРНОГО ВИМІРЮВАЛЬНОГО КОМПЛЕКСУ «НАВЧАЛЬНА ЛАБОРАТОРІЯ ІТМ»

Литвинов Ю.В.,

доцент кафедри фізики,

Харківський Національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди

У статті розглянуті приклади постановки та проведення демонстрацій швидкоплинних та довготривалих процесів з використанням засобів автоматизації.

В статье рассмотрены примеры постановки и проведения демонстраций быстротечных и долговременных процессов с использованием средств автоматизации.

In this paper we consider examples of demonstrations of short-term and long-term processes using automation.

Вивчення багатьох явищ природи супроводжується демонстраціями. Сучасні засоби вимірювання, створені на основі комп'ютерних технологій дають можливість суттєво розширити коло експериментів, а також надати багатьом демонстраціям кількісного характеру.

Підбір демонстрацій здійснюється з урахуванням фізіологічних можливостей сприйняття людини. Найбільш ефективними є демонстрації, що протікають впродовж 30-60 секунд. Учень сприймає інформацію, що поступає з органів чуттів, встановлює причинно-наслідкові зв'язки, запам'ятовує послідовність перебігу явища, тощо. Якщо при цьому параметри досліджуваного процесу повільно змінюються, або є сталими, їх можна вимірювати з допомогою стрілкових приладів або приладів з цифровим дисплеєм [1]. З точки зору педагогічної практики, швидкоплинними можна вважати процеси, що відбуваються протягом часу, якого недостатньо, щоб учень зрозумів їх сутність. Повільні процеси протікають протягом тривалого проміжку часу, і також становлять проблему експериментального дослідження в межах уроку.

Велика кількість демонстрацій швидкоплинних процесів не супроводжується вимірюванням параметрів, тому, що під час демонстрації неможливо обробляти їх результати, хоча найбільш бажаним було б показати взаємозв'язок параметрів у вигляді графіків. Також велике значення має покадровий або уповільнений перегляд явища [2] синхронно з даними вимірювань.

В роботі наведено приклади проведення демонстрацій швидкоплинних процесів водночас з результатами вимірювання параметрів з використанням комп'ютерного вимірювального комплексу «Навчальна лабораторія ІТМ». Також показано, як отримані результати можна використовувати для постановки експериментальних завдань.

Використання вимірювального комплексу дає можливість вивчати кількісні характеристики швидкоплинних процесів, які неможливо отримувати з допомогою традиційних засобів. Спостереження явищ, що вивчаються, водночас з результатами вимірювань виключає розрив між зоровим сприйняттям явища, та результатами обчислень. Сумісність вимірювального комплексу з інтерактивними та мультимедійними засобами

дозволяє налагоджувати інтерфейс програми для демонстрації показів приладу всій аудиторії (демонстраційний режим) або для проведення індивідуальної роботи (лабораторний режим). В усіх експериментах використовується комп'ютер, електронний блок, відеокамера, мультимедійний проектор та програмне забезпечення «ІТМ лабораторія», тому у описах обладнання і матеріалів вказано лише змінну частину необхідних засобів.

Окрім забезпечення видимості, цифрове відео дозволяє в широких межах змінювати швидкість відтворення записаного експерименту. Комп'ютерний вимірювальний комплекс забезпечує режими паралельного та синхронного запису відео та даних вимірювань. У першому випадку, частота кадрів відео і період вимірювання не співпадають, і можуть встановлюватися окремо. При синхронному записі відео, кожному кадру відповідає точка на графіку (графіках), кількість кадрів дорівнює кількості вимірювань. Іншими словами, період зйомки кадрів дорівнює періоду вимірювання і встановлюється користувачем. Записаний швидкоплинний процес можна вивчати в уповільненому темпі, або покадрово. У такий спосіб можна вивчати заздалегідь записані експерименти або детально розбирати тільки - не проведену демонстрацію. Наведемо приклади використання відеозаписів з даними вимірювань.

Демонстрація коливань пружинного маятника.

Демонстрацію проводять з метою ознайомлення учнів з найпростішою коливальною системою, її параметрами, та закономірностями, що описують коливальний процес.

Обладнання: штатив з лапкою; датчик «динамометр»; пружина; набір (10-100 г.) важків.

Проведення експерименту. Закріпіть датчик з допомогою лапки на штативі. Підвісьте на гачок динамометру пружину, а до неї – важок, масою 100 г., як показано на екранній копії (рис. 1). Підніміть важок, щоб він не навантажував пружину і відпустіть. Важок на пружині почне коливатись. Дослід проводять наживо, однак здійснюють його запис. Покадровий перегляд запису експерименту дозволяє встановити відповідність положення важка силі, що діє на гачок динамометру. У верхній частині вікна графіку відображаються значення параметрів точки на яку наведено перехрестя покажчика. Переводячи покажчик, визначте період коливань маятника. За даними запису експерименту найбільша сила діє на гачок динамометру, коли важок знаходиться у нижньому положенні і у нашому випадку становить (1,83 Н.). Це означає, що пружина знаходиться у найбільш деформованому стані, потенціальна енергія пружності максимальна, важок же має найменшу потенційну енергію відносно землі. У верхньому положенні важка, його потенційна енергія максимальна, а на гачок діє мінімальна сила (0,17 Н.), що свідчить про мінімальну енергію деформації пружини. Період коливань маятника становить 0,31 с. Коливання здійснюються навколо точки рівноваги (1 Н.).

Якщо використовується відеокамера з частотою запису 25 кадрів/с., період коливань маятника слід підібрати не менше 1 с. При цьому один період коливань буде відображено 25 – ма (або більше) точками, кожній з яких відповідатиме кадр зображення.

Завдання. Визначте жорсткість пружини за законом Гука. Виміряйте період коливань маятника, змінюючи масу важка. (Для збільшення точності вимірювань, визначте час, протягом якого маятник здійснює 10 20 коливань та поділіть отримане значення часу на кількість коливань). Обчисліть період коливань маятника для тих же значень маси важків за формулою:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_D}{k}}$$

Зіставте значення періоду коливань, отримані з експерименту, та обчислені за формулою. Зверніть увагу на те, що розбіжність між даними експерименту та обчислень збільшується із зменшенням маси важка. Розбіжність пояснюється тим, що формула є спрощеною і не враховує внесок маси пружини у параметри коливань. Наведіть більш точну формулу періоду коливань пружинного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_D + \frac{m_{пр}}{3}}{k}}$$

Здійсніть градування датчика відносно видовження пружини (Додаток №1 до інструкції з експлуатації вимірювального комплексу). Проведіть вимірювання. За даними вимірювання обчисліть швидкість важка у точці рівноваги, амплітуду переміщення, кінетичну та потенціальну енергію важка у верхній, нижній точках, та у точці рівноваги. Визначте енергію деформації пружини у тих же положеннях важка.

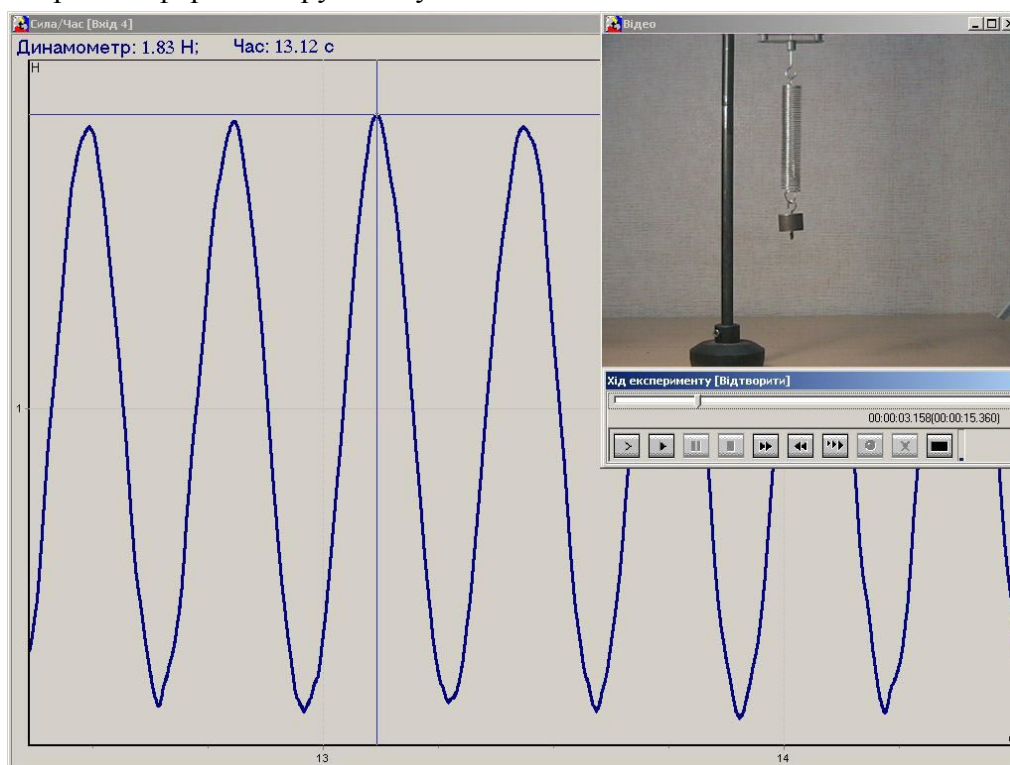


Рис. 1. Екранна копія запису коливань пружинного маятника.

Демонстрація залежності опору металу від температури.

Демонстрацію проводять з метою виявлення факту існування явища залежності електричного опору металів від температури.

Обладнання: Джерело струму регульоване (0-12В, 1 А); електричний вмикач; лампочки на підставці; дровотий резистор (100 Ом, 10 W) датчик «вольтметр» (0-12 В); датчик «амперметр» (0-1 А);

Залежність електричного опору металу від температури демонструють вимірюючи силу струму та напругу на зразку, контролюючи температуру нагріву. Недоліком такої демонстрації є те, що зміна опору не велика, а висновки роблять лише за показами вимірювальних приладів. Для підвищення ефективності експерименту, його можна дещо видозмінити. Замість дроту використаємо спіраль лампочки розжарювання. Наголошується,

що електричний струм, що протікає через провідник, спричиняє виділення теплоти. Учні бачитимуть, що лампочка випромінює світло, отже, спіраль нагрівається. Більша яскравість світіння відповідатиме вищій температурі спіралі. Отже, ми не встановимо точної залежності опору спіралі від температури (це завдання вирішується у ході лабораторної роботи), оскільки температуру спіралі не вимірюємо. Незважаючи на це, демонстрація вольт – амперної характеристики лампи розжарювання, та стрибка струму у електричному колі лампочки під час включення дають уявлення про прояв досліджуваного явища в реальних електричних колах. Схему установки та екранну копію з результатами вимірювання вольт – амперної характеристики показано на рис. 2.

Спочатку знімають вольт – амперну характеристику потужного резистора, щоб освідчитись, що вона має форму прямої з постійним кутом нахилу. Потім підключають лампочку і знімають її вольт – амперну характеристику. Для забезпечення видимості, збільшене зображення спіралі відображають на екрані. Паралельно з демонстрацією, здійснюють запис експерименту. Запис потрібен для подальшого покадрового перегляду. За значеннями сили струму і напруги у різних точках графіку, визначаємо опір спіралі. На ділянці малих напруг (прямолінійний відрізок) спіраль не світиться. Потужність струму замала, щоб розігріти спіраль, а тепло, що виділяється, розсіюється завдяки теплопровідності та випромінюванню. При зростанні струму від 0 до 60 мА опір спіралі практично не змінюється і знаходиться в межах 3,4- 3,7 Ом. Подальше збільшення струму призводить до розігріву спіралі і збільшення її опору. У точці, що знаходиться на перехресті показчика ($I = 170$ мА, $U = 2,35$ В) опір спіралі сягає вже 13,8 Ом. Яскравість світіння спіралі лампочки зростає при збільшенні напруги.

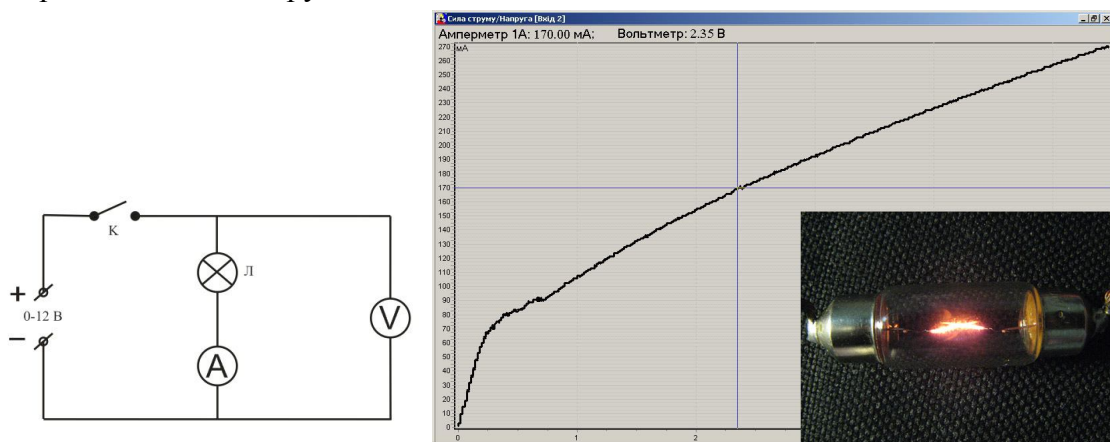


Рис. 2. Схема установки та екранна копія з результатами вимірювання вольт – амперної характеристики.

Наступна демонстрація показує, як проявляється це явище в техніці. Демонстрацію доповнюємо розповіддю про механізм перегорання спіралі лампочки розжарювання. Обмеженість строку життя лампочки розжарювання зумовлена нерівномірним випаровуванням матеріалу спіралі в місцях, де є неоднорідності структури. Це призводить до виникнення витончених ділянок з підвищеним значенням електричного опору, що є причиною ще більшого місцевого розігріву. Лампа виходить з ладу, коли температура на одній з таких ділянок підвищується до температури плавлення матеріалу спіралі. Переважно, руйнування спіралі відбувається під час включення лампочки. В момент включення спіраль лампи холодна, тому, через неї тече струм, у декілька разів більший, ніж під час її нормальної роботи. Настає момент, коли на ділянках з великим опором, під час включення,

виділяється енергія, якої достатньо для руйнування спіралі. Звичайна лампа, потужністю 60 Вт, під час включення має потужність більше ніж 700 Вт. Стрибок струму у спіралі лампочки показано на рис. 3.

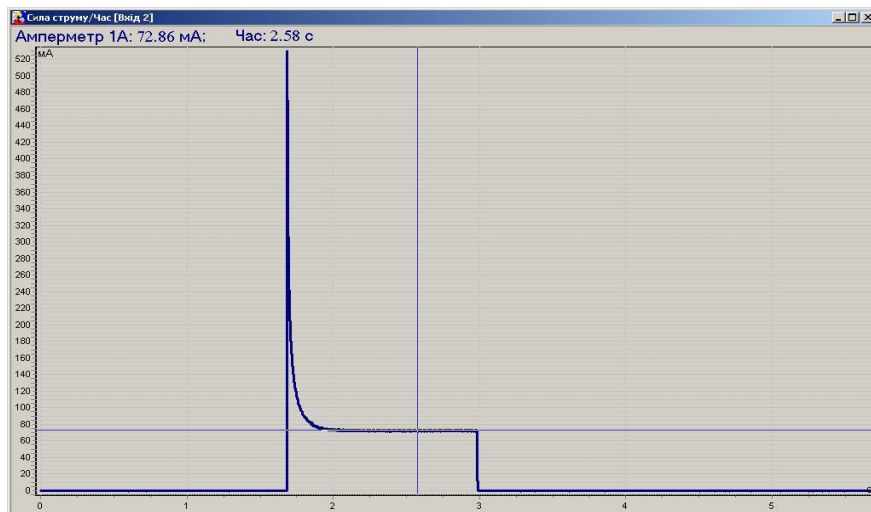


Рис. 3. Стрибок струму у спіралі лампочки в момент включення.

У демонстрації використовувалась мініатюрна сигнальна лампа, розрахована на напругу 6 В. З результатів вимірювання видно, що максимальний струм, що тече через спіраль лампи в момент включення дорівнює 530 мА, розігрів спіралі відбувається протягом 0,35 секунди, а струм у стаціонарному режимі світіння дорівнює 72,86 мА.

Дослідження кипіння води.

Демонстрацію проводять з метою дослідження явища кипіння рідини на різних стадіях процесу закипання.

Обладнання: Піч електрична лабораторна; датчик «термометр»; склянка з термостійкого скла з мірними позначками; штатив з лапкою; вода.

Демонстрація кипіння води наживо не буде ефективною. По – перше, людина у повсякденному житті стикається з цим явищем майже кожного дня; по – друге, нагрівання води в склянці до температури кипіння, триватиме 10-15 хвилин. До того ж, такий експеримент неможливо зупинити і переглянути багаторазово. На рисунку 4 показано екранну копію експерименту на стадії утворення бульбашок біля дна склянки.

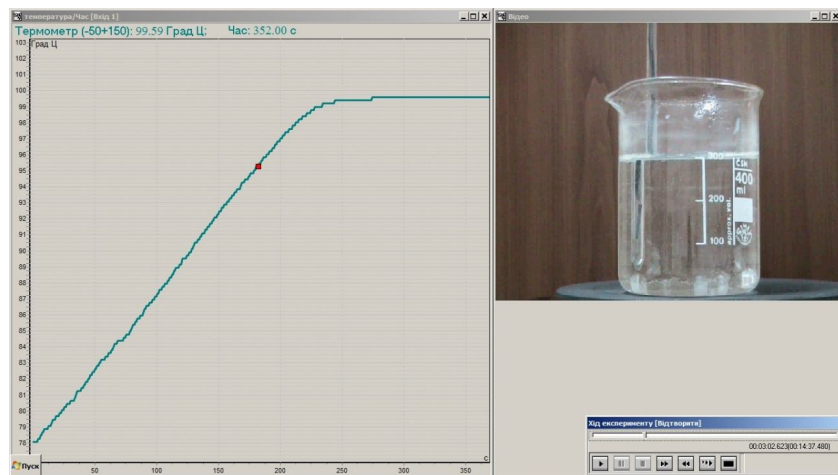


Рис. 4. Демонстрація кипіння води. Екранна копія ходу експерименту.

Записаний експеримент дозволяє спостерігати супутні фізичні явища, що супроводжують стадії нагрівання та закипання води в склянці:

- конвекцію нагрітих та холодних шарів рідини;
- утворення парогазових бульбашок біля нагрітого дна склянки;
- зникнення бульбашок при відриванні від дна;
- шум під час зникнення бульбашок;
- кипіння з утворенням бульбашок у всьому об'ємі рідини;
- сталість температури кипіння.

Запис досліду демонструють із нормальною швидкістю відтворення, скорочуючи (з коментарями) довготривалий процес нагрівання. Але, під час кипіння, бульбашки утворюються у об'ємі води дуже швидко. Для спостереження утворення бульбашок слід уповільнити швидкість відтворення в декілька разів.

Під час демонстрації слід відповісти на запитання:

- Чому під час нагрівання води в склянці, зображення фону за склянкою постійно деформується?

- Чому бульбашки, що утворюються, зникають, ледве відірвавшись від дна склянки?

- Чому перед закипанням вода шумить?

- Чи зміняться характеристики шуму, якщо висоту шару води у склянці змінити?

- Чому шум зникає, коли вода кипить?

- Чому під час кипіння, температура води не збільшується?

За даними вимірювань визначити час, протягом якого вся вода випарується із склянки.

На прикладі цієї демонстрації можна показати, що явища природи тісно пов'язані між собою. Абстрагування від супутніх явищ призводить до фрагментування та формалізації знань і ускладнює формування єдиної картини оточуючої дійсності.

Вивчення довготривалих процесів ускладнюється тим, що спостереження та вимірювання параметрів носить дискретний характер. Людина, яка проводить дослідження повинна через певні проміжки часу спостерігати за перебігом явища, робити вимірювання параметрів та записувати результати. Такими можуть бути спостереження за добовими, річними змінами температури, вологості, освітленості, радіаційного фону, атмосферного тиску, сонячної активності тощо. На рис. 5 показано результати вимірювання температури та відносної вологості протягом доби. Вимірювання проводились з допомогою датчиків «термометр» та «гігрометр». Швидкість зміни вологості і температури досить повільна, тому, вимірювання здійснювались з періодом 180 с. Формат відображення часу – секунди. Для дослідження довготривалих процесів можна застосовувати інші формати відображення

часу (хвилини, години, доби), що передбачено налагодженнями режимів вимірювання. З отриманих графіків видно, що відносна вологість зростає із зниженням температури. Інтервал зміни температури протягом доби становив: 1,73 – 19 °С , а відносної вологості 91% – 20%. Показчик відтворення встановлено на точку, в якій добова температура була найнижчою (близько дев'ятої години ранку). Відповідний кадр відео відображено на екрані.

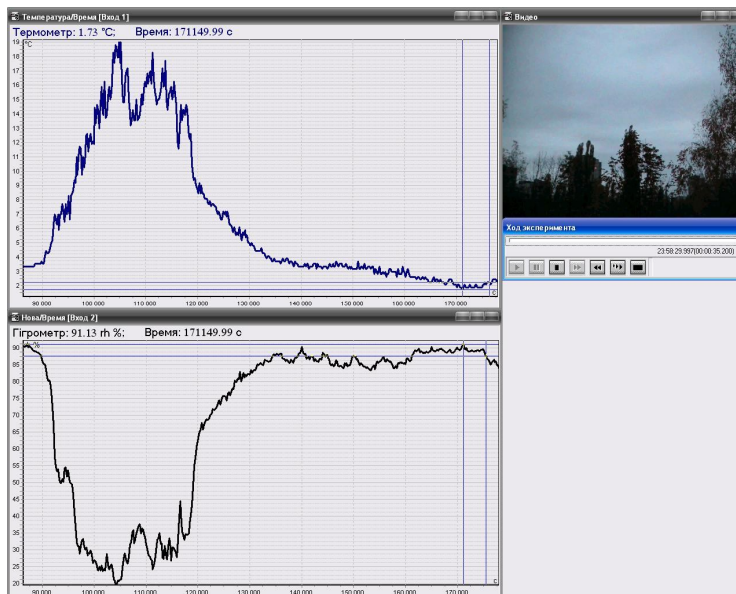


Рис. 5. Результати спостережень за зміною погоди, температури та вологості протягом доби.

Пояснення досліду може бути таким: припустимо, що у нашому випадку абсолютна кількість води у повітрі та тиск були сталими. Із збільшенням температури, максимальна можлива кількість і парціальний тиск водяної пари збільшується. Відношення ж масової долі водяної пари в повітрі до максимально можливої за даної температури – зменшується. При зменшенні температури за постійного тиску і кількості водяної пари, настає момент, коли пара насичується. При подальшому зменшенні температури, частина пари конденсується, перетворюючись на росу. Відносна вологість визначається співвідношенням:

$$RH = \frac{P}{P_{\text{нас}}} \times 100\%.$$

Вимірювання проміжків часу.

Обладнання: датчик «оптопара»; штатив з двома лапками; кулька з ниткою.

Окремою категорією є експерименти, в яких потрібно вимірювати проміжки часу між подіями. Для фіксації положення рухливих об'єктів передбачено інфрачервоний датчик, що працює на відбиванні променів від перешкоди. Датчик може працювати у двох режимах. Перший режим – «Секундомір»– дозволяє виміряти проміжок часу між двома подіями, або період протікання процесу. У цьому режимі результат вимірювання відображується у вікні у вигляді цифрового табло (Рис. 6).

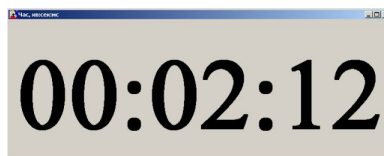


Рис. 6. Вікно відображення показів секундоміру.

Цей режим вимірювання використовують для неперіодичних процесів. Для дослідження періодичних процесів бажано бачити всю шкалу часу, протягом якого

здійснюється вимірювання. До комплекту входять два датчики. В залежності від потреби, в експерименті використовують один з них, або обидва. Точність вимірювання проміжків часу залежить від величини об'єкту, що рухається та відстані від нього. На рисунку 7 показано фото датчика з двома сенсорами та результат вимірювання періоду коливань кульки на нитці. Один сенсор закріплюють з допомогою лапки на тому ж штативі, що прикріплено нитку з кулькою. Другий сенсор не використовують. Нитку потрібно закріпити так, щоб під час коливань, вона проходила повз вікно датчика на відстані декількох міліметрів. Нитку слід обирати білу, або світлих кольорів. Дуже тонка нитка дасть малий сигнал. Амплітуда імпульсів не має значення. Сусідні за шкалою імпульси відповідають напівперіоду коливань кульки. У нашому випадку, період коливань дорівнює $t = 1,263$ с. Вимірюючи проміжки між імпульсами, можна переконалися в тому, що період коливань кульки на нитці є сталою величиною.

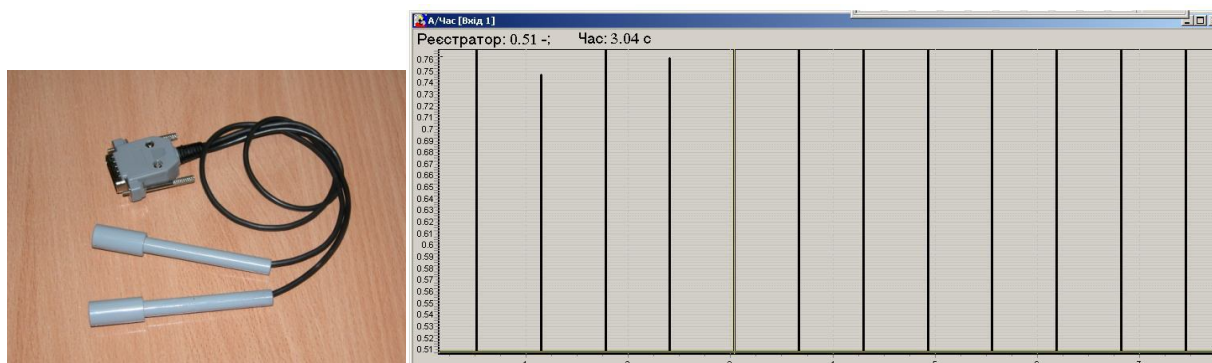


Рис. 7. Інфрачервоний датчик з двома сенсорами, та графік, на якому зафіксовано імпульси, що відповідають моментам проходження нитки повз вікно сенсору.

Висновки. Демонстрація явища одночасно з результатами вимірювань у вигляді графіка збільшує інформативність навчального експерименту, полегшує розуміння взаємозв'язку параметрів досліджуваного процесу та сприяє ефективному засвоєнню навчального матеріалу. Використання комп'ютерного вимірювального комплексу «Навчальна лабораторія ІТМ» дозволяє розширити коло експериментів, за рахунок демонстрації швидкоплинних та довготривалих процесів.

Список використаної літератури

1. Олег Желюк. «Особливості експлуатації вимірювальних засобів з аналоговою і цифровою індикацією в навчальному фізичному експерименті» // Фізика та астрономія в школі. – 2004, № 4. – С. 26-28.
2. http://www.dvduroki.ru/view_podkat.php?idpod=1 ВИДЕО УРОКИ Наука Образование Физика.

КОМП'ЮТЕРНА ПІДТРИМКА ДЕМОНСТРАЦІЙНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Литвинов Ю.В.,

доцент кафедри фізики,

Харківський Національний педагогічний Університет ім. Г.С. Сковороди

Вивчення властивостей електричних кіл та явищ, пов'язаних з протіканням електричного струму ускладнюється через відсутність зорової інформації про об'єкти дослідження. Автоматизація вимірювань та обробки результатів експерименту дає викладачеві можливість посилити доказову базу під час викладення нового матеріалу за рахунок демонстрації результатів натурного експерименту у графічному вигляді.

Изучение свойств электрических цепей и явлений, связанных с протеканием электрического тока осложняется из-за отсутствия зрительной информации об объектах исследования. Автоматизация измерений и обработки результатов эксперимента дает преподавателю возможность усилить доказательную базу во время изложения нового материала за счет демонстрации результатов натурного эксперимента в графическом виде.

Studying the properties of electric circuits and phenomena associated with the electric current is complicated by the lack of visual information about objects of study. Automation of measurements and processing the results of the experiment gives the teacher an opportunity to strengthen the evidence base at the time of presentation of new material by demonstrating the results of field experiment in graphical form.

Електрика – важливий розділ фізики. Демонстрації з електрики, що призводять до перетворень електричної енергії на тепло, випромінювання, механічні рухи описані багатьма авторами і добре розроблені. Однак, окремі теми є більш складними для розуміння. На відміну від механіки, де поняття маси, сили, швидкості та ін., мають предметний характер, основні поняття електрики не формуються за рахунок безпосереднього сприйняття органами чуття людини. Нестационарні процеси, що відбуваються в електричних колах, невидимі, а зв'язки між параметрами не є очевидними. Незважаючи на досконалість та простоту теоретичного матеріалу, студенти і учні невпевнено пояснюють сутність процесів що відбуваються в реальних електричних колах.

Методичним розробкам з постановки та проведення навчальних експериментів з електрики присвячено велику кількість наукових робіт. Класичні демонстрації процесів в електричних колах здійснюються з допомогою застарілих засобів вимірювання та відображення результатів. Обчислення даних та побудова графіків вимагає великих витрат часу, тому і не відповідають вимогам сучасної освіти. Відсутність зорового сприйняття досліджуваних явищ (заряд, електричний струм, магнітне поле тощо) компенсують з допомогою інтерактивних моделей [1]. Інтерактивні моделі доповнюють теоретичний матеріал і можуть входити до складу електронних підручників [2] та електронних бібліотек, доступних на освітніх сайтах [3]. Однак, пояснення навчального матеріалу з використанням моделей, без проведення натурного експерименту не виглядає переконливим. Знання, отримані у такий спосіб носять формальний характер. Автоматизація процесів вимірювання та обробки результатів експерименту дає можливість компенсувати цей недолік за рахунок

вимірювання кількісних характеристик досліджуваних процесів та їх подання у вигляді графіків [4].

Мета роботи - розробити і навести приклади демонстрацій, що пояснюють перехідні процеси у лінійних електричних колах.

Загальні зауваження: Всі досліди проводились з використанням комп'ютерного вимірювального комплексу «Навчальна лабораторія «ІТМ». Його основою є комп'ютер, електронний блок та програмне забезпечення. Тому, при переліку приладів та матеріалів, необхідних для постановки і проведення демонстрацій ми не будемо вказувати ці постійні складові. Слід пам'ятати, що параметри компонентів електричних схем, що використовують для складання електричних схем можуть значно відрізнятися від вказаних на корпусі. У демонстраціях не обов'язково використовувати компоненти високого класу точності, а лише потрібно виміряти їх параметри перед проведенням досліду. Точність вимірювання та якість графіків будуть кращими, якщо використовувати весь діапазон вимірювання датчиків, що досягається шляхом підбору компонентів електричного кола, напругою джерела сигналу та самого датчика. Порівняння даних обчислення за формулами та отриманих за результатами вимірювання, є опорою в доказовій базі викладення матеріалу. Чим більше співпадатимуть результати вимірювань та обчислень за формулами, тим переконливіше виглядатиме демонстрація. До того ж, під час демонстрації доводиться нехтувати похибками, щоб не відволікати увагу від основної мети. Тому, всі похибки при проведенні експерименту необхідно звести до мінімуму. У роботі не розглядалося питання налагоджень вимірювального комплексу, оскільки докладну інформацію з цього приводу можна знайти у інструкції з експлуатації. Способи використання даних вимірювання показано на прикладі першої демонстрації.

Демонстрація процесів заряду – розряду конденсатора.

Демонстрацію проводять для з'ясування характеру зв'язку між струмом у колі заряду та напругою на конденсаторі. Безпосередньо, за результатами досліду можна спостерігати графіки залежностей струму і напруги у часі в процесі заряду – розряду конденсатора та визначити їх кількісні характеристики. Наявність даних вимірювань полегшує перехід до аналітичної форми опису вказаних процесів.

Обладнання: датчик «вольтметр» 0 ± 12 В; датчик «амперметр» 0 ± 100 мА (або 0 ± 10 мА); конденсатор 10-1000 мкФ, або демонстраційна батарея конденсаторів 0-60,5 мкФ; магазин опорів 0,01 Ом-100 кОм або резистори на панелях; джерело живлення постійного струму регульоване. 0-12 В.; дроти з клемами; Ємність конденсатора у нашому випадку дорівнювала $C = 1050$ мкФ, опір резистора $R = 675$ Ом. Період вимірювання встановлено 200 мкс.

Проведення експерименту. Зберемо установку за схемою, показаною на рис. 1. У вихідному стані ключ К знаходиться у положенні 1. Після переведення ключа у положення 2, у колі потече електричний струм. Оскільки у початковий момент часу конденсатор повністю розряджений ($U_c = 0$), то у колі потече максимальний струм, величина якого визначається величинами ЕРС-Е та опору резистора R : $I = (E - U_c) / R$ Із збільшенням напруги на конденсаторі, струм зменшуватиметься. Коли напруга на конденсаторі зрівняється з ЕРС

джерела, струм зменшиться до 0. Переведемо ключ у положення 1. Струм потече у зворотному напрямку, а напруга на конденсаторі зменшуватиметься до повного розряду конденсатора. Графіки залежностей струму та напруги від часу в процесі заряду-розряду конденсатора показано на рисунку 1

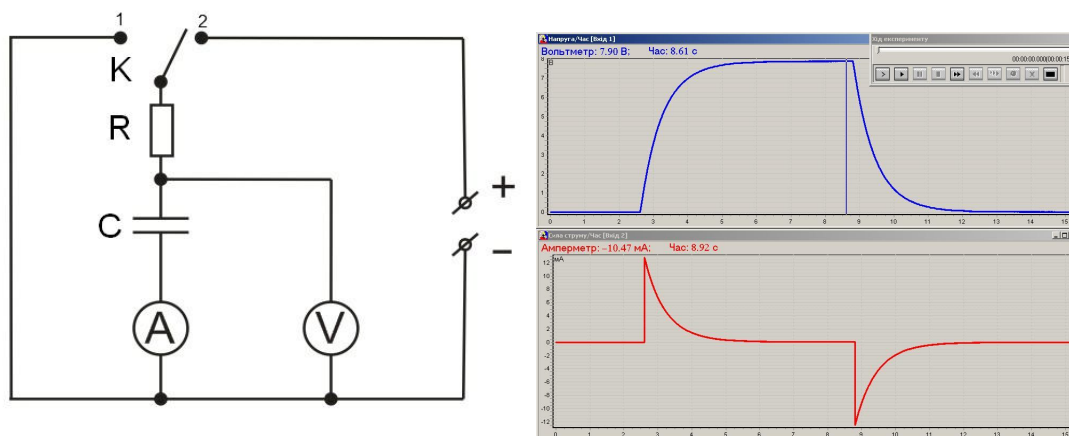


Рис. 1. Електрична схема установки для дослідження процесів заряду-розряду конденсатора та результати вимірювань.

Струм у колі заряду – розряду конденсатора. Порівняємо значення струму, обчислені за формулами з результатами вимірювань. Максимальний струм на початку процесу заряджання визначається як $I_{max} = \frac{E - U_c}{R} = \frac{8,61 \text{ В}}{675 \text{ Ом}} = 0,01276 \text{ А}$. (Напруга на конденсаторі в момент замикання кола $U = 0$). Сила струму за даними вимірювань (рисунок 1) також становила 12,76 мА.

Величина заряду конденсатора. Обчислимо максимальний заряд, що накопичується конденсатором. Оскільки, за визначенням, ємність $C = Q/U_c$, запишемо: $Q = CU_c$. За даними вимірювань, напруга зарядженого конденсатора дорівнює ЕРС джерела живлення - $U_c = 8,61 \text{ В}$. Значення заряду становитиме: $Q = 8,61 \text{ В} \times 1,050 \times 10^{-3} \text{ Ф} = 0,00904 \text{ Кл}$.

Визначимо величину заряду конденсатора за результатами вимірювань. Виділимо на графіку ділянку, що відповідає процесу зарядки конденсатора. За визначенням, сила струму, це швидкість перетікання заряду через переріз провідника. $I = Q / t$. Звідси $Q = It$. Однак, сила струму у нашому випадку не є сталою величиною. Розглянемо ділянку графіку (рис. 2). Очевидно, що заряд Q конденсатора дорівнюватиме площі фігури, обмеженої кривою заряду та відрізками паралельними осям часу та струму. Експортуємо дані в електронні таблиці Excel. Оскільки період вимірювання дорівнює 200 мкс, можна вважати, що струм за цей проміжок часу змінюється на незначну величину. Площа фігури складатиметься з площ прямокутників, що визначаються періодом вимірювання (вісь X) та середнім значенням сили струму (вісь Y) під час кожного акту вимірювання. На практиці, процедуру обчислення можна спростити. Отримайте суму всіх значень струму та помножте її на період вимірювання. У нашому випадку значення величини заряду становить 0,00909 Кл, що практично збігається з результатами обчислень.

Порівняємо сталу часу RC кола за даними вимірювань та обчислень.

За визначенням, стала часу RC кола, це проміжок часу, необхідний для зменшення струму з максимального значення до $I = \frac{I_{\max}}{e} = \frac{12,76}{2,72} = 4,69$ мА. На графіку знаходимо точки на осі часу, що відповідають значенням струму 12,76 мА та 4,69 мА. На осі X, цим точкам відповідають значення 2,61 та 3,32 с., звідси $\tau = 0,71$ с.

Обчислимо значення τ : $\tau = RC = 675 \text{ Ом} \times 1050 \times 10^{-6} \text{ Ф} = 0,70875 \text{ с.}$

Енергія конденсатора. За визначенням, енергія конденсатора $W = \frac{CU_c^2}{2}$. Підставимо значення ємності конденсатора та напруги на ньому і отримаємо: $W = 0,0389$ Дж. Визначимо енергію, підставляючи знайдене за даними експерименту значення заряду: $W = \frac{QU_c}{2} = 0,0391$ Дж. Обидва способи знаходження енергії конденсатора дають схожий результат.

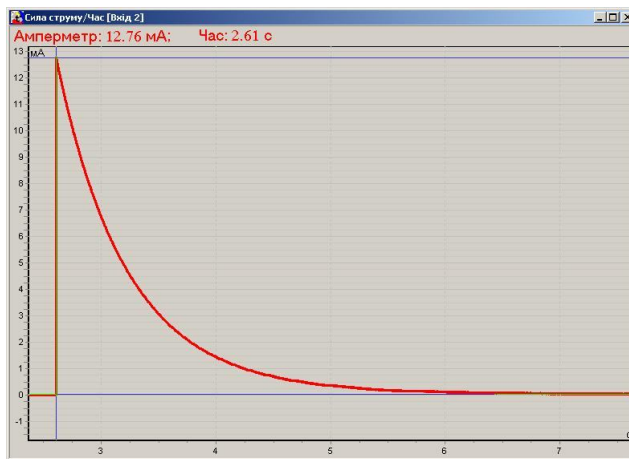


Рис. 2. Графік струму у колі заряду конденсатора.

Завдання: Змінюйте ступінчато величину опору в колі, кожного разу проводячи вимірювання. Як буде змінюватися форма кривої заряду конденсатора при збільшенні (зменшенні) опору? Повторіть завдання змінюючи ємність конденсатора. Проведіть дослід, змінюючи напругу джерела струму. Чи залежить ємність конденсатора від параметрів кола, в яке його підключено? Чи витрачається енергія при протіканні струму через резистор? Як обчислити цю енергію?

Рекомендації: Для збереження масштабу графіків, встановіть режим вимірювання за амплітудою вимірюваного сигналу та обмежте час вимірювання (5-10) с. Ключ переводьте в положення 1 (розряд) тільки після зупинки процесу вимірювання. При таких налагодженнях процес вимірювання починатиметься під час замикання кола заряду, а зупинятиметься по закінченню встановленого часу.

Конденсатор у колі змінного струму.

Демонстрацію проводять для з'ясування характеру зв'язку між струмом у колі та напругою на конденсаторі при протіканні змінного струму.

Обладнання: датчик «вольтметр» 0 ± 12 В; датчик «амперметр» 0 ± 10 мА; демонстраційна батарея конденсаторів 0-60,5 мкФ; магазин опорів 0,01 Ом-100 або резистори на панелях; генератор сигналів ГЦ 3.1 або аналогічний з можливістю автоматичної зміни частоти у межах 0 – 1 мГц; дроти з клемми. Період вимірювання встановить 200 мкс; час вимірювання - 1с.

Зберіть електричне коло за схемою, як показано на рисунку 3. Встановіть частоту генератора 50 Гц. Амплітуду сигналу оберіть такою, щоб струм і напруга не були максимальними. Проведіть вимірювання. Виділіть на графіку одне повне коливання напруги (графік струму змінить масштаб автоматично), як показано на рис. 3. Зверніть увагу на зсув фаз між струмом у колі та напругою на конденсаторі.

Завдання: Проведіть вимірювання, плавно змінюючи частоту коливань генератора. Як зміняться величини струму та напруги у колі? Проаналізуйте результати вимірювання, зіставте з результатами попереднього досліду. Проведіть серії з декількох вимірювань, змінюючи дискретно частоту, амплітуду сигналу та величини ємності і опору. Як змінюються величини струму в колі і напруги на конденсаторі при зміні одного з параметрів? Чи змінюється різниця фаз між коливаннями струму в колі та напруги на клеммах конденсатора? Від чого вона залежить?

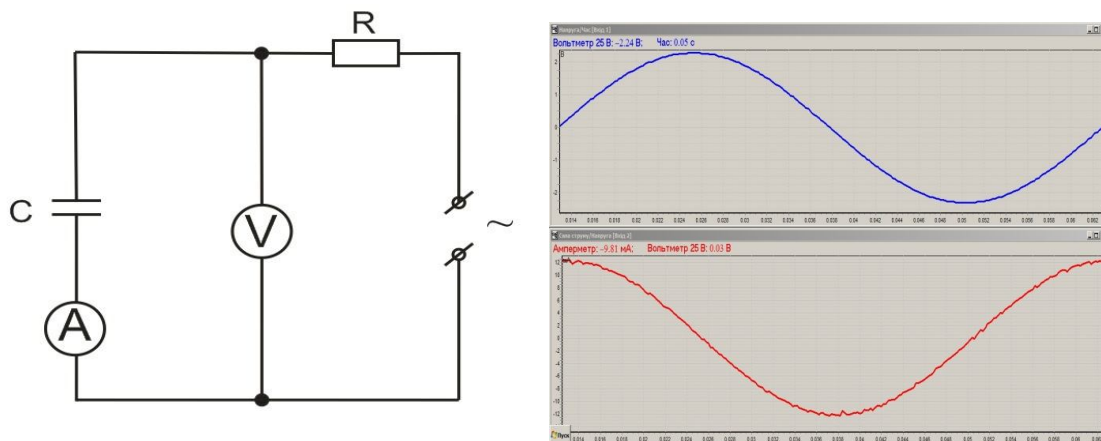


Рис. 3. Конденсатор у колі змінного струму. Електрична схема установки та результати вимірювання.

Перехідні процеси в колах з індуктивністю.

Демонстрацію проводять для з'ясування характеру зв'язку між напругою, підключеною до клем котушки, та струмом при замиканні та розмиканні кола.

Обладнання: датчик «вольтметр» 0 ± 12 В; датчик «амперметр» 0 ± 100 мА; магазин опорів 0,01 Ом-100 кОм або резистори на панелях (2 комплекти); діод на панелі; джерело живлення постійного струму регульоване. 0-12 В; дросельна котушка (3600 витків) з осердям з набору шкільного комплекту розбірного трансформатора; дроти з клемми. Період вимірювання встановлено 200 мкс, час вимірювання в межах 0,3 – 1 с.

Зберемо схему, як показано на рисунку 4 без елементів, вказаних пунктиром. Резистор R_1 обмежує максимальний струм у колі. У початковому стані ключ К розімкнуто. При замиканні ключа на клеммах котушки з'являється напруга. Величина напруги у нашому експерименті – 5 В, опори резисторів R_1 та R_2 однакові і дорівнюють 675 Ом.

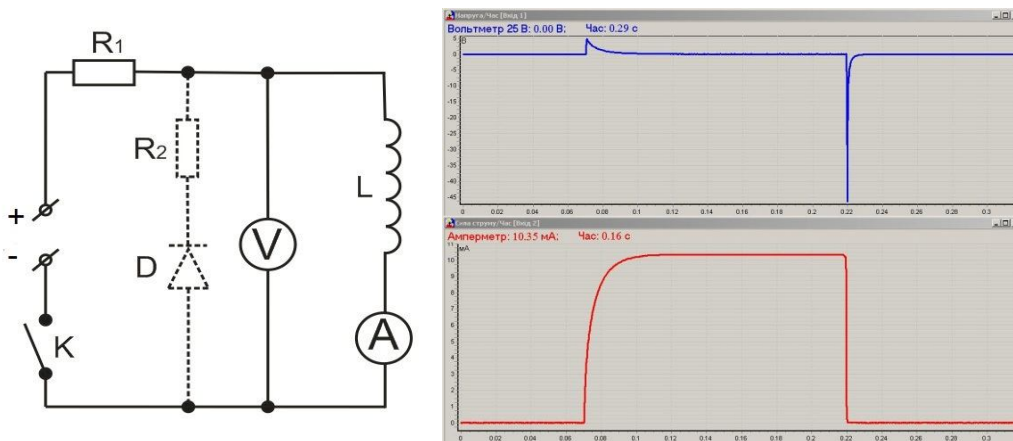


Рис. 4. Електрична схема демонстраційної установки та результати вимірювань. На верхньому графіку відображено зміну напруги на клеммах котушки, а на нижньому – струму, під час замикання – розмикання електричного кола.

Як видно з результатів дослідження, струм збільшується із затримкою відносно напруги на клеммах котушки (рис. 4). Струм у котушці, зумовлений зовнішнім джерелом ЕРС призводить до виникнення магнітного потоку який породжує ЕРС самоіндукції протилежного знаку, що у свою чергу гальмує зростання струму. Розмикання кола призводить до миттєвого зникнення струму у колі (і миттєвого зменшення магнітного потоку), на клеммах котушки виникає ЕРС зворотної полярності. Її величина може сягати дуже великих значень. Змінимо схему дослідження. Для цього підключимо елементи позначені на схемі пунктиром. При замиканні кола живлення ця ланка кола ніяк не впливає на процеси, що там відбуваються. Однак, при розмиканні кола, як ми бачили в попередньому прикладі, виникає ЕРС зворотного напрямку. Діод буде зміщено у прямому напрямку, що призведе до появи струму у колі. Для встановлення симетрії зростання та зменшення струму при замиканні – розмиканні кола, послідовно з діодом включено резистор, R_2 аналогічний R_1 . Результати вимірювань показано на рис. 5.

Як бачимо, при розмиканні ключа, струм не зникає миттєво, а величина зворотної напруги на клеммах дорівнює напрузі джерела живлення що підводилась до котушки для створення магнітного поля. Дамо пояснення отриманих результатів. В момент замикання ключа, напруга на клеммах встановлюється такою, як на клеммах джерела струму. Струм у котушці зростає і породжує зростаючий магнітний потік.

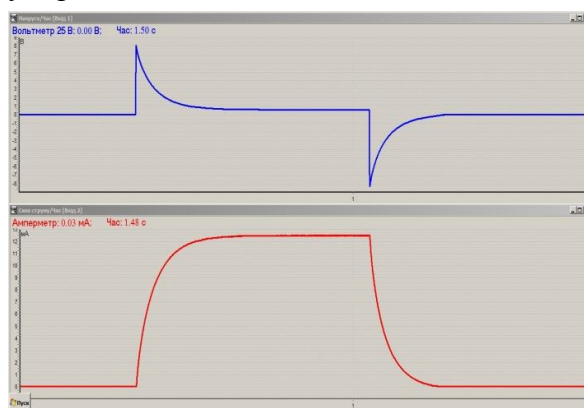


Рис. 5. Графіки зміни напруги (верхній) та струму (нижній) у колі з котушкою індуктивності (з елементами замикання кола струму, зумовленою зворотною ЕРС).

В свою чергу, магнітний потік, проходячи через витки котушки, породжує ЕРС самоіндукції протилежної полярності. Швидкість зростання струму у колі (і магнітного потоку) зменшується при наближенні до максимального значення, обмеженого величиною опору резистора R . Напруга ж на клеммах котушки зменшується. Коли струм у котушці сягне максимальної величини, енергія магнітного поля стане максимальною, а ЕРС самоіндукції зникне. Оскільки у колі тече струм, мінімальна напруга на клеммах котушки за даними вимірювання становить близько 0,5 В. При розмиканні кола живлення, на клеммах котушки виникає ЕРС зворотної полярності. Через діод та резистор коло замикається і в ньому тече струм. Цей струм гальмує зменшення магнітного потоку. Якщо порівняти графіки заряду – розряду конденсатора та намагнічування – розмагнічування котушки, можна виявити схожість вигляду графіків. Закон зміни напруги у колі з конденсатором подібний до закону зміни струму у колі з котушкою теж справедливо і для струму у колі з конденсатором і напругою у колі з котушкою. Відмінність у тому, що конденсатор накопичує заряд, який може зберігатися достатньо довго. Магнітне поле, не може існувати без струму, що його створив. Залишається відкритим питання: як залежить магнітний потік від струму у колі? Адже факт, що магнітний потік зростає пропорційно струму, не є очевидним. Зазначимо, що вимірювання безпосередньо величини магнітного потоку, тим більше у динамічному режимі, складна технічна проблема. Однак, можна виміряти індукцію магнітного поля. На рис. 6 показано залежності струму у колі котушки та індукції магнітного поля від часу. Слід наголосити, що на величину ЕРС самоіндукції впливає не величина магнітного потоку, а швидкість його зміни. Тому, при збільшенні струму до максимуму, магнітна індукція теж сягає максимального значення, магнітний потік стає сталим, а ЕРС самоіндукції зникає.



Рис. 6. Зміна струму у котушці індуктивності (нижній графік) та індукції магнітного поля (верхній графік) від часу.

Завдання: Проаналізуйте результати вимірювань. Проведіть вимірювання для різних значень опору у колі і величини індуктивності. Індуктивність змінюйте, підключаючи секції котушки у такому порядку: 3600, 2400, 1200 витків. Обчисліть величину активного опору котушки (за даними графіку). Які перетворення енергії відбуваються при замиканні – розмиканні кола у першому та другому варіанті демонстрації? За яких умов існує магнітне

поле навколо котушки? Проведіть вимірювання залежності величини магнітної індукції в обраній точці від струму у котушці. Як пов'язані ці параметри?

Котушка індуктивності у колі змінного струму.

Демонстрацію проводять для з'ясування характеру зв'язку між струмом у колі та напругою на клеммах котушки індуктивності при протіканні змінного струму.

Обладнання: датчик «вольтметр» 0 ± 12 В; датчик «амперметр» 0 ± 10 мА; дросельна котушка (3600 витків) від шкільного розбірного трансформатора; магазин опорів 0,01 Ом-100 кОм або резистори на панелях; генератор сигналів ГЦ 3.1 або аналогічний з можливістю автоматичної зміни частоти у межах 0 – 1 МГц; дроти з клемми. Період вимірювання встановіть 200 мкс; час вимірювання - 1с.

Зберіть електричне коло за схемою, показаною на рис. 7. Встановіть частоту генератора 50 Гц. Амплітуду сигналу оберіть такою, щоб струм і напруга не були максимальними. Проведіть вимірювання. Виділіть на графіку одне повне коливання напруги. Зверніть увагу на зсув фаз між напругою на клеммах котушки та струмом у колі.

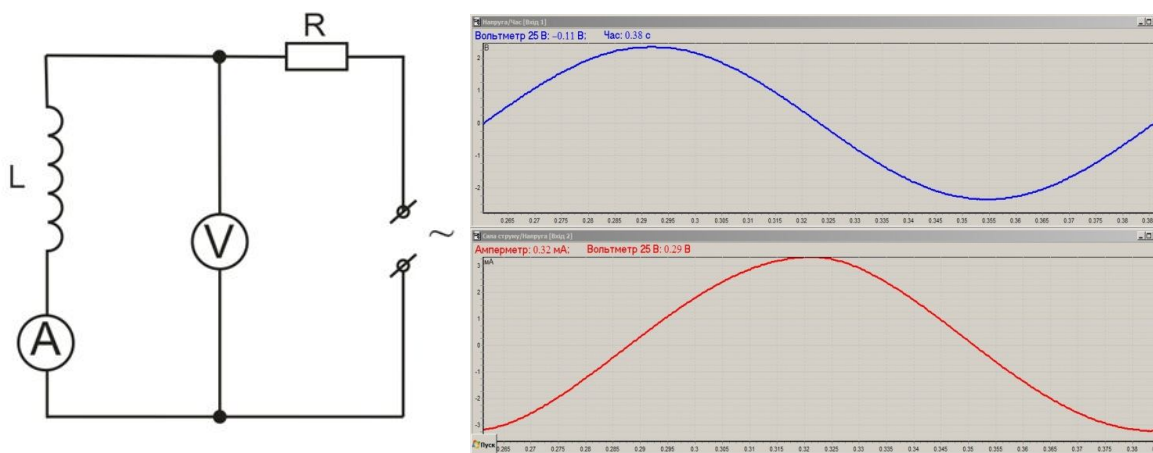


Рис. 7. Графіки зміни напруги (верхній) та струму (нижній) у колі з котушкою індуктивності.

Завдання: Проаналізуйте результати вимірювання, зіставте з результатами попереднього дослід. Проведіть наступне вимірювання, плавно зменшуючи частоту коливань генератора. Проведіть серії з декількох вимірювань, змінюючи дискретно частоту, амплітуду сигналу та величини індуктивності і опору. Як змінюються величини напруги на клеммах котушки і струму в колі при зміні одного з параметрів? Чи змінюється різниця фаз між коливаннями напруги на клеммах котушки та струму у колі? Від чого вона залежить?

Паралельний коливальний контур.

Розглянемо процеси у більш складній системі - паралельному коливальному контурі за різних умов збудження коливань:

- вільні коливання, збуджені за рахунок енергії електричного поля конденсатора;
- вільні коливання, збуджені магнітною енергією котушки індуктивності;
- вимушені коливання з використанням зовнішнього джерела змінного струму.

Збудження коливань у паралельному контурі за рахунок енергії електричного поля конденсатора. Зберемо схему, як показано на рисунку (8). До установки входять: деталі з комплекту шкільного розбірного трансформатора (осердя, дросельна котушка 3600

витків); джерело постійного струму регульоване; ключ; батарея конденсаторів 0,5 – 60,5 мкФ; датчик напруги ± 12 В; датчик струму ± 100 мА; дроти з клемми. Зарядимо конденсатор від джерела постійного струму (ключ К у положенні 2). Після перемикаання ключа у положення 1, конденсатор почне розряджатися. Графік залежності струму від напруги вільних затухаючих коливань у контурі, збуджених за рахунок енергії конденсатора показано на рис. 8.

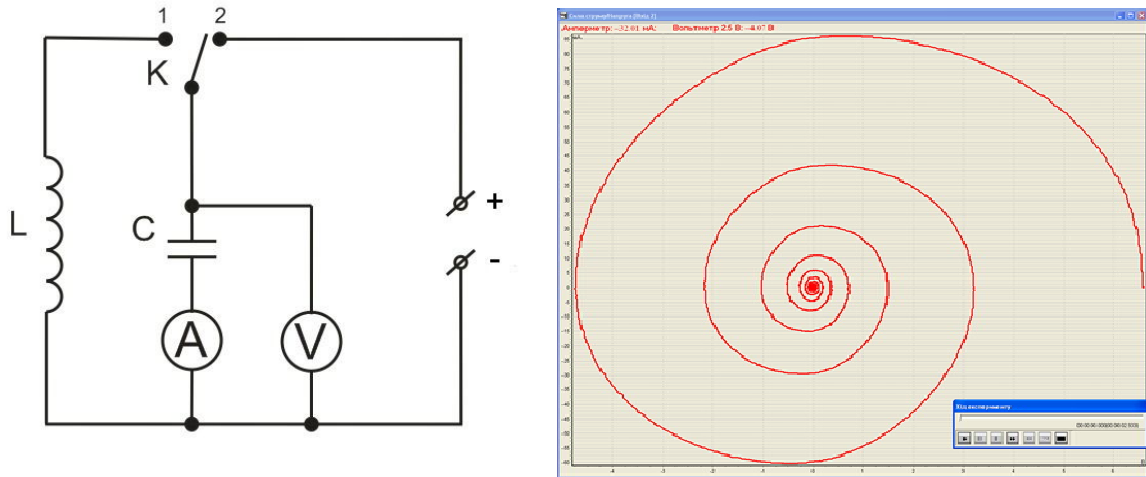


Рис. 8. Збудження коливань за рахунок енергії конденсатора. Електрична схема установки та результати вимірювань

(Залежність електричного струму у коливальному контурі від напруги).

По осі абсцис відображено значення напруги на контурі а по осі ординат – струм у колі контуру. На початку процесу розряджання конденсатора струм у колі мав би бути найбільшим ($U_c = 6,5$ В). Але, розряд здійснюється через котушку індуктивності. Збільшення струму у котушці стримується самоіндукцією. В результаті, струм у колі зростатиме повільно, конденсатор розряджатиметься, а його енергія перетворюватиметься на енергію магнітного поля котушки. Струм у колі сягне максимального значення в момент повного розряду конденсатора ($U_c = 0$, $I = 86$ мА), тобто вся енергія електричного поля конденсатора повністю перетвориться на енергію магнітного поля котушки. З цього моменту струм у колі зменшуватиметься. Магнітне поле котушки теж зменшуватиметься, а явище самоіндукції призведе до появи ЕРС самоіндукції протилежної полярності та перешкоджатиме моментальному зменшенню струму. Коли струм зникне, обкладки конденсатора матимуть максимальний, однак протилежний початковому, заряд ($U = -4,8$ В; $I = 0$). Енергія ж магнітного поля повністю перетвориться на енергію електричного поля. Далі знову почнеться розряд конденсатора, з тією різницею, що струм матиме напрямок, протилежний початковому. Коли конденсатор повністю розрядиться, струм сягне свого від'ємного максимуму, а напруга зменшиться до нульового значення ($U = 0$; $I = -40$ мА). Наступне зменшення струму знов призведе до зміни полярності ЕРС, конденсатор знов зарядиться до максимальної напруги, а струм у колі зникне ($U = 3,3$ В; $I = 0$). Процес перетворення енергії у колі матиме періодичний характер. Цикл перетворення енергії і повернення у початковий стан називають періодом власних коливань коливального контуру. Такі коливання називають вільними або власними. Затухання коливань відбувається

за рахунок того, що дроти, з яких складено схему та виготовлено котушку, мають електричний опір, тож частина енергії витрачається на нагрівання дротів (діелектричні, магнітні втрати можна вважати незначними). За даними вимірювань можна визначити період коливань, енергію електричного та магнітного полів, а також частку енергії, що розсіюється у вигляді тепла.

Завдання. Визначте, яка кількість (частка) енергії втрачається контуром за одне повне коливання? Змініть параметри котушки та конденсатора. Як змінився період коливань?

Збудження вільних коливань у коливальному контурі за рахунок енергії магнітного поля котушки. До установки входять: деталі з комплекту шкільного розбірного трансформатора (осердя, дросельна котушка 3600 витків, котушка мережева); джерело простійного струму регульоване; ключ; батарея конденсаторів 0,5 – 60,5 мкФ; датчик напруги ± 12 В; датчик струму ± 100 мА; дроти з клемми.

На рис. 9 показано електричну схему установки та результати вимірювань залежності сили струму у колі контуру від напруги на ньому. Дросельна котушка L_2 включається в коло коливального контуру, а мережева котушка L_1 у коло джерела постійного струму. Включимо джерело струму. Замикання ключа K призведе до намагнічування осердя котушки. При цьому у контурі виникнуть вільні коливання, що швидко згаснуть. Отже, осердя трансформатора залишатиметься намагніченим, а магнітний потік буде сталим, оскільки струм у колі котушки буде незмінним. Розмикання ключа розірве електричне коло, струм миттєво зникне.

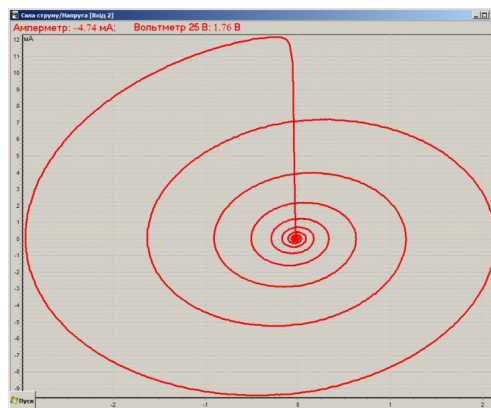
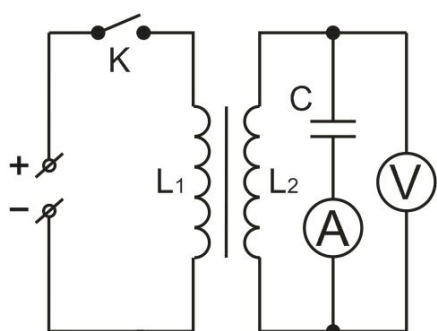


Рис. 9. Збудження коливань за рахунок енергії котушки індуктивності. Електрична схема установки та результати вимірювань

(Залежність електричного струму у коливальному контурі від напруги).

Вся енергія магнітного поля піде на створення коливань у контурі. Як і в попередній демонстрації, коливання є затухаючими. Коливальний процес починається з моменту, коли напруга на клеммах конденсатора відсутня. Відключення струму у колі намагнічування призводить до виникнення ЕРС самоіндукції, конденсатор починає заряджатися, а струм сягає максимальної величини.

Завдання. Чому змінилася форма графіку у порівнянні з попереднім експериментом? Що відбудеться, якщо змінити полярність підключення котушки підмагнічування? Поясніть. Проведіть вимірювання, змінивши полярність підключення котушки підмагнічування.

Вимушені коливання в контурі за рахунок енергії зовнішнього джерела змінного струму.

Для демонстрації необхідні прилади та обладнання: генератор сигналів ГЦ 3.1 або аналогічний з можливістю автоматичної зміни частоти у межах 0 – 1 МГц; деталі з комплекту шкільного розбірного трансформатора (осердя, дросельна котушка 3600 витків); батарея конденсаторів 0,5 – 60,5 мкФ; датчик напруги ± 12 В; датчик струму ± 100 мА; резистор з опором в межах 3,3 – 10 кОм; панель з клемми; дроти з клемми. Схему установки показано на рис. 10.

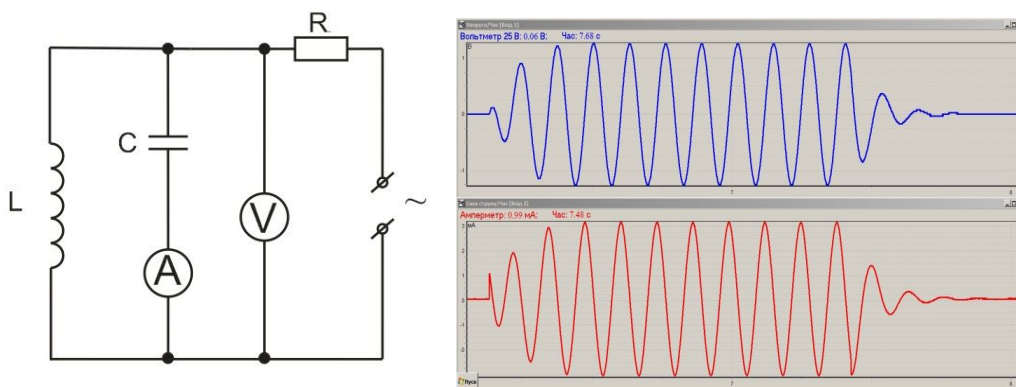


Рис. 10. Електрична схема установки для дослідження вимушених коливань та залежність електричного струму і напруги у коливальному контурі від часу.

До початку демонстрації слід визначити резонансну частоту контуру. Оскільки вона лежить у межах одиниць – десятків Гц, встановіть межі частотного діапазону генератора 0 – 20 Гц, включіть режим вимірювання та, слідкуючи за зміною амплітуди коливань, визначте резонансну частоту. Демонстрацію вимушених коливань у контурі почніть на резонансній частоті. На рисунку 10 показано результати вимірювання. Як бачимо, амплітуда коливань повільно збільшується при підключенні, та зменшується після відключення генератора.

Завдання. Проведіть дослід, збільшивши (зменшивши) частоту генератора. Поясніть результати вимірювань.

Резонанс у паралельному коливальному контурі.

Для демонстрації необхідні прилади та обладнання: генератор сигналів ГЦ 3.1 або аналогічний з можливістю автоматичної зміни частоти у межах 0 – 1 МГц; датчик піковий вольтметр - 2,5 В; датчик частотомір; котушка індуктивності 0,1 - 10 мГн; конденсатори ємністю 0,01-1 мкФ; резистор з опором в межах 3,3 – 10 кОм; панель з клемми; монтажні дроти. Схему установки та її фото показано на рис. 11 Резонансна частота досліджуваного коливального контуру визначається формулою $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ і міститиметься в межах десятків кілогерц.

Діапазон зміни частоти генератора слід обирати таким чином, щоб на початку і в кінці діапазону зміна частоти не впливала на амплітуду сигналу. У нашому випадку резонансна частота складала 31,19167 кГц. Генератор встановлено на качання частоти в межах 22 – 40 кГц. Швидкість зміни частоти – 100 Гц/с. Процес вимірювання відбувався протягом 40 секунд. Амплітуда сигналу відображається на осі «У», частота – на осі «Х». За результатом експерименту отримуємо криву, що відповідає залежності амплітуди напруги на контурі від частоти зовнішнього сигналу. Наявність цифрового дисплею, забезпечує зоровий

контроль поточного значення частоти, і впевненість, що частота змінюється у заданих межах. Після визначення резонансної частоти коливального контуру слід з'ясувати, які фактори впливають на саму резонансну частоту, та форму резонансної кривої.

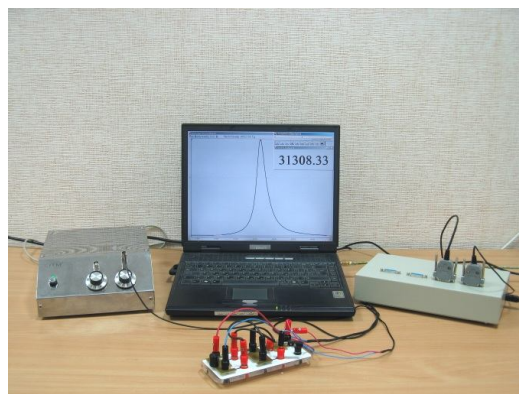
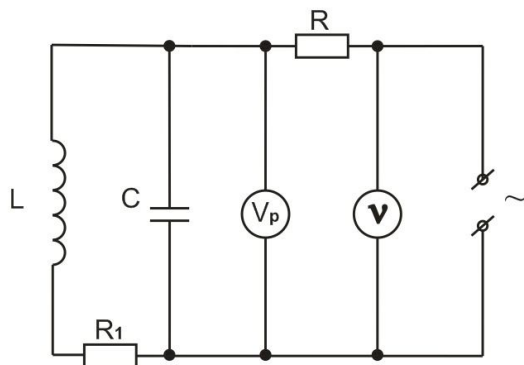


Рис. 11. Електрична схема та зовнішній вигляд установки для дослідження параметрів компонентів електричних кіл.

Завдання. Повторіть вимірювання, змінюючи амплітуду сигналу генератора; ємність конденсатора; індуктивність котушки. Підключіть паралельно та в коло контуру резистори з опором в межах 1 – 100 кОм. Дослідіть, як впливатиме на форму та амплітуду резонансної кривої величина цих елементів.

Висновки.

Вивчення явищ, що відбуваються у електричних колах базується на глибокому розумінні елементарних процесів, що лежать у їх основі. Автоматизація експерименту, і обробки результатів вимірювань дозволяє зробити демонстрації більш інформативними та встановити природний зв'язок між процесами, що визначають властивості складних систем. Відображення результатів експерименту у графічному вигляді сприяє полегшенню розуміння навчального матеріалу. Наявність даних вимірювань кількісних характеристик, отриманих під час проведення демонстрацій полегшує перехід до аналітичної форми опису вказаних процесів.

Список використаної літератури

1. Повышение эффективности наглядности при использовании динамических компьютерных моделей // Теоретические проблемы физического образования. - С.-Петербург: Образование, 1996. - 87 с.
2. "Фізика 11 клас" Навчальне програмне забезпечення з фізики для 11 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Розробка ЗАТ "Транспортні системи".
3. <http://phet.colorado.edu/en/simulations/category/physics>
4. ИКТ в предметной области. Часть V. Физика: Методические рекомендации / Под ред. В.Е. Фрадкина. – СПб, ГОУ ДПО ЦПКС СПб «Региональный центр оценки качества образования и информационных технологий», 2010. – 83 с.

ІНТЕГРАТИВНО-ПРЕДМЕТНИЙ ПІДХІД ЯК ЗАСІБ ВИВЧЕННЯ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ ЗНАНЬ В УМОВАХ ВПРОВАДЖЕННЯ НОВОГО ЗМІСТУ НАВЧАННЯ У ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Мартинюк М. Т.,

*доктор пед. наук, професор,
член-кореспондент НАПН України,*

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

Хитрук В. І.,

кандидат пед. наук, доцент,

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

Декарчук М.В.,

кандидат пед. наук, доцент

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

У статті обґрунтовується інтегративно-предметний підхід як засіб вивчення фізико-технічних знань в умовах впровадження нового змісту навчання у загальноосвітніх навчальних закладах. Показано, що ефективне вивчення фізико-технічних знань можливе на засадах принципів науковості, єдності змістового і процесуального підходів у конструюванні навчальних матеріалів та в умовах реалізації засобів внутріпредметної, між предметної і між освітньо-галузевої взаємодії.

В статье обосновывается интегративно-предметный подход как средство изучения физико-технических знаний в условиях внедрения нового содержания обучения в общеобразовательных учебных заведениях. Показано, что эффективное изучение физико-технических знаний возможно на основе принципов научности, единства содержательного и процессуального подходов в конструировании учебных материалов, а также при условии реализации средств внутрипредметного, меж предметного и меж образовательно-отраслевого взаимодействия.

Integrated subject approach as a means of studying physicotechnical knowledge under conditions of introducing new content of training in comprehensive establishments are substantiated in the article. It has been proved that effective acquiring of physicotechnical knowledge is possible on the basis of the scientific principle, integrity of contents and process approaches in building educational materials and under conditions of implementation internal subject, intersubject and interbranch education interactions.

Постановка проблеми. Фізика є не лише фундаментальною наукою і базисом наукового природознавства в цілому. Крім наукового, вона має й важливе соціокультурне значення. Сучасне фізичне знання є невід'ємною складовою культури високотехнологічного інформаційного суспільства, основою сучасної техніки і виробничих технологій. Тому вивчення прикладних застосувань фізичного знання визначає як освітнє, так і світоглядне та виховне значення в аспекті підготовки молоді, і насамперед учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Проте в умовах гуманізації шкільної освіти, вивченню техніко-технологічних застосувань фізики приділяється не достатньо уваги, про що свідчать результати аналізу діючих навчальних програм з фізики [1,2 та ін.]

Аналіз досліджень і публікацій. Як переконливо доведено в дослідженні Л.Ю. Благодаренко [3], проблема політехнізації навчання фізиці є особливо актуальною в умовах упровадження в реальну навчальну діяльність вимог чинного нині Державного стандарту базової і повної середньої освіти [4]. Відома вчений – методист розробила методiku «посилення політехнізації навчання фізики» в основній школі. Богданов обґрунтував методiku вивчення фізико-технічних знань у процесі вивчення електротехнічних дисциплін у вищій школі [5]. В нашому дослідженні [6] запропоновано методiku вивчення фізичних властивостей твердих тіл на основі інтегративно-предметного підходу. Набутий нами досвід дає підстави стверджувати, що такий підхід має бути ефективним й при вивченні фізико-технічних знань як системної складової компоненти змісту загальної середньої фізичної освіти.

Мета статті. Обґрунтувати інтегративно-предметний підхід як засіб вивчення фізико-технічних знань в умовах впровадження нового змісту навчання у загальноосвітніх навчальних закладах. Показати, що ефективне вивчення фізико-технічних знань можливе на засадах принципів науковості, єдності змістового і процесуального підходів у конструюванні навчальних матеріалів та в умовах реалізації засобів внутріпредметної, між предметної і між освітньо-галузевої взаємодії.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Державним стандартом базової повної середньої освіти передбачено, що зміст освітньої галузі «Природознавство» може реалізуватися як окремими навчальними предметами (астрономія, біологія, географія, фізика, хімія та інші галузі природознавства), що відображають основи відповідних фундаментальних наук, так і завдяки інтегрованим курсам. У подальшому означений вище Стандарт освіти акцентує на предметному підході, що й зумовило розроблення навчальних програм із загальноосвітніх дисциплін. При цьому для всіх спеціально-предметних дисциплін освітньої галузі «Природознавство» визначено єдині загальні змістовно-процесуальні лінії конструювання змісту навчального матеріалу. Такими лініями є рівні і форми організації живої і неживої природи, які структурно представлені в кожній компоненті освітньої галузі специфічними для неї об'єктами і моделями: закони і закономірності природи; методи наукового пізнання, специфічні для кожної з природничих наук; значення науково-природничих знань у житті людини та їхня роль у суспільному розвитку[1]. Виокремлення цих ліній зумовлено потребами демократизувати і гуманізувати загальну середню освіту, орієнтувати молодь на захист довкілля, безпечну життєдіяльність та на інші пріоритети і цінності сучасної людини і людської цивілізації в цілому.

Отже, Державний стандарт освіти унормовує інтегративно-предметний підхід до вивчення освітньої галузі «Природознавство» на рівні «теоретичного подання» . Цей самий підхід реалізується (конкретизується) й на «рівні навчальних програм» . Проведений нами аналіз навчальних програм шкільних предметів природничо-наукового циклу показує, що:

- в цілому, означені вище загальні змістово-процесуальні лінії конструювання навчального матеріалу чітко простежуються в структурі навчальних програм зі всіх шкільних природничо-наукових дисциплін;
- загальна ж структура фактологічного матеріалу нових навчальних програм з природничо-наукових дисциплін, у тому числі й з фізики, збереглася. Вона обумовлена

найзагальнішими спеціально-предметними законами і положеннями світоглядного характеру. У цю структуру вкраплено інші спеціально-предметні знання та знання гуманітарного характеру. Проте інтегрування цих та інших знань на рівні окремих понять уже не простежується. Останній висновок стосується й прийомів навчальної діяльності, досвіду творчої діяльності та емоційно-вольової компоненти змісту освіти;

- виявлено недостатнє врахування міжпредметних зв'язків, зокрема зв'язків фізики з хімією, астрономією, біологією, а також із предметами освітніх галузей «Технології» і «Математика». Зокрема, спостерігається дублювання окремих знань, окреслених означеними вище змістово-процесуальними лініями, у різних шкільних навчальних дисциплінах;

- нерідко маємо необґрунтовані або недопустимі розбіжності у трактуванні окремих понять, наприклад, властивостей твердих тіл на основі енергетичних уявлень, молекулярних сил взаємодії тощо. Низка суттєвих в аспекті політехнічного навчання властивостей речовини трактується поверхово, а не на з'ясуванні їх суті на основі фундаментальних фізичних теорій;

- спільним для програм зі всіх навчальних предметів природничо-наукового циклу є значне вилучення фактологічних знань, які необхідні для життя людини у техносфері. Особливо це стосується фізики як навчального предмета.. Більш того, в нових навчальних програмах, як і в чинних нині навчальних програмах і шкільних підручниках, практично відсутні дані про

нові матеріали з якісно новими фізико-технічними характеристиками і сучасні високотехнологічні виробництва, не кажучи вже про відкриття і досягнення нанонаук і нанотехнологій. І це породжує важливі і соціальні, і науково-освітні проблеми. Наприклад, система сучасних фізичних наук, до якої входить і фізика твердого тіла (ФТТ), інтенсивно розвивається, що стимулюється потребами техніки і виробничих технологій. Сьогодні біля половини фізиків усього світу працюють саме в цій галузі. Майже половина наукових фізичних досліджень належать до досліджень твердих тіл. Саме ФТТ є джерелом нових матеріалів, нові фізичні ідеї, що народжуються у фізиці твердого тіла, проникають в ядерну фізику, астрофізику, біофізику і інші галузі . Натомість, як показав аналіз навчальних програм, частка знань про елементи фізики твердого тіла в структурі інших знань, означених програмами, є відносно невеликою: 13,6% (1996р.) і 11,4% (2005р.). Це є однією із причин зниження інтересу випускників ЗНЗ до набування фізико-технічних професій.

Таким чином, у процесі модернізації змісту загальної середньої, зокрема фізичної, освіти виявилось ряд протиріч, які породжують (або можуть породити) важливі соціальні проблеми. Тому необхідний багатоаспектний міжпредметний аналіз і синтез з метою ефективнішої взаємодії навчальних предметів, у тому числі й щодо формування фізико-технічних знань . Відсутність результатів такого аналізу негативно відбилася на конструюванні навчальних матеріалів як на рівні навчальних програм, так і на «рівні підручників». ; тут мають місце одні й ті ж самі недоречності, зокрема й щодо «збіднення» відомостей про елементи фізики твердого тіла. Це підтвердив і проведений нами аналіз нових навчальних програм з фізики для старшої школи. Варто зважити на те, що починаючи з 2006-2007н.р. йде формування нового змісту фізичної освіти на наступному рівні – рівні

реальної діяльності навчання. І набутий при цьому досвід підтверджує, що відповідні суперечності множаться й в реальній навчальній діяльності. Так, 15% (із 148 опитаних нами) вчителів фізики підтвердили, що вони спорадично й лише в аспекті пошуку міжпредметних взаємозв'язків здійснюють аналіз і синтез навчальних матеріалів. При цьому вчителі користуються довідниковою і науково-популярною літературою як на друкованих, так і на електронних носіях, зокрема. 43% опитаних вчителів вважають, що аналіз і синтез міжпредметних зв'язків (МПЗ) треба робити лише в майбутньому, після повного завершення переходу школи на оновлений зміст навчання (тобто після 2013 року – а.). Кожний другий із наших респондентів вважає, що проблеми міжпредметної взаємодії їх не стосуються, бо це справа авторів програм і навчальних посібників.

Отже, реалізація інтегративно-предметного підходу на рівні реальної діяльності навчання також має істотні суперечності, які потребують нагального розв'язання. Наразі, в загальноосвітніх навчальних закладах реалізується докорінно оновлений (точніше модернізований на основі новітніх наукових досягнень та нової парадигми загальної середньої освіти) зміст навчання. Це сповна стосується його техніко-технологічного компоненту. Проте, наукових розробок щодо міжпредметної взаємодії і інтеграції фізико – технічних знань, коло яких окреслено новими навчальними програмами, нами не виявлено.

Таким чином, аналіз науково-методичної літератури, Державного стандарту базової і повної освіти, нових навчальних планів і підручників, а також реальної навчальної практики показав, що вивчення фізико-технічних знань на основі інтегративно-предметного підходу є надзвичайно актуальною проблемою, яку необхідно вирішити вже тепер, на початковому етапі впровадження нового модернізованого змісту загальної середньої освіти в школах України. Цілком очевидно, що означений підхід сповна реалізує й цільові напрями політехнічної освіти.

Нами встановлено [6], що здійснення ефективної інтеграції фізико-технічних знань на внутрішньогалузевому циклі природничо-наукових предметів та на міжосвітньо-галузевому (насамперед, спільно з освітньою галуззю «Технології») рівнях .

Наше дослідження показало, що міжпредметна взаємодія у вивченні фізико-технічних знань буде ефективною за умови, коли вона здійснюється на основі наукових фізичних теорій, насамперед фундаментальних фізичних теорій і основних видів взаємодій у природі: гравітаційної, електромагнітної і ядерної. При вивченні фізико-технічних знань слід виходити з того, що нескінченна різноманітність, зокрема, властивостей і поведінки тіл обумовлені наявністю найдрібніших (які ще зберігають відповідні хімічні властивості) ансамблів атомів і молекул, їх взаємодією між собою та із зовнішніми фізичними полями. У цьому полягає сутність мікроскопічного підходу до інтерпретації спостережуваних властивостей і явищ у твердих тілах. Є й макроскопічний підхід, який трактує ту чи ту властивість твердого тіла, як суцільного середовища. Реалізація таких підходів є необхідною умовою засвоєння знань не лише на рівні наукового пізнання, але й пізнання навчального. Тільки поєднання мікроскопічного і макроскопічного підходів дає можливість сповна ефективно формувати інтегровані фізико-технічні знання, елементи яких вивчаються в різних природничо-наукових навчальних предметах та в освітній галузі «Технологія».

Встановлено, що інтегрованими фізико-технічними знаннями є такі, які сформовано у процесі вивчення різних навчальних предметів на основі застосування єдиних наукових теорій: молекулярно кінетичної теорії і термодинаміки, електродинаміки і квантової фізики. Саме ці три теорії повинні бути визначальними у розгортанні (розвитку) фізико-технічних знань як у змістовій, так у процесуальній сторонах навчання.

Виходячи з уявлень про п'ятикомпонентну структуру будь-якої методичної системи навчання (кого вчити, для чого і чому вчити, які методи і засоби навчання реалізовувати), у тому числі й у навчанні фізики, та враховуючи широкий спектр навчально-пізнавальних можливостей, інтересів і здібностей учнів загальноосвітніх навчальних закладів, різноманітних шляхів і форм профільності старшої школи, можна стверджувати, що інтегративно-предметний підхід до вивчення фізико-технічних знань передбачає багатоваріантність можливих структурувань навчального матеріалу. Як показав проведений нами аналіз, структурування може здійснюватися як за змістовими лініями (на основі окремих понять, законів, теорій), так і за організаційно-формальними ознаками реалізації навчального процесу.

Згідно до сучасних психологічних і дидактичних теорій навчання, ефективність засвоєння знань учнями забезпечується в умовах реалізації принципу єдності змістової і процесуальної сторін (компонент) навчання при провідній ролі змістового складника. Зокрема, реалізуючи цей принцип в побудові модернізованої нами методичної системи вивчення фізико-технічних знань, в умовах профільного навчання в сучасній загальноосвітній школі встановлено доцільність структурування знань про елементи фізики твердого тіла в чотири універсальні модулі: механічні, теплові і електромагнітні властивості та їх практичне застосування. У свою чергу, змістова наповнюваність та конкретна методика вивчення того чи того модуля можуть бути різноваріативними, залежно від обраного учнями профілю навчання, провідної освітньої технології, яка використовується вчителем, та типу школи (чи іншого навчального закладу, на який покладено функцію завершення загальної середньої освіти). Останнє обумовлено тим, що спектр навчальних предметів, зокрема спеціального призначення, детермінований профілем навчального закладу. Нерідко такі навчальні дисципліни суттєво впливають на інформаційне поле щодо тих чи тих фізико-технічних знань або сфери їх практичного застосування.

Доведено, що з метою підвищення ефективності засвоєння фізико-технічних знань та забезпечення умов для реалізації (крім, дидактичних) й інших функцій навчання у процесі вивчення фізики, необхідна цілеспрямована робота зі створення «зони найближчого розвитку знань», тобто спеціально створене освітнє розвивальне середовище, в якому учень мав би можливість (в змістовому, мотиваційному і операційному плані) самостійно здобувати нові знання залежно від власних інтересів і здібностей. Проведене нами дослідження підтвердило, що ефективним механізмом створення такого середовища є використання друкованих і електронних навчальних посібників і цілеспрямоване формування узагальненого способу набування нової інформації. До числа друкованих посібників слід віднести довідники, науково-популярні навчальні посібники і методичні матеріали із суміжних навчальних посібників. З числа новітніх інформаційних джерел ефективними є електронні посібники щодо програмно-педагогічного забезпечення навчання фізики і інших навчальних предметів,

які за змістом є джерелом інформації про фізико-технічні знання та сфери їх практичного застосування. Нами створено тезаурус таких джерел інформації (в тому числі й з використанням інтернет-ресурсів). З іншого боку, необхідним є й розроблення спеціальних програмно-педагогічних засобів щодо вивчення фізико-технічних знань в умовах конкретної (такої що впроваджується особисто тим чи тим вчителем) методичної системи навчання фізики. Безперечно, що ця специфіка накладає певні вимоги, щодо підготовки вчителя до розроблення таких програмних засобів.

Як приклад, нами доведено, що метод навчальних проєктів дає можливість вирішення ряду навчально-пізнавальних завдань як в процесі систематичного вивчення фізики, так і в системі позакласної роботи. Він є ефективним в аспекті забезпечення подальшого розвитку фізико-технічних знань, бо сповна реалізує інтегрування знань з різних галузей науки. З іншого боку, застосування методу навчальних проєктів сприяє використанню дослідницьких, пошукових, проблемних методів, творчих за своєю суттю. Це інтенсифікує реалізацію розвивальних функцій навчання.

Насамкінець зазначимо, що важливим засобом формування узагальнених фізико-технічних знань є перевірко-оцінювальна діяльність, що реалізується різними, у тому числі й тестовими технологіями. Останні в теорії і методиці навчання фізики є найменш розробленими. У нашому дослідженні розроблено тестову технологію перевірко-оцінювальної діяльності у процесі вивчення фізико-технічних знань засобами різних навчальних предметів. Досвід побудови відповідних дидактичних матеріалів висвітлено нами в науково-методичній літературі [6 та ін.].

Безперечно, існує необхідність спеціальної підготовки вчителя до реалізації інтегративно-предметного навчання у сучасній школі в умовах впровадження Державного стандарту базової і повної середньої освіти. В основу такої підготовки ми покладемо принцип наступності у побудові методичних систем навчання у ЗОШ і педвузі при визначальній ролі цілей і засобів навчання фізики учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Завершальним етапом такої підготовки майбутніх учителів є впровадження селективних навчальних курсів. Досвід формування такого навчального курсу («Фізика конденсованого стану речовини») висвітлено нами в навчальному посібнику «Будова і властивості твердих тіл», що отримав гриф МОН України [7].

Висновки. 1. Розроблену нами на основі внутрішньопредметної, міжпредметної і міжгалузево-освітньої взаємодії методичну систему навчання, яка утворює основний механізм реалізації інтегративно-предметного підходу до вивчення фізико-технічних знань та впровадження сучасних освітніх технологій, нами апробовано й частково впроваджено в реальну діяльність навчання. Є всі підстави вважати, що при відповідній методичній підготовці вчителя до реалізації інтегративно-предметного підходу така методична система навчання є доступною для її масового впровадження у практичну діяльність загальноосвітнього навчального закладу будь-якого типу.

2. Пропонована нами методична система вивчення прикладних застосувань фізики є ефективною не лише в аспекті формування інтегрованих фізико-технічних знань. Завдяки інтеграції цих знань практично в усі розділи (теми) шкільного курсу фізики, істотно підвищується ефективність навчально-виховного процесу й з курсу шкільної фізики, в

цілому. Це повною мірою стосується не лише освітніх, але й інших цілей навчання, зокрема розвивальних і виховних. Так, спостерігається зростання показників позитивної мотивації учіння учнів; збільшується число учнів, які беруть участь у виконанні навчальних проектів (в аспекті вивчення фізико-технічних знань) у позакласній роботі, у тому числі й з використанням інтернет-ресурсів тощо.

Перспективи подальшого дослідження. До напрямів подальшого дослідження відносимо теорію і практику вивчення фізико-технічних і фізико-технологічних знань в умовах гуманізації і гуманітаризації змісту загальної середньої освіти, удосконалення змісту і структури політехнічного навчання та інтеграцію фізико-технічних і фізико-технологічних знань учнів в умовах галузево-предметного навчання; організацію пізнавальної діяльності учнів (в умовах реалізації інтегративно-предметного підходу) з метою подальшого розвитку фізико-технічних знань в позакласній та позашкільній роботі на основі позитивної мотивації учіння.

Список використаної літератури

1. Фізика. Астрономія : 7-12 кл. : програми для загальноосвітніх навчальних закладів. – К. : Перун, 2005. – 80 с.
2. Фізика. Астрономія : 7-12 кл. : програми для загальноосвітніх шкіл. – К. : Перун, 1996. – 144 с.
3. Благодаренко Л. Ю. Теоретико-методичні засади реалізації фізичної компоненти Державного стандарту базової середньої освіти : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук / Л. Ю. Благодаренко. – К., 2011. – 40 с.
4. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти // Освіта України. – 2004. – № 5. – С.1-13.
5. Богданов І. Т. Теоретичні і методичні засади формування фізико-технічних знань у процесі фахової підготовки майбутніх учителів фізики: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора пед. наук.: 13.00.02 / І. Т. Богданов ; НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К., 2010. – 40 с.
6. Хитрук В.І. Вивчення властивостей твердих тіл у загальноосвітніх навчальних закладах на основі інтегративно-предметного підходу. Навчальний посібник. – Умань: РВЦ «Софія», 2009. – 110 с.
7. Хитрук, В. І. Будова і властивості твердих тіл / В. І. Хитрук – Умань : СПД Жовтий, 2008 – 144 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФРАКЦІЇ СВІТЛА

Сусь Б.А.,

доктор пед. наук, професор,

Національний технічний університет України «КПІ»,

Шут А.М.,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

Київський національний університет технологій та дизайну,

Шут М.І.,

завідувач кафедри загальної та прикладної фізики,

доктор фіз.-мат. наук, професор,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Розроблена лабораторна робота по дослідженню дифракції світла. Для визначення параметрів ґратки, які змінюються в результаті старіння, використовується лазер.

Разработана лабораторная работа по исследованию дифракции света. Для определения параметров решетки, которые изменяются в результате старения, используется лазер.

The laboratory work in the study of diffraction of light. To determine the lattice parameters that change due to aging, using laser.

Постановка проблеми. У лабораторних роботах з дослідження дифракції традиційно використовується гоніометр, на якому встановлюється дифракційна ґратка і зорова труба для спостереження дифрагованих променів [1, 2]. Дифракційна ґратка являє собою скляну або металеву пластинку, на якій через строго однакові інтервали нанесені паралельні штрихи. Ґратки, які використовуються в навчальних лабораторіях, виготовляються з пластмаси і є відбитками гравірованих ґраток. З метою захисту від ушкоджень вони розміщуються між двома скляними пластинками. Однак такі ґратки з часом старіють і значно змінюють свої параметри, так що визначена за допомогою дифракції довжина хвилі не співпадає з кольором світла. Тому виконання лабораторної роботи потребує градування ґраток. Ми пропонуємо простий, доступний, але в той же час досконалий, сучасний варіант установки із застосуванням лазера для спостереження і дослідження дифракційної картини.

Опис лабораторної роботи

Мета роботи: Вивчити явище дифракції світла на дифракційній ґратці. Визначити сталу дифракційної ґратки, кутову дисперсію й роздільну здатність. Визначити довжини хвиль, які випромінює ртутна лампа.

1. Теоретична частина

Основним параметром дифракційної ґратки є період d (стала ґратки) (рис.1).

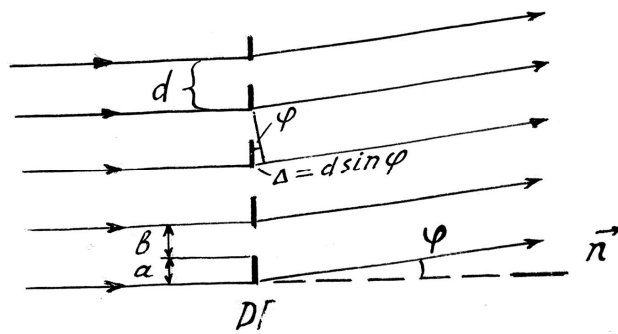


Рис.1

Розподіл інтенсивності в дифракційній картині визначається суперпозицією хвиль, які приходять у точку спостереження від різних щілин дифракційної ґратки. Інтенсивність дифрагированного світла максимальна для таких кутів φ , при яких коливання, які приходять від усіх щілин, перебувають в однаковій фазі, тобто різниця ходу сусідніх щілин дорівнює цілому числу довжин хвиль:

$$\Delta = m\lambda.$$

Згідно з рис.1

$$\Delta = d \sin \varphi,$$

тому

$$d \sin \varphi = m\lambda, \quad (1)$$

де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ – порядок дифракційного максимуму.

Як видно з (1), кути, при яких спостерігаються світлові максимуми, залежать від довжини хвилі λ , тому дифракційна ґратка являє собою спектральний прилад. Біле світло при дифракції на ґратці утворюється спектр, причому фіолетові промені відхиляються менше, ніж червоні. При $m=0$ максимуми інтенсивності для всіх довжин хвиль розміщуються при $\varphi = 0$ і накладаються, тому при білому світлі нульовий максимум, на відміну від інших, виходить незабарвленим. Спектри першого, другого й більшого порядків розміщуються симетрично по обидва боки від нульового.

Важливими характеристиками дифракційної ґратки є кутова дисперсія й роздільна здатність.

Кутова дисперсія D характеризує можливість розрізнення двох близьких спектральних ліній:

$$D = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda}, \quad (3)$$

де $\delta \varphi$ – кутова відстань між лініями, які відрізняються по довжині хвилі на одиничний інтервал.

Диференціюючи обидві частини (1), одержимо:

$$d \cos \varphi \delta \varphi = [m \delta \lambda] \quad (4)$$

(з огляду на те, що d – стала ґратки, для позначення диференціала використано δ).

Таким чином,

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}, \quad (5)$$

тобто дисперсія зростає при збільшенні порядку спектра m .

На практиці дисперсію ґратки визначають шляхом вимірювання кутової відстані $\delta\varphi$ між двома близькими спектральними лініями з відомою різницею довжин хвиль $\delta\lambda$.

Роздільна здатність дифракційної ґратки

Можливість розрізнення двох близьких спектральних ліній λ_1 і λ_2 залежить від їхньої ширини і кутової відстані $\Delta\varphi$ між ними (рис. 2).

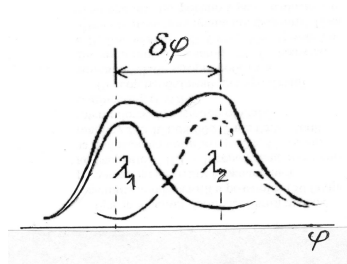


Рис. 2

Якщо у спектрі m -го порядку спостерігаються близькі лінії з довжинами хвиль λ і $\lambda + \Delta\lambda$, то кутова відстань $\Delta\varphi$ між ними, згідно з (4), дорівнює $\Delta\varphi \cong \frac{m\Delta\lambda}{d \cos \varphi}$.

Роздільну здатність ґратки можна визначити, використовуючи умову Релея, відповідно до якої дві монохроматичні спектральні лінії ще розділяються, якщо головний максимум однієї лінії попадає на місце найближчого мінімуму іншої лінії.

2. Експериментальна частина

Прилади та приладдя:

1. Дифракційна ґратка
2. Джерело монохроматичного випромінювання (лазер).
3. Джерело лінійчатого спектру (ртутна лампа).
4. Лінза.
5. Діафрагма (щілина).
6. Лінійка.
7. Оптична лава

Завдання 1. Визначення періоду дифракційної ґратки

Необхідність визначення періоду дифракційної ґратки d обумовлена тим, що дифракційні ґратки, які використовуються у навчальних лабораторіях, мають значний розкид

цього параметра, через що неможливо одержати правильне значення вимірюваної довжини хвилі

Для визначення періоду дифракційної ґратки в даній роботі застосовується гелій-неоновий лазер L , який дає промінь з довжиною хвилі $\lambda = 0.6327$ мкм.

На рис. 3 представлена схема установки.

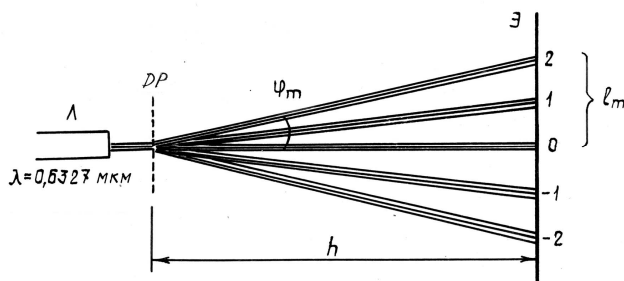


Рис. 3

Паралельний промінь лазера L направляється на дифракційну ґратку DP і на екрані E спостерігається чітка дифракційна картина з максимумами декількох порядків. Оскільки інтенсивність випромінювання лазера велика, то цю картину легко спостерігати безпосередньо. Виходячи з умови максимуму дифракційної картини (1)

$$d = \frac{m\lambda}{\sin \varphi_m} \quad (7)$$

можна знайти період:

Оскільки, згідно з рис. 4

$$\sin \varphi_m = \frac{l_m}{\sqrt{l_m^2 + h^2}}, \quad (8)$$

де l_m – відстань на екрані між нульовим і m -максимумом, h – відстань між дифракційною ґраткою і екраном, то

$$d = \frac{m\lambda}{l_m} \sqrt{l_m^2 + h^2} \quad (9)$$

Порядок виконання завдання 1.

1. Установити дифракційну ґратку на оптичній лаві згідно з рис. 4 на відстані h від екрана й виміряти цю відстань.
2. Увімкнути лазер і одержати на екрані дифракційну картину. Поміряти відстань між нульовим максимумом і максимумами при $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
3. Використовуючи отримані дані, за формулою (9) розрахувати період ґратки d .
4. Дані вимірювань і розрахунків занести в таблицю 1.

Таблиця 1

m	$\lambda, \text{мкм}$	$l_m, \text{м}$	$d, \text{м}$	$\Delta d, \text{м}$	$\delta, \%$
	0,6327				

Завдання 2. Визначення довжини хвилі світла за допомогою дифракційної ґратки

У попередньому завданні за відомою довжиною хвилі лазера визначалася стала дифракційної ґратки. Тепер цю ґратку можна використовувати для вимірювання невідомої довжини хвилі світла.

Якщо випромінювання не лазерне, тобто не у вигляді паралельного променя великої інтенсивності, побачити дифракційну картину на екрані, як це описано у попередньому завданні, практично неможливо через слабку інтенсивність. Однак є можливість спостерігати всю дифракційну картину з максимумами декількох порядків, якщо наблизити око близько до ґратки, як це зображено на рис. 4

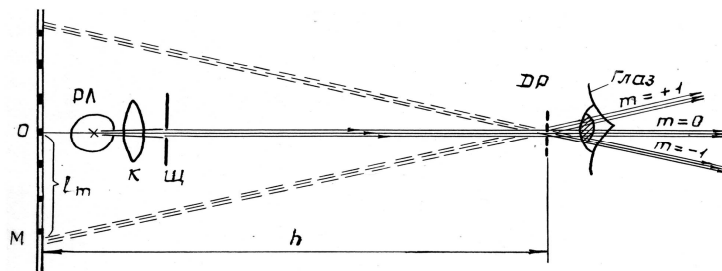


Рис. 4

У запропонованій схемі дослідження як джерело світла використовується ртутна лампа *РЛ*, що дає лінійчатий спектр (для цієї мети зручно використовувати ртутну лампу, що перебуває усередині стандартної освітлювальної лампи для вуличних ліхтарів). Світло від ртутної лампи за допомогою лінзи *К* і щілини *Щ* формує пучок, який направляється на дифракційну ґратку *ДР*. В результаті дифракції утворюється ряд максимумів різних порядків, які попадають в око під різними кутами. Центральний максимум ($m=0$) видно в напрямку щілини, а максимум порядку $m=1$ спостерігається під деяким кутом φ_m . Цей пучок приходить до ока начебто через точку *М* від уявного джерела. У результаті око бачить повну й чітку картину максимумів і мінімумів різних порядків. Дифракційні кути легко визначити, спостерігаючи дифракційну картину на лінійці, розташованій на відстані *h* від дифракційної ґратки. Виходячи з умови (1) дифракційного максимуму,

$$\lambda = \frac{d}{m} \sin \varphi_m \quad (10)$$

З рис.4 бачимо, що

$$\sin \varphi_m = \frac{OM}{MN} = \frac{OM}{\sqrt{OM^2 + ON^2}} = \frac{l_m}{\sqrt{l_m^2 + h^2}}, \quad (11)$$

де l_m – поділки на лінійці, яким відповідають максимуми порядку m .

Вираз (10) із врахуванням (11) можемо записати:

$$\lambda = \frac{d \cdot l_m}{m \sqrt{l_m^2 + h^2}}. \quad (12)$$

Порядок виконання завдання 2.

1. Установити щілину $Щ$ і освітити її ртутною лампою $РЛ$.
2. Встановити дифракційну ґратку на відстані h від лінійки.
3. Наблизити око до ґратки і, розглядаючи дифракційну картину, визначити на лінійці розташування максимумів для різних довжин хвиль і для різних порядків спектра Дані занести в таблицю 2.
4. Розрахувати за формулою (12) довжини хвиль лінійчатого спектру ртутної лампи.
5. Порівняти отримані результати з табличними значеннями довжин хвиль спектру ртуті, дати їм оцінку (див. рис. 5).

Таблиця 2

m	λ (колір)	$d, \text{м}$	$l, \text{м}$	$l_m, \text{м}$	$\lambda, \text{м}$	$\Delta\lambda, \text{м}$	$\delta, \%$
1	синій зелений жовтий						
2	синій зелений жовтий						
3	синій зелений жовтий						

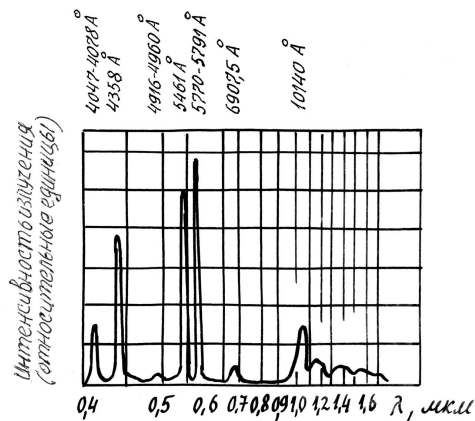


Рис. 5

Завдання 3. Визначення кутової дисперсії дифракційної ґратки

Для визначення кутової дисперсії D потрібно виміряти кутову відстань $\Delta\varphi$ між двома близькими спектральними лініями λ_1 і λ_2 .

Згідно з (3)

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda} = \frac{\varphi_{m1} - \varphi_{m2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (13)$$

Значення φ_{m1} і φ_{m2} для двох близьких ліній (наприклад, жовтої і зеленої) можна визначити за даними l_m і h таблиці 2:

$$\varphi_m = \arcsin \sin \varphi_m, \text{ де } \sin \varphi_m = \frac{l_m}{\sqrt{l_m^2 + h^2}} \quad (14)$$

Порядок виконання завдання 3

1. Для двох близьких ліній з таблиці 2 за формулою (11) знайти значення $\sin \varphi_m$, φ_m і визначити $\Delta \varphi_m$. За формулою (13) розрахувати кутову дисперсію D для максимумів різних порядків. Дані занести в таблицю 3.
2. У висновках відобразити, як узгоджуються отримані результати з формулою (5).

Таблиця 3

m	$\lambda_1, \text{м}$	$\lambda_2, \text{м}$	$\Delta\lambda, \text{м}$	$\varphi_{m1}, \text{радий}$	$\varphi_{m2}, \text{радий}$	$\Delta\varphi_m, \text{радий}$	$D, \text{м}^{-3}$
1							
2							

Контрольні питання

1. У чому полягає явище дифракції світла ?
2. Пояснити дифракцію паралельних променів на одній щілині.
3. Пояснити дифракцію паралельних променів на дифракційній ґратці. Записати й пояснити умову максимуму дифракційної картини.
4. Пояснити властивості дифракційної ґратки як спектрального приладу. Пояснити фізичний зміст дисперсії й роздільної здатності дифракційної ґратки.
5. Пояснити умови спостереження в даній роботі дифракційної картини й визначення періоду ґратки за допомогою лазера.
6. Пояснити умови спостереження дифракційної картини за допомогою ртутної лампи і визначення довжин хвилі випромінюваного нею світла.
7. Пояснити спосіб визначення кутової дисперсії в даній роботі.

Список використаної літератури

1. Руководство к лабораторным занятиям по физике / Под редакцией Л.Л. Гольдина. – М.: Наука, 1983. – 277 с.
2. Физический практикум. Электричество и оптика / Под редакцией В.М. Ивероновой. – М. : Наука, 1983. – 815 с.

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ АСПЕКТИ ДОСЛІДНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ ФІЗИКИ

Хован І. В.,

учитель фізики, НВК «Домінанта»

У статті визначено психолого-педагогічні аспекти дослідної діяльності учнів на уроках фізики, як складової сучасного педагогічного процесу, які безпосередньо впливають на розвиток творчої особистості у процесі написання науково - дослідної роботи у Малій Академії наук України. Показано дослідження педагогів та учнів, які проводились в МАН України та побудовано співвідношення. Запропоновано методи визначення головних здібностей і вмінь у творчій особистості юного дослідника.

В статье определены психолого-педагогические аспекты исследовательской деятельности учеников на уроках физики, как составляющей современного педагогического процесса, который непосредственно влияет на развитие творческой личности в процессе написания научно – исследовательской работы в Малой Академии наук Украины. Показано исследование педагогов и учеников, которые проводились в МАН Украины и построено соотношение. Предложено методы определения основных навыков и умений у творческой личности юного исследователя.

The article defines psychological and pedagogical aspects of research activity of pupils in physics, as part of the modern educational process, which directly influence the development of creative personality in the writing of scientific - research work at the Mirror Academy of Sciences of Ukraine. Displaying studies teachers and students conducted in MAS Ukraine and constructed value. Methods of determination of the main abilities and skills in the creative personality of young researchers.

У сучасних умовах є актуальним питання щодо розвитку творчої особистості у процесі написання дослідної роботи учнів під час навчання в загальноосвітніх навчальних закладах, створення для цього відповідних умов.

Вперше теоретичні засади формування творчої особистості були описані Л. Виготським, Д. Ельконіним, Г. Костюком, В. Роменцом, С. Рубінштейном, С. Русовою, В. Сухомлинським, К. Ушинським та ін.

У статті розглянуто авторські методики формування творчих здібностей старшокласників у процесі пошуково-дослідницької діяльності в МАН України (С. Білоус, Н. Поліхун, Л. Тихенко та ін.) та поетапне написання учнями старшої школи дослідницької роботи у публікації М. Шута та В. Сергієнко “Науково-дослідна робота з фізики у середніх та вищих навчальних закладах” [5, с. 12].

Мала академія наук України є однією з пріоритетних форм позашкільної освіти, її діяльність спрямована на розвиток творчої особистості юного дослідника, на практичне вирішення проблем виявлення, розвитку та реалізації її здібностей.

МАН України включає творчі об'єднання – наукові секції, гуртки, учнівські лабораторії, діяльність яких спрямована на розвиток інтелектуальних, дослідницьких здібностей учнів. Територіальні відділення МАН України є структурними підрозділами комплексних та профільних позашкільних навчальних закладів, інститутів післядипломної педагогічної освіти, загальноосвітніх навчальних закладів [1, с. 102].

Завдання щодо розвитку творчої особистості на уроках фізики передбачають розвиток їх інтересів до творчої діяльності, до наукового дослідження; розвиток творчих здібностей, творчих якостей, формування творчої компетентності в учня.

Реалізація компетентнісного підходу як сучасної тенденції освіти взагалі зокрема обумовлює діяльнісний характер навчання і виховання.

У педагогічній науці «компетентність» має свої акценти. Щодо творчої діяльності дитини, підлітка компетентність має ціннісно – кваліфікаційний характер, що дає змогу визначити рівні, ступені залучення їх до конкретного творчого процесу і визначити наявність в ньому проблем. Крім того, уявлення про компетентність надає можливість оцінити не стільки наявність знань, умінь, навичок особистості, скільки рівень здібностей особистісного орієнтування у конкретній ситуації. Компетентність людини XXI століття визначають як таку, що засновується на розвитку інтегративних та аналітичних здібностей і тих, що допомагають поповнювати свої знання протягом всього життя та адаптуватись до швидких змін у соціальній сфері.

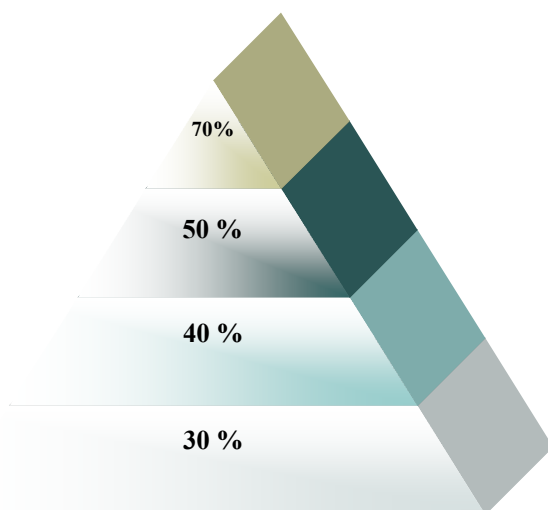
Компетентність людини може виявлятися у різних сферах діяльності. Розрізняють загальнокультурну компетентність, допрофесійну компетентність, світоглядну компетентність тощо (за О. Лебедєвим).

Психолого – педагогічні дослідження проблем творчості доводять, що на творчий процес і його результати впливає значна кількість чинників, серед яких необхідно зважати на «особистісні». Творчі учні відрізняються від інших не стільки розвитком інтелектуальних здібностей, скільки особистісними якостями [1, с.103].

Учителю слід підтримувати будь - яку спробу у самовираженні думок, перш за все в учнів це відбувається на уроках, гурткових заняттях, додаткових та факультативах.

Вже в молодшому віці діти виявляють не аби який інтерес до праці і техніки, пізнанні невідомого, розгадуванні загадок природи, науки і техніки. Цей інтерес учитель повинен підтримати, дати новий погляд у пізнанні невідомих фактів чи явищ, у створенні нового і невідомого суспільству [2,с.204].

Згідно дослідження, що проводилось у МАН України, як учні оцінюють себе і визначають риси власного характеру було побудоване співвідношення:



70 % - наполегливість;

50 % - працездатність;

40 % - організованість;

30 % - кмітливість.

Крім того учні додали, що обов'язковими мають бути зацікавленість у роботі та бажання досягти успіху [1, с.103]

Якщо про це доводить опитування учнів, то учителю можна виявляти творчих

дітей вже на уроці у загальноосвітньому навчальному закладі. А ще краще під час формування класів для обдарованих учнів і працювати з ними за методиками, що сприяють розвитку в учнів інтересу до науково – дослідної роботи, що в подальшому підтримає потенційні творчі здібності (загальні), як свідчать психологічні дослідження, притаманні кожній дитині.

Творчі здібності формуються у результаті спілкування та діяльності. Б. Теплов розглянув здібності як індивідуально – психологічні відмінності і визначив їх основні ознаки:

- здібності – це індивідуально – психологічні особливості, що вирізняють одну людину від іншої;
- вони розглядаються як умова успішності виконання певної діяльності;
- вони забезпечують легкість та успішність засвоєння нових знань, умінь та навичок [1, с.104].

Учителю слід уміти визначити головні здібності і вміння творчої особистості юного дослідника. Для цього пропонуємо скористатись такою таблицею, в якій слід визначати помічені у дитини здібності на уроці з фізики і мати повну характеристику учня по виявленню якостей дослідника.

№ з/п	Критерії здібностей і вмінь учнів	Відмітка учителя
Пізнавальні здібності і якості		
1.	Володіння великим об'ємом інформації	
2.	Великий словниковий запас	
3.	Здатність опановувати базовий матеріал і перетворювати на сучасний лад	
4.	Виявлення прихованих закономірностей і їх зв'язків	
5.	Вміння інтегрувати і синтезувати інформацію	
6.	Вміння робити висновки	
7.	Брати участь у вирішенні складних проблем	
8.	Вміння вловлювати складні ідеї	
9.	Вміння помічати тонкі відмінності	
10.	Чуттєвість до протиріч	
11.	Аналіз ситуацій	
12.	Вміння оцінювати як сам процес, так і результат	
13.	Вміння передбачати наслідки	
14.	Вміння будувати гіпотези	
15.	Застосування нових ідей на практиці	

16.	Здібність до перетворень	
17.	Критичність у міркуванні	
18.	Висока допитливість	
19.	Вміння міркувати	
20.	Здібність ризикувати	
21.	Дивергентне мислення	
22.	Гнучкість у міркуванні і діях	
23.	Швидке міркування	
24.	Здібність висловлювати оригінальні ідеї	
25.	Створювати власні винаходи	
26.	Мати багату уяву	
27.	Сприймати неоднозначні речі	
28.	Мати високі естетичні цінності	
29.	Розвиток інтуїції	
Особливості психологічної сфери		
30.	Реалістична Я – концепція	
31.	Повага до інших	
32.	Терпимість по відношенню щодо особливостей інших людей	
33.	Схильність до самоаналізу	
34.	Терпляче відношення до критики	
35.	Готовність ділитися речами та ідеями	
36.	Наполегливість у виконанні завдань	
37.	Незалежність у міркуванні	
38.	Відсутність нетерпіння в очікуванні винагороди	
39.	Потяг до змагань	
40.	Почуття гумору	
41.	Чуттєвість до аналізу проблем	
42.	Впевненість у своїх силах і здібностях	
43.	Внутрішня мотивація	

На сьогодні існують різні погляди щодо кореляції інтелектуальних здібностей, у результаті досліджень підтверджено: академічні успіхи учнів МАН не гарантують успіхів у дослідницькій діяльності. Тобто психолого – педагогічну проблему розвитку творчої особистості у сучасній освіті вирішується засобами позашкільної освіти. Хоча позашкільна освіта є складовою безперервної освіти, і її головними завданнями є такі: віднайти здібних, творчих дітей; допомогти їм самореалізуватись; допомогти повірити у власні творчі мотиви.

До того ж слід відмітити, що багато зацікавлених учнів у написанні науково – дослідних робіт не мають можливості відвідувати заняття у позашкільних навчальних закладах, тому значна кількість дітей працюють із учителями загальноосвітніх навчальних закладів. Саме тому слід навчитись виявляти творчих учнів і допомагати у становленні їх науково – дослідних знань учителю на шкільному рівні і будувати уроки так, для творчих учнів, щоб створити умови для розвитку в дітей схильності до нового, нестандартного, бажання самостійно вирішувати поставлені завдання. У результаті роботи учителю слід прийти до усвідомлення, що у процесі навчання чим вищим є рівень завдань для учня, то яскравіше і повніше виявляються творчі здібності дослідника.

Під час спеціального дослідження педагогів, що викладають в МАН з'ясувались провідні навчально – виховні завдання. Відповіді учителів засвідчили:

I позиція – завдання щодо розвитку творчої особистості;

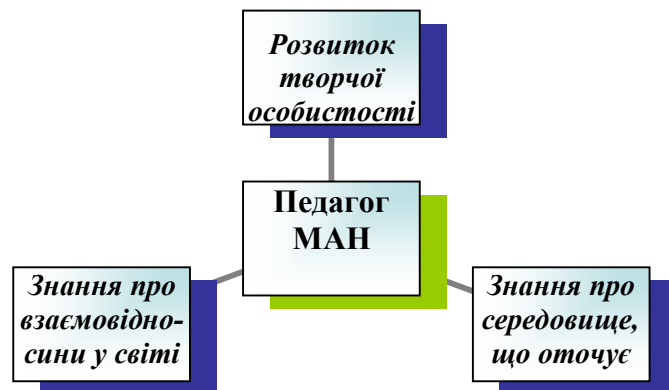
II позиція – засвоєння учнями знань про взаємовідносини у світі;

III позиція – засвоєння знань про середовище, що оточує.

Результати спеціальних досліджень дали змогу визначити провідні мотиви участі учнів у роботі наукових секцій МАН. А саме: визначення життєвих поглядів, формування позицій особистості; розвиток пізнавальних можливостей і вміння адекватно їх оцінювати; вибір майбутньої професії; вибір середовища спілкування [1, с.104].

Із вищенаведених фактів слід також врахувати, що учень зацікавлений взаємовідносинами у світі, саме тому у викладанні фізики учителю необхідно врахувати не тільки основні питання, що описані у шкільній програмі, а й зацікавити учнів сучасним станом фізики у світі та побудувати урок з міжпредметними зв'язками. Для цього потрібно опрацювати програми інших природничих наук та розробити уроки, які будуть розвивати інтерес в учнів до написання науково – дослідної роботи.

У психолого – педагогічній науці інтерес розглядається як системне утворення, яке визначається сукупністю різних параметрів, що відрізняються за змістом, характером, видом, рівнями. У роботах В. М'ясищева, В. Іванова, О. Ковальова виділено такі риси інтересу, як прагнення та переживання; у роботах С. Рубінштейна – ставлення та увага у працях А. Фортунатова розкрито пізнавальний аспект потреб; інтерес як спрямованість особистості розглядали Л. Божович та Н. Морозова; як загальну спрямованість особистості – М. Беляєв; як дослідницьку мотивацію – А. Петровський; як вторинну потребу – Б. Додонов. Особлива увага питанням розвитку творчої особистості, її мотивації до творчої діяльності шляхом застосування дослідницьких методів приділяється у наукових працях В. Рибалки, В. Бондаревського, С. Балашової, С. Сисоєвої, С. Гончаренка, Г. Пустовіта та інших.



Удосконалення роботи з юними дослідниками в умовах шкільних уроків неможливе без розвитку інтересів учнів до знань і, насамперед, до додаткових знань, що виходять за межі шкільного підручника та шкільної програми [1, с.106].

Учителю фізики для розвитку творчих здібностей учня слід врахувати такі чинники розвитку інтересу: різноманітність форм і методів роботи; новизна навчального матеріалу, зміст досліджуваної проблеми; створення ситуації успіху; створення позитивного мікроклімату у відносинах учень - педагог – вчений; особистісний підхід до організації навчально – виховного процесу; оприлюднення досягнень юного дослідника на конкурсах, конференціях, виставках [6, с.23].

Важливим завданням стає створення умов для розвитку в учнів самостійності (у виборі конкретної форми дослідження та організації роботи); здібностей до самоосвіти (у процесі опанування нових знань); самоконтролю у процесі самоосвіти і регулювання власної діяльності; самовиховання (здібності до самооцінки, самоаналізу тощо) [3, с. 67].

У процесі навчання учень повинен досягнути високого рівня самостійності, що відкриває можливість вміння працювати з різними завданнями, здобути нових знань у процесі вирішення поставленої проблеми науково - дослідної роботи. Важливу роль відіграє пошук літератури і самостійна робота учнів із списком літературних джерел.

Аналіз психологічної компоненти орієнтованої на послідовність дій учнів, методичних досліджень і практики викладання приводить до висновку необхідності формувати в учнів поетапного вміння працювати з підручниками поглибленого вивчення фізики [2, с. 34].

Перший етап – визначення найбільш значної інформації із тексту, виділення головного і фіксування її в логічний ланцюжок. Наприклад, читаючи параграф про механічний рух, можна записати наступний логічний ланцюжок: “механічний рух – траєкторія руху – шлях – одиниці шляху”. В процесі такої роботи отримана інформація складається в декількох слів (понять, образів) зв’язаних між собою.

Другий етап – це вміння виділяти знання із наукового матеріалу підручника, якого там багато. Малюнки і фотографії із підручників з поглибленим вивченням фізики знайомлять з:

- 1) інформацією, що допоможе пояснити головні поняття і закономірності;
- 2) машинами (наприклад, автомобільного, залізничного, водного, повітряного і космічного транспорту);
- 3) побутовими приладами та інструментами (наприклад, енергозберігаючими лампами, електроплитами, холодильними машинами, фільтрами, телевізором і т.д.)
- 4) вимірювальними приладами та інструментами (наприклад, термометром, вагами, секундоміром, барометром, манометром, амперметром, осцилографом і т. д.);
- 5) графічними умовними позначеннями електричних приладів і пристроїв;
- 6) дискретною функцією явищ і процесів, що вивчаються (наприклад, на малюнку можуть бути показані початковий, середній і кінцевий результат затухаючих коливань маятника);

- 7) реальних видів фізичних об'єктів, що досліджуються;
- 8) графічно і схематично представлених при дослідженні фізичних явищ.

Третій етап – це вміння, пов'язані з вирішенням задач. У підручниках зазвичай представлені різні типи задач: задачі - малюнки, якісні, кількісні, експериментальні і розрахункові задачі, також присутні задачі з розв'язками. Саме підручник стане в допомозі учню у виробленні вмінь розв'язувати складні задачі.

Четвертий етап – вміння працювати з таблицями фізичних величин, констант і сталих, одиниць Міжнародної системи одиниць вимірювань.

П'ятий етап – експериментальні вміння. Для їх формування потрібна велика практика. Для виконання таких завдань підручник потрібен як путівник для поетапного опрацювання результату науково - дослідної роботи.

Шостий етап – вміння орієнтуватись в тексті і довідниковому матеріалі.

Отже, завдання вчителя підтримати інтерес учня та зацікавити до поглибленого вивчення предмету, створити необхідні умови та допомогти у отриманні експериментального результату. Потрібно методично розробити етапи сучасного науково - дослідного уроку на основі шкільної програми; навчити самостійно працювати дітей з підручником поглибленого вивчення фізики; розробити цікаві експерименти для підтримки інтересу наукових досліджень.

Список використаної літератури

1. Бельська Н.А., Ковбасенко Л.І., Литовченко О.В., та ін.; упоряд. Лісовий О.В. Лихота С.О., Розвиток обдарованості учнів: теоретичні аспекти.- К.: ТОВ «Інформаційні системи», 2010. – 142 с.
2. Білоус С.Ю. Розвиток дослідницьких здібностей старшокласників у процесі діяльності Малої академії наук (на матеріалі фізики) : дис. канд. пед. наук: 13.00.02 /Білоус Світлана Юріївна. – К., 2005. – 256 с.
3. Мініч Л.В. Науково – дослідна робота учнів основної школи як фактор мотивації до навчання фізики / Мініч Л. В.// Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. - №6.-224 с.
4. Поліхун Н.І. Розвиток творчої діяльності старшокласників у процесі навчання фізики з використанням проектної технології : дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Поліхун Наталія Іванівна. — К., 2007. – 232 с.
5. Тихенко Л. В. формування творчих здібностей старшокласників у процесі дослідницької діяльності в Малій Академії наук України: дис. канд. пед. наук: 13.00.02/ Тихенко Лариса Василівна.– К., 2008.- 324 с.
6. Шут М. І. Науково – дослідна робота з фізики у середніх та вищих навчальних закладах: Навчальний посібник / Шут М. І., Сергієнко В. П. – Київ: Шкільний світ, 2004. – 128 с.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ІНВЕСТИЦІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПІДПРИЄМСТВА**

Горбачук В.О.,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

У статті на основі аналізу існуючих підходів до опису та моделювання інвестиційних процесів запропоновано виклад основного теоретичного матеріалу, а також зразок розв'язання прикладної задачі з теми «Математичне моделювання інвестиційної діяльності підприємства» для студентів економічних та економіко-математичних спеціальностей.

В статье на основании анализа существующих подходов к описанию и моделированию инвестиционных процессов предложено изложение основного теоретического материала, а также образец решения прикладной задачи по теме «Математическое моделирование инвестиционной деятельности предприятия» для студентов экономических и экономико-математических специальностей.

The article is based on an analysis of existing approaches to describing and modeling investment processes. We propose here the presentation of the basic theory and the sample of solution of applied problem for the topic "Mathematical modeling of investment companies" for students of economic and mathematical economics specialities.

Постановка проблеми. З економічної точки зору, розвиток кожного підприємства, галузі чи усієї держави загалом, пов'язаний з інвестиційними процесами. Інвестиції позитивно впливають на оновлення виробництва, створення розвинутої ринкової інфраструктури, від якої в свою чергу залежить ефективне функціонування ринкової економіки.

Одним з найефективніших інструментів дослідження, аналізу та прогнозування будь-якої економічної системи (явища, процесу) є математичні моделі та методи. Тому проблема розробки змістовних і адекватних математичних моделей інвестиційної діяльності підприємств є надзвичайно актуальною і непростюю.

З іншого боку, підготовка висококваліфікованого фахівця в галузі економіки або управління неможлива без формування необхідних знань, вмінь та навичок з побудови та застосування математичних та економіко-математичних моделей, зокрема, моделей інвестиційної діяльності підприємств. Тому проблеми методики навчання студентів економічних та управлінських спеціальностей теорії та практиці інвестиційних розрахунків; формування в них основних понять, що описують інвестиційні процеси, вмінь та навичок дослідження проблем формування портфелю інвестицій та календарного плану інвестування, а також навчання методам та прийомам оцінки ефективності інвестиційних проектів, є актуальними.

Аналіз актуальних досліджень. Враховуючи те, що правильне та своєчасне прийняття інвестиційних рішень здійснює значний вплив на функціонування будь-якої національної економіки, потрібно сказати, що до вивчення даної проблеми долучилось багато відомих зарубіжних та вітчизняних вчених в галузях: фінансів, інвестицій та

прийняття управлінських рішень, зокрема Д.Тобін, Г.Марковіц, У.Шарп, Е.Хелферт, С.Шмідт, І.О.Бланк, А.А.Пересада, М.О.Павловська, Л.П.Радецька, Л.В.Овод, Є.О.Зенченко, О.Д.Будник, та інші; математики та економіко-математичного моделювання, зокрема М.О.Перестюк [15], Ю.А.Мішура [21], В.В.Вітлінський [4] та багато інших. Теоретичні та прикладні аспекти проблеми побудови та дослідження математичних моделей інвестиційної діяльності підприємств досить добре досліджені. Але проблемам методики викладання даної теми студентам економічних та управлінських спеціальностей в науковій та методичній літературі належна увага не приділена. В різних монографіях і підручниках існують різні підходи навіть до визначення основних понять інвестиційного процесу, що приводить до неповноти або невизначеності математичних моделей, які розглядаються при вивченні даної теми.

Мета статті. В даній статті, на основі аналізу існуючих підходів до опису та моделювання інвестиційних процесів, запропоновано виклад основного теоретичного матеріалу, а також зразок розв’язання прикладної задачі з теми «Математичне моделювання інвестиційної діяльності підприємства» для студентів економічних та економіко-математичних спеціальностей.

Виклад основного матеріалу. З метою ефективного функціонування підприємства здійснюють інвестиційну діяльність. Остання являє собою сукупність практичних дій щодо реалізації інвестицій.

Законом України ”Про інвестиційну діяльність” [1] інвестиції визначено як всі види майнових та інтелектуальних цінностей, що вкладаються в об’єкти підприємницької та інших видів діяльності, в результаті чого створюється прибуток (дохід) або досягається соціальний ефект.

Такими цінностями можуть бути:

- кошти, цільові банківські вклади, паї, акції та інші цінні папери;
- рухоме та нерухоме майно (будинки, споруди, устаткування та інші матеріальні цінності);
- майнові права, що випливають з авторського права, досвід та інші інтелектуальні цінності;
- сукупність технічних, комерційних та інших знань, оформлених у вигляді технічної документації, навичок та виробничого досвіду, необхідних для організації того чи іншого виду виробництва, але незапатентованих (“ноу-хау”);
- права користування землею, водою, ресурсами, будинками, спорудами, обладнанням, а також інші майнові права;
- інші цінності.

Окремі положення законодавчого визначення, з нашої думки, неповно і навіть неточно трактують поняття “інвестиції”.

По-перше, інтелектуальні цінності, які вкладаються і використовуються підприємством у вигляді нематеріальних ресурсів, також входять до складу майнових його цінностей (або майна у вигляді його активів), тому у протиставленні цих термінів немає сенсу. У світовій економічній теорії з цих питань вкладення всіх форм майнових цінностей у процесі інвестицій розглядається як “вкладення капіталу”. Це зауваження повною мірою

може бути віднесене і до іншого визначення терміна “інвестиція”, наведеного в Законі України “Про внесення змін до Закону України “Про оподаткування прибутку підприємств””, згідно з яким це господарська операція, що передбачає придбання основних фондів, нематеріальних активів, корпоративних прав та цінних паперів в обмін на кошти або майно. У цьому разі грошові кошти також входять до складу капіталу як і інше майно, що вкладається підприємством.

По-друге, метою інвестицій є не тільки створення прибутку або досягнення соціального ефекту, а й інші форми забезпечення розвитку і підвищення ринкової вартості підприємства, що знаходить своє відображення у зростанні суми вкладеного капіталу. Цю мету інвестування підкреслюють як головну найбільш відомі зарубіжні економісти. Так, у монографії “Інвестиції” У. Шарп [19] разом з іншими американськими вченими визначає: “У найбільш широкому розумінні термін “інвестувати” означає розстатися з грошима сьогодні з тим, щоб отримати більшу суму їх у майбутньому”. Аналогічне визначення цього терміна подається в монографії “Основи інвестування”, підготовленій американськими економістами Л. Гітманом та М. Джонком [6]: “...інвестиція — це спосіб розміщення капіталу, який має забезпечити збереження або зростання суми капіталу”. Ця мета інвестицій підкреслюється й у визначеннях українських економістів у працях з цього питання — в монографіях І. Бланка “Інвестиційний менеджмент” [3], А.Мертенса “Інвестиції” [11] та інших.

По-третє, потребує певного уточнення і об’єкт інвестиційної діяльності, визначений у законодавстві з цього питання. Якщо метою інвестицій має бути зростання суми вкладеного капіталу, то цей інвестований капітал має вкладатися лише в об’єкти підприємницької діяльності, бо вкладання капіталу в об’єкти соціальні, благодійну діяльність, спонсорство тощо до такого зростання не призведе. У такому разі більш прийнятним терміном для вкладання коштів буде “фінансування”, а не “інвестування”.

Поняття “інвестиції” пропонується викласти у такій редакції: інвестиції — це вкладення капіталу в об’єкти підприємницької діяльності з метою забезпечення його зростання в майбутньому періоді.

Відповідно до міжнародних стандартів поняття “інвестиційної діяльності” згідно з П(С)БО 4 “Звіт про фінансові результати” визначається більш широко. Інвестиційна діяльність – це діяльність, що пов’язана з придбанням і реалізацією необоротних активів, а також із здійсненням фінансових інвестицій, які не є складовою частиною еквівалентів грошових коштів.

Відповідно до П(С)БО 4 інвестиційна діяльність включає в себе і реалізацію необоротних активів, тобто це визначення відрізняється від розуміння поняття, що склалось раніше. Відповідно до такого трактування інвестиційної діяльності до її напрямів, згідно з вказаним стандартом, крім придбання основних засобів, нематеріальних активів, акцій, облігацій, цілісних майнових комплексів тощо, відносять надходження грошових коштів у вигляді відсотків за аванси грошовими коштами та позики, надані іншим суб’єктом господарювання, а також грошові надходження у формі дивідендів, від повернення позик, від ф’ючерсних і форвардних контрактів, опціонів, а також виплати коштів за такими контрактами (за винятком тих контрактів, які укладаються для основної діяльності підприємства). Такі грошові надходження не мають прямого, а лише певне опосередковане

відношення до інвестиційної діяльності як такої. Тому в подальшому викладі матеріалу по даній темі інвестиційна діяльність розглядатиметься в усталеному розумінні цього поняття, тобто з орієнтацією на економічну ефективність цієї діяльності.

Певного уточнення потребує понятійний апарат, пов'язаний із формами інвестицій. У Законі України “Про інвестиційну діяльність» ці форми не визначено зовсім; у законодавчій базі уперше їх розглянуто в Законі України “Про внесення змін до Закону України “Про оподаткування прибутку підприємств””. Згідно з цим законом, “...інвестиції поділяються на капітальні, фінансові та реінвестиції”.

Основною ознакою, за якою інвестиції поділяються на окремі форми, є об'єкт вкладення капіталу. За цією ознакою, згідно зі світовою економічною теорією, інвестиції поділяються на реальні та фінансові. Тому передусім слід відзначити помилковість віднесення до форм інвестицій реінвестиції, які характеризують не об'єкт вкладення капіталу, а процес використання доходу, отриманого від інвестиційних операцій (у процесі реінвестицій, згідно з цим же законом, інвестиційний дохід може бути використано на здійснення як капітальних, так і фінансових інвестицій).

Некоректним є також поділ у нашому законодавстві фінансових інвестицій на прямі та портфельні, бо його проведено за різними класифікаційними ознаками. Так, у світовій економічній теорії за ознакою самостійності здійснення інвестицій вони поділяються на прямі (коли вкладення капіталу здійснює безпосередньо інвестор) і непрямі (коли вкладення капіталу здійснюється інвестором за допомогою та участю фінансових посередників). За ознакою мети інвестування фінансові інвестиції поділяються на стратегічні (коли інвестор вкладає капітал у контрольний пакет акцій з метою здійснення стратегічного управління компанією) та портфельні (коли інвестор має на меті лише приріст суми вкладеного капіталу або отримання поточного доходу). Таким чином, можна констатувати, що в українській законодавчій термінології ці класифікаційні ознаки при визначенні форм інвестицій використані еkleктично.

Головна мета інвестиційної діяльності – підвищення вартості підприємства. Досягнення головної мети інвестиційної діяльності забезпечується розробкою та реалізацією інвестиційної стратегії підприємства.

Ефективність розробленої інвестиційної стратегії підприємство має оцінити за такими критеріями:

- погодженість інвестиційної стратегії із загальною стратегією економічного розвитку підприємства;
- внутрішня збалансованість інвестиційної стратегії;
- погодженість інвестиційної стратегії із зовнішнім середовищем;
- реалізація інвестиційної стратегії з врахуванням наявного ресурсного потенціалу;
- прийнятність рівня ризику, пов'язаного з інвестиційною стратегією;
- результативність інвестиційної стратегії.

У економічній літературі інвестиційний проект розглядається, з одного боку, як діяльність, що передбачає здійснення комплексу заходів для досягнення визначеної мети, а з

іншого — є системою організаційно-правових та розрахунково-фінансових документів, необхідних для здійснення визначених заходів, які містять їх опис.

Таким чином, можна дати визначення інвестиційного проекту як комплексу документів, які містять систему взаємопов'язаних у часі й просторі та узгоджених з ресурсами організаційних заходів і дій, спрямованих на розвиток економіки підприємства. Інвестиційний проект характеризує зміст та умови реалізації відповідних заходів для досягнення поставлених цілей (розвиток техніко-технологічної бази виробництва чи діяльності, організація виготовлення нової продукції, здійснення нових методів і форм організації діяльності тощо) при встановлених ресурсних обмеженнях. Отже, проект — це інвестиційна акція, яка передбачає вкладення ресурсів з метою досягнення певного запланованого результату і становить сукупність взаємопов'язаних заходів, які спрямовуються на досягнення завдань при встановленому обмеженому бюджеті протягом певного періоду. Інвестиційне проектування є складовою інвестиційної діяльності, це форма планування та реалізації інвестицій.

У сучасній практиці індустріально розвинених країн уся багатоманітність проектів класифікується за різними типами та ознаками:

Залежно від вартості та масштабу проекти поділяються на дрібні, середні та великі. Вартість дрібних проектів звичайно становить менше 300 тис. дол. США. До середніх проектів відносять міжрегіональні та регіональні проекти, окремі проекти, розроблювані на рівні корпорацій; їх вартість — від 300 тис. дол. до 2 млн. дол. Великі проекти (вартістю більше 2 млн. дол.) мають стратегічний характер, будучи принципово новими об'єктами інвестування.

За тривалістю реалізації проекти поділяють на короткотермінові (до одного року), середньотермінові (1-2 роки) та довготермінові (3-5 років).

За видами проекти класифікують:

- проекти із затвердженими фондами фінансування, що перебувають на тій або іншій стадії реалізації, але ще незакінчені;
- проекти з незатвердженими та несхваленими фондами фінансуванням, які, у свою чергу, поділяються: на ті, рішення про доцільність інвестування в які приймається безпосередньо керівництвом корпорації; ті, що залежать від споживача (фінансування розпочинається тільки в тому випадку, коли корпорація на тендері виграє контракт на поставку продукції).

За сумісністю реалізації інвестиційні проекти поділяються на:

- незалежні від реалізації інших проектів підприємства;
- такі, що залежать від реалізації інших проектів підприємства;
- проекти інших інвестиційних проектів.

Залежно від класу проекту виділяють мегапроекти, що виключають реалізацію, мультипроекти та монопроекти.

Мегапроекти — це цільові міжнародні, національні, міжгалузеві та галузеві програми розвитку, що містять велику кількість взаємопов'язаних проектів, об'єднаних загальною метою, які характеризуються виділеними на їх реалізацію ресурсами та обмеженим часом виконання. Такі програми розробляються, підтримуються та

координуються на відповідних рівнях управління: державному, республіканському, обласному, муніципальному.

Мультипроекти — це проекти, спрямовані на забезпечення та реалізацію визначеної стратегії розвитку підприємств (забезпечення високої прибутковості власного капіталу, фінансової стійкості, загальної ефективності господарської діяльності підприємства).

Монопроекти — це окремі інвестиційні, інноваційні проекти, що потребують створення єдиної проектної команди. Такі проекти залежно від змісту та мети їх реалізації поділяються на технічні, організаційні, економічні, соціальні, змішані і мають відповідні обмеження у фінансових та інших ресурсах, часі, критерії щодо якості продукції.

Залежно від схеми фінансування, що передбачається, виокремлюють:

- інвестиційні проекти, що фінансуються за рахунок внутрішніх джерел підприємства;
- проекти, що фінансуються за рахунок акціонування;
- проекти, що фінансуються за рахунок позикових джерел;
- інвестиційні проекти зі змішаними формами фінансування [3].

Усі види реальних інвестиційних проектів проходять три основні стадії: передінвестиційну, інвестиційну, постінвестиційну. Для прийняття рішень щодо інвестування того чи іншого проекту необхідною передумовою є оцінка його економічної ефективності на основі наступних показників:

1. *Чиста теперішня вартість проекту* характеризує грошову масу від реалізації проекту:

$$NPV = \sum_{t=1}^n CF_t \cdot \frac{1}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^n Inv_t \cdot \frac{1}{(1+r)^t},$$

де CF_t — чистий грошовий потік за період t , гр. од.;

r — норма дисконтування, яка враховує зміну вартості грошей в часі, частка від одиниці;

n — термін реалізації проекту, роки;

Inv_t — інвестиції за період t , гр. од.

Доцільно приймати рішення про інвестування проектів за умови, коли $NPV \geq 0$.

2. *Індекс прибутковості* характеризує ефективність експлуатації кожної інвестованої грошової одиниці в проект:

$$PI = \sum_{t=1}^n CF_t \cdot \frac{1}{(1+r)^t} : \sum_{t=0}^n Inv_t \cdot \frac{1}{(1+r)^t},$$

Проект є ефективним при $PI \geq 1$.

3. *Дисконтований період окупності проекту* знаходимо за таким рівнянням:

$$0 = \sum_{t=1}^{DPP} CF_t \cdot \frac{1}{(1+r)^t} : \sum_{t=0}^n Inv_t \cdot \frac{1}{(1+r)^t},$$

де DPP — дисконтований термін окупності проекту, роки.

Проект вважається ефективним, якщо $DPP < n$.

Внутрішня норма прибутковості — це значення норми дисконту, при якому чиста теперішня вартість проекту дорівнює 0.

$$0 = \sum_{t=1}^n CF_t \cdot \frac{1}{(1+r)^t} - \sum_{t=0}^n Inv_t \cdot \frac{1}{(1+IRR)^t},$$

або

$$IRR = r_1 + \frac{NPV_{r_1}}{NPV_{r_1} - NPV_{r_2}} \cdot (r_1 - r_2),$$

де r_1 — індекс ставки дисконтування, за якою NPV більше 0;

r_2 — індекс ставки дисконтування, за якою NPV менше 0.

Доцільно інвестувати проекти при $IRR > r$.

4. *Модифікована внутрішня норма прибутковості* — це ставка доходу, за якою кінцева вартість чистих грошових потоків проекту дорівнює поточній вартості інвестиційних витрат.

$$MIRR = \sqrt[n]{\frac{\sum_{t=1}^n CF_t (1+r)^{n-1}}{\sum_{t=0}^n \frac{Inv_t}{(1+r)^t}}} - 1.$$

5. *Коефіцієнт ефективності інвестицій*.

$$ARR = \frac{\sum_{t=1}^n OP_t \cdot (1-TR)}{0,5 \cdot (Inv_0 + L)},$$

де L — ліквідаційна вартість, гр. од., OP_t — операційний прибуток, гр. од.

У сучасних умовах підприємства, компанії одночасно реалізують декілька інвестиційних проектів шляхом формування портфелів інвестиційних проектів. Підбір потенційних інвестиційних проектів здійснюється на основі розробленої інвестиційної стратегії компанії з урахуванням показників ефективності проектів. Створюється рейтинг проектів і визначається основний критерій ефективності, на основі якого інвестор приймає рішення про вкладання коштів.

При підборі інвестиційних проектів і створенні портфелів враховуються інвестиційні можливості компанії. Створення інвестиційних портфелів відбувається в умовах обмеженості фінансових ресурсів, що потребує оптимізації. Метою оптимізації є створення портфеля, що забезпечує необхідний рівень доходності, максимізація приросту капіталу від різних проектів, не перевищуючи встановлений обсяг інвестиційних ресурсів. За такої оптимізації основним критерієм ефективності обирають індекс прибутковості інвестицій PI .

Наступним кроком є ранжирування інвестиційних проектів за мірою зменшення значення індексу прибутковості. Інвестиційний портфель компанії формується з проектів, що мають найвищий рейтинг. Загальна потреба в інвестиційних Ресурсах обраних проектів не повинна перевищувати визначеного обсягу інвестицій. При цьому необхідно взяти до уваги,

що деякі інвестиційні проекти можуть бути поділеними, тобто реалізовані не повністю, а частково.

При неможливості поділу окремих проектів потенційний інвестиційний портфель розглядається з точки зору сумарного значення NPV ($NPV \rightarrow \max$). Даний варіант формування портфеля та оптимізації є характерним при одночасному вкладанні всіх наявних інвестиційних ресурсів.

У практичній діяльності підприємств інвестиційні проекти реалізуються неодноразово, розподіляються в часі. У такому випадку визначають вірогідні втрати чистої сучасної вартості проекту:

$$I_{NPV} = \frac{NPV_{intime} - NPV_{outtime}}{Inv},$$

де NPV_{intime} — чиста сучасна вартість проекту без відкладання його в часі, гр.од.;

$NPV_{outtime}$ — чиста сучасна вартість проекту за умови відкладання його в часі, гр.

од.;

Inv — обсяг відстрочених інвестицій, гр. од.

Рішення про формування портфеля приймаються в умовах певної невизначеності. У цих випадках рекомендовано використовувати метод лінійного програмування для прийняття рішень. Спочатку визначається інвестиційна ціль, яка виражається у вигляді цільової функції і має лінійну залежність від обмежувальних рівнянь.

Більшість фахівців з питань інвестиційного менеджменту рекомендують використовувати наступну модель лінійного програмування:

$$\sum_{i=1}^n K_i \cdot w_i = \min(\max), \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n Inv_i^0 \cdot w_i \leq Inv_r^0; \\ \sum_{i=1}^n Inv_i^1 \cdot w_i \leq Inv_r^1; \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n Inv_i^m \cdot w_i \leq Inv_r^m; \\ 0 \leq w_i \leq 1, \end{array} \right.$$

де K_i — цільовий критерій;

w_i — частка необхідного обсягу інвестицій за i -м проектом;

Inv_i^j — інвестиційні витрати i -го проекту в j -ому періоді;

Inv_r^j — існуючі засоби фінансування інвестицій j -ому періоді.

Завданнями інвестиційної діяльності є формування портфеля та календарного плану. Такий план у кожен період часу повинен бути збалансованим щодо необхідних та наявних ресурсів. Це дозволить здійснювати неперервну реалізацію кожного з обраних інвестиційних проектів.

Оптимізаційна спрямованість забезпечуватиме визначення такого з допустимих планів, який характеризується найкращими економічними показниками. Методика

планування повинна враховувати ризик щодо очікуваних показників реалізації кожного з проектів.

Показники окремого інвестиційного проекту в детермінованому випадку поділяються на:

1) некеровані параметри:

T — тривалість виконання (життєвого циклу) інвестиційного проекту;

τ — номер окремого часового проміжку з життєвого циклу ($\tau = 1, 2, \dots, T$);

I_τ — інвестиційні ресурси для виконання проекту в τ -му часовому проміжку;

V_τ — вартісна оцінка поточних (не інвестиційних) витрат в τ -му час проміжку;

R_τ — вартісна оцінка поточних результатів, пов'язаних з функціонуванням проекту;

NPV — чистий, зведений до початку життєвого циклу, дохід за проектом,

$$NPV = \sum_{\tau=1}^T \frac{R_\tau - V_\tau - I_\tau}{(1+e)^\tau},$$

де e — нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій (ставка дисконту);

2) керовані параметри:

X_t — логічна змінна, яка відбиває факт вибору проекту та початку його реалізації в t -му часовому проміжку планового періоду:

$$X_t = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j\text{-й проект буде розпочато в } t\text{-му періоді;} \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

NPV_0 — чистий, зведений до початку планового періоду, дохід за проектом:

$$NPV_0 = NPV \cdot \sum_{t=1}^{T_0-T+1} \frac{x_t}{(1+e)^{t-1}},$$

де T_0 — тривалість горизонту планування ($T_0 > T$);

T — номер окремого проміжку часу з планового горизонту ($t = 1, 2, \dots, T$).

Загальний зведений чистий дохід за усіма обраними проектами має бути якнайбільшим.

Математична модель інвестиційного портфеля та календарного плану його виконання в детермінованому випадку має вигляд:

$$NPV_\Sigma = \sum_{i=1}^n NPV_i \cdot \sum_{t=1}^{T_0-T_i+1} \frac{x_{it}}{(1+e)^{t-1}} \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{\tau=1}^{\min\{t, T_i\}} I_{it} x_{i,t+1-\tau} \leq K, t = \overline{1, T_0}; \\ \sum_{t=1}^{T_0-T_i+1} x_{it} \leq 1; x_{it} \in [0; 1], t = \overline{1, T_0 - T_i + 1}, i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Модель називається моделлю цілочисельного лінійного програмування з логічними змінними. Її розв'язування здійснюється з використанням відповідних програмних засобів.

Метод лінійного програмування застосовується при одиничності інвестиційної мети, коли йдеться про досягнення декількох цілей, використовують метод комплексних

оцінок дистанцій. Для цього необхідно визначити цільові критерії (індекс прибутковості, чиста сучасна вартість проекту, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт варіації і т.д.). Далі порівнюються розрахункові значення з рекомендованими. Розбіжності (дистанції) між розрахунковими та рекомендованими значеннями критеріїв (еталонними) визначаються за формулою:

$$D_{ij} = \left(\frac{K_{ij}}{K_{ij}^0} \right)^2,$$

де K_{ij} — прогнозне значення критерію;

K_{ij}^0 — рекомендоване значення критерію умовного проекту.

Дистанція до рекомендованого значення критерію для окремого проекту (комплексна оцінка j -го проекту):

$$O_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n D_{ij} \cdot a_i},$$

де a_i — коефіцієнт порівняльної значимості показника.

Попередні розрахунки надають змогу проранжувати проекти і виявити найменш віддалені від рекомендованого, які є найпривабливішими при формуванні портфеля [2].

Розглянемо **приклад розв’язання типової задачі**, яка може бути запропонована студентам після вивчення теоретичного матеріалу. Зауважимо, що ми передбачаємо вивчення даної теми в курсах «Економіко-математичне моделювання» або «Математичні методи і моделі», які є складовою циклу природничо-математичної та професійно-орієнтованої підготовки магістрів спеціальності «Математика» (спеціалізації «Фінансова математика» або «Економіка та інформатика» відповідно). Це означає, що студенти, яким буде запропонована дана задача вже знайомі з методами математичного, зокрема лінійного та цілочисельного, програмування, вміють будувати відповідні математичні моделі та розв’язувати і досліджувати їх, використовуючи сучасні інформаційні технології.

Приклад. Розглядається 7 потенційних проектів, інформація про які наведена у таблиці.

Таблиця. Економічні показники потенційних інвестиційних проектів, тис. грн.

Номер проекту	Тривалість, років	Чистий дохід, зведений до початку виконання проекту	Щорічні інвестиційні витрати протягом життєвого циклу						
			1	2	3	4	5	6	7
1	4	371,259	45	60	65	95	40	-	-
2	3	422,35	95	40	90	70	-	-	-
3	4	559,637	40	110	40	65	65	-	-
4	3	336,963	50	90	100	40	-	-	-
5	4	457,029	55	75	55	90	105	-	-
6	4	498,875	75	80	70	60	65	-	-
7	4	601,281	60	90	85	50	55	-	-

Горизонт планування — 12 років. Щорічний ліміт інвестицій — 320 тис. грн. кожні перші три роки та 400 тис. грн. у кожен з наступних років. Ставка дисконту (нормативний коефіцієнт ефективності інвестицій) — 0,3.

Завдання: розробити портфель інвестицій та календарний план.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі.

1. Цільова функція:

$$\begin{aligned}
 NPV = & 371,259 \sum_{t=2}^{12-4+1} \frac{x_{1t}}{(1+0,3)^{t-1}} + 422,35 \sum_{t=2}^{12-3+1} \frac{x_{2t}}{(1+0,3)^{t-1}} + \\
 & + 559,637 \sum_{t=2}^{12-4+1} \frac{x_{3t}}{(1+0,3)^{t-1}} + 336,963 \sum_{t=2}^{12-3+1} \frac{x_{4t}}{(1+0,3)^{t-1}} + \\
 & + 457,029 \sum_{t=2}^{12-4+1} \frac{x_{5t}}{(1+0,3)^{t-1}} + 498,875 \sum_{t=2}^{12-4+1} \frac{x_{6t}}{(1+0,3)^{t-1}} + \\
 & + \sum_{t=2}^{12-4+1} \frac{x_{7t}}{(1+0,3)^{t-1}} \rightarrow \max.
 \end{aligned}$$

2. Обмеження за інвестиційними витратами:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & 45x_{11} + 95x_{21} + 40x_{31} + 50x_{41} + 55x_{51} + 75x_{61} + 60x_{71} \leq 320, \\
 & 45x_{12} + 60x_{11} + 95x_{22} + 40x_{21} + 40x_{32} + 110x_{31} + 50x_{42} + 90x_{41} + 55x_{52} + 75x_{51} + \\
 & \quad + 75x_{62} + 80x_{61} + 60x_{72} + 90x_{71} \leq 320, \\
 & 45x_{13} + 60x_{12} + 65x_{11} + 95x_{23} + 40x_{22} + 90x_{21} + 40x_{33} + 110x_{32} + 40x_{31} + 50x_{43} + \\
 & \quad + 90x_{42} + 100x_{41} + 55x_{53} + 75x_{52} + 55x_{51} + 75x_{63} + 80x_{62} + 70x_{61} + 60x_{73} + \\
 & \quad + 90x_{72} + 85x_{71} \leq 320, \\
 & 45x_{14} + 60x_{13} + 65x_{12} + 95x_{11} + 95x_{24} + 40x_{23} + 90x_{22} + 70x_{21} + 40x_{34} + 110x_{33} + \\
 & \quad + 40x_{32} + 65x_{31} + 50x_{44} + 90x_{43} + 100x_{42} + 40x_{41} + 55x_{54} + 75x_{53} + 55x_{52} + \\
 & \quad + 90x_{51} + 75x_{64} + 80x_{63} + 70x_{62} + 60x_{61} + 60x_{74} + 90x_{73} + 85x_{72} + 50x_{71} \leq 320, \\
 & \dots
 \end{aligned} \right.$$

3. Обмеження за логічною змінною з урахуванням тривалості проектів:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} \leq 1, \\
 & x_{1,10} = x_{1,11} = x_{1,12} = 0, \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{2,10} \leq 1, \\
 & x_{2,11} = x_{2,12} = 0, \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} + x_{39} \leq 1, \\
 & x_{3,10} = x_{3,11} = x_{3,12} = 0, \\
 & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} + x_{49} + x_{4,10} \leq 1, \\
 & x_{4,11} = x_{4,12} = 0, \\
 & x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} + x_{59} \leq 1, \\
 & x_{5,10} = x_{5,11} = x_{5,12} = 0, \\
 & x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} + x_{68} + x_{69} \leq 1, \\
 & x_{6,10} = x_{6,11} = x_{6,12} = 0, \\
 & x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77} + x_{78} + x_{79} \leq 1, \\
 & x_{7,10} = x_{7,11} = x_{7,12} = 0,
 \end{aligned} \right.$$

$$x_{it} \in [0;1], \quad t = 1,2,\dots,12 - T_i + 1, \quad i = \overline{1,7}.$$

Розв'язання задачі проводиться за допомогою підпрограми «Пошук рішень» табличного процесора MS Excel (див. рис. 1).

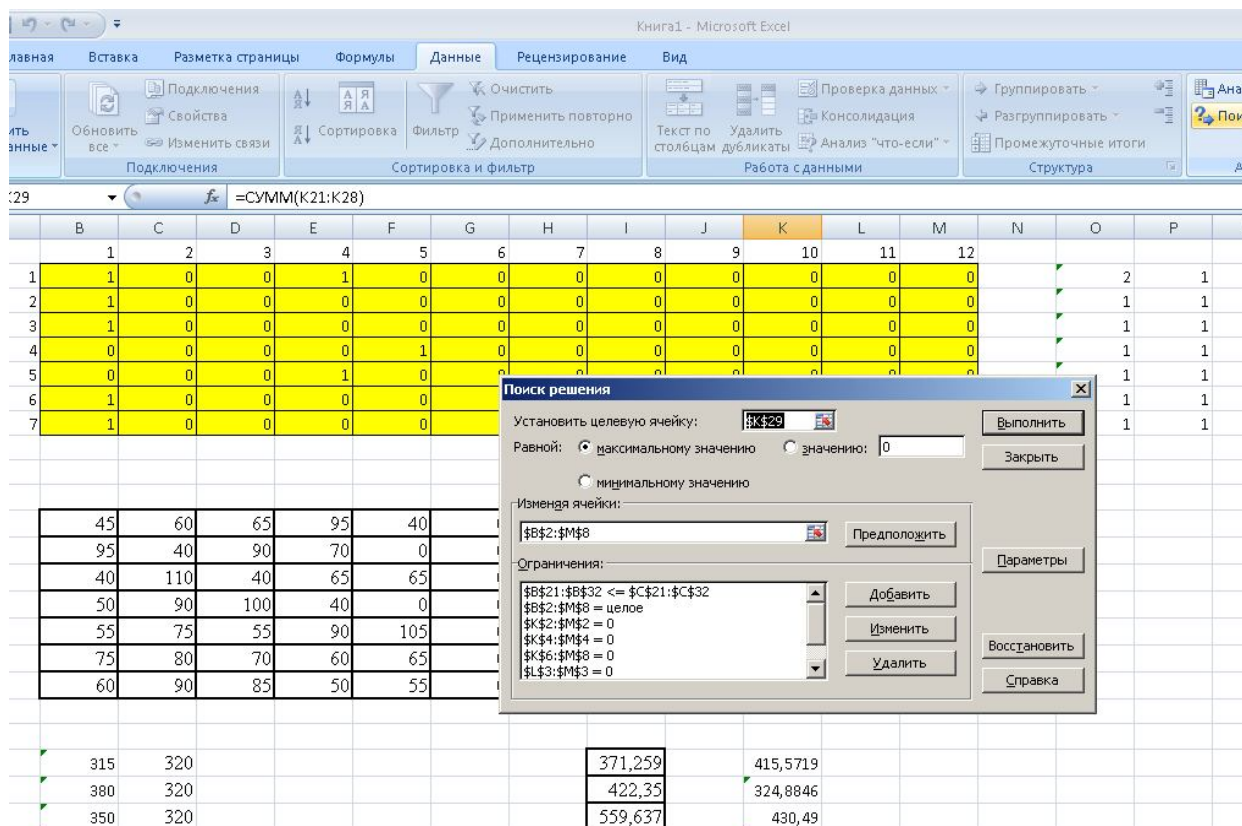


Рис. 1.

Отримуємо наступні **результати**:

- у перший рік потрібно розпочати інвестування в проекти 1, 2, 3, 6 і 7, при цьому інвестиційні витрати становитимуть 315 тис. грн.; на четвертому році потрібно розпочати інвестування в 1 і 5 проекти; а на п'ятому році – в 4 проект;
- сумарне значення NPV при такому плані інвестування становитиме 2267,99 тис.грн.;

Список використаної літератури

1. Закон України "Про інвестиційну діяльність". ВВР України. - 1991. - № 47.
2. Закон України "Про цінні папери і фондову біржу". ВВР України. - 1991. - № 38.
3. Бланк И. А. Инвестиционный менеджмент. - К.; 1995.
4. Вітлінський В. В. Моделирование економики: Навч. посібник. К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.
5. Волков И. М., Грачева М. В. Проектный анализ: Учеб. для вузов. - М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998.
6. Гитман Л.Дж., Джонк М.Д. Основы инвестирования. Учебник - М.: Дело, 1997. — 1008 с.
7. Грачева М. В. Анализ проектных рисков: Учеб. пособие для вузов. - М.: ЗАО "Финстатинформ", 1999.

8. Гридчина М. В. Финансовый менеджмент: курс лекций. - К.: МАУП, 1999.
9. Калина А. В., Корнеев В. В., Кощеев А. А. Рынок ценных бумаг (теория и практика): Учеб. пособие. - К.: МАУП, 1999.
10. Крушвиц Л. Инвестиционные расчеты. - СПб: Питер, 2001; Финансы и статистика, 1997.
11. Мертенс А. Инвестиции. Курс лекций по современной финансовой теории.- К.:[Киевское инвестиционное агентство](#), 1997.
12. Омельченко А. В. Інвестиційне право: Навч. посіб. - К.: Атіка, 1999.
13. Пересада А. А. Інвестиційний процес в Україні. - К.: Лібра, 1998.
14. Погасій С.О., Познякова О.В., Краснокутська Ю.В. Інвестиційний менеджмент (в прикладах і завданнях): навч. посібник /: Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 337 с.
15. Пономаренко О.І., Перестюк М.О, Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз: Навч. посіб. для студ. екон. та мат. спец. вищих навч. закл.: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка /. — К.: Вищ. шк., 2004. — 206 с.
16. Савчук В. П., Прилипко С. И., Величко Е. Г. Анализ и разработка инвестиционных проектов: Учеб. пособие. - К.: Абсо-лют-В, Эльга, 1999.
17. Скiтер І.С., Ткаленко Н.В., Трунова О.В. Математичні методи прийняття управлінських рішень. – Чернігів: ЧДІЕУ, 2011.- 248 с.
18. Федоренко В. Г., Гойко А. Ф. Инвестознаводство. - К.: МАУП, 2000.
19. Шарп У., Александер Г., Бейли Д. Инвестиции / Пер. с англ. - М. : ИНФРА-М, 1997.
20. Черваньов Д.М. Менеджмент інвестиційної діяльності підприємств. - К.: Знання, 2003. – 622 с.
21. Y. Mishura, G. Shevchenko Mathematics of finances. - 352 pages. - Kyiv University press, - 2009.
22. O. Borisenko, Y. Mishura, V. Radchenko, G. M. Shevchenko The collection of problems in financial mathematics. - 250 pages. - Kyiv University press, - 2007.

ПРОПЕДЕВТИКА МЕТОДІВ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В ПРОЦЕСІ ВИКЛАДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИКА» У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ І-ІІ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ

Гроза В.А.,

*кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний авіаційний університет,*

Лециньський О.Л.,

*кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету,*

Томащук О.П.,

*кандидат пед. наук, доцент,
Національний авіаційний університет,*

Тихонова В.В.,

*викладач,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету*

Розглядається питання пропедевтики методів поліноміальної апроксимації в процесі викладання дисципліни «Математика» майбутнім програмістам. Розроблено комплекс різноманітних вправ для проведення пропедевтичної роботи.

Рассматривается вопрос пропедевтики понятия полиномиальной аппроксимации в процессе преподавания дисциплины «Математика» будущим программистам. Разработан комплекс разнообразных упражнений для проведения пропедевтической работы.

Propaedeutics of the polynomial approximation concept during teaching the discipline “Mathematics” for future programmers has been considered. A complex of multiform exercises for preliminary training has been proposed.

Навчальний план підготовки молодших спеціалістів-програмістів містить дисципліну «Чисельні методи», в межах якої розглядається модуль «Поліноміальна інтерполяція». Метою вивчення цього модуля є ознайомлення студентів з класичними інтерполяційними многочленами Лагранжа і Ньютона, інтерполяційною схемою Ейткена, многочленами Чебишова і Фур'є. У процесі вивчення цього модуля майбутні програмісти повинні зрозуміти, що в основі більшості чисельних методів математичного аналізу лежить заміна однієї функції $f(x)$ (невідомої, частково відомої або відомої) іншою функцією $y(x)$, «близькою» до $f(x)$, над якою можна легко виконувати ті чи інші математичні операції. Таку заміну називають апроксимацією або наближенням функції $f(x)$ функцією $y(x)$.

Для того, щоб побудувати деяку змістову теорію апроксимації функцій, як правило, відповідають на такі запитання:

1. Що відомо про функцію $f(x)$?
 - а) форма задання (аналітичний вираз, таблиця значень, графік функції);
 - б) степінь гладкості, можливість знаходження значень похідних функції $f(x)$,

розташування відомих точок в області визначення функції $f(x)$, в якій області відомі значення функції $f(x)$ і чи можна їх задавати (встановлювати) в області зацікавленості.

2. Якому класу функцій повинна належати функція $y(x)$? Які додаткові умови накладаються на $y(x)$, що виокремлюють її з даного класу?

3. Що розуміти під поняттям «функція $y(x)$ «близька» до функцій $f(x)$ » (тобто який критерій узгодженості між цими функціями)?

Таким чином, задача апроксимації функції $f(x)$ функцією $y(x)$ складається з побудови для заданої функції $f(x)$ такої функції $y(x)$, що $f(x) \approx y(x)$. Відповіді на запитання першої групи передбачають вивчення лівої частини вказаної наближеної рівності, другої групи – правої частини, а третьої групи обґрунтовують і уточнюють зміст символу « \approx ». Для молодших спеціалістів-програмістів стандарт їхньої освіти дає відповідь на другу групу запитань. У процесі викладання дисципліни «Чисельні методи» в якості апроксимуючих функцій $y(x)$ розглядають, як правило, лише многочлени (поліноми) або, як виняток, функції, складені з многочленів. У порівнянні з іншими класами функцій, які використовують в теорії наближень (тригонометричні, показникові, раціональні функції), для обчислювальної математики многочлени привабливі тим, що вони є «мінімальними» функціями своїх параметрів (коефіцієнтів) і обчислення цих коефіцієнтів зводиться до виконання скінченної кількості арифметичних операцій додавання та множення.

Як показує досвід викладання, теорія апроксимації функцій сприймається студентами досить важко, засвоюється формально, без особливого розуміння подальшого використання. Тому автори даної статті створили певний методико-пропедевтичний комплекс, спрямований на покращення засвоєння студентами окремих питань цієї теорії. Цей комплекс може бути включений у дисципліну «Математика», яка викладається майбутнім молодшим спеціалістам-програмістам на I-II курсах, при повторенні тем «Функція», «Рівняння та нерівності». Розпочати вказаний комплекс можна з такої теореми.

Теорема 1. Квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ зі спряженими коренями $x_1 = a + b\sqrt{d}$ і $x_2 = a - b\sqrt{d}$ ($a, b, d \in \mathbb{Z}$) має цілі коефіцієнти p і q .

Доведення. За теоремою Вієта маємо:

$$p = -(x_1 + x_2) = -(a + b\sqrt{d} + a - b\sqrt{d}) = -2a \in \mathbb{Z},$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (a + b\sqrt{d}) \cdot (a - b\sqrt{d}) = a^2 - b^2d \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 1. Записати зведене квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, одним із коренів якого є число $x_1 = 6 + \sqrt{35}$.

Розв'язання. Щоб коефіцієнти p і q зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ були цілими числами, в якості другого кореня візьмемо число $x_2 = 6 - \sqrt{35}$ (див. теорему 1). Тоді одержимо квадратне рівняння $x^2 - 12x + 1 = 0$ з цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа x_1 і x_2 .

Відповідь: $x^2 - 12x + 1 = 0$.

Обчислення значення функції у заданій точці часто спрощується, якщо попередньо побудувати многочлен, значення якого у цій точці дорівнює нулю.

Приклад 2. Обчислити значення функції $f(x) = x^4 - 11x^3 - 10x^2 - 11x + 18$ у точці $x_0 = 6 - \sqrt{35}$.

Розв'язання. Число $x_0 = 6 - \sqrt{35}$ є коренем рівняння $x^2 - 12x + 1 = 0$. Тому справедлива рівність $x_0^2 - 12x_0 + 1 = 0$, звідки $x_0^2 = 12x_0 - 1$. Тоді

$$x_0^3 = x_0^2 \cdot x_0 = (12x_0 - 1) \cdot x_0 = 12x_0^2 - x_0 = 12(12x_0 - 1) - x_0 = 143x_0 - 12;$$

$$x_0^4 = x_0^3 \cdot x_0 = (143x_0 - 12) \cdot x_0 = 143x_0^2 - 12x_0 = 143(12x_0 - 1) - 12x_0 = 1704x_0 - 143.$$

$$\text{Отже, } f(x_0) = 1704x_0 - 143 - 11(143x_0 - 12) - 10(12x_0 - 1) - 11x_0 + 18 = 17.$$

Відповідь: 17.

Приклад 3. Обчислити значення функції $f(x) = x^8 + \frac{1}{x^8}$ у точці $x_0 = 1 + \sqrt{2}$.

Розв'язання. Оскільки число $x_0 = 1 + \sqrt{2}$ є коренем рівняння $x^2 - 2x - 1 = 0$, то справедлива рівність $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 0$, звідки $x_0^2 - 1 = 2x_0$, $x_0 - \frac{1}{x_0} = 2$. Тоді

$$\left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right)^2 = 2^2, \quad x_0^2 - 2 + \frac{1}{x_0^2} = 4, \quad x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = 6;$$

$$\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right)^2 = 6^2, \quad x_0^4 + 2 + \frac{1}{x_0^4} = 36, \quad x_0^4 + \frac{1}{x_0^4} = 34;$$

$$\left(x_0^4 + \frac{1}{x_0^4}\right)^2 = 34^2, \quad x_0^8 + 2 + \frac{1}{x_0^8} = 1156, \quad x_0^8 + \frac{1}{x_0^8} = 1154.$$

$$\text{Отже, } f(x_0) = x_0^8 + \frac{1}{x_0^8} = 1154.$$

Відповідь: 1154.

Приклад 4. Чи задовольняє число $x_0 = \sqrt{47} - \sqrt{30}$ нерівність $x^2 + 11x - 17 > 0$?

Розв'язання. Складемо зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа $x_0 = \sqrt{47} - \sqrt{30}$ і $x_1 = -\sqrt{47} - \sqrt{30}$.

$$p = -(x_0 + x_1) = -(\sqrt{47} - \sqrt{30} - \sqrt{47} - \sqrt{30}) = 2\sqrt{30};$$

$$q = x_0 \cdot x_1 = (\sqrt{47} - \sqrt{30})(-\sqrt{47} - \sqrt{30}) = -(47 - 30) = -17.$$

Отже, маємо таке квадратне рівняння: $x^2 + 2\sqrt{30}x - 17 = 0$. Оскільки число x_0 є коренем цього рівняння, то справедлива рівність $x_0^2 + 2\sqrt{30}x_0 - 17 = 0$. Тоді, враховуючи, що $2\sqrt{30} = \sqrt{120} < 11$ і $x_0 > 0$, правильною є нерівність

$$0 = x_0^2 + 2\sqrt{30}x_0 - 17 < x_0^2 + 11x_0 - 17.$$

А це означає, що число $x_0 = \sqrt{47} - \sqrt{30}$ задовольняє нерівність $x^2 + 11x - 17 > 0$.

Приклад 5. Довести, що значення виразу $A = (7 + \sqrt{48})^{17} + (7 - \sqrt{48})^{17}$ є цілим числом, яке кратне 14.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що значення виразу A є цілим числом.

Числа $x_1 = 7 + \sqrt{48}$ і $x_2 = 7 - \sqrt{48}$ є коренями квадратного рівняння $x^2 - 14x + 1 = 0$.

Тому $x_1^2 = 14x_1 - 1$ і $x_2^2 = 14x_2 - 1$.

Знайдемо рекурентне співвідношення для виразу $y_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

$$y_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2;$$

$$y_1 = x_1 + x_2 = 14;$$

$$y_2 = x_1^2 + x_2^2 = (14x_1 - 1) + (14x_2 - 1) = 14(x_1 + x_2) - 2 = 14y_1 - y_0;$$

$$y_3 = x_1^3 + x_2^3 = x_1 \cdot x_1^2 + x_2 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot (14x_1 - 1) + x_2 \cdot (14x_2 - 1) = 14(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) = 14y_2 - y_1;$$

.....

$$\begin{aligned} y_n = x_1^n + x_2^n &= x_1^{n-2} \cdot x_1^2 + x_2^{n-2} \cdot x_2^2 = x_1^{n-2} \cdot (14x_1 - 1) + x_2^{n-2} \cdot (14x_2 - 1) = \\ &= 14(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 14y_{n-1} - y_{n-2}. \end{aligned}$$

Останнє співвідношення вказує, що всі значення $y_n \in \mathbb{Z}$, а тому $A = y_{17} = x_1^{17} + x_2^{17} \in \mathbb{Z}$.

Доведемо, що коли n – непарне натуральне число, то $y_n : 14$. Використаємо метод математичної індукції.

Якщо $n = 1$, то $y_1 = x_1^1 + x_2^1 = 14 : 14$.

Припустимо, що $y_n : 14$ при деякому непарному значення $n = 2k - 1$ ($k > 1$), тобто $y_{2k-1} : 14$. Доведемо, що $y_n : 14$ при $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned} y_{2k+1} &= x_1^{2k+1} + x_2^{2k+1} = x_1^{2k-1} \cdot x_1^2 + x_2^{2k-1} \cdot x_2^2 = x_1^{2k-1} (14x_1 - 1) + x_2^{2k-1} (14x_2 - 1) = \\ &= 14x_1^{2k} - x_1^{2k-1} + 14x_2^{2k} - x_2^{2k-1} = 14(x_1^{2k} + x_2^{2k}) - (x_1^{2k-1} + x_2^{2k-1}). \end{aligned}$$

Оскільки $14(x_1^{2k} + x_2^{2k}) : 14$ і за припущенням $(x_1^{2k-1} + x_2^{2k-1}) : 14$, то $y_{2k+1} : 14$.

Отже, згідно з принципом математичної індукції $y_n : 14$ при будь-яких непарних натуральних значеннях n . Тому $A = y_{17} = (x_1^{17} + x_2^{17}) : 14$, що і треба було довести.

Нагадаємо, що справедлива відповідна теорема Вієта для рівнянь третього степеня: якщо x_1, x_2, x_3 – корені зведеного кубічного рівняння $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, то справедливі рівності:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q,$$

$$x_1x_2x_3 = -r.$$

Також справедлива теорема, обернена до теореми Вієта.

Приклад 6. Числа x, y, z задовольняють умови:

$$x + y + z = a, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0).$$

Довести, що серед чисел x, y, z є два взаємно протилежні числа.

Розв'язання. З рівності $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ маємо: $\frac{yz + xz + xy}{xyz} = \frac{1}{a}$.

Складемо зведене кубічне рівняння, коренями якого є числа x, y, z .

$$p = -(x + y + z) = -a, \quad q = yz + xz + xy = \frac{xyz}{a} = -\frac{r}{a}.$$

Отже, маємо таке кубічне рівняння $t^3 - at^2 - \frac{r}{a}t + r = 0$.

Оскільки $t^3 - at^2 - \frac{r}{a}t + r = 0 \Leftrightarrow t^2(t - a) - \frac{r}{a}(t - a) = 0 \Leftrightarrow (t - a)\left(t^2 - \frac{r}{a}\right) = 0$, то $t = a$

– один із коренів кубічного рівняння. Тому a збігається з одним із чисел x, y, z .

Припустимо, що $z = a$. Тоді з рівності $x + y + z = a$ випливає, що $x + y = 0$, тобто $x = -y$. А це і треба було довести.

Перейдемо до розв'язування систем алгебраїчних рівнянь.

Приклад 7. Сума трьох цілих чисел x, y, z дорівнює нулю. Довести, що існує таке ціле число t , що справджується рівність $2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = t^2$.

Розв'язання. Нехай $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$ – кубічне рівняння, коренями якого є цілі числа x, y, z . Тоді $p = -(x + y + z) = 0$ і кубічне рівняння набуває вигляду $t^3 + qt + r = 0$.

Оскільки x, y, z корені рівняння $t^3 + qt + r = 0$, то справедливі рівності:

$$x^3 + qx + r = 0, \quad y^3 + qy + r = 0, \quad z^3 + qz + r = 0.$$

Домноживши ці рівності на $2x, 2y, 2z$ відповідно і додавши, одержимо:

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 + 2q(x^2 + y^2 + z^2) + 2r(x + y + z) = 0,$$

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 + 2q(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = -2q((x + y + z)^2 - 2xy - 2xz - 2yz), \quad 2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = 4q(xy + xz + yz),$$

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = 4q^2, \quad 2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = (2q)^2.$$

Отже, існує $t = 2q \in \mathbb{Z}$ таке, що справедлива рівність $2x^4 + 2y^4 + 2z^4 = t^2$. А це і треба було довести.

Задачі типу: «Довести, що значенням виразу $(21,3)^3 + (56,4)^3 + (23,3)^3 - 83972,268$ є число, що ділиться націло на 101» є частковими випадками більш загальної задачі.

Приклад 8. Довести, що вираз $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ділиться націло на вираз $x + y + z$.

Розв'язання. Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, коренями якого є числа x, y, z . Тоді справедливі рівності:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \quad y^3 + py^2 + qy + r = 0, \quad z^3 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Додавши ці рівності, одержимо: $x^3 + y^3 + z^3 + p(x^2 + y^2 + z^2) + q(x + y + z) + 3r = 0$.

Врахувавши, що $x + y + z = -p$ і $xyz = -r$, перетворимо ліву частину цієї рівності:

$$x^3 + y^3 + z^3 + p(x^2 + y^2 + z^2) + q(x + y + z) + 3r =$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + p(x^2 + y^2 + z^2) - pq + 3r = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + p(x^2 + y^2 + z^2 - q).$$

Отже, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + p(x^2 + y^2 + z^2 - q) = 0$, звідки

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = -p(x^2 + y^2 + z^2 - q), \quad (1)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

З останньої рівності випливає, що вираз $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ділиться націло на вираз $x + y + z$. А це і треба було довести.

Розглянемо приклади систем нелінійних рівнянь.

Приклад 9. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'язання. Нехай $(x; y; z)$ – розв'язок системи (2). Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, коренями якого є числа x, y, z . Тоді за теоремою Вієта маємо:

$$p = -(x + y + z) = -2, \quad q = xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{2^2 - 14}{2} = -5.$$

Домножимо перше рівняння системи (2) на q , друге – на p і всі три рівняння додамо:

$$x^3 + px^2 + qx + y^3 + py^2 + qy + z^3 + pz^2 + qz = 20 + 14p + 2q. \quad (3)$$

Оскільки $p = -2, q = -5$, то $20 + 14p + 2q = 20 - 28 - 10 = -18$.

Враховуючи, що числа x, y, z є коренями рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, маємо:

$$x^3 + px^2 + qx = -r, \quad y^3 + py^2 + qy = -r, \quad z^3 + pz^2 + qz = -r.$$

Отже, рівність (3) набуває вигляду: $-r - r - r = -18$, звідки $r = 6$.

Таким чином, маємо кубічне рівняння $t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$, коренями якого є числа x, y, z . Розв'яжемо це рівняння:

$$t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2(t - 1) - (t^2 + 5t - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2(t - 1) - (t - 1)(t + 6) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - t - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = -2, \\ t = 3. \end{cases}$$

Отже, $1, -2, 3$ – корені кубічного рівняння $t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0$, а тому $(1; -2; 3)$ – один із розв'язків системи (2). Оскільки кожне із рівнянь системи (2) є симетричним

відносно невідомих x, y, z , то розв'язками цієї системи також є: $(1; 3; -2)$, $(-2; 1; 3)$, $(-2; 3; 1)$, $(3; -2; 1)$, $(3; 1; -2)$.

Відповідь: $(1; -2; 3)$, $(1; 3; -2)$, $(-2; 1; 3)$, $(-2; 3; 1)$, $(3; -2; 1)$, $(3; 1; -2)$.

Приклад 10. Розв'язати систему

$$\begin{cases} xyz = 1, \\ x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) = 0, \\ 8x^3 + 8y^3 + 8z^3 = 73. \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язання. Перетворимо систему (4):

$$\begin{cases} xyz = 1, \\ x + y + z = xy + yz + zx, \\ 8(x^3 + y^3 + z^3) = 73. \end{cases} \quad (5)$$

Нехай $(x; y; z)$ – розв'язок системи (4), а, отже, розв'язок системи (5). Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, коренями якого є числа x, y, z . Тоді за теоремою Вієта маємо:

$$r = -xyz = -1, \quad p = -(x + y + z) = -(xy + yz + zx) = -q.$$

Отже, одержуємо рівняння $t^3 + pt^2 - pt - 1 = 0$, звідки маємо:

$$t^3 - 1 + pt(t-1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 1) + pt(t-1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + (p+1)t + 1) = 0.$$

Одним із коренів кубічного рівняння є $t = 1$. Отже, одне із чисел x, y, z дорівнює 1.

Нехай $x = 1$. Тоді із системи (4) маємо:

$$\begin{cases} yz = 1, \\ 8(1 + y^3 + z^3) = 73, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{z}, \\ \frac{1}{z^3} + z^3 = \frac{73}{8} - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{z}, \\ z^3 + \frac{1}{z^3} - \frac{65}{8} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{z}, \\ \frac{8z^6 - 65z^3 + 8}{8z^3} = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши останнє рівняння системи, одержимо: $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$. Тоді $y_1 = \frac{1}{2}$,

$y_2 = 2$. Отже, $\left(1; \frac{1}{2}; 2\right)$, $\left(1; 2; \frac{1}{2}\right)$ – розв'язки системи (4). Оскільки кожне із рівнянь системи

(4) є симетричним відносно невідомих x, y, z , то розв'язками цієї системи також є: $\left(\frac{1}{2}; 1; 2\right)$,

$$\left(\frac{1}{2}; 2; 1\right), \left(2; 1; \frac{1}{2}\right), \left(2; \frac{1}{2}; 1\right).$$

$$\text{Відповідь: } \left(1; \frac{1}{2}; 2\right), \left(1; 2; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 1; 2\right), \left(\frac{1}{2}; 2; 1\right), \left(2; 1; \frac{1}{2}\right), \left(2; \frac{1}{2}; 1\right).$$

Приклад 11. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язання. Нехай $(x; y; z)$ – розв'язок системи (6). Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, коренями якого є числа x, y, z . Тоді за теоремою Вієта маємо:

$$p = -(x + y + z) = -1, \quad q = xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{(-1)^2 - 3}{2} = -1.$$

Отже, одержуємо рівняння $t^3 - t^2 - t + r = 0$, звідки $t^3 = t^2 + t - r$. Тоді

$$t^4 = t^3 \cdot t = (t^2 + t - r) \cdot t = t^3 + t^2 - rt = (t^2 + t - r) + t^2 - rt = 2t^2 + (1 - r)t - r,$$

$$t^5 = t^4 \cdot t = (2t^2 + (1 - r)t - r) \cdot t = 2t^3 + (1 - r)t^2 - rt = 2(t^2 + t - r) + (1 - r)t^2 - rt = \\ = (3 - r)t^2 + (2 - r)t - 2r.$$

Оскільки числа x, y, z є коренями кубічного рівняння, то справедливі рівності:

$$\begin{cases} x^5 = (3 - r)x^2 + (2 - r)x - 2r, \\ y^5 = (3 - r)y^2 + (2 - r)y - 2r, \\ z^5 = (3 - r)z^2 + (2 - r)z - 2r. \end{cases}$$

Додавши ці три рівності і врахувавши, що $x^5 + y^5 + z^5 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x + y + z = 1$, одержимо:

$$1 = (3 - r)(x^2 + y^2 + z^2) + (2 - r)(x + y + z) - 6r, \quad 1 = (3 - r) \cdot 3 + (2 - r) \cdot 1 - 6r, \quad r = 1.$$

Отже, маємо таке кубічне рівняння: $t^3 - t^2 - t + 1 = 0$. Розв'яжемо його:

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2(t - 1) - (t - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^2(t + 1) = 0.$$

Отже, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$ – корені кубічного рівняння. Тоді $(1; 1; -1)$ – один із розв'язків системи (6). Оскільки кожне із рівнянь системи (6) є симетричним відносно невідомих x, y, z , то розв'язками цієї системи також є: $(1; -1; 1)$, $(-1; 1; 1)$.

Відповідь: $(1; 1; -1)$, $(1; -1; 1)$, $(-1; 1; 1)$.

Приклад 12. Розкласти на множники вираз $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

Розв'язання. Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, коренями якого є числа a, b, c , де $a = x - y$, $b = y - z$, $c = z - x$. Тоді $a + b + c = 0$ і за теоремою Вієта маємо: $p = -(a + b + c) = 0$.

Враховуючи рівність (1), доведену в розв'язанні прикладу 8, маємо:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -p(a^2 + b^2 + c^2 - q).$$

Оскільки $p = 0$, то з останньої рівності одержуємо: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$, звідки $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ або $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

Відповідь: $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$.

Приклад 13. Довести тотожність

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Розв'язання. Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, коренями якого є числа a, b, c , де $a = x - y, b = y - z, c = z - x$. Тоді $a + b + c = 0$ і за теоремою Вієта маємо: $p = -(a + b + c) = 0$. Отже, кубічне рівняння має вигляд $t^3 + qt + r = 0$.

Оскільки числа a, b, c є коренями рівняння $t^3 + qt + r = 0$, то справедливі рівності:

$$\begin{cases} a^3 + qa + r = 0, \\ b^3 + qb + r = 0, \\ c^3 + qc + r = 0. \end{cases}$$

Домноживші ці рівності на a^2, b^2, c^2 відповідно і додавши, одержимо:

$$a^5 + b^5 + c^5 + q(a^3 + b^3 + c^3) + r(a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 &= -q(a^3 + b^3 + c^3) - r(a^2 + b^2 + c^2) = \\ &= -q(a^3 + b^3 + c^3) - r((a + b + c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc^2) = \\ &= -q(a^3 + b^3 + c^3) - r(0^2 - 2q) = -q(a^3 + b^3 + c^3 - 2r). \end{aligned}$$

Враховавши, що $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (див. розв'язання прикладу 12), одержимо:

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 &= -q(3abc - 2r) = -q(-3r - 2r) = 5qr = -5(ab + bc + ac)(abc) = \\ &= -5((x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (x-y)(z-x))(x-y)(y-z)(z-x) = \\ &= 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = 5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz),$$

що і треба було довести.

Список використаної літератури

1. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обычные дифференциальные уравнения): Учебное пособие для вузов. – М.: ООО «Издательский дом» «Оникс 21 век», 2005. – 400 с.
2. Курляндчик Л.Д., Фомин С.В. Теорема Виета и вспомогательный многочлен // Квант. – 1984. – №12. – С.14-16.
3. Фомин С.В. Разложение на множители // Квант. – 1984. – №7. – С.23.

ПРО ПОВЕДІНКУ ФУНКЦІЇ В ОКОЛІ ТОЧКИ ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМУ

Краснитський С.М.,

доктор фіз.-мат. наук, професор,

Київський національний університет технологій та дизайну

Курченко О.О.,

доктор фіз.-мат. наук, доцент,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

У статті наведені результати про поведінку сум степеневих рядів в околах точок локального екстремуму та контрприкладів, що спростовують інтуїтивні уявлення про поведінку достатньо гладких функцій в околах таких точок.

Стаття содержит результаты о поведении сумм степенных рядов в окрестностях точек локального экстремума и контрпримеры, которые опровергают интуитивные представления о поведении достаточно гладких функций в окрестностях таких точек.

This article contains the results on the behavior of the power series sums in the local extreme point neighborhood and the counterexamples for the intuitive ideas on this behavior in the case of the sufficiently smooth functions.

Як поводить себе достатньо гладка функція в околі точки строгого локального екстремуму? Тут інтуїція інколи підказує, що в околі такої точки функція має вести себе як многочлен парного степеня, зокрема, бути локально опуклою. Виявляється, інтуїція насправді підводить, хоча подібні твердження можна знайти у вельми авторитетних видання ([1], глава 3, с.72). У цій статті ми наводимо результати про поведінку сум степеневих рядів в околі точки строгого локального екстремуму, а також контрприкладів, що свідчать про хибність цих тверджень у класах гладких та навіть нескінченно диференційовних функцій в межах нормативного курсу математичного аналізу функцій однієї змінної. Порушені питання можуть бути використані для залучення студентів до науково-дослідної роботи в напрямку математичного аналізу вже на перших курсах математичних факультетів класичних та педагогічних університетів.

Нехай функція f є сумою збіжного на $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ степеневому ряду,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Лема 1. Нехай функція f визначена рівністю (1) та існує збіжна послідовність (x_k) , така, що $f(x_k) = 0$. Тоді $f(x) = 0, x \in \mathbf{R}$.

Доведення. Нехай $x_k \rightarrow x_0 \in \mathbf{R}$, $k \rightarrow \infty$. Покладемо в (1) $t = x - x_0$, $t_k = x_k - x_0$, $k \geq 1$.

Тоді
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t + x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n =: g(t), \quad t \in \mathbf{R},$$
 де коефіцієнти b_n , $n \geq 0$

визначаються однозначно. Далі, у рівності $g(t_k) = 0$, $k \geq 1$ перейдемо до границі при $k \rightarrow \infty$

і отримаємо $b_0 = 0$. На другому кроці у рівності $\sum_{n=1}^{\infty} b_n t_k^{n-1} = 0$, $k \geq 1$ перейдемо до границі

при $k \rightarrow \infty$ і отримаємо $b_1 = 0$ і т.д. Отже, $b_n = 0$, $n \geq 0$, тобто $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$. Лема доведена.

Зауваження 1. Твердження леми 1 є наслідком властивості єдиності аналітичних функцій ([2], §11.5). Але у цій статті ми не виходимо за межі математичного аналізу функції однієї змінної.

Теорема 1. Нехай функція (1) має збіжну послідовність точок (x_k) локального екстремуму. Тоді $f(x) = \text{const}$, $x \in \mathbf{R}$.

Доведення. Внаслідок необхідної умови локального екстремуму, $f'(x_k) = 0$, $k \geq 1$. Із леми 1 випливає, що $f'(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$, звідки слідує твердження теореми.

Наслідок 1. Нехай x_0 – точка локального екстремуму відмінної від сталої функції, що є сумою збіжного на \mathbf{R} степеневому ряду. Тоді існує таке $\delta > 0$, що інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ містить рівно одну точку локального екстремуму.

Іншими словами, множина всіх точок локального екстремуму відмінної від сталої функції (1) складається із ізольованих точок.

Теорема 2. Нехай x_0 – точка строгого локального екстремуму функції (1), $m = \min \{n \in N \mid f^{(n)}(x_0) \neq 0\}$, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Тоді

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

При цьому функція (1) строго опукла в деякому околі точки x_0 .

Доведення. Степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми. Тому

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbf{R}.$$
 Оскільки функція f має точку строгого локального

екстремуму, то вона не є сталою на \mathbf{R} , а тому існує $n \in N : f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Натуральне число m визначено коректно: довільна непорожня підмножина натуральних чисел містить

найменше число. При цьому число m парне. Це впливає із достатніх умов строго локального екстремуму ([3], с.158, теорема 3). Далі,

$$f(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$f''(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(k-1)(x-x_0)^{k-2} = (x-x_0)^{m-2} \left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{(m-2)!} + o(1) \right), \quad x \rightarrow x_0.$$

Функція f строго опукла в деякому околі точки x_0 . Дійсно, нехай $f^{(m)}(x_0) > 0$. Тоді для деякого $\delta > 0 \quad \forall t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f''(t) > 0$, звідки впливає строга опуклість вниз функції f на інтервалі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. У випадку $f^{(m)}(x_0) < 0$ функція f строго опукла вгору в деякому околі точки x_0 .

У зв'язку із твердженнями теорем 1, 2 для сум степеневих рядів, наведемо кілька прикладів достатньо гладких функцій, для яких твердження цих теорем хибні. Таким чином, поведінка таких функцій в околі точок екстремуму не тільки не подібна до поведінки поліномів другого степеня, а й взагалі не подібна до поведінки будь-якого алгебраїчного полінома ненульового степеня. Відмітимо, що деякі близькі питання щодо локальної поведінки гладких функцій розглянуто у відомій книзі [4], розділ 3.

Приклад 1. Двічі неперервно диференційована відмінна від константи функція, що має збіжну послідовність точок локального екстремуму. Тобто ця функція має точку екстремуму, в будь-якому околі якої знайдеться нескінченна (зліченна) множина точок екстремумів цієї функції. Покладемо

$$f(x) = \begin{cases} x^6 \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, мінімальне значення цієї функції дорівнює 0. Зокрема, воно досягається у точці 0.

Крім того, будь-який окіл точки 0 містить безліч коренів рівняння $\sin \frac{1}{x} = -1$, в яких функція

f також набуває значення нуль. Таким чином, точки $x_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)^{-1}$, $n \in \mathbf{Z}$ є точками

строгого локального екстремуму функції f . При цьому точка нестрогого абсолютного мінімуму $x_0 = 0$ є границею послідовностей $(x_n), (x_{-n})$ точок строгого локального екстремуму функції. Переконаємося, що функція f двічі неперервно диференційовна на \mathbf{R} . Дійсно,

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^5 \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) - x^4 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Похідна при $x \neq 0$ знайдена за правилами диференціювання, а у точці $x = 0$ – за означенням похідної. Так само знаходимо другу похідну функції f :

$$f''(x) = \begin{cases} 30x^4 \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) - 10x^3 \cos \frac{1}{x} - x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Неважко бачити, що друга похідна функції f неперервна на \mathbf{R} . Крім того, друга похідна функції f не зберігає знака ні ліворуч, ні праворуч точки нуль. Дійсно, для послідовностей

$$x_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad n \geq 1 \text{ маємо } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f''(x_n)}{x_n^2} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f''(y_n)}{y_n^2} = -1.$$

Отже, функція f не є опуклою в жодному околі точки нуль.

Зауважимо, що похідна третього порядку функції (3) має розрив другого роду в нулі, а похідна четвертого порядку у нулі не існує.

Відсутність опуклості в околі точки локального екстремуму не обов'язково зумовлюється неізолюваністю точки локального екстремуму, як свідчить наступний приклад.

Приклад 2. Двічі неперервно диференційовна функція, що має ізолювану точку строгого локального екстремуму і не є опуклою в жодному околі цієї точки.

Покладемо

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(1 + 24x^2 \sin \frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Функція f має строгий локальний мінімум в точці $x_0 = 0$. Дійсно, для $\delta = \frac{1}{\sqrt{24}}$, для всіх $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ справджується нерівність $f(x) > f(0) = 0$. Перша та друга похідні функції знаходяться так само, як у попередньому прикладі. Маємо:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 + 144x^5 \sin \frac{1}{x} - 24x^4 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 + 720x^4 \sin \frac{1}{x} - 240x^3 \cos \frac{1}{x} - 24x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Помітимо, що $f'(x) = x^3(4 + o(1))$, $x \rightarrow 0$. Звідси випливає, що ліворуч і праворуч точки нуль перша похідна функції f зберігає знак. Отже, у деякому околі точки нуль відсутні точки локального екстремуму функції f за винятком точки строгого локального мінімуму $x_0 = 0$. Таким чином, нуль – ізольована точка множини всіх точок локального екстремуму функції f .

Переконаємося тепер, що ліворуч і праворуч точки нуль має місце нескінченна кількість змін знаку другої похідної функції f . Це випливає із рівності

$$f''(x) = 12x^2 \left(\left(1 - 2 \sin \frac{1}{x} \right) + o(1) \right), \quad x \rightarrow 0.$$

Дійсно, для достатньо великих значень $|n|$, $n \in \mathbb{Z}$ друга похідна набуває від'ємних значень у

$$\text{точках } x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)^{-1} \text{ та додатних у точках } y_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)^{-1}. \quad \text{При цьому } x_n, y_n \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким чином, друга похідна функції f не зберігає знака праворуч і ліворуч нуля, звідки й випливає твердження про відсутність опуклості функції f в будь-якому околі точки строгого локального мінімуму цієї функції.

Зауважимо, що похідна третього порядку функції (4) має розрив другого роду в нулі, а похідна четвертого порядку у нулі не існує.

Приклад 3. Нескінченно диференційовна функція, що має ізольовану точку строгого локального екстремуму і не є опуклою в жодному околі цієї точки.

Покладемо

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 + x^2 \sin \frac{1}{x^3}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Функція f має строгий локальний мінімум в точці $x_0 = 0$. Дійсно, для всіх $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ справджується нерівність $f(x) > f(0) = 0$. Перша та друга похідні знаходяться так само, як у попередніх прикладах:

$$f'(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x^3} \left(2 + (2x^2 + 2x^4) \sin \frac{1}{x^3} - 3x \cos \frac{1}{x^3}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{x^6} \left(4 - 6x^2 + (4x^2 + 2x^4 + 2x^6 - 9) \sin \frac{1}{x^3} - 12x \cos \frac{1}{x^3}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0 = f''(0)$. Праворуч і ліворуч точки нуль друга похідна функції

(5) не зберігає знака. Дійсно, $f''(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x^6} \left(4 - 9\sin\frac{1}{x^3} + o(1)\right)$, $x \rightarrow 0$ і для

достатньо великих значень $|n|$, $n \in \mathbb{Z}$ друга похідна набуває від'ємних значень у точках

$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1/3}$ та додатних у точках $y_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1/3}$. При цьому $x_n, y_n \rightarrow 0$ при

$n \rightarrow \infty$. Таким чином, функція (5) не є опуклою в жодному околі точки нуль.

Для доведення нескінченної диференційовності на \mathbb{R} функції (5) помітимо, що при $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(a_n \left(\frac{1}{x}\right) + b_n \left(\frac{1}{x}\right) \sin \frac{1}{x^3} + c_n \left(\frac{1}{x}\right) \cos \frac{1}{x^3} \right), \quad n \geq 0,$$

де $a_n(\cdot)$, $b_n(\cdot)$, $c_n(\cdot)$ – многочлени. Тому $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$. Далі для $f^{(n)}$ при $n = 1, 2, \dots$

послідовно застосовуємо наслідок теореми Лагранжа ([3], глава 4, п. 2, наслідок 4) і

отримуємо $f^{(n)}(0) = 0$. Таким чином, функція (5) n раз неперервно диференційовна на \mathbb{R}

для довільного натурального n , тобто нескінченно диференційовна на \mathbb{R} .

Наведені у статті результати та контрприкладі щодо поведінки функції у точці строгого локального екстремуму можуть бути використані у науково-дослідній роботі студентів молодших курсів, для підготовки курсових робіт, у спеціальних курсах для студентів-математиків педагогічних університетів.

Список використаної літератури

1. Мину М. Математическое программирование. — М.: Наука, 1990. — 486 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — К.: Вища шк., 1992. — 359 с
3. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1. — К.: Либідь, 1993. — 320 с.
4. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. — 252 с.

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ЕКОНОМІЧНОГО ЗМІСТУ

Сушко О.С.,

аспірант,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

У даній статті розглядаються умови порушення передумов використання звичайного методу найменших квадратів та можливості використання узагальненого методу найменших квадратів для отримання більш достовірних результатів. Розкривається суть гетероскедастичності та зваженого методу найменших квадратів.

В данной статье рассматриваются условия нарушения предпосылок использования обычного метода наименьших квадратов и возможности использования обобщённого метода наименьших квадратов для получения более достоверных результатов. Раскрывается суть гетероскедастичности и взвешенного метода наименьших квадратов.

This article focuses on the conditions of use violation preconditions ordinary least squares and the possibility of using a generalized least squares method to obtain more reliable results. Disclosed the nature of heteroscedasticity and the weighted least squares method.

Вступ. Однією з головних задач економетрії в ринковій економіці є ретельне вивчення кількісних зв'язків між показниками для кращого розуміння економічних явищ і процесів, що в свою чергу дозволяє більш обґрунтовано сформулювати управлінські рішення та дати прогнози на майбутнє. Для вирішення цієї задачі потрібна побудова економетричної моделі. Ті з моделей, що базуються на методі найменших квадратів (МНК) при оцінюванні їх параметрів, називаються класичними і вивчаються у класичній економетрії.

Економетрія — це наука, що вивчає кількісні і якісні характеристики та взаємозв'язки економічних об'єктів і процесів за допомогою математичних і статистичних методів і моделей.

З огляду на це, економетрія є однією з найважливіших дисциплін фундаментальної підготовки як бакалаврів з економіки, так і вчителів (викладачів) економічних та економіко-математичних дисциплін. Донедавна економетрія як окремий предмет не вивчалася у вищих навчальних економічних закладах нашої країни. Дисципліни з математичного моделювання економічних процесів та явищ, що входили до програм вузів України, містили лише окремі теми з економетрії, які здебільшого базувалися на класичному регресійному аналізі.

Як відомо, застосувати метод найменших квадратів для оцінювання параметрів економетричної моделі можна лише в разі виконання певних умов, які далеко не завжди виконуються на практиці для вихідної економічної інформації. Якщо ці умови порушуються, доводиться застосовувати інші методи оцінювання параметрів економетричної моделі. Вивчити методи оцінювання параметрів моделі та особливості економічної інформації з метою кількісного вимірювання взаємозв'язку між досліджуваними процесами та явищами — основне завдання курсу «Економетрія».

Огляд сучасних досліджень. Застосуванню методу найменших квадратів присвячено ряд монографій та підручників [3-5, 8], в яких розроблено теоретичні основи та розглянуто прикладні аспекти застосування цього методу до різних економічних процесів і явищ.

Мета статті – розглянути загальні аспекти методу найменших квадратів як одного з основних методів дослідження економічних процесів та явищ, навести приклади порушення передумов його використання та способи їх вирішення.

Основний виклад. Під час реалізації регресійного аналізу за допомогою звичайного МНК особливу увагу необхідно звернути на проблеми, пов'язані з виконанням необхідних умов для випадкових відхилень, оскільки властивості статистичних оцінок параметрів лінійної регресії перебувають у прямій залежності від цих відхилень ε_i .

Для одержання якісних статистичних оцінок потрібно уважно стежити за виконанням передумов, що сформульовані в теоремі Гаусса-Маркова, бо при їх порушенні звичайний МНК дає статистичні оцінки, яким притамані небажані властивості.

Однією із передумов теореми Гаусса-Маркова є:

$$\text{cov}(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_\varepsilon^2 = \text{const}, & i = j \end{cases} \text{ при } i, j = \overline{1, n},$$

де n – число спостережень.

Виконання цієї умови називають *гомоскедастичністю* залишків. У випадку, коли порушується ця передумова, тобто

$$\text{cov}(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_\varepsilon^2 \neq \text{const}, & i = j \end{cases} \text{ при } i, j = \overline{1, n},$$

це є головною ознакою наявності гетероскедастичності моделі.

Таким чином, моделі, для яких не виконуються передумови Гаусса-Маркова, можна умовно поділити на три групи:

До **першої** належать такі моделі, для яких виконуються наступні умови стосовно компонент випадкового вектора $\vec{\varepsilon}$:

1) вони мають нульові математичні сподівання:

$$M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

2) між собою є попарно некорельовані:

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ \sigma_{\varepsilon_i}^2 \neq \text{const}, & \text{при } i = j, i = \overline{1, n} \end{cases}$$

В цьому випадку коваріаційна матриця випадкового вектора $\vec{\varepsilon}$ буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') &= M(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') = M \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \cdot (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n) \right) = \\
&= M \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1 \varepsilon_n \\ \varepsilon_2 \varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_2 \varepsilon_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_n \varepsilon_1 & \varepsilon_n \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(\varepsilon_1^2) & M(\varepsilon_1 \varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_1 \varepsilon_n) \\ M(\varepsilon_2 \varepsilon_1) & M(\varepsilon_2^2) & \cdots & M(\varepsilon_2 \varepsilon_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M(\varepsilon_n \varepsilon_1) & M(\varepsilon_n \varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\varepsilon_n}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\text{cov}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\varepsilon_n}^2 \end{pmatrix}$$

Такі моделі називають економетричними моделями з ознакою гетероскедастичності залишків.

До **другої** групи належать моделі, для яких виконуються такі умови:

1) збурення мають нульові математичні сподівання:

$$M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = \overline{1, n};$$

2) вони є попарно корельованими:

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} k_{ij}, & \text{при } i \neq j, \\ \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma_{\varepsilon_j}^2 = \text{const}, & \text{при } i = j, \quad i = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$\text{де } k_{ij} = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) - M(\varepsilon_i) \cdot M(\varepsilon_j) = M(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) \neq 0.$$

В цих моделях між випадковими відхиленнями $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ існує кореляційний зв'язок, хоча дисперсії їх є сталими величинами.

Коваріаційна матриця в цьому випадку матиме вигляд

$$\text{cov}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon}^2 & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & \sigma_{\varepsilon}^2 & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & \sigma_{\varepsilon}^2 & \cdots & k_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdots & \sigma_{\varepsilon}^2 \end{pmatrix}$$

і слід пам'ятати, що $k_{ij} = k_{ji}$, тобто матриця є симетричною. Тому в цих моделях хоча умова гомоскедастичності (сталість дисперсій залишків) і виконується, але використання звичайного МНК не рекомендується внаслідок існування коваріаційних моментів між випадковими залишками.

До **третьої** групи належать моделі, для яких:

- 1) збурення мають нульові математичні сподівання $M(\varepsilon_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}$;
- 2) елементи $\vec{\varepsilon}$ є попарно корельованими $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} k_{ij}, & \text{при } i \neq j, \\ \sigma_{\varepsilon_i}^2 \neq \text{const}, & \text{при } i = j, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$

Слід наголосити, що для всіх трьох груп лінійних моделей з порушенням передумов застосування МНК точкові статистичні оцінки β_i^* для теоретичних параметрів β_i будуть незміщеними, але втрачають свою ефективність, тобто вони не матимуть мінімальну дисперсію, що призведе до зниження ймовірності одержання доброякісної оцінки.

Для моделей першої групи статистична оцінка параметрів здійснюється шляхом використання зваженого методу найменших квадратів. Для моделей другої та третьої груп – узагальненого методу найменших квадратів, який ми розглянемо пізніше.

Умова гомоскедастичності є головною для лінійної класичної моделі і записується як

$$\text{cov}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') = \sigma_{\varepsilon}^2 I_n$$

Для лінійних моделей з властивістю випадкового вектора $\vec{\varepsilon}$, коли

$$\text{cov}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \sigma_2^2 & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & \sigma_3^2 & \dots & k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \Omega$$

(матриця Ω є симетричною, додатньо визначеною матрицею n -го порядку)

неможливим є використання звичайного МНК з метою визначення статистичних оцінок, як це було здійснено для лінійної класичної моделі. В такому випадку використовують так званий узагальнений метод найменших квадратів (УМНК).

Нехай досліджується лінійна модель

$$\vec{y} = X\vec{\beta} + \vec{\varepsilon} \quad (1)$$

з порушенням умови гомоскедастичності, а саме

$$\text{cov}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') = \Omega$$

Тоді додатньо визначена матриця Ω допускає існування такої невідродженої матриці π , що

$$\Omega = \pi \cdot \pi'$$

Звідси буде впливати

$$\pi^{-1} \cdot \Omega \cdot (\pi^{-1})' = I_n$$

Таким чином, одержимо

$$\Omega^{-1} = (\pi^{-1})' \cdot \pi^{-1} \quad (2)$$

Враховуючи (2) для моделі (1) здійснимо таке перетворення: ліву і праву частини рівняння помножимо зліва на матрицю π^{-1} .

$$\pi^{-1}\vec{y} = \pi^{-1}X\vec{\beta} + \pi^{-1}\vec{\varepsilon}$$

Позначивши

$$\vec{y}^* = \pi^{-1}\vec{y}, \quad X^* = \pi^{-1}X, \quad \vec{\varepsilon}^* = \pi^{-1}\vec{\varepsilon} \quad (3)$$

Одержимо

$$\vec{y}^* = X^*\vec{\beta} + \vec{\varepsilon}^* \quad (4)$$

Здійснивши перевірку моделі на наявність гетероскедастичності, маємо:

1. $M(\vec{\varepsilon}^*) = M(\pi^{-1} \cdot \vec{\varepsilon}) = \pi^{-1}M(\vec{\varepsilon}) = 0$,
2. $\text{cov}(\vec{\varepsilon}^* \cdot (\vec{\varepsilon}^*)') = M(\vec{\varepsilon}^* \cdot (\vec{\varepsilon}^*)') = M(\pi^{-1} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot (\pi^{-1} \cdot \vec{\varepsilon})') =$
 $= M(\pi^{-1} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'(\pi^{-1})') = \pi^{-1}M(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') \cdot (\pi^{-1})' = \pi^{-1} \cdot \Omega \cdot (\pi^{-1})' = I_n$.

Таким чином, виявилось, що перетворена модель (4) є гомоскедастичною, а тому для визначення статистичних оцінок цієї моделі можемо використати звичайний МНК, як для класичної лінійної моделі і одержимо

$$\vec{\beta}^* = \left((X^*)' \cdot X^* \right)^{-1} \cdot (X^*)' \cdot \vec{Y}^*$$

Враховуючи (3) маємо:

$$\begin{aligned} \vec{\beta}^* &= \left((\pi^{-1}X)' \cdot \pi^{-1}X \right)^{-1} \cdot (\pi^{-1}X)' \cdot \pi^{-1}\vec{Y} = \\ &= \left(X'(\pi^{-1})' \cdot \pi^{-1}X \right)^{-1} \cdot X'(\pi^{-1})' \cdot \pi^{-1}\vec{Y} = (X' \cdot \Omega^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot \Omega^{-1}\vec{Y} \end{aligned}$$

Коваріаційна матриця вектора $\vec{\beta}^*$ буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\vec{\beta}^* \cdot (\vec{\beta}^*)') &= \left((X^*)' \cdot X^* \right)^{-1} = \left((\pi^{-1}X)' \cdot \pi^{-1}X \right)^{-1} = \\ &= \left(X'(\pi^{-1})' \cdot \pi^{-1}X \right)^{-1} = (X' \cdot \Omega^{-1} \cdot X)^{-1} \end{aligned}$$

Таким чином, одержали:

$$\begin{aligned} \vec{\beta}^* &= (X' \cdot \Omega^{-1} \cdot X)^{-1} \cdot X' \cdot \Omega^{-1}\vec{Y} \\ \text{cov}(\vec{\beta}^* \cdot (\vec{\beta}^*)') &= (X' \cdot \Omega^{-1} \cdot X)^{-1} \end{aligned}$$

Розглянутий метод перетворення початкової моделі (1) із подальшим використанням звичайного МНК до моделі (4) для визначення $\vec{\beta}^*$, $\text{cov}(\vec{\beta}^* \cdot (\vec{\beta}^*)')$ дістав назву узагальненого методу найменших квадратів (УМНК).

Але при цьому слід наголосити, що для реалізації УМНК необхідно знати елементи матриці Ω , що на практиці є справою дуже складною. А тому цей метод, певною мірою, виконує чисто ілюстративну функцію в економетрії. Для практичного використання цього методу необхідно накласти певні умови на структуру матриці Ω .

Розглянемо моделі, що належать до першої групи моделей з порушенням передумов використання звичайного МНК.

При здійсненні вибірки ми маємо справу з конкретними реалізаціями залежної змінної Y і відповідними значеннями пояснюючих змінних (регресорів), при цьому завжди буде присутній фактор випадкових збурень, що породжують відхилення ε_i .

Випадкові величини ε_i апіорно можуть набувати довільних значень, що підпорядковані певним ймовірнісним розподілам. Однією з головних вимог до цих розподілів є рівність їх дисперсій.

Цю вимогу потрібно розуміти так: не зважаючи на те, що при кожному конкретному спостереженні випадкові відхилення ε_i будуть між собою відрізнятися, не повинно існувати причини, яка б спонукала значну розбіжність між цими величинами. Тобто похибки в середньому для всіх спостережень повинні мало відрізнятися. Звичайно, в певному розумінні, тут припускається ідеалізація ситуації. Така ідеальна ситуація в реальних умовах не спостерігається. Часто, при реалізації спостережень в одних і тих самих умовах, відхилення ε_i будуть суттєво відрізнятися між собою, тобто в одних спостереженнях вони виявляються відносно великими, в інших – малими.

Так, наприклад, нехай залежність витрат на споживання (Y) середньостатистичного суб'єкта від його доходів (X) описується парною лінійною регресією

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$$

Розглянемо для цієї моделі два випадки (рис.1 а, б):

1) умова гомоскедастичності виконується;

2) умова гомоскедастичності не виконується (наявна гетероскедастичність). В цьому випадку можуть виникати проблеми, пов'язані з ефектом масштабу (різних одиниць виміру). У часових рядах явище гетероскедастичності пов'язане з тим, що одні й ті самі показники розглядаються в різні моменти часу (наприклад чистий експорт, темпи інфляції в певному регіоні за певний проміжок часу).

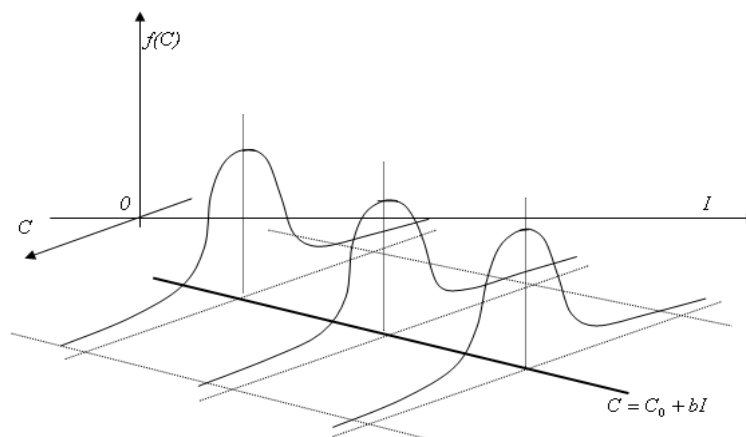


Рис. 1 (а).

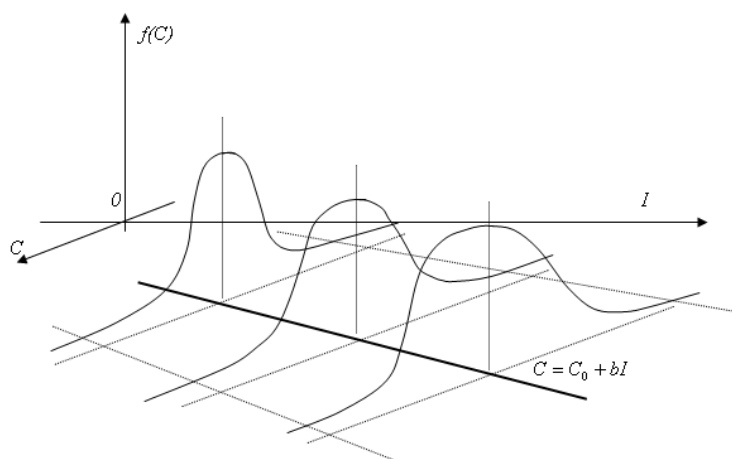


Рис. 1 (б).

За наявності гетероскедастичності (моделі першої групи) статистична оцінка дисперсії σ_ε^2 обчислена за формулою

$$S_\varepsilon^2 = \frac{\bar{e}' \cdot \bar{e}}{n - m - 1},$$

де n – кількість спостережень, m – кількість регресорів в моделі, яка використовується для визначення дисперсій $S_{\beta_i}^2$ для всіх емпіричних коефіцієнтів β_i^* не буде незміщеною. Тоді t -статистика, F -статистика, інтервальні оцінки параметрів моделі стануть ненадійними.

Отже, використання звичайного МНК при наявності гетероскедастичності в моделі буде неефективним. Це добре ілюструється на прикладі парної лінійної регресії, графік якої зображено на рис. 2.

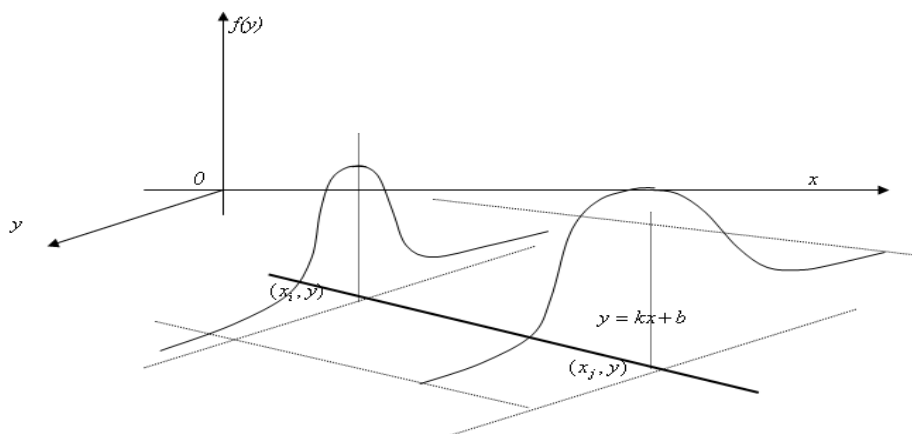


Рис.2.

За МНК маємо суму квадратів похибок

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i^* - \beta_0^* - \beta_1^* x_i)^2. \quad (5)$$

Очевидно, що кожне конкретне значення e_i в наведеній сумі (5) має однакову, так би мовити, “питому вагу”, незалежно від того, чи одержали його при значенні $X = x_i$ (де є мала дисперсія), чи при значенні $X = x_j$ (де наявна велика дисперсія), що звичайно

суперечить здоровому глузду, оскільки точка, одержана із розподілу $X = x_i$ точніше визначає напрямок (тенденцію) лінії регресії, ніж точка, одержана при $X = x_j$.

Тому, якщо поталанить врахувати “питому вагу” всіх точок e_i , то це дозволить одержати ефективніші (доброякісні) статистичні оцінки.

Ознаку гетероскедастичності в кожному конкретному випадку виявити складно, оскільки для цього необхідно знати величини σ_{ε_i} для кожного фіксованого значення $X = x_i$. На практиці, як правило, для кожного конкретного значення $X = x_i$ ми маємо в розпорядженні лише одне значення залежної змінної $Y = y_i$, а не цілий ряд розподілу. Це не дозволяє нам оцінити дисперсію випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$.

Існують опробовані тести за допомогою яких можна виявити гетероскедастичність. І, як свідчить практика, їх використання дають позитивні наслідки. Такими є тести Глейзера і Гольдфельда-Квандта.

Тести Глейзера і Гольдфельда-Квандта можуть виявити присутність ознаки гетероскедастичності в моделі лише у випадку порушення умови $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = const$, тобто, коли дисперсії залишків ε_i не є сталими величинами. Коли ж умова $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = const$ виконується, і при цьому $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$, то виявити це порушення умови гомоскедастичності вищенаведеними тестами неможливо.

У цьому випадку маємо справу із лінійною моделлю з порушенням ознаки гомоскедастичності, яка належить до другої групи. Така ситуація виникає при дослідженні моделей із ознакою автокореляції.

Розглянемо приклад.

Приклад. Розглянемо залежність між прибутком банків України (Y , млн.грн.) та величиною їх статутного фонду (X , млн.грн.) на прикладі вибірових даних, приведених в таблиці 1.

Таблиця 1.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	27,54	14,87	11,69	11,49	11,46	11,38	11,07	10,76	10,60	9,73
Y	100,00	102,67	75,00	85,00	70,09	60,00	54,00	57,35	52,30	52,00
№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	9,48	8,44	8,43	8,19	7,04	6,89	6,04	5,26	5,24	4,39
Y	47,75	46,73	43,42	41,30	41,17	41,04	33,91	33,70	30,01	30,00
№ п/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	3,47	2,49	2,48	1,41	1,39	1,00	0,53	0,10	0,18	0,15
Y	26,82	24,64	23,37	23,82	22,26	20,50	15,50	14,20	13,54	13,41

Необхідно:

1) обчислити оцінки параметрів моделі за методом найменших квадратів, перевірити суттєвість зв'язку в моделі та статистичну значущість розрахованих оцінок параметрів моделі;

2) проаналізувати доцільність застосування методу найменших квадратів, перевіривши тестами Гольдфеля-Квандта та Глейзера наявність гетероскедастичності залишків;

3) розрахувати оцінки параметрів моделі з урахуванням результатів тестів на наявність гетероскедастичності залишків.

Розв'язання.

1) Побудова моделі за МНК, перевірка моделі та її параметрів на статистичну значущість.

Лінійна економетрична модель, оцінки параметрів якої знайдено за методом найменших квадратів для вибірових даних (табл.1), має вигляд:

$$y_i^* = -2,366 + 0,219x_i. \quad (6)$$

Коефіцієнт детермінації цієї моделі $R^2=0,854$, між результативною змінною Y і регресором X коефіцієнт парної кореляції $r_{xy}=0,924$. Перевіримо статистичну значущість коефіцієнта парної кореляції за критерієм Ст'юдента:

$$t_{cn}^* = \sqrt{\frac{0,854 \cdot (30 - 1 - 1)}{1 - 0,854}} = 12,779.$$

При рівні значущості $\alpha=0,05$ та ступенях свободи $k=n-m-1=28$ табличне значення критерію Ст'юдента $t_{kp}''(\frac{\alpha}{2}, k)=2,048$, отже, $t_{cn}^* > t_{kp}''(\frac{\alpha}{2}, k)$, зв'язок в моделі між Y та X суттєвий. Стандартні помилки оцінок параметрів і відповідні їм значення t -критерію дорівнюють:

$$s_{\beta_0^*} = 0,848; \quad s_{\beta_1^*} = 0,017;$$

$$t_{\beta_0^*} = -2,789; \quad t_{\beta_1^*} = 12,779.$$

$t_{\beta_0^*}, t_{\beta_1^*} \notin [-2,048; 2,048]$, це дає змогу зробити висновок про суттєву відмінність від нуля розрахованих оцінок параметрів моделі.

2) Перевірка на наявність гетероскедастичності залишків.

Застосуємо тест Гольдфеля-Квандта для перевірки наявності гетероскедастичності залишків. Тестом перевіряється за критерієм Фішера основна гіпотеза $H_0: \sigma_{\varepsilon_1}^2 = \sigma_{\varepsilon_2}^2 = \dots = \sigma_{\varepsilon_m}^2$ при альтернативній гіпотезі H_a : не H_0 . Для цього упорядкуємо вхідні дані в порядку спадання значень пояснюючої змінної X (табл. 2).

Таблиця 2.

№ п/п	Модуль 1: $y_i^* = -0,116 + 8,187x_i$					Модуль 2: $y_i^* = -3,246 + 0,234x_i$				
	y_i	x_i	y_i^*	e_i	e_i^2	y_i	x_i	y_i^*	e_i	e_i^2

1	14,87	102,67	19,08	-4,21	17,688	4,39	30,00	3,78	0,61	0,375
2	27,54	100,00	18,58	8,96	80,343	3,47	26,82	3,03	0,44	0,191
3	11,49	85,00	15,77	-4,28	18,342	2,49	24,64	2,52	-0,03	0,001
4	11,69	75,00	13,90	-2,21	4,899	1,41	23,82	2,33	-0,92	0,848
5	11,46	10,09	12,99	-1,53	2,328	2,48	23,37	2,23	0,25	0,065
6	11,38	60,00	11,10	0,28	0,079	1,39	22,26	1,97	-0,58	0,331
7	10,76	57,35	10,60	0,16	0,024	1,00	20,50	1,55	-0,55	0,307
8	11,07	54,00	9,98	1,09	1,192	0,53	15,50	0,38	0,15	0,022
9	10,60	52,30	9,66	0,94	0,883	0,20	14,20	0,08	0,12	0,015
10	9,73	52,00	9,60	0,13	0,016	0,18	13,54	-0,08	0,26	0,065
11	9,48	47,75	8,81	0,67	0,449	0,15	13,41	-0,11	0,26	0,066
Σ					126,243					2.285

Відкинемо $c = \frac{4 \cdot n}{15} = 8$ ($i = \overline{12, 19}$) середніх спостережень (друга підвибірка),

вважаючи, що дисперсія залишків для них постійна. За методом найменших квадратів знайдемо оцінки параметрів спочатку для першої моделі (підвибірка 1) з $n_1 = \frac{n-c}{2} = \frac{30-8}{2} = 11$ найбільшими значеннями регресора X , потім для другої – з $n_3 = 11$ найменшими значеннями X (третя підвибірка).

Знайдемо значення y_i^* та e_i (табл. 2) для першої та другої моделей та перевіримо наявність гетероскедастичності залишків на основі тесту Гольдфелда-Квандта.

Для цього обчислимо суми квадратів залишків $S_1 = \sum_{i=1}^{n_1} e_i^2$ і $S_3 = \sum_{i=1}^{n_3} e_i^2$ та розрахуємо

$$\text{значення } F_{cn}^* : F_{cn}^* = \begin{cases} \frac{S_3/n_3}{S_1/n_1}, & \text{якщо } S_3 > S_1; \\ \frac{S_1/n_1}{S_3/n_3}, & \text{якщо } S_1 > S_3. \end{cases}$$

Розраховане значення $F_{cn}^* = \frac{126,243}{2,285} = 55,253$ порівняємо з табличним значенням

$F_{кр}(\alpha, k_1, k_2) = 3,18$ із ступенями свободи $k_1 = 11 - 1 - 1 = 9$ і $k_2 = 11 - 1 - 1 = 9$ при рівні значущості $\alpha = 0,05$. Так як $F_{cn}^* > F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$, гіпотезу H_0 про відсутність гетероскедастичності залишків відхиляємо.

Проаналізуємо наявність гетероскедастичності за тестом Глейзера. Для моделі (5) обчислимо значення залишків та запишемо їх за абсолютною величиною (табл. 3).

Таблиця 3.

№п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e_i	7,96	-5,29	-2,40	-4,80	-1,55	0,58	1,59	0,54	1,49	0,69
$ e_i $	7,96	5,29	2,40	4,80	1,55	0,58	1,59	0,54	1,49	0,69
№п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
e_i	1,37	0,55	1,27	1,49	0,37	0,25	0,97	0,23	1,02	0,17
$ e_i $	1,37	0,55	1,27	1,49	0,37	0,25	0,97	0,23	1,02	0,17
№п/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
e_i	-0,05	-0,55	-0,28	-1,45	-1,13	-1,13	-0,51	-0,55	-0,43	-0,43
$ e_i $	0,05	0,55	0,28	1,45	1,13	1,13	0,51	0,55	0,43	0,43

Коефіцієнт детермінації моделі $R^2=0,628$, між $|e_i|$ та X коефіцієнт парної кореляції $r=0,792$. Стандартні помилки оцінок параметрів і відповідні їм значення t -критерію дорівнюють:

$$s_{\alpha_0^*} = 0,403; \quad s_{\alpha_1^*} = 0,008;$$

$$t_{\alpha_0^*} = -2,604; \quad t_{\alpha_1^*} = 6,874.$$

При рівні значущості $\alpha=0,05$ і ступенях свободи $k=n-m-l=28$ табличне значення критерію Ст'юдента $t_{\alpha/2, k}^n(\frac{\alpha}{2}, k) t_{\alpha/2, k}=2,048$. Порівняємо розраховані значення $t_{\alpha_j^*}$ з табличним:

$$t_{\alpha_0^*}, t_{\alpha_1^*} \notin [-2,048; 2,048].$$

Отже, приймаємо за тестом Глейзера гіпотезу про наявність гетероскедастичності залишків.

3) Застосуємо зважений метод найменших квадратів для знаходження оцінок параметрів моделі з гетероскедастичними регресійними залишками.

На основі тесту Гольдфелда-Квандта та Глейзера припускаємо, що $\sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma^2 x_i^2$.

Використовуючи УМНК, одержуємо

$$\vec{\beta}^* = \left((X^*)' \cdot X^* \right)^{-1} \cdot (X^*)' \cdot \vec{y}^*, \quad \text{де } \vec{y}^* = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} \\ \frac{y_2}{x_2} \\ \dots \\ \frac{y_{30}}{x_{30}} \end{pmatrix}; \quad X^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x_1} \\ 1 & \frac{1}{x_2} \\ \dots & \dots \\ 1 & \frac{1}{x_{30}} \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta}^* = \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \end{pmatrix}.$$

На основі даних таблиці 4, знаходимо, що $\vec{\beta}^* = \begin{pmatrix} -3,194 \\ 0,241 \end{pmatrix}$.

Таблиця 4.

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{y_i}{x_i}$	0,2754	0,1448	0,1558	0,1352	0,1632	0,1897	0,2050	0,1877	0,2026	0,1870
$\frac{1}{x_i}$	0,0100	0,0097	0,0133	0,0118	0,0143	0,0167	0,0185	0,0174	0,0191	0,0192
№ п/п	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\frac{y_i}{x_i}$	0,1986	0,1806	0,1941	0,1984	0,1710	0,1678	0,1782	0,1561	0,1747	0,0333
$\frac{1}{x_i}$	0,0209	0,0214	0,0230	0,0242	0,0243	0,0244	0,0295	0,0297	0,0333	0,0333
№ п/п	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\frac{y_i}{x_i}$	0,1295	0,1011	0,1060	0,0592	0,0623	0,0487	0,0343	0,0143	0,0132	0,0110
$\frac{1}{x_i}$	0,0373	0,0406	0,0428	0,0420	0,0449	0,0488	0,0645	0,0704	0,0738	0,0746

Для визначення s_{β_0} та s_{β_1} використовується формула:

$$\text{cov}(\vec{\beta}^* \cdot (\vec{\beta}^*)') = s_{\varepsilon}^2 ((X^*)' \cdot X^*)^{-1},$$

$$\text{де } s_{\varepsilon}^2 = \frac{\vec{e}' \cdot \vec{e}}{n - m - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{30} (y_i - (-3,194 + 0,241x_i))^2}{28} = \frac{0,02785}{28} = 0,00995$$

$$\text{та } ((X^*)' \cdot X^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,131 & -3,063 \\ -3,063 & 96,328 \end{pmatrix}. \text{ Тут } n-m-l=30-1-1=28.$$

Таким чином, одержано $s_{\beta_0^*} = 0,310$; $s_{\beta_1^*} = 0,011$.

Перевіримо статистичну значущість оцінок параметрів на основі t -критерію:

$$t_{\beta_0^*} = 10,311; \quad t_{\beta_1^*} = 21,146.$$

При рівні значущості $\alpha=0,05$ та ступенях свободи $k=n-m-l=28$ табличне значення критерію Ст'юдента $t_{kp}''(\frac{\alpha}{2}, k)=2,048$. $t_{\beta_0^*}, t_{\beta_1^*} \notin [-2,048; 2,048]$, розраховані оцінки параметрів моделі суттєво відрізняються від нуля.

В порівнянні з моделлю (6) середньоквадратичні помилки оцінок параметрів зменшились при відповідному збільшенні значення $t_{\beta_j^*}$.

Отже, економетрична модель з урахуванням гетероскедастичності залишків має наступний вигляд:

$$y_i^* = -3,194 + 0,241x_i,$$

тобто майже чверть величини статутного фонду визначає щорічний прибуток банку, що може бути характеристикою ефективності використання початкового (акціонерного) капіталу українських банків.

Висновки. Структура багатьох підручників побудована в такий спосіб, що студенти вчаться застосувати метод найменших квадратів для оцінювання параметрів економетричної моделі без урахування певних умов, які далеко не завжди виконуються на практиці для вихідної економічної інформації. Якщо ці умови порушуються, доводиться застосовувати інші методи оцінювання параметрів економетричної моделі, з якими студентів знайомлять майже на завершення курсу. Пропонуємо підхід, що дає підстави одночасно застосовувати метод найменших квадратів до вивчення класичного регресійного аналізу для побудови економетричної моделі, а далі розглядати економетричні задачі, що відповідають реальним економічним умовам, коли порушуються вихідні гіпотези регресійного аналізу.

Список використаної літератури

1. Гончаренко Я. В. Економетрія як наука і навчальна дисципліна в системі підготовки студентів // Матеріали доповідей звітної-наукової конференції викладачів УАГІ ВМУУ за 2010 рік : научное издание / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Українсько-Американський гуманітарний ін-т "Вісконсінський Міжнар. ун-т (США) в Україні". - К. : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. - С. 22-27.
2. Гончаренко Я. В., Ляшко О. В. Сучасна економетрія як наука і навчальна дисципліна // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3, Фізика і математика у вищій і середній школі : сборник / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. - К. : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009. - Вип. 5. - С. 56-62.
3. Гончаренко Я.В. Економетрія: методичні вказівки для виконання розрахункової роботи з економетрії для студентів спеціальності "Економічна теорія" / НПУ ім. М.П.Драгоманова. – К.: НПУ, 2005. – 82 с.
4. Грубер Й. Эконометрия. т.1. - К., 1997. - 422 с.
5. Лугінін О. Є., Білоусова С. В., Білоусов О. М. Економетрія: навчальний посібник для студ. вищ. навч. закладів. - К. : Центр навчальної літератури, 2005. - 252 с.
6. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Практикум з використанням комп'ютера. - К.: "Знання", 1998.
7. Лукьяненко И. Г., Красникова Л. И. Эконометрика. - К.: «Знания», 1998ю - 345с.
8. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія. - К.: КНЕУ, 2000.

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ КОМПЕТЕНТІСНОГО ПІДХОДУ ЩОДО НАВЧАННЯ СТОХАСТИКИ У ВЗО

Трунова О.В.,

кандидат пед. наук, доцент,

Чернігівський державний інститут економіки і управління

Розглянуті методичні особливості компетентнісного підходу навчання стохастики. Серед них: розвиток провідних і предметних компетенцій; подолання штучної ізолюваності, відірваності стохастики від курсу вищої математики; диференціація; прикладна спрямованість.

Рассматриваются методические особенности компетентностного подхода при обучении стохастике. Среди них: развитие ключевых и предметных компетенций; преодоление искусственной изолированности, оторванности элементов стохастики от курса математики; дифференциация; прикладная направленность.

The methodical features of kompetentnostnogo approach are Examined at teaching of stokhastike. Among them: development of key and subject jurisdictions; overcoming of artificial insulativity, to the isolation of elements of stokhastiki from the course of mathematics; differentiation; applied orientation.

Зміни, що відбуваються в сучасному суспільстві, вимагають від його членів ефективного вирішення проблем, більшість з яких мають стохастичну природу. Сьогодні весь цикл природничих і соціально-економічних наук ґрунтується і розвивається на основі ймовірнісних законів, і без відповідної підготовки неможливе адекватне сприйняття і правильна інтерпретація соціальної, політичної інформації. У сучасному світі, що постійно змінюється, велика кількість людей зустрічається в житті з проблемами, які в більшості своїй пов'язані з аналізом впливу випадкових чинників і вимагають прийняття рішень в ситуаціях, що мають імовірнісну основу. Необхідною умовою творчої роботи в багатьох галузях діяльності людей стала наявність стохастичних знань і уявлень. Компетенції у галузі стохастики стають невід'ємною умовою соціалізації.

Зміни відбуваються так швидко, що вища школа, навіть будучи передовою ланкою в структурі освіти, не встигає перебудовуватися.

В освітній системі все більш актуальною стає проблема застосування компетентнісного підходу. Більшість викладачів не розуміють, в чому суть компетентнісного підходу, деколи не можуть його застосувати в своїй діяльності, питання про розвиток компетентності у студентів є проблематичним.

Дослідники виділяють на сучасному етапі від 3-х до 37 видів компетентностей. Основні результати освіти в рамках компетентнісного підходу фіксуються через набір ключових (базових) освітніх компетенцій, які задають основний орієнтир вибору змісту і умов організації основних видів діяльності студента, що дозволяють йому оволодівати соціальним досвідом, отримувати навички життя і практичної діяльності в сучасному суспільстві.

Аналіз наукових робіт, присвячених питанням застосування компетентнісного підходу в освіті, дозволив нам уточнити визначення поняття «компетентність».

Компетентність – це специфічна здатність, необхідна для ефективного виконання конкретної дії в конкретній галузі, що включає вузькоспеціальні знання особливого роду, предметні навички, способи мислення, а також розуміння відповідальності за свої дії.

Компетентність розуміють, як актуальну, сформовану особистісну якість, що ґрунтується на знаннях, інтелектуально і особистісно обумовлена соціально-професійна характеристика людини.

Під стохастичною компетентністю ми розумітимемо проявлену готовність до діяльності, що характеризується володінням основними поняттями стохастики і здатність їх застосовувати в конкретних, не завжди стандартних ситуаціях.

Відомо, що вищому закладі освіти студент не тільки отримує знання зі стохастики, у нього формуються світогляд, унікальні особистісні якості, професійні компетентності. Сучасна дійсність вимагає від ВЗО людину що думає і діє, а не тільки що знає. Саме осмислення, обміркування і розуміння стохастичних завдань і проблем розвиває стохастичне мислення, необхідне в сучасному світі всюди. Особистість, що володіє стохастичною компетентністю, використовує в житті отримані навички набагато частіше, що у свою чергу викликає зниження рівня тривожності при прийнятті необхідних рішень, у тому числі і професійних.

Проведений аналіз можливостей використання компетентнісного підходу при навчанні стохастики дозволив нам у процесі навчання здійснювати не просту трансляцію знань, а гарантовано формувати систему ключових і предметних компетенцій, яка повинна стати основним результатом освітньої діяльності студентів.

На сьогодні існує досить багато класифікацій компетенцій (ключові, базові, освітні), проте єдиного розуміння, наприклад, що таке ключові компетенції, немає.

На нашу думку в межах стохастики найбільший розвиток отримують навчально-пізнавальна, інформаційна і комунікативна компетенції студентів.

Перед викладачем постає проблема побудови навчального процесу, який би з найбільшою ефективністю міг розвивати ключові і предметні компетенції на заняттях зі стохастики. Для цього необхідно вирішити питання виявлення методичних особливостей навчання теорії ймовірностей і математичної статистики в розрізі компетентнісного підходу до навчання.

Розвиток ключових і предметних компетенцій проектується за допомогою поетапного просування студентів за рівнями розвитку основних прийомів розумової діяльності, поетапно активізуються всі види мислення: наочно-дійове, наочно-образне, абстрактно-теоретичне та ін.

Ми виділяємо ті компетенції, які можна ефективно розвивати засобами теорії ймовірностей в рамках курсу вищої і прикладної математики (теорії ймовірностей і математичної статистики): навчально-пізнавальні (зокрема дослідницькі), інформаційні і комунікативні. Взаємозв'язок ключових і стохастичних компетенцій відображено в таблиці 1, у ній показано, які засоби і завдання зі стохастики дозволяють формувати ключові компетенції.

Таблиця 1. Взаємозв'язок ключових і наочних стохастичних компетенцій.

Ключові компетенції	Предметні стохастичні компетенції
Навчально-пізнавальні компетенції	використовувати основні поняття, факти, методи стохастики для розв'язання завдань і пояснення випадкових явищ; застосовувати правила і закони теорії ймовірностей у нових навчальних ситуаціях; інтерпретувати отримані при розв'язанні ймовірнісної задачі дані (числа, інтервали і тому подібне); визначати необхідну ймовірнісну модель для розв'язання навчального завдання.
Інформаційні компетенції	давати прогноз розвитку випадкової події (явища) на підставі наявних даних; самостійно шукати і відбирати необхідну для розв'язання ймовірнісних завдань інформацію; користуватися спеціальними математичними пакетами для обчислення різних характеристик випадкових величин; виконувати проекти в рамках стохастичної лінії.
Комунікативні компетенції	приймати пов'язані з ризиком обґрунтовані рішення на основі статистичних даних; організувати роботу в групі при проведенні занять зі стохастики; нести відповідальність за доручену справу.
Дослідницькі компетенції	за допомогою організації експерименту отримувати необхідну інформацію про випадкову подію; досліджувати вже розв'язані ймовірнісні завдання в конкретній ймовірнісній моделі; розв'язувати ймовірнісні завдання різними способами; виділяти етапи при розв'язанні ймовірнісної задачі; знаходити найбільш раціональний спосіб розв'язання ймовірнісної задачі; встановлювати закономірності при розв'язанні ймовірнісних завдань; на основі розв'язаного ймовірнісного завдання скласти аналогічні з іншими умовами; встановлювати взаємозв'язок між об'єктами завдання і їх властивостями.

Соціальна і практична значущість стохастики може виявитися в тому випадку, якщо буде продемонстрована необхідність у стохастичних знаннях у тих ситуаціях, які будуть близькі до життєвого досвіду студентів. Зміст цих ситуацій може стосуватися будь-яких сучасних явищ: останніх досягнень науки і техніки, мистецтва, виробництва і так далі. Це дозволить, з одного боку, врахувати інтереси і цінності, що сприятливо позначається на відношенні студентів до стохастики як навчального предмету, а з іншого боку, розширює для них межі можливого застосування отриманих знань і подолання штучної ізоляваності, відірваності стохастики від курсу вищої математики.

В диференційованому навчанні математики ми дотримуємося концепції єдності рівневої і профільної диференціації.

В реальності рівнева і профільна диференціація – нерозривні елементи єдиного процесу диференціації навчання. Узагалі, розчленування диференціації на два види корисно для того, щоб більш різнобічно й глибоко, детально й повно вивчити проблему диференційованого навчання і забезпечити належний рівень навчання вищої і прикладної математики.

Рівнева диференціація навчання ймовірнісного матеріалу орієнтована на три рівні науковості.

Стохастична підготовка студентів в умовах євроінтеграції може забезпечуватись двовірною моделлю диференціації навчання, основні поняття якої – курс вищої та прикладної математики і рівень вимог (табл. 2), де курси: А - загальноосвітній; В - прикладний; С - загальнокультурний; Д - поглиблений

Таблиця 2. Двовірна модель диференціації навчання.

Рівні вимог	Курси			
	А	В	С	Д
1. Середній	А1	В1	С1	Д1
2. Достатній	А2	В2	С2	Д2
3. Високий	А3	В3	С3	Д3

Тому теорія ймовірностей і математична статистика у ВЗО можуть мати різну інформаційну і інтелектуальну ємність, діагностико-прогностичну спрямованість та соціальну ефективність (обсяг стохастичних знань має бути достатнім для успішної майбутньої професійної діяльності), а також різнитися способами впорядкування матеріалу, ступенем узагальнення знань, співвідношеннями між теоретичними і емпіричними знаннями.

Рівень вимог до студентів, які вивчають стохастичну, включає переліки опорних уявлень, знань, навичок, умінь і способів математичної діяльності. Останні відображають розвиток особистісних якостей студента.

У таблиці 3 представлений розподіл навчального матеріалу і напрямів розвитку знань на різних рівнях вимог.

Таблиця 3. Розподіл навчального матеріалу і напрямів розвитку знань на різних рівнях вимог.

Рівень	Навчальний матеріал	Напрями розвитку знань
1. Середній	основні поняття стохастичності	від реального до абстрактного
2. Достатній	основні положення стохастичності	від конкретного до загального
3. Високий	стохастичний підхід до дослідження явищ	від загального до конкретного

Мета і цілі вивчення стохастичного матеріалу представлені в таблиці 4 у відповідності до трьохрівневих вимог науковості.

Прикладна спрямованість стохастичної, а в ідеалі всього курсу вищої і прикладної математики повинна розглядатися з характерними для неї видами діяльності.

Таблиця 4. Мета і цілі, рівні вивчення стохастичного матеріалу.

Рівень вивчення навчального матеріалу	Мета і цілі навчання	Рівень вивчення стохастичного матеріалу	
		Тезаурус	Закони і правила
Пропедевтичний	усунення недоліків	наведені лише ті поняття, розгляд яких необхідний для досягнення поставлених цілей даного рівня	на інтуїтивному рівні
	задоволення пізнавальних інтересів, знайомство з основними поняттями стохастики		
Середній	формування базового рівня імовірнісної культури	основні поняття, без яких неможливо дати загальне уявлення про стохастику	закони і правила, без яких неможливо надати загальне уявлення про закономірності науки
Достатній	підтримка профілю навчання знайомство з основними законами стохастики	описання представлених і розкриті, показаний їх взаємозв'язок один з одним	весь спектр правил і закономірностей, частина теорем розглядається з доведенням
Високий	внутрішньо-профільна спеціалізація		у вигляді теорем і їх наслідків, наведені їх математичні доведення

Розгляд нового для математичної освіти класу прикладних завдань соціально-економічного змісту (*завдання аналізу ризикових ситуацій, завдання ухвалення і обґрунтування рішень*). Розвиток стохастичної культури у процесі роботи з прикладними завданнями представлені в таблиці 5.

Таблиця 5. Розвиток стохастичної культури у процесі роботи з прикладними завданнями.

Компонент культури	Рівень культури		
	Середній	Достатній	Високий
Володіння тезаурусом стохастики	в учня є загальні уявлення про зміст курсу. Він знає зміст кожного розділу. Розуміє сенс термінів, знає визначення, але не може самостійно міркувати про їх значення і бачити взаємозв'язок між ними.	знання основних означень і здатність пояснювати ймовірнісні поняття.	володіння термінологією стохастики, глибоке розуміння основних понять і їх смислового значення.
Знання основних законів, правил і теорем стохастики	фрагментарне знання законів і теорем теорії вірогідності.	знання основних правил, теорем, наслідків і законів без доведення.	знання теорем, лем і правил, здатність представити їх строге доведення.
Уміння розв'язувати ймовірнісні завдання	уміння розв'язувати завдання базового рівня, передбачені шкільною програмою (підстановка значень до потрібної формули).	уміння розв'язувати «нестандартні» завдання помірної складності.	розв'язування завдань підвищеної складності, що вимагають знань інших розділів шкільної математики.
Уміння застосовувати в практичній діяльності ймовірнісні знання	учень не може застосувати отримані знання зі стохастики, але знає де і коли вони виникають.	здатність застосовувати знання, але не завжди коректно, учень допускає деякі неточності, не бачить виключень.	використання отриманих знань в практичній діяльності. Облік тонкощів і виключень в застосуванні наявних знань.

Для кожного рівня навчання стохастики визначена система мікроцілей, спрямованих на формування ключових і предметних компетенцій студентів; система типових завдань, що містить: правила-орієнтири; еталони розв'язання; індивідуальні домашні завдання, компетентнісні картки і тести .

Пропедевтичний рівень визначає розвиток наступних ключових компетенцій.

Навчально-пізнавальні компетенції: розв'язувати ймовірнісну задачу різними способами; працювати з простими ймовірнісними моделями; визначати ймовірність події.

Інформаційні компетенції: пошук необхідної інформації за заданою навчальною темою в джерелах різного типу (навчальна література, електронні ресурси, Internet); відшукування інформації з таблиць і графіків; інтерпретація отриманої відповіді при розв'язанні ймовірнісної задачі; перевірка отриманої інформації через віртуальний експеримент; розгорнуте обґрунтування думки, наведення доведень, прикладів; створення комп'ютерних програм для обчислення кількості різних видів з'єднань (профільна освіта); використання інформаційних ресурсів у навчальному процесі.

Середній рівень дозволяє розвивати наступні компетенції.

Навчально-пізнавальні компетенції: переклад тексту завдання на математичну мову (мова ймовірнісної моделі); застосування (операція, вибір) ймовірнісної моделі для розв'язання навчального завдання; вміння бачити однакове в різному і різне в однаковому.

Інформаційні компетенції: переклад інформації з природної мови на математичну (проектування); передача змісту інформації адекватно до поставленої мети (стисло, повно, вибірково).

Комунікативні компетенції: вміння представити результати самостійного дослідження або міні-проекту.

Компетенції достатнього рівня спрямовані на вміння знаходити зв'язок між об'єктом завдання і його властивостями; уміти розбивати завдання на підзавдання; уміти розв'язувати задачу найбільш раціональним способом.

Дослідницькі компетенції: уміти складати задачі на основі даної.

Комунікативні компетенції: вміння працювати в групі.

На високому рівні розглядаються питання аналізу ризикових ситуацій, ухвалення і обґрунтування рішень, елементи теорії ігор.

Список використаної літератури

1. Концепція загальної середньої освіти як базової в єдиній системі неперервної освіти. – К.: МО України, 1992. – 177 с.
2. Кондратьева И.В. (Целина И.В.) Компетентностный подход как методологическая основа индивидуализации и технологизации обучения в вузе /Монахов В.М., Власов Д.А., Кондратьева И.В.// - Материалы Всероссийской междисциплинарной конференции «Технологии индивидуализации обучения в вузе», Москва, издательство СГУ, 2008. - С. 130-134.
3. Трунова О.В. Методика структуривання і вивчення теоретичного матеріалу з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в умовах диференціації навчання //Дидактика математики: проблеми і дослідження. Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: ТЕАН, 2006.-Вип. 3(13). – С.60-66

ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

Філімонова М.О.,

вчитель математики,

Пирятинський ліцей,

Швець В.О.,

кандидат пед. наук, професор,

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

У статті розглянуто можливості застосування графічного методу розв'язання текстових задач в курсі математики основної школи.

В статье освещен вопрос использования графического метода решения текстовых задач на уроках математики основной школы.

In this article we have been looked at possibilities how to apply the graphic method in the text sums at the maths course of basis school.

Постановка проблеми. Уміння розв'язувати задачі є одним з основних показників рівня математичного розвитку. Психологія вже понад сто років займається дослідженнями процесу розв'язування задач людиною. Особливо слід звернути увагу на загальну характеристику цього процесу, описану відомим психологом С.Л. Рубінштейном. Він характеризував розв'язування задач як процес її переформулювання, в якому проводиться аналіз умов і вимог. Як же навчитися розв'язувати задачі?

Аналіз актуальних досліджень. Існує ряд посібників, в яких виокремлено загальні рекомендації з пошуку розв'язання задач, зокрема це роботи Д. Пойя, Л.М. Фрідмана, Е.Н. Турецького, В.Б. Полонського, Ю.М. Рабіновича, М.С. Якіра і т.д. Д. Пойя розроблено систему (таблицю) стереотипних вказівок, сформульованих або ж у формі порад, або навідних питань. Він наводить таке прислів'я: «Ваші найкращі п'ять друзів: Що, Чому, Де, Коли і Як. Якщо Вам потрібна порада, зверніться до Що, Чому, Де, Коли і Як – і більше ні до кого не звертайтеся. Нічому не вірте, але сумнівайтеся тільки в тому, що викликає сумнів. Знайшовши перші гриби або зробивши перше відкриття, озирніться навколо, – вони з'являться пучками». [2, с. 141] Л.М. Фрідманом та Е.Н. Турецьким виділено етапи процесу розв'язування задач, наведено способи розв'язування як стандартних, так і нестандартних задач, а також визначено рекомендації для пошуку розв'язання математичних задач.

Одним із наведених вище вказаними авторами методів розв'язання задач є математичне моделювання, яке допомагає унаочнити процес розв'язування, швидко встановити зв'язок між даними і шуканими величинами та отримати розв'язок. В останні роки в педагогічній пресі збільшилася кількість публікацій присвячених прикладній спрямованості навчання математики і, зокрема, математичному моделюванню. Серед авторів слід відмітити Нічуговську Л., Семенця С., Грив'юк О., Войналович Н., Бойко Л., Кононову О. та ін. Ряд статей належить Великодному С. Публікації містять можливі варіанти методичних розробок для ознайомлення учнів з математичним моделюванням у межах

шкільної програми, а також системи задач, завдань та запитань до них. Як правило, наводяться текстові задачі, які розв'язуються на основі знако-символьної моделі (виразу, рівняння, нерівності чи їх систем). Однак варто відмітити, що ряд алгебраїчних задач успішно розв'язуються за допомогою образної моделі (графіка, діаграми, схеми, малюнка). Дуже часто такий підхід не тільки більш зрозумілий та простий, але й дає миттєвий результат. Важлива його перевага в наочності: «на діаграмі ... видно зв'язок між величинами, вона допомагає розширити завдання (поставити і розв'язати більш загальні проблеми), глибше проникнути в суть завдання, відчутти реальність результату і проміжних дій.» [1, с. 7 – 8] На жаль, в рамках шкільної програми цей метод не розглядається. Тому **метою нашої статті** і стало більш детальне вивчення графічних методів розв'язування задач.

Виклад основного матеріалу. У 6 класі учні ознайомлюються з поняттям діаграми, її видами та способами побудови. Однак основні поняття цієї теми засвоюються на низькому рівні. Наприклад, діаграму учні означають так: «це круг, поділений на частини різного кольору з написаними на них відсотками», «це стовчики різної висоти з відсотками», «діаграми використовуються для опису результатів якогось опитування» тощо. Тому, на нашу думку, доцільно більш детально зупинитися на понятті лінійної (одновимірної) діаграми та запропонувати школярам задачі, які розв'язуються за їх допомогою. Це допоможе не лише озброїти учнів новим методом розв'язування задач, а й формуватиме цілісне уявлення про математику як науку.

Розглянемо задачу: На трьох лініях електропередач сиділо 36 ластівок. Коли з першої лінії на другу перелетіло 6 ластівок, а з другої на третю 4 ластівки, то на всіх лініях ластівок стало порівну. Скільки ластівок сиділо спочатку на кожній лінії електропередач?

Звичайно, цю задачу можна розв'язати і алгебраїчним методом, склавши рівняння. Але варто продемонструвати школярам і метод довжин, який ґрунтується на побудові лінійної діаграми.

I. Побудова математичної моделі. Після ознайомлення з умовою задачі можлива наступна бесіда з учнями.

Учитель: Скільки різних ситуацій розглядається в задачі?

Очікувана відповідь: У задачі розглядається дві різні ситуації: початкова і кінцева.

Учитель: Як можна графічно відобразити початкову ситуацію?

Очікувана відповідь: Можна побудувати три відрізки різної довжини, кожен із яких відображатиме кількість ластівок на конкретній лінії електропередач.

Учитель: А який відрізок буде найдовшим і який найкоротшим?

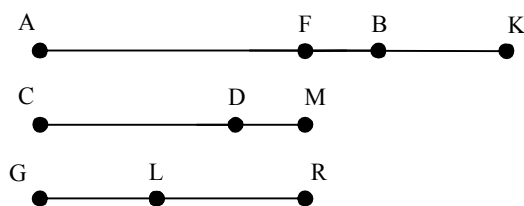
Очікувана відповідь: Зрозуміло, що перший відрізок – найдовший, оскільки на першу лінію електропередач не перелітали ластівки, а третій відрізок – найкоротший, бо на третю лінію електропередач перемістилось найбільше ластівок.

Учитель: В умові задачі вказано, що на другу лінію перелетіло аж 6 ластівок, а на третю – лише 4. То чому третій відрізок найкоротший?

Очікувана відповідь: Третій відрізок є найкоротшим. Якщо провести розрахунки, виявиться, що з першої лінії на другу перелетіло дві ластівки, а на третю – 4 ластівки.

Учитель: Тоді як від початкової ситуації перейти до кінцевої?

Очікувана відповідь: Щоб перейти від початкової ситуації до кінцевої, слід від першого відрізка відняти відрізок, умовно рівний 2 ластівкам, і додати його до другого відрізка, а потім знову від першого відрізка відняти відрізок, умовно рівний 4 ластівкам, і



Мал. 1

додати його до третього.

Учитель: А побудовані відрізки беруться довільно?

Очікувана відповідь: Ні, варто враховувати той факт, що довжини кінцевих відрізків мають бути однаковими.

Учитель: Побудовані відрізки і є лінійною діаграмою до задачі (див. мал. 1), тобто образною моделлю.

II. Розв'язання задачі в межах математичної теорії.

Нехай відрізок AK відображає кількість ластівок на першій лінії електропередач, CD – відповідно на другій лінії, GL – на третій лінії. Аналіз умови виявив, що з першої лінії електропередач на другу перелетіло дві ластівки, а на третю – 4 ластівки. Тобто від відрізка AK слід відняти відрізок FB , умовно рівний двом ластівкам, і додати до відрізка CD . Потім від відрізка AK слід відняти відрізок BK , умовно рівний 4 ластівкам, і додати до відрізка GL . Таким чином за умовою задачі маємо, що $CM = AF = GR$. Оскільки $AK + CD + GL = 36$, то $CM + AF + GR = 36 - 6 = 30$. Отже, $CM = AF = GR = 10$. Тоді $AK = 16$, $CD = 8$, $GL = 6$.

III. Інтерпретація одержаного розв'язку.

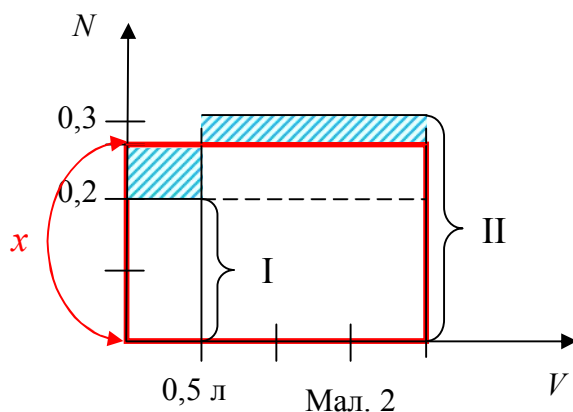
Отже, на першій лінії електропередач спочатку сиділо 16 ластівок, на другій – 8, а на третій – 6.

Дуже часто побудована лінійна діаграма дозволяє не тільки швидше скласти рівняння до задачі (і не одне), а й розв'язати задачу усно.

Слід наголосити учням, що за допомогою лінійних діаграм розв'язуються задачі, в яких задані відношення значень величин (більше на..., менше на..., стільки ж тощо) і розглядається одна або кілька ситуацій, також зручно розв'язувати задачі на переливання та зважування.

Якщо ж одна з величин задачі визначається як добуток двох інших, то слід застосовувати метод площ, тобто будувати двовимірну діаграму. Як правило, за допомогою двовимірних діаграм легко розв'язуються всі типи текстових задач (на рух, на роботу, на розчини і сплави). Дуже часто великі труднощі у школярів викликають задачі на розчини і сплави. Продемонструємо розв'язання такої задачі за допомогою двовимірної діаграми. Наприклад, задача: „Є 20 %-й і 30 %-й розчини кислоти. Для отримання нового розчину взяли 0,5 л першого розчину і 1,5 л другого. Визначити вміст кислоти в утвореному розчині”.

I. Побудова математичної моделі. Побудуємо декартову систему координат, в якій по вісі абсцис відобразимо об'єми розчинів (V), а по вісі ординат – концентрацію кислоти, тобто її частку в розчині (N) (див. мал. 2). Тоді площа прямокутника I рівна об'єму кислоти у першому розчині, а площа прямокутника II – у другому розчині. Зрозуміло, що площа червоного прямокутника буде рівна об'єму кислоти у новому розчині.



Оскільки в новому розчині вміст кислоти рівний сумі об'ємів кислоти першого і другого розчинів, то заштриховані прямокутники є рівновеликими. Маємо рівняння $0,5(x - 0,2) = 1,5(0,3 - x)$, яке є знако-символьною моделлю задачі.

II. Розв'язування задачі в межах математичної теорії.

$$0,5x - 0,1 = 0,45 - 1,5x; 0,5x + 1,5x = 0,45 + 0,1; 2x = 0,55; x = 0,275$$

III. Інтерпретація одержаного розв'язку.

Таким чином концентрація кислоти у новому розчині рівна 27,5 %, а вміст кислоти у ньому $2 \cdot 0,275 = 0,55$ л.

Алгебраїчний спосіб розв'язування даної задачі досить простий, однак метод площ допомагає встановити зв'язок між алгеброю і геометрією, є більш вишуканим та цікавим. У більшості ж випадків побудова одновимірної чи двовимірної діаграми сприяє глибшому розумінню суті задачі завдяки своїй наочності, спрощує пошук шляхів розв'язання, оскільки оперує з такими найпростішими поняттями, відомими ще з молодшої школи, як довжина відрізка і площа прямокутника.

Висновки. Вивчення нових способів розв'язування задач дозволяє з іншої точки зору поглянути на загальновідомі математичні факти, відкриває нові перспективи, розширює і розвиває раніше отримані знання, дає можливість творчої самостійної роботи, виховує кмітливість та винахідливість.

Список використаної літератури

1. Островский А.И., Кордемский Б.А. Геометрия помогает арифметике. – М.: Физматгиз, 1960. – 168 с.
2. Пойя Д. Как решать задачу: Пособие для учителей / Под ред. Гайдука Ю.М. – М.: Учпедгиз, 1959. – 208 с.
3. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с., ил.

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ У ФОРМУВАННІ ПРОФЕСІЙНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Шановалова Н.В.,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,

Панченко Л.Л.,

кандидат пед. наук, доцент,

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

У статті розглянуті мета, зміст, основні завдання та форми організації навчання проективної геометрії студентів педагогічних вищих навчальних закладів в умовах особистісно орієнтованого навчання з урахуванням навчальних можливостей студентів. Запропонована система навчання проективної геометрії з використанням модульної технології та рейтингового оцінювання якості засвоєння навчального матеріалу для формування професійних компетентностей майбутніх вчителів математики.

В статье рассмотрены цель, содержание, основные задачи и формы организации обучения проективной геометрии студентов педагогических высших учебных заведений в условиях личностно ориентированного обучения с учётом учебных возможностей студентов. Предложена система обучения проективной геометрии с использованием модульной технологии и рейтингового оценивания качества усвоения учебного материала для формирования профессиональных компетентностей будущих учителей математики.

The article examines the aim, substance, key tasks and ways of organization of studying projective geometry by students of pedagogical universities under conditions of individually oriented education with due account of students' studying capacities. The authors propose a system of studying projective geometry with application of module-based technology and rating method of assessing the quality of knowledge mastering by students with a view to forge professional skills of future mathematics teachers.

Розвиток системи освіти має відбуватися відповідно до потреб і запитів суспільства. В умовах ускладнення та диференціації соціальних, економічних та культурних процесів перед освітою постає завдання цілеспрямованого формування особистості, здатної не тільки відтворювати отримані фахові знання, але й виступати повноправним суб'єктом суспільного життя, зберігаючи при цьому власну соціокультурну індивідуальність у гармонії всіх її культурних якостей. Освіта має перетворитися у цілісну полікомпонентну систему і передавати культурні надбання світової цивілізації у їх структурній повноті, формувати всі основні види діяльності, розвивати у повному обсязі творчі сили кожної людини. Професійна компетентність спеціаліста передбачає не тільки фахові навички та вміння, а і багато інших якостей, зокрема, загальну культуру особистості, професійну майстерність, світогляд тощо.

Головними компонентами педагогічної освіти є загальноосвітня, загально педагогічна та спеціальна педагогічна підготовка. Кожний педагог, крім опанування механізмів здійснення спеціальної педагогічної діяльності, повинен володіти всіма іншими її видами і для гармонізації розвитку особистості самого педагога призначена його загальна освіта. Основними складовими професійної компетентності вчителя, яка має бути сформована у випускника вищого навчального закладу, доцільно вважати: стійкий інтерес до

вчительської професії, професійну цілеспрямованість; ґрунтовні наукові знання та сформоване на їх основі професійне мислення; широку методичну обізнаність з питань організації навчально-виховного процесу в школі; вміння творчо, адекватно до педагогічної ситуації використовувати професійні знання; психологічну готовність до роботи з дітьми.

Цілісне становлення особистості майбутнього вчителя неможливе без удосконалення традиційних форм організації навчально-виховного процесу у вищій педагогічній школі, без створення нової особистісно-орієнтованої педагогіки – педагогіки гуманізму та людяності. Актуальним стає пошук таких навчальних та виховних технологій, які б формували соціально активну, творчу особистість. Саме інноваційні технології розвиваючого навчання мають дати майбутньому вчителю не тільки професійні знання, а й засоби для інноваційної педагогічної діяльності, на основі якої педагог оволодіє всіма її структурними елементами – від формування мети до одержання результату, його оцінки та наступної корекції.

Ефективними шляхами формування професійної компетентності майбутнього вчителя можуть стати: удосконалення змісту навчальних планів підготовки спеціаліста з урахуванням педагогічної спрямованості всіх дисциплін; розробка і впровадження в навчальний процес інтегрованих навчальних курсів педагогіки – психологія-методика викладання фахових дисциплін, побудованих за принципом вирішення проблемних ситуацій майбутньої педагогічної діяльності; впровадження в навчальний процес технологій навчання для активізації пізнавальної та професійної активності студентів (модульно-рейтингова система, проблемне навчання, ділові та рольові педагогічні ігри, тренінги логіко-евристичного характеру тощо); удосконалення змісту практичної підготовки студентів за допомогою інтерактивних методів та введення неперервної педагогічної практики; активне запровадження індивідуальних програм формування педагогічної та фахової культури майбутнього вчителя; більш широке залучення студентів до наукової роботи з фахових дисциплін та за комплексними психолого-педагогічними темами; формування у студентів інтересу до педагогічної діяльності засобами навчально-виховного процесу.

Стратегія реформування сучасної освіти має будуватися на формуванні здібності самостійно генерувати нові знання, здатності у нестандартних ситуаціях знаходити нові, творчі рішення. Для цього необхідні нові освітні технології для забезпечення кожній людині індивідуальної траєкторії розвитку творчих здібностей і становлення її як особистості та спеціаліста. Формування особистості спеціаліста передбачає активізацію і вдосконалення психічних пізнавальних інтересів (відчуття, сприйняття, уявлення, мислення, мова) у відповідності з вимогами спеціальності та професійної діяльності в цілому. У зв'язку з цим актуальними стають питання розвитку активності студентів та формування позитивних мотивів, що спонукають їх до пізнавальної діяльності. На цьому шляху перспективними є дослідження таких питань, як суть та особливості проблемного навчання у вищому навчальному закладі; створення ефективних умов для постановки та розв'язання проблемних та евристичних ситуацій; дидактичні основи розробки та використання пізнавальних задач з кожної навчальної дисципліни; форми і методи організації наукового пошуку студентів у навчальному процесі; відшукування нових форм активізації навчальної діяльності студентів, зокрема, широке використання нових інформаційних технологій, ділових ігор тощо.

Визначальними складовими у професійній компетентності майбутнього вчителя є пізнавальна та професійна активність в їх взаємозв'язку з фундаментальною та методичною підготовкою. Відомо, що основна мета підготовки спеціаліста досягається в процесі навчальної діяльності, яка найбільш інтенсивно впливає на розвиток і формування психічних процесів та професійних властивостей особистості, на набуття необхідних для цього знань, умінь і навичок. Навчальна діяльність характеризується цілями, мотивами, пізнавальними процесами, починаючи із сприйняття інформації і закінчуючи функціонуванням складних творчих процесів. Навчальна діяльність студентів – це перш за все напружена розумова діяльність, інтенсивність якої залежить від багатьох факторів: змісту і складності поставлених задач, рівня знань, інтелектуальних вмінь і навичок, мотивів та загальних психологічних установок особистості. Формування позитивних мотивів до навчання визначається такими умовами, як усвідомлення теоретичної і практичної значущості засвоєння знань; нарощування змісту та новизни навчального матеріалу; професійна спрямованість навчальної діяльності; добір адекватних задач, які створюють інформаційне протиріччя в самій структурі навчальної діяльності і стимулюють пізнавальну активність та творче мислення тощо.

Проективна геометрія має великі можливості для розвитку пізнавальної діяльності майбутнього вчителя математики через розвиток таких прийомів розумової діяльності, як аналіз, синтез, абстрагування, порівняння, узагальнення, аналогія, інтуїція тощо. З урахуванням спеціалізації та індивідуального розвитку студентів відповідно до їх здібностей та можливостей зміст курсу «Проективна геометрія та методи зображень», крім теоретичного матеріалу з обов'язковою та додатковою частинами, задачного матеріалу, що забезпечить міцне засвоєння базових знань, повинен містити і мотиваційний матеріал (система проблемних та евристичних задач і запитань, творчі та дослідницькі запитання, задачі міжпредметного змісту, історичні матеріали до вивчення відповідних тем курсу тощо).

На перших лекціях необхідно роз'яснити загальне призначення проективної геометрії, як окремого модуля курсу, з'ясувати структуру цього модуля, як деякої цілісної системи. Слід звернути увагу на діалектичний характер модуля в цілому. Потрібно звернути увагу студентів на широке коло прикладних і практичних задач, які розв'язуються методами і засобами проективної геометрії.

Проективну геометрію в свій час називали найкрасивішою галуззю математики. В основу проективної геометрії було покладено ряд загальних геометричних положень, пов'язаних між собою за способами проекції на плоску картину об'ємних форм предметів та їх взаємного розташування у просторі з додержанням видимих пропорцій окремих частин.

Проективна геометрія пройшла довгий шлях розвитку. Ще стародавні єгиптяни в своїх спробах зобразити просторові фігури на площині (на стінках пірамід чи саркофагів) використовували закони перспективи. Пізніше проективні властивості фігур привертати до себе увагу вчених Стародавньої Греції. У творах Евкліда близько 365-300 років до нашої ери містилися деякі відомості з проективної геометрії. У другій половині III ст. н.е. проективній геометрії присвятив ряд своїх праць давньогрецький математик Папп Олександрійський. Один з отриманих ним результатів пов'язаний з конфігурацією з дев'яти точок і дев'яти прямих (конфігурація Паскаля-Паппа).

Проективна геометрія виникла на основі вивчення властивостей перспективної та центральної проекції. Дослідження задачі про зображення тривимірного предмета на площині таким чином, щоб частини цього зображення в їх взаємному розташуванні спостерігач міг уявити собі в такому самому вигляді, як і відповідні їм частини зображуваного предмету, вперше з наукового погляду проводив великий італійський вчений Леонардо да Вінчі (1452 – 1519) [5].

Автором перших праць з проективної геометрії був видатний французький інженер і математик Жерар Дезарг (1593 – 1662). У 1636 році Дезарг ввів у геометричну науку метод зображення предметів в перспективі та вперше запропонував метод координат для вивчення зображення предметів – метод перспективних масштабів [11]. Кожну вісь координат він розглядав як пряму, яка обов'язково належить або картинній або предметній площині. Ці площини було вибрано за координатні. На осях координат він відклав масштаби широти, висоти та глибини.

Використовуючи метод перспективи (проективний метод), Дезарг розглядав еліпс, гіперболу і параболу як проективне коло, і одержав найточніший метод вивчення кривих другого порядку. Користуючись методом перспективи Дезарг прийшов до введення нескінченно віддалених елементів, тому його вважають творцем проективної геометрії. Однак, ці результати досліджень Дезарга стали відомими тільки у 1845 році, коли французький геометр Мішель Шаль (1793 – 1880) знайшов і опублікував твір Дезарга присвячений перетину конуса площиною, який до того вважався загубленим. У 1845 році було з'ясовано, що твір Дезарга є практично фундаментом для праці французького геометра Блеза Паскаля (1623 – 1662), який у 1649 році опублікував свій твір «Досвід дослідження конічних перерізів», де довів теореми про проективні властивості перспективних зображень.

У зв'язку з успіхами аналітичної геометрії, основи якої були закладені у XVII ст. Декартом, на деякий час зменшився інтерес до проективної геометрії. Про неї згадали знов наприкінці XVIII століття, коли Гаспар Монж побудував нову науку, а саме нарисну геометрію, в основі якої лежала проективна геометрія.

Відродження інтересу до проективної геометрії призвело до активізації наукових пошуків в цьому напрямку. У 1822 році вийшов у світ трактат Жана Віктора Понселе (1788 – 1867) «Нарис проективних властивостей фігур», в якому давалося строге наукове обґрунтування проективної геометрії. У своєму трактаті Понселе розглядає конічні перерізи та їх проективні властивості, причому саме ті властивості, які залишаються незмінними або інваріантними при проектуванні [5]. У 1813 році Понселе доводить теорему про проективні перетворення фігур, користуючись методом центрального проектування фігур.

Розвиваючи ідею, висловлену раніше Й. Кеплером, Понселе отримав проективний простір зі звичайного, постулював існування «нескінченно віддаленої площини», що містить «нескінченно віддалену пряму» для кожного пучка паралельних площин, і «нескінченно віддалену точку» для кожного пучка паралельних прямих. Це дозволило стверджувати, що дві паралельні прямі перетинаються в нескінченно віддаленій точці. М. Шаль продовжив і значно поглибив праці Понселе.

Завдяки працям М. Шаля та німецького вченого Якоба Штейнера (1796 – 1863) проективна геометрія досягла значних успіхів, але вона ґрунтувалася ще на метричній

основі. Пізніше Карл Георг Христіан фон Штаудт (1798 – 1867), створив чисто синтетичну аксіоматизацію, яка об'єднує, невласні, тобто нескінченно віддалені прямі з власними. Всі ці геометри прагнули доводити теореми проєктивної геометрії синтетичним методом, поклавши в основу викладу проєктивні властивості фігур. Я. Штейнер, М. Шаль, К.Г.Х. фон Штаудт відділили проєктивну геометрію від метрики і зробили наукою про розташування геометричних фігур. Останні сліди залежності від вимірів усунув у 1899 році М. П'єрі, що побудував систему аксіом проєктивної геометрії. Згодом іншими авторами пропонувалися системи аксіом, трохи відмінні від системи П'єрі.

Вагомий внесок у розвиток проєктивної геометрії вніс російський математик К.О. Андрєєв (1848 – 1921). Він, зокрема, застосував теорему Паскаля до інших прямокутників, вписаних у криву другого порядку.

Систематично проєктивну геометрію почали вивчати наприкінці XIX століття. Ф. Клейн (1849 – 1925) запропонував використовувати для проєктивної геометрії однорідні координати, які раніше запровадили А.Ф. М'юбіус (1790 – 1868), Ю. Плюккер (1801 – 1868). Вплив на розвиток проєктивної геометрії зробили роботи М.І. Лобачевського (1792 – 1856) по створенню неевклідової геометрії, що дозволили в подальшому А. Келі (1821 – 1895) і Ф. Клейну розглянути різні геометричні системи з точки зору проєктивної геометрії.

Розвиток аналітичних методів звичайної проєктивної геометрії та побудова на її базі комплексної проєктивної геометрії (Е. Картан) поставили завдання про залежність тих чи інших проєктивних властивостей від того тіла, над яким побудована геометрія. У вирішенні цього питання великих успіхів домоглися А.Н. Колмогоров і Л.С. Понтрягін.

У XX столітті питаннями вивчення і навчання студентів проєктивної геометрії займалися М.І. Кованцов, О.Ф. Семенович, О.В. Мантуров, М.В. Васильєва, Т.В. Ломаєва.

Існують два підходи до вивчення проєктивної геометрії – аналітичний і конструктивний. При аналітичному підході виводяться рівняння всіх геометричних образів в деякій наперед заданій проєктивній системі координат. Проєктивні властивості цих образів доводяться шляхом дослідження їх рівнянь. Великою перевагою такого підходу є те, що студенти можуть за аналогією використовувати для цього координатний метод, який вивчається раніше в курсі аналітичної геометрії. Лише в поєднанні побудов геометричних образів та вивченні властивостей їх конфігурацій за допомогою апарату алгебри можна досягти бажаного результату. Однак, аналітичний підхід не вирішує проблему формування у студентів мислення образами проєктивної геометрії, що є головним завданням вивчення будь-якої з неевклідових геометрій.

Для вирішення цієї проблеми більш доцільним є конструктивний підхід. При конструктивному підході перевага надається побудові геометричних образів, алгоритму чи правила-орієнтиру такої побудови. Він забезпечує наочність, формування просторової уяви та образного мислення студентів. Але в даному випадку виникають труднощі, зумовлені великою кількістю часто досить громіздких побудов, що вимагають значної витрати навчального часу.

Досвід навчання проєктивної геометрії майбутніх учителів математики, фізики, інформатики показує, що для підвищення ефективності начального процесу з цієї дисципліни доцільно поєднувати обидва підходи. Таке поєднання та взаємодія цих двох

тенденцій виявилась досить продуктивною і дала можливість створити загальні методи розв'язування різних за своїм змістом задач, зокрема задач на побудову та доведення з використанням теореми Дезарга, гармонічних властивостей повного чотиривершинника, проєктивних та перспективних відповідностей, теореми Паскаля та теореми Бріаншона, полярних відповідностей, властивостей проєктивних перетворень.

Проективна геометрія, як і евклідова, будується аксіоматично. Однак в проєктивній геометрії, на відміну від евклідової, є не лише власні, а й невластні або нескінченно віддалені елементи: точки, прямі, площини. Розуміння невластних елементів краще досягається за допомогою побудови відповідних моделей проєктивних прямої, площини та простору.

Виклад кожного нового розділу доцільно починати з проведення аналогії між проєктивною геометрією (яка є першим прикладом неевклідової геометрії для студентів) і евклідовою геометрією. Це слугує коротким введенням в тему, встановлює логічний зв'язок нового матеріалу з попереднім, вияснює теоретичне та практичне значення вивчення цієї теми, показує її місце і значення у загальній системі знань, що відносяться до даної галузі науки, окреслює основне коло питань для вивчення.

Нові поняття слід вводити на моделях побудованих в образах евклідової геометрії. Вважається, що моделлю точки на проєктивній площині є евклідова пряма, проєктивна пряма інтерпретується як розширена евклідова пряма, тобто евклідова пряма доповнена невластною або нескінченно віддаленою точкою, або як пучок евклідових прямих, проєктивна площина інтерпретується як розширена евклідова площина, тобто евклідова площина доповнена невластною або нескінченно віддаленою прямою, або в'язка прямих і площин.

Особливу увагу слід звернути на введення та усвідомлення студентами невластних або нескінченно віддалених елементів. Так, наприклад, невластна точка задається за допомогою власної прямої або пучка паралельних прямих, тобто паралельні прямі проходять через одну і ту ж невластну точку; різні невластні точки задаються за допомогою різних власних прямих, тобто прямих, що перетинаються; невластна пряма задається за допомогою власної площини або в'язки паралельних площин, тобто паралельні площини перетинаються по нескінченно віддаленій прямій. Слід також зазначити, що в проєктивній геометрії власні і невластні елементи є рівноправними. Це означає, що вони можуть переходити одні в одні.

При вивченні проєктивної геометрії студенти стикаються з труднощами логічного характеру, які походять з особливостей її понять і методів. Так з однієї сторони точка, проєктивна пряма і проєктивна площина є основними поняттями проєктивної геометрії, відношення інцидентності або належності або сполучення, порядку, неперервності між якими описуються системою аксіом проєктивної геометрії. Досвід показує, що поняття проєктивної прямої, проєктивної площини мають формуватись спочатку на основі наочно-інтуїтивного розуміння з наступним введенням формально-логічних означень цих понять як проєктивних просторів відповідної розмірності.

Мотивація та роз'яснення доцільності вивчення окремих питань з необхідністю приводить до виявлення зв'язків між різними поняттями та розділами модуля, які зручно зображати у вигляді логічних ланцюжків або структурно-логічних схем (наприклад, пряма теорема Дезарга – принцип двоїстості – обернена теорема Дезарга; повний чотиривершинник

– принцип двоїстості – повний чотиристоронник; теорема Паскаля – принцип двоїстості – теорема Бріаншона).

Для актуалізації певних знань у свідомості студентів можна запропонувати вправи, які вимагають інтелектуальних зусиль та просторової уяви: «Визначити, які фігури будуть двоїстими наступним: 1) тривершиннику; 2) двом прямим, що перетинаються; 3) трьома точкам, які належать одній прямій, за малим та великим принципами двоїстості».

Розвитку нестандартного мислення сприятимуть завдання, які вимагають творчого оволодіння навчальним матеріалом. Прикладами таких завдань є задачі на побудову з невластивими елементами, задачі на застосування теорем проєктивної геометрії до доведення тверджень евклідової геометрії (наприклад, доведення того факту, що медіани трикутника перетинаються в одній точці), прикладні задачі на знаходження недоступних точок та прямих [10]. Дуже корисно щоб в процесі розв’язування задач студенти запропоновували і в результаті оволоділи різними способами їх розв’язання.

Система цілеспрямовано сконструйованих задач, запитань і завдань є важливою умовою розвитку пізнавальної мотивації у навчальному процесі та ефективним засобом розвитку продуктивного евристичного мислення. Розв’язуючи геометричні задачі, студенти не тільки активно оволодівають змістом модуля, а й набувають вміння використовувати аналогію, узагальнення, самостійно і творчо мислити. Поряд із завданнями репродуктивного характеру, пов’язаними з пізнавальними труднощами, для подолання яких необхідні нові знання або докладання інтелектуальних зусиль. Такі задачі складають основу проблемного навчання, педагогічними умовами успішності якого є: створення пізнавальних труднощів, відповідних інтелектуальним здібностям студентів; забезпеченість сукупністю знань з предметного змісту проблемної ситуації; формування операційних вмінь розв’язання проблемних задач.

Урізноманітнення методичних можливостей надається завдяки використанню мультимедійних засобів навчання, а саме показу презентацій, динамічних рисунків з візуальними підказками, застосуванню покрокового сценарію роботи з багаторівневими завданнями. При цьому студент може (або навіть повинен) виконувати на рисунку деякі дії. Рисунки цього виду слугують заміною фрагментам підручника і особливо корисні при самопідготовці.

Впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій дає можливість значно підвищити ефективність отримання і засвоєння навчального матеріалу, його пізнавальну доступність, врахувати індивідуальні особливості студентів, ефективно поєднати індивідуальну і колективну діяльність, надати навчальній діяльності творчого, дослідницького характеру.

Курс проєктивної геометрії завершується вивченням проєктивних перетворень. Розглядаються наступні проєктивні перетворення: колінеарні перетворення або колінеації, гомології, інволютивні перетворення або інволюції, їх види, властивості, аналітичний запис та застосування. Розв’язуються задачі на застосування проєктивних перетворень в курсі загальноосвітньої школи. Студенти усвідомлюють той факт, що проєктивна геометрія є наукою, яка вивчає інваріанти групи проєктивних перетворень, або іншими словами можна

сказати, що це галузь геометрії, в якій вивчаються властивості фігур відносно проєктивних перетворень, і як будь-яка інша наука має свою власну внутрішню логіку [4].

Підходячи до навчання проєктивної геометрії з теоретико-групового погляду, слід відзначити, що оскільки група проєктивних перетворень включає в себе групу афінних перетворень, яка в свою чергу містить групу рухів, то проєктивна геометрія є найбільш широкою, включаючи в себе афінну і евклідову геометрію, а при деякій спеціалізації й неевклідові геометрії Лобачевського та Рімана. Завдяки засвоєнню знань з проєктивної геометрії полегшується процес сприйняття й навчання неевклідових геометрій.

Проективна геометрія – це перша неевклідова геометрія, яку вивчають студенти в курсі геометрії у вищих педагогічних навчальних закладах, тому вона є найбільш зручним вихідним пунктом для пояснення сутності не лише геометрії Лобачевського, а й інших геометричних систем [14]. Саме за допомогою методів проєктивної геометрії можна описати дев'ять відомих науці неевклідових геометрій площини і показати можливість їх використання в фізиці.

Таким чином, при навчанні проєктивної геометрії доцільно використовувати порівняльний аналіз фактів евклідової геометрії та тверджень проєктивної геометрії, різні моделі, побудовані в образах евклідової геометрії, виявляти міжпредметні зв'язки проєктивної геометрії з аналітичною геометрією, алгеброю, фізикою, астрономією, а згодом і з іншими неевклідовими геометріями, та досліджувати застосування фактів проєктивної геометрії в різних галузях науки, техніки, фізики, будівництві та ін.

Вивчення курсу «Проективна геометрія та методи зображень» відіграє важливу роль у формуванні в майбутнього вчителя математики більш широкого погляду на геометрію, глибшого розуміння зв'язків між різними геометричними системами, природи геометричних властивостей, можливостей різних методів їх вивчення. Збагачення геометричної культури студента відбувається у найтіснішому зв'язку з матеріалом шкільного курсу геометрії і надає конкретні знання, достатні для викладання геометрії і кваліфікованого проведення гурткових занять, зокрема під час вивчення питань, пов'язаних із зображенням фігур і геометричними побудовами в просторі і на площині.

Вивчення властивостей геометричних фігур в проєктивній геометрії розширюють уявлення студентів про сучасну картину Всесвіту, підвищують компетентність майбутніх вчителів математики і фізики та стимулюють їх власний пошук нових математичних, геометричних та фізичних ідей і теорій.

Список використаної літератури

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
2. Боровик В.Н., Яковець В.П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
3. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия. Ч. 2. – СПб.: «Специальная литература», 1997. – 320 с.
4. Кованцов М. І. Проективна геометрія. – К.: Вища школа, 1985. – 368 с.

5. Ломаєва Т.В., Семенович О.Ф. Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії. В 3-х частинах. – Ч.1. – Черкаси, 1998. – 216 с.
6. Нікулін М.А. Проективна геометрія. – К.: Радянська школа, 1962. – 235 с.
7. Певзнер С.Л. Проективная геометрия. – М.: Просвещение, 1980. – 128 с.
8. Певзнер С.Л., Цаленко М.М. Задачник-практикум по проективной геометрии. – М.: Просвещение, 1982. – 80 с.
9. Семенович А.Ф. Учебное пособие по проективной геометрии. – М.: Учпедгиз, 1961. – 200 с.
10. Сергунова О.П., Котлова В.М. Практикум з проективної геометрії. – К.: Вища школа, 1971. – 188 с.
11. Тадеєв В.А. От живописи к проективной геометрии. – К.: Высш. шк., 1988. – 232 с.
12. Циганок Л.В. Проективна геометрія: Навчальний посібник. – Ніжин: Видавництво НДУ ім. М. Гоголя, 2010. – 146 с.
13. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. – М.: Просвещение, 1969. – 368 с.
14. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии – к неевклидовой (вокруг абсолюта): Кн. для внеклассного чтения. IX, X кл. – М.: Просвещение, 1979. – 158 с.
15. Яковець В.П., Боровик В.Н. Курс проективної геометрії: Навчальний посібник. – Ніжин: НДПУ, 2002. – 255 с.

ДОСЛІДЖЕННЯ ГОТОВНОСТІ ВИКЛАДАЧА ДО УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСОМ РОЗВИТКУ АНАЛІТИЧНОГО МИСЛЕННЯ СТУДЕНТІВ ТЕХНІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТІВ

Шевченко С.М.,

старший викладач,

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій м. Києва

Визначено зміст та структуру готовності викладача математики до управління процесом розвитку аналітичного мислення студентів технічних університетів. Спираючись на дослідження в психолого-педагогічній літературі, проаналізовані поняття «готовність», «педагогічне управління» та узагальнено поняття «готовність до педагогічного управління». Встановлено, що ефективний розвиток аналітичного мислення студентів не є можливим без відповідної компетенції викладача в цьому питанні. Представлено реалізацію процесу підготовки викладачів до управління розвитком аналітичного мислення студентів.

Исследование готовности преподавателя к управлению процессом развития аналитического мышления студентов технических университетов. Определены содержание и структура готовности преподавателя математики к управлению процессом развития аналитического мышления студентов технических университетов. Опираясь на исследования в психолого-педагогической литературе, проанализированы понятия «готовность», «педагогическое управление» и обобщено понятие «готовность к педагогическому управлению». Установлено, что эффективное развитие аналитического мышления студентов невозможно без соответствующей компетентности педагога в данном вопросе. Представлена реализация процесса подготовки преподавателей к управлению развитием аналитического мышления студентов.

The research of the teachers' preparedness for the management of technical universities students' analytical thinking development. The content and structure of math teachers' preparedness for the management of technical universities students' analytical thinking development are identified. Based on the research in the psychological and pedagogical literature, the terms 'preparedness' and 'pedagogical management' are analyzed and the term 'preparedness for the pedagogical management' is generalized. It is discovered that the efficient development of students' analytical thinking is impossible without a corresponding teachers' competence in this field. The implementation of teachers' preparedness for the management of students' analytical thinking development is represented.

Вступ. Розвиток будь-якого особистісного утворення завжди потребує сукупності ефективних умов. Суть аналітичного мислення, його особливості, критерії потребують не тільки інформаційних, але й педагогічних умов для його розвитку. При виділенні умови – готовність викладача до управління процесом розвитку аналітичного мислення студентів, ми спиралась на те, що здійснення процесу ефективного розвитку аналітичного мислення студентів не є можливим без відповідної компетенції викладача в цьому питанні. Необхідність введення даної умови пов'язана з тим, що педагог виступає не тільки як носій наукових знань з даної дисципліни, а як і людина з високим рівнем аналітичного мислення. Якщо при підготовці вчителів шкіл в педагогічних університетах в курс навчання введено дисципліну методика викладання конкретного навчального предмета, яка пов'язана з організацією та регулюванням пізнавального процесу, то у вищій технічній школі викладачі-практики розв'язують проблему управління розвитком студентів стихійно, на рівні власної інтуїції, бо найчастіше викладачами в технічному університеті стають колишні випускники цього ж університету.

З огляду на це, постає потреба у визначенні змісту та структури готовності викладача до управління розвитком мислення студентів та розробці шляхів підготовки викладачів до цього процесу.

Проблема готовності вивчалась на різних рівнях, від розкриття змісту поняття до виявлення прояву в різних видах діяльності. Цій проблемі присвячені роботи Б.Ананьєва, С.Рубінштейна, П.Белла, Ю.Васильєва, Т.Кудрявцева, Б.Платонова, В.Пушкіна, Г.Серікова, Л.Кандибовича, М.Дьяченка та інших. Розрізняють тимчасову (ситуативну) та довготривалу (стійку) готовність (В.Пушкін, Л.Кандибович); функціональну та особистісну (А.Пуні, Ф.Генов); психологічну та практичну (Ю.Васильєв, Б.Райський); загальну та спеціальну (Б.Ананьєв); готовність до розумової та фізичної діяльності (О.Ковальов, В.Моляко) та інші.

Феномен готовності є предметом вивчення як педагогіки, так і психології. Педагогіка, як показує аналіз літератури, акцентує увагу на виявленні факторів і умов, дидактичних та виховних засобів, що дають змогу керувати становленням і розвитком як студента, так і викладача. Психологи орієнтуються на дослідження характеру зв'язків і залежностей між станом готовності та ефективністю діяльності.

Робота виконана за планом НДР Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова

Формування цілей роботи. Мета даної статті – проаналізувати різні підходи до визначення понять «готовність», «готовність до управління», визначити зміст та структуру «готовності викладачів до управління процесом розвитку аналітичного мислення студентів», представити реалізацію процесу підготовки викладачів до управління розвитком аналітичного мислення студентів.

Результати дослідження. У психолого-педагогічній літературі ми маємо достатню кількість досліджень з питання готовності особистості до діяльності, але однозначної трактовки поняття «готовність» не існує. Так, наприклад, готовність визначають:

- як наявність здібностей (Б.Ананьєв, С.Рубінштейн);
- як властивість особистості (Б.Платонов);
- як тимчасовий ситуативний стан (П.Рудик);
- як активність, що спонукає людину на відповідну діяльність (В.Серіков).

На нашу думку, готовність – це той стан особистості, який визначається цілісністю, є ознакою професійної кваліфікації, результатом цілеспрямованої підготовки. Досягнення готовності визначається не просто засвоєнням знань та навичок, але й формуванням таких психічних властивостей, які необхідні для успішного початку та здійснення даної діяльності.

Інтерес для нашого дослідження викликає професійна готовність. В області педагогіки розглядають професійну готовність як складну структуру, в якій можна виділити, з одного боку, психологічну, психофізіологічну і фізичну готовність та складові професійної придатності, а з іншого, науково-теоретичну та практичну підготовку професіонала [3, 4, 9, 13]. Іншими словами, викладач може володіти необхідними для здійснення професійної діяльності рисами, але внаслідок недостатньої теоретичної та практичної підготовки не є готовий до її здійснення. Отже, готовність до інноваційної педагогічної діяльності –

особливий особистісний стан, який передбачає наявність у педагога мотиваційно-ціннісного ставлення до професійної діяльності, володіння ефективними способами і засобами досягнення педагогічних цілей, здатності до творчості і рефлексії [6].

Узагальнюючи зазначене вище і спираючись на дослідження М.Дьяченка та Л.Кандибовича [9], вважаємо, що готовність включає такі компоненти:

- мотиваційний (позитивне ставлення, інтерес до професії, стійкі професійні мотиви);
- орієнтаційний, який ґрунтується на знаннях та уявленнях про особливості та умови професійної діяльності, її вимогах до особистості;
- операційний, який передбачає опанування способами та прийомами професійної діяльності, необхідними знаннями, навичками, уміннями, процесами аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення та іншими;
- вольовий, проявом якого є самоконтроль, уміння управляти своїми діями;
- оціночний (самооцінка своєї професійної підготовленості).

Як відомо, навчальна діяльність не є достатньо ефективною, якщо вона не забезпечується, не організовується та не керується викладачем [8, с. 96].

Зупинимося на дослідженнях вчених з проблеми педагогічного управління навчальною діяльністю.

Управляти (Ф.Тейлер, А.Файоль) – значить передбачати (враховувати майбутнє; відпрацьовувати програму дій), організовувати (будувати матеріальний та соціальний організм підприємства), розпоряджатися (змушувати персонал працювати), координувати (пов'язувати, об'єднувати усі дії та зусилля) і контролювати (дбати про те, щоб все здійснювалось відповідно правилам і розпорядженням).

М.Дмитрієва в управлінні навчальним процесом у вищій школі вбачає в діяльності викладача три області: конструктивну, організаторську та комунікативну. «Ці три області складають підпрограми з управління навчанням студента. Викладач конструє систему знань студента в цій області, організує дві складові процесу навчання – діяльність студента та свою діяльність та сприяє встановленню правильних відносин між студентом та викладачем» [7, с.64].

На думку В.Андрєєва, «педагогічне управління навчально-творчою діяльністю студентів – це діяльність педагога щодо відбору, удосконалення та застосування системи цілей, змісту, форм та методів планування, організації, стимулювання та релаксації, нормування, контролю та обліку, педагогічного аналізу процесу та результатів різних видів навчальної діяльності студентів; все це створює сприятливі умови для самоуправління» [1, с. 199].

Таку ж точку зору поділяє Ю.Бабанський, який виділяє наступні елементи управління: взаємодія суб'єктів навчання, визначення цілей та змісту навчання, планування, регулювання та контроль [2].

Управляти можна тільки системами, і тільки ті зміни, які у них відбуваються, носять упорядкований характер завдяки цьому управлінню.

Досліджуючи процес управління педагогічними системами, як процес розв'язання педагогічних задач з навчання дітей та дорослих, та спираючись на функціональну модель управління Н.Кузьміної [11], В.Якунін рекомендує наступні стадії або етапи управління: формування цілей, інформаційної основи навчання, прогнозування, прийняття рішення, організації викладання, комунікації, контролю та оцінки результатів, корекції [14, с. 20].

Стисло та змістовно можна визначити поняття «управління», використовуючи «формулу успішного управління», яка була запропонована академіком В.Трапезниковим. Ця формула містить в собі чотири «дієслова управління»: знає, може, бажає, встигає [7, с. 20].

Інтерес для нашого дослідження викликає модель успішного лідера: модель емоційної компетентності запропонована Д.Гоулманом [5]. На думку автора для якісного управління керівник повинен мати високу «емоційну культуру», яка містить в собі дві основних складових: особистісна компетентність (в управлінні собою) та соціальна компетентність (в установленні взаємовідносин). Наявність емоційної компетентності дозволяє викладачу формувати та формулювати співпереживання, розумову підтримку, пробуджувати думку студента, мобілізувати їхні духовні сили та давати їм додаткові стимули для пізнання надалі.

На підставі викладеного, ми вважаємо, що управління розвитком аналітичного мислення студентів вищих технічних навчальних закладів включає такі компоненти:

- гностичний (з'ясування рівня аналітичного мислення студентів, настанови та спрямовування, ціннісна орієнтація);
- проекційний (постановка цілей, формування та прогнозування результатів);
- конструктивний (моделювання процесу розвитку аналітичного мислення, формування та прийняття рішення щодо переходу студентів з нижчого рівня аналітичного мислення на вищий);
- організаторський (безпосереднє здійснення діяльності викладача);
- комунікативний (різні форми та способи взаємодії учасників навчального процесу);
- регулятивний (оцінка фактичних результатів та усунення небажаних відхилень та змін).

Іншими словами, діяльність викладача полягає в проведенні самоаналізу щодо правильності функціонування всіх компонентів управління.

Зіставивши поняття «готовність» та «педагогічне управління», вважаємо, що готовність викладача до управління процесом розвитку аналітичного мислення складається з:

- особистісного аспекту, який полягає у вірогідній оцінці своїх досягнень та здібностей, управлінні власним аналітичним мисленням, самоконтролі, сумлінності, пристосованості і готовності працювати з новою інформацією і новими введеннями, прагненні до удосконалення, готовності використовувати всі можливості, наполегливості в досягненні мети;
- соціального аспекту, який вбачає порозуміння, сприйнятливості до потреб інших і підтримка їхніх здібностей, уміння впливати і визивати бажані реакції у інших,

переконавання, комунікацію, вирішення конфліктів, співробітництво та здібність забезпечити групову взаємодію в досягненні спільних цілей;

- професійного аспекту, який містить знання, уміння, навички, способи та прийоми їхньої реалізації в діяльності, спілкуванні, розвитку особистості; інформованість викладача про суть аналітичного мислення; уміння вбачати педагогічні задачі, які пов'язані з розвитком аналітичного мислення, самостійно їх формувати, аналізувати педагогічні ситуації та знаходити ефективні способи розв'язання.

Таким чином, проведений вище аналіз дозволяє розуміти готовність до управління процесом розвитку аналітичного мислення студентів як здібність викладача управляти розвитком як власного аналітичного мислення, так і студентів. На це ще вказував Платон, який підкреслював, що той, хто не може управляти собою, не може управляти й іншими.

Досліджуючи поняття готовності викладача до управління процесом розвитку аналітичного мислення студентів, необхідно відмітити, що практика показує наступне: більшість викладачів (особливо при зменшенні на сьогодні аудиторних занять) своїм першочерговим завданням вважають представити деяку сукупність математичних знань, умінь та навичок, не намагаючись при цьому встановити зв'язки математичних методів та викладених результатів з тими спеціальними областями знання, заради яких студенти прийшли навчатись. Всім відомо, що при навчанні мало тільки розуміти важливість матеріалу, який вивчається, без мобілізації волі, без пробудження емоцій, без систематичного показу можливостей математичного апарату в даній області діяльності. Тому виникає необхідність розширення та створення реальних умов для виявлення індивідуальних здібностей кожного студента в результаті співпраці, суб'єкт-суб'єктних відносин між студентом та викладачем, тобто діяльність педагога пов'язана з необхідністю приймати управлінські рішення.

Слід пам'ятати, що якість управління педагогічною технологією, зокрема технологією розвитку аналітичного мислення студентів, в значній мірі визначається не тільки якістю процедур, але й способами їхньої взаємодії в освітньому просторі. Це означає, що педагогічна технологія, як складне утворення, повинна стати саморганізованою системою, яка не просто чинить опір зовнішнім перешкодам, але в час функціонування підвищує свою організованість та стійкість.

Для визначення актуальності проблеми розвитку аналітичного мислення студентів і для з'ясування рівня готовності викладачів управляти цим процесом нами було проведено анкетування викладачів державного університету інформаційно-комунікаційних технологій м. Києва. В експерименті брали участь 38 викладачів різних кафедр. Аналіз результатів показав наступне:

- 1) всі викладачі (100%) вважають, що аналітичний стиль мислення є необхідною компетенцією майбутнього інженера;
- 2) більшість викладачів (88%) знайомі з теоретичними розробками щодо проблеми формування та розвитку аналітичного мислення студентів, але недостатньо повно;
- 3) під поняттям «розвиток аналітичного мислення» розуміють: уміння проводити аналіз інформації (72%), вільне оперування операціями мислення (28%);

4) 43% викладачів вважають, що їхні заняття сприяють розвитку аналітичного мислення студентів;

5) значна частина (81%) згодні з тим, що потрібні в їхній діяльності спеціальні методичні розробки, які забезпечують розвиток аналітичного мислення студентів.

Таким чином, підготовка викладачів і їх готовність управляти процесом розвитку аналітичного мислення студентів – важлива умова для функціонування відповідної педагогічної технології.

Розглянемо методику реалізації даної умови.

Вважаємо, що здійснення цього процесу буде найбільш ефективним під час контекстного навчання, що дозволяє максимально наблизити умови підготовки викладачів до умов їхньої діяльності з розвитку аналітичного мислення студентів при вивченні математичних дисциплін у технічному університеті. Мета такого навчання – підготувати викладачів до управління розвитком аналітичного мислення студентів; розвиток у них особистісної, професійної та соціальної готовності; опанування технологією розвитку аналітичного мислення студентів.

Контекст є змістовно утворюючою категорією, яка забезпечує рівень особистісного включення в наступну діяльність. Теоретична інформація стає особистісною при умові її проходження через конкретні педагогічні ситуації, тому введення понять необхідно супроводжувати оглядом ситуацій їхнього майбутнього професійного використання. Таким чином, контекстне навчання моделює предметний, процесуальний та соціальний зміст діяльності викладача з розвитку аналітичного мислення студентів, а засвоєння теоретичних знань забезпечує особистісне включення в процес оволодіння необхідними знаннями та вміннями.

Провідну роль в цьому навчанні ми надали методичним розробкам для викладачів (можуть використовувати також студенти самостійно). Це – «Діагностика розвитку аналітичного мислення студентів», яка включає:

1) по першому критерію (понятійно-логічному) розроблений Л.Столяренко тест «Логічно понятійне мислення. Утворення складних аналогій» [10];

2) по другому критерію (операційно-діяльнісному) тест «Дослідження аналітичності мислення» [12];

3) по третьому критерію (результативно-рефлексивному) анкета «Рівень самоуправління та саморегуляції», запропонована Л.Столяренко [10];

та «Розвиток аналітичного мислення студентів у процесі вивчення математичних дисциплін», яка ставить такі задачі:

- розглянути теоретичні основи аналітичного мислення (суть, структуру та значення в житті людини);
 - сформувати у викладачів (студентів) потребу у саморозвитку;
- прилучити викладачів до технології розвитку аналітичного мислення студентів.

Як приклад, представлено розроблені відповідно до технології розвитку аналітичного мислення студентів теми з вищої математики «Ряди», «Інтегрування функції від багатьох змінних», «Теорія функції комплексної змінної» та інші.

Проведено ряд відкритих лекцій та практичних занять. Для зацікавлених викладачів організовано консультативний пункт.

Висновки. У своєму дослідженні ми розглянули основні аспекти готовності викладачів до управління процесом розвитку аналітичного мислення студентів: особистісні, соціальні та професійні. Дотримання їх сукупності, діалектичної єдності може внести кардинальні зміни в навчальний процес вищої школи та гарантувати розв'язання викладачем проблеми розвитку аналітичного мислення студентів при вивченні математичних дисциплін.

Подальші дослідження передбачається провести у напрямку вивчення інших педагогічних умов, завдяки яким розвиток аналітичного мислення студентів у процесі вивчення математичних дисциплін є найбільш ефективним.

Список використаної літератури

1. Андреев В.И. Диалектика воспитания и самовоспитания творческой личности / В.И.Андреев. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1988. – 240 с.
2. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения / Ю.К.Бабанский. – М.: Педагогика, 1977. – 256 с.
3. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии / В.П.Беспалько. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.
4. Беспалько В.П. Элементы теории управления процессом обучения / В.П.Беспалько. – М.: Знание, 1971. – 72 с.
5. Гоулман Д. Эмоциональное лидерство: искусство управления людьми на основе эмоционального интеллекта / Д.Гоулман, Р.Болдис, Э.Макки; пер. с англ. – М.: АльпинаБизнес Букс, 2008. – 301 с.
6. Дичківська І.М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник / І.М.Дичківська. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.
7. Дмитриева М.С. Управление учебным процессом в высшей школе / М.С.Дмитриева. – Новосибирск, 1971. – 180 с.
8. Долженко О.В., Шатуновский В.Л. Современные методы и технология обучения в техническом вузе: Метод. пособие /О.В.Долженко, В.Л.Шатуновский. – М.: Высш. шк., 1990. – 191 с.
9. Дьяченко М.И. Психологические проблемы готовности к деятельности / М.И.Дьяченко, Л.А.Кандыбович. – Минск: изд-во БГУ, 1976. – 176 с.
10. Козубовский В.М. Общая психология: личность: учебное пособие / В.М. Козубовский. – Мн.: Амалфея, 2006. – 448 с.
11. Кузьмина Н.В. Методы исследования педагогической деятельности / Н.В.Кузьмина. – Л.:Изд. Ленингр. ун-та, 1970. – 114 с.
12. Пашукова Т.І., Допіра А.І., Дьяконов Г.В. Практикум із загальної психології / За ред. Т.І. Пашукової. – К.:Т-во «Знання», КОО, 2000. – 204 с.
13. Сериков Г.Н. Образование и развитие человека / Г.Н.Сериков. – М.: «Мнемозина», 2002. – 416 с.
14. Якунин В.А. Обучение как процесс управления: Психологические аспекты / В.А.Якунин. – Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1988. – 160 с.

ПРОБЛЕМА ЗАХИСТУ ВІД УГАДУВАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ДПА ТА ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Шкільний О.В.,

кандидат фіз.- мат. наук, доцент,

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

У статті розглядається проблема вгадування відповідей до тестових завдань з математики. Здійснено систематизацію прийомів угадування, наведено приклади та методичні рекомендації, що дозволяють покращити якість тестових завдань ДПА та ЗНО з математики і захистити їх від отримання правильної відповіді без демонстрації необхідних для цього знань, умінь і навичок.

В статье рассматривается проблема угадывания ответов к тестовым заданиям по математике. Проведена систематизация приемов угадывания, приведены примеры и методические рекомендации, которые позволяют улучшить качество тестовых заданий ДПА и ВНО по математике и защитить их от получения правильного ответа без демонстрации необходимых для этого знаний, умений и навыков.

In this paper we consider the problem of guessing the answers of math test items. We systematize the techniques of guessing, put some examples and guidelines that can improve the quality of tests STA and SET in mathematics and protect them from getting the right answer without a demonstration of the necessary knowledge and skills.

Постановка проблеми. У цій статті автор не буде прагнути «заклеймити» як саме явище спроб угадування відповідей до тестових завдань з математики, так і учасників цих спроб та «надихачів» до них – вчителів, репетиторів і просто кмітливих товаришів.

Метою цієї статті є прагнення розібратися в суті самого явища вгадування, причинах, які штовхають учнів до цього шляху, а також визначити основні способи якщо не повного подолання, то принаймні мінімізації прагнення розв'язати тестові завдання «нечесним» шляхом.

Цікаво також дізнатися, чи є намагання вгадати відповідь закономірним явищем, притаманним усій системі тестування, чи все-таки це, скоріше, «остання соломинка», за яку хапається «птопаючий» у морі тесту абітурієнт?

Усі ці запитання стали особливо актуальними у зв'язку з упровадженням МОНМС України зовнішнього незалежного оцінювання якості знань (далі – ЗНО), яке проводить Український центр оцінювання якості освіти (далі – УЦОЯО). Тест УЦОЯО покликаний, у першу чергу, адекватно оцінити рівень знань випускника з того чи іншого предмету, встановити градацію, шкалу, за якою можна було би проводити порівняння якості знань, зокрема, під час конкурсного відбору для вступу до вишу.

З моменту появи ЗНО з математики вчительськими і не лише вчительськими кулуарами почали блукати «крамольні» коментарі стосовно того, що оскільки завдання тесту УЦОЯО перевіряють лише результат розв'язування задачі, а не його процес, то таке тестування не може бути об'єктивним. Дійсно, нібито учень з низьким рівнем математичної підготовки за рахунок вгадування може запросто набрати більшу кількість балів, ніж гарно

навчений учень. Буцім-то існують спеціальні «приймачики», за допомогою яких «натасканий» репетитором двійочник може отримати чи не кращий результат за відмінника.

Насправді, якісна підготовка до тестування (як і до будь-якого серйозного життєвого випробування – співбесіди під час працевлаштування, служби у збройних силах, народження дитини тощо) має багато складових. Зокрема, на нашу думку, окрім змістової складової, слід виділити складову психологічну. Нехтування цією складовою часто є однією з причин низьких результатів навіть гарно навчених випускників під час ЗНО.

Однак, психологічний аспект підготовки до тестування у цій статті будемо розглядати дещо під іншим кутом. Взагалі кажучи, тестування – це своєрідне змагання між тим, хто складає тест і тим, хто його розв'язує. І, як у кожного змагання, дуже важливим (якщо не головним) у ньому є його результат, тобто своєрідна «перемога» над «суперником». А для досягнення перемоги слід уміти використовувати не лише власну силу, а також і слабкість суперника.

Іншими словами, під час тестування для досягнення максимального результату, тобто задля «перемоги», учень не лише може, а навіть повинен шукати «слабинки» у тестових завданнях з метою економії часу на розв'язування завдань, де таких «слабинок» немає. Це, власне, і є ті самі «приймачики», про які йшлося кількома абзацами вище.

Тому, на мою думку, *вгадування відповідей до тестових завдань є скоріше закономірним, ніж випадковим явищем*, оскільки, як це не прикро визнавати, результат тестування для учня найчастіше є значно важливішим, ніж наявність у нього глибоких знань з того чи іншого предмету.

Звісно, тест УЦОЯО готується висококваліфікованими фахівцями, проходить багатоступеневу вичитку та рецензування, а тому завдань зі «слабинками» у ньому мінімальна кількість (принаймні автори в це щиро вірять). Та все одно, оскільки автор завдання і рецензент – люди, яким властиво іноді помилятися, хотілося би виділити основні, типові помилки при створенні тестових завдань, які ведуть до можливості вгадування правильної відповіді.

Не хотілося б також при розгляді проблеми вгадування відповідей до тестових завдань з математики обмежуватися лише завданнями тесту УЦОЯО, оскільки, *по-перше*, з 2010 року ЗНО вже не є єдиною формою відбору майбутніх першокурсників, при конкурсному зарахуванні враховується також і середній бал атестата. Це означає, що при вступі зростає роль державної підсумкової атестації з математики (далі – ДПА) випускників шкіл, технікумів, коледжів тощо. Під час ДПА також використовуються тестові завдання різних форм, а тому залишити поза увагою цей сектор освітньої діяльності, де також можливе вгадування, на наше переконання, було б нерозумно.

По-друге, використання тестових завдань під час проведення ДПА та ЗНО з математики спричинило масову появу таких завдань у більшості діючих підручників та посібників із 5-го по 11-й клас, а іноді й у початковій школі. При цьому тестові завдання використовуються як для проведення поточних занять, так і для проведення тематичного та підсумкового контролю якості знань з математики.

На мою думку, така популярність тестової форми перевірки знань учнів робить проблему створення якісних тестів і тестових завдань з математики особливо актуальною. За

останні роки автор разом із колегами присвятили цій проблемі більше десятка статей у фахових виданнях, із яких особливо хотіли би виділити роботи [1] і [2], які стосуються загальних принципів побудови якісних тестових завдань з математики різних форм.

Зауважимо, що у всіх згаданих публікаціях ми постійно наголошуємо на тому, що *якість тестового завдання значною мірою залежить від того, чи відповідає це завдання встановленим специфікаціям.*

Це означає, що *тестове завдання може бути якісним лише тоді, коли воно перевіряє саме ті знання, уміння та навички, які закладалися його розробником, демонструючи при цьому саме ті види розумової діяльності, які були ним заплановані.*

Звісно, окремі завдання можуть (і часом навіть повинні!) мати кілька альтернативних способів розв'язування. Однак, в ідеалі, навіть ці кілька способів мають бути передбачені розробником і мають бути хоча би приблизно одного рівня складності. Це забезпечує рівність умов для учня, який знає чи не знає альтернативний шлях до відповіді.

Слід наголосити також, що відповідність усім своїм специфікаціям є необхідною, але не достатньою умовою того, щоб тестове завдання було якісним. Зрозуміло, що існують і інші вимоги до якісних тестових завдань, які будуть висвітлені в наступних авторських публікаціях, присвячених даній тематиці.

Виклад основного матеріалу.

1. Що означає «вгадати відповідь» до тестового завдання? Під *угаданням* будемо розуміти такий *спосіб отримання відповіді (не розв'язування!)* до тестового завдання, який *не збігається з авторським задумом стосовно цього завдання.* При цьому *вгадування також не є альтернативним чи більш раціональним способом розв'язування завдання.* Навпаки, воно дозволяє учневі отримати правильну відповідь до тестового завдання, практично не володіючи тими знаннями, на перевірку яких воно спрямовано.

Іншими словами, *вгадування дозволяє учневі отримати результат, не продемонструвавши тих знань, умінь і навичок, які він повинен би був при цьому продемонструвати.*

Зрозуміло, що іноді замість потрібних знань та умінь можуть бути проявлені інші (причому часто не менш важливі) знання та уміння. Однак, під час тестування ці інші знання та уміння можуть (і, взагалі кажучи, навіть повинні) перевірятися іншими завданнями тесту. Як наслідок, виникає мимовільне дублювання завдань, чого, на нашу думку, слід уникати.

Прийомом (методом) угадування будемо називати лише такі прийоми, які дозволяють гарантовано отримати результат, а не звузити коло можливих варіантів з метою подальшого здійснення «гадання», тобто вибору варіанту відповіді навмання, але не з усіх запропонованих альтернатив, а з меншої їх кількості.

На моє переконання, *більшість прийомів угадування базуються на недоліках у самому тестовому завданні і ні в якому разі не можуть претендувати на універсальність.* Тому, розглядаючи конкретні тестові завдання, після їх «розв'язання» за допомогою того чи іншого методу вгадування, буде наведено один чи кілька можливих способів покращення якості цього завдання.

У ідеалі передбачається, що після вдосконалення тестове завдання більше не повинно вгадуватися. Однак, далеко не завжди тестове завдання вдається «врятувати», у

багатьох випадках доводиться взагалі відмовлятися від нього, не зважаючи на «привабливість» чи оригінальне формулювання цього завдання.

2. Намагаючись з'ясувати **причини появи неякісних тестових завдань** у друкованих джерелах різних видів (статтях, підручниках та посібниках по підготовці до ДПА та ЗНО тощо), виділимо кілька факторів, які цьому сприяють.

По-перше, завдання, сформульовані в тестовій формі (особливо це стосується завдань із вибором однієї альтернативи з кількох запропонованих), є для окремих авторів підручників та посібників певною мірою «чужими» і часто навіть неприродними. Їм може здаватися, що досить до традиційного завдання (з повним обґрунтуванням) навести 4 чи 5 альтернатив – і одразу вийде завдання, сформульоване в тестовій формі з вибором однієї альтернативи. Звісно, такий підхід є дещо наївним і може призвести до того, що побудоване таким чином завдання буде вгадуватися.

По-друге, тестова форма перевірки якості знань з математики останнім часом є, так би мовити, «модною тенденцією». Як наслідок, окремі автори підручників та посібників можуть використовувати ці завдання, не задумуючись при цьому над проблемою *доцільності* такого використання. На мою думку, безпосередньо в процесі навчання математики тестові завдання з вибором однієї альтернативи мають відігравати лише допоміжну роль, оскільки доволі часто форма завдання відволікає від його суті.

Лише з часом, коли тестові завдання різних форм стануть «природним явищем» (наприклад, як у США та багатьох інших країнах) і будуть сприйматися учнями як щось традиційне і зрозуміле, такі завдання можна буде застосовувати у всіх компонентах навчального процесу. Однак, на моє переконання, відкритим і дискусійним залишається навіть саме питання про необхідність того, щоб тестування стало «природним явищем» української школи, оскільки в Україні протягом тривалого часу сформувалися власні освітні традиції. Тому я вважаю, що проведення різного роду тестувань є лише одним із багатьох можливих шляхів до покращення якості математичної освіти, який ні в якому разі не слід сприймати як панацею.

По-третє, доступ до сучасних методичних розробок у галузі тестування для вчителів та методистів нині є доволі обмеженим, а кількість відповідних публікацій у фахових виданнях з методики навчання математики – незначною.

Не секрет, що нині фахові навчально-методичні видання переживають певні труднощі і видаються невеликими накладками. Зрозуміло, що в такій ситуації методичні поради щодо створення тестових завдань різних форм, а також аналіз типових помилок, які допускаються при цьому, можуть просто не потрапити на очі тому, кому це потрібно.

Я вважаю, що описана ситуація у сфері розповсюдження знань про тестові технології є неприйнятною для української школи і закликаю фахівців у цій сфері активніше доносити результати своїх досліджень до зацікавлених слухачів через публікації в журналах і збірниках наукових праць, через доповіді на конференціях, семінарах, круглих столах тощо.

Нарешті, *по-четверте*, прагнення вчителів опанувати методику розробки тестових також знаходиться на доволі низькому рівні. Окремі вчителі сприймають тестову форму проведення ДПА та ЗНО як тимчасове явище і приділяють тестологічним дослідженням значно меншу увагу, ніж вони того заслуговують.

У результаті виходить парадоксальна ситуація: тестові завдання вчителі створювати і використовувати змушені, а робити це якісно не завжди вміють і не завжди хочуть навчитися. А попри всі труднощі можливості для навчання є!

Щороку Український центр оцінювання якості освіти МОНМС України (далі – УЦОЯО) спільно з Американською Радою (American Council) за Програмою сприяння розвитку зовнішнього незалежного тестування (USETI) проводить семінари-тренінги для розробників тестових завдань із залученням досвідчених міжнародних експертів-тестологів та провідних вітчизняних фахівців у цій галузі.

Свого часу автор цієї статті (у складі авторського колективу разом із кандидатом фіз.-мат. наук, доцентом НаУКМА Ю.О.Захарійченком) взяв участь у традиційному конкурсі розробників тестових завдань, який проводить УЦОЯО, і був включений до складу учасників згаданого семінару-тренінгу. З того часу наш авторський колектив є постійним учасником таких занять і кожного разу через спілкування з досвідченими колегами ми прагнемо покращити власний рівень розуміння суті тестових завдань різних форм, а також у кожному своєму наступному посібнику зробити тестові завдання якіснішими, ніж вони були в попередньому. Читач може в цьому пересвідчитися, проаналізувавши посібники [3]-[7].

На нашу думку, такий шлях доступний кожному зацікавленому вчителю математики. Крім того, за останні кілька років за програмою USETI була підготовлена достатня кількість фахівців у сфері розробки якісних тестових завдань, які, в свою чергу, могли би поширювати свої знання через власні семінари-тренінги. Однак, для цього потрібна, як то кажуть, «ініціатива знизу» – інтерес учителів, а також працівників місцевих методичних кабінетів та відділів освіти. Зокрема, наш авторський колектив готовий, у разі наявності такого інтересу, підтвердженого конкретними пропозиціями, проводити відповідні семінари для всіх охочих.

3. Основні прийоми вгадування. Зрозуміло, що здійснення повної класифікації способів угадування відповідей до тестових завдань є непростим завданням, оскільки автор цієї статті спирається лише на власний досвід і досвід тих колег, які згодилися поділитися своїми «секретами» в цій сфері. Тому цілком можливо, що хтось із читачів, окрім наведених нижче способів та прийомів, знає ще й якісь інші. У цьому випадку я буду щиро вдячний дописувачам за надану інформацію в якості зворотного зв'язку.

Виділимо *сім основних прийомів угадування* відповідей до тестових завдань з математики. Висвітливши їх сутність, наведемо кілька прикладів тестових завдань, які ілюструють ці прийоми. Наведені приклади є реальними, тобто взятими з наявних на ринку посібників по підготовці до ЗНО та ДПА (див. [8-17]). Із етичних міркувань під час розгляду прикладів не будемо подавати прямих посилань на конкретні джерела, але збережемо авторську стилістику кожного з наведених завдань.

Прийом перший: «Довго не думай, а перебирай!» Іншими словами цей прийом можна описати як «розв'язування задач «для чайників» або «математика теж має почуття гумору». Його суть полягає у виявленні грубих недоречностей в умовах тестових завдань і застосуванні прямого перебору для отримання правильної відповіді. Ознаками для цього перебору можуть бути «межові» значення для областей допустимих значень виразів, що

входять до рівнянь чи нерівностей, значення змінних, при яких значення виразів легко обчислюється і дає потрібний результат тощо.

Приклад 1. Зазначте найменше ціле число, що є розв'язком нерівності

$$\frac{(x+1)^2 |x-3|}{x-2} \geq 0.$$

А	Б	В	Г	Д
2	1	-1	3	4

«Розв'язання». Серед запропонованих альтернатив *найменшим* є число -1 з

альтернативи **В**. Підставимо це значення в ліву частину нерівності: $\frac{(-1+1)^2 |-1-1|}{-1-2} \geq 0$,

тобто отримуємо правильну числову нерівність $0 \geq 0$. Отже, правильна відповідь – **В**.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x+8} - \sqrt[4]{x-8} = 2$.

«Розв'язання». Для цього рівняння областю допустимих значень (ОДЗ) змінної x є проміжок $[8; +\infty)$. Покладемо $x = 8$. Матимемо: $\sqrt[4]{8+8} - \sqrt[4]{8-8} = \sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{0} = 2 - 0 = 2$. Отже, число 8 є коренем даного рівняння. Оскільки завдання сформульовано так, що можливість наявності кількох коренів рівняння виключається, то $x = 8$ є остаточною відповіддю.

Коментар. Загальні поради для уникнення недоречностей, які ведуть до вгадування прямим перебором:

- 1) *бажано* до завдань із вибором однієї правильної відповіді на розв'язування рівнянь у якості альтернатив *не подавати безпосередньо корені рівняння*, особливо, якщо підстановка їх у рівняння не викликає значних технічних труднощів;
- 2) *бажано* до завдань на розв'язання нестрогих нерівностей у якості відповідей *не обирати числа, при яких нестрога нерівність виконується як рівність*;
- 3) *бажано* до завдань на розв'язування рівнянь з обмеженнями на ОДЗ змінної *не обирати у якості коренів чисел, які належать межі ОДЗ*;
- 4) *бажано* до завдань із короткою відповіддю не виключати можливість неоднозначної відповіді, запропонувавши у альтернативному випадку вказувати суму чи добуток кількох значень, які є розв'язками.

Прийом другий: «Переходь від загального до часткового!» Часто в тестових завданнях пропонують розв'язати задачу в загальній постановці, не помічаючи, що *відповідь* залишається такою самою, якщо розглянути простий частковий чи вироджений випадок цієї задачі. Іншими словами, можна накласти на загальну задачу додаткові обмеження, які не змінять відповідь до неї, але спростять її розв'язання.

Приклад 3. Спростіть вираз $\frac{x^2 + x - xy - y}{x^2 + x + xy + y} \cdot \frac{x^2 - x - xy + y}{x^2 - x + xy - y}$.

«Розв'язання». Оскільки це сформульовано як завдання з короткою відповіддю, то воно передбачає однозначну відповідь, яка *не залежить* від значень змінних x та y . Тому покладемо (для зручності) $x = 0$ та $y = 1$. Отримаємо: $-1 : (-1) = 1$. Отже, правильною відповіддю є число **1**.

Приклад 4. Ресторан швидкого харчування у рекламних цілях спочатку знизив ціну на комплексний обід на 20%, але потім підвищив її на $n\%$. У результаті кінцева ціна стала на 20% більшою від початкової. Знайдіть n .

«Розв'язання». У цій задачі відповідь *не залежить* від абсолютного значення початкової ціни обіду. Тому (для зручності) нехай початкова ціна становить 100 грн, тобто 1% початкової ціни становить 1 грн. Після зниження ціни вартість обіду становитиме $100 - 20 = 80$ грн. Кінцева ж ціна комплексного обіду дорівнює $100 + 20 = 120$ грн. Отже, кінцева ціна більша від початкової на 40 грн, які від проміжного значення (80 грн) становлять $40 : 80 \cdot 100\% = 50\%$. Отже, відповідь: $n = 50$.

Коментар. Загальна порада для уникнення недоречностей, які ведуть до вгадування спрощенням лише одна: слід формулювати завдання таким чином, щоб розгляд часткових чи вироджених випадків не призводив до *суттєвого* спрощення розв'язання задачі. На жаль, якщо завдання вже допускає таке суттєве спрощення у часткових випадках, то виправити їх практично неможливо, такі завдання краще зовсім замінити. Можна, звичайно, намагатися відволікти увагу учня від спрощення, додаючи до умови несуттєві додаткові обмеження, але досвідчений і «гадальник» одразу це виявить і все одно скористається прийомом спрощення, хоч і в дещо видозміненій формі (див. наступний прийом угадування).

Прийом третій: «Увага! Зайва інформація!» Окремі тестові завдання можуть містити в умові інформацію, яка дозволяє в обхід матеріалу, знання якого повинно було б перевіряти це завдання, отримувати потрібну відповідь підстановкою чи спрощенням. Тоді та частина умови завдання, яка, за задумом автора, повинна була би бути головною, фактично, стає *зайвою*, оскільки не впливає на вибір правильної відповіді.

Приклад 5. Укажіть функцію $y = f(x)$, яка задовольняє умову $f(x) < 3$ при $x \in (0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin 3x$	$y = 3^x$	$y = 3x$	$y = x^3$	$y = \log_3 x$

«Розв'язання». Функція $y = \sin x$ задовольняє умову $f(x) < 3$ для *будь-яких* значень змінної x , а отже, і для $x \in (0; +\infty)$. Оскільки правильна відповідь лише одна, то інші альтернативи можна не розглядати, а умова $x \in (0; +\infty)$ є *зайвою* і правильна відповідь – А.

Приклад 6. Яке з поданих чисел ділиться на 3, але не ділиться ні на 2, ні на 5?

А	Б	В	Г	Д
120330	2736	3321	53145	3330

«Розв'язання». Для розв'язування цього завдання досить пам'ятати, що числа, які закінчуються парною цифрою, діляться на 2, а числа, які закінчуються нулем або цифрою 5, діляться на 5. Ознаку подільності на 3, яка дещо складніша за дві попередні, пам'ятати не обов'язково, бо числа з варіантів А, Б і Д діляться на 2, а число з варіанту Г ділиться на 5. Отже, умова подільності на 3 є *зайвою*, а правильна відповідь – В.

Коментар. Головною порадою для уникнення недоречностей, які ведуть до вгадування звуженням умови, є акуратний підбір доречних альтернатив. Вони мають бути складені таким чином, щоб усі частини умови завдання були «робочими», тобто такими, щоб розгляд лише однієї з них не призводив до однозначної відповіді.

Прийом четвертий: «Оцінюй!» Інколи відповідь до тестового завдання можна отримати шляхом оцінки чи «прикидки» наближеного значення виразу, який містять альтернативи чи умова завдання. Тоді виконувати громіздкі перетворення зовсім не обов'язково.

Приклад 7. Вказати розв'язок рівняння $\frac{x}{12} + \frac{x}{20} + \frac{x}{30} + \frac{x}{42} = -4$.

А	Б	В	Г	Д
- 210	- 21	1	3	42

«Розв'язання». Оскільки всі знаменники дробів у лівій частині рівняння є додатними, а сума цих дробів є від'ємною, то $x < 0$. Отже, правильною може бути лише або відповідь **А**, або відповідь **Б**. Нехай $x = -210$. Тоді $\frac{-210}{12} = -17,5 < -4$. Очевидно, що підставляти $x = -210$ у інші доданки не потрібно і правильна відповідь – **Б**.

Приклад 8. Обчисліть $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$.

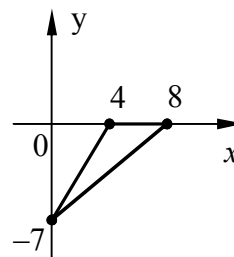
«Розв'язання». «Чесне» розв'язання цього завдання передбачає серію послідовних виділень повних квадратів двочлена. Але навіщо це робити, якщо відповідь має бути записана десятковим дробом? Дійсно, оскільки $\sqrt{a} \geq 0$ і всі числа у підкореневих виразах є цілими, то і відповідь має бути натуральним числом або нулем. Але $2 < \sqrt{5} < 3$, а тому $1 < \sqrt{\sqrt{5}} < 2$. В умові завдання маємо $\sqrt{\sqrt{5} - \text{«щось додатне і менше за } \sqrt{5}\text{»}}$, а тому $0 < \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} < 2$ і вираз є натуральним числом, тобто відповіддю є число **1**.

Коментар. Порада стосовно уникнення недоречностей, пов'язаних з угадуванням шляхом оцінювання, аналогічна попередньому прийому: слід бути уважним при підборі альтернатив. Альтернативи повинні виключати можливість відкидання всіх неправильних відповідей шляхом оцінки. Така сама порада і для завдань із короткою відповіддю: вираз має бути таким, щоб його груба оцінка не давала можливості локалізувати єдину правильну відповідь.

Прийом п'ятий: «Малюй і дивись!» Прийом ґрунтується на ідеї «доведення» тверджень давньогрецькими геометрами: вони просто малювали малюнок, який гранично точно відповідає умові задачі і писали під ним слово «Дивись!»

Приклад 9. Відомо, що вершини трикутника знаходяться у точках із наступними координатами: $A(4;0)$, $B(8;0)$, $C(0;-7)$. Визначте, яким є трикутник ABC .

А	Б	В	Г	Д
тупокутним	прямокутним	гострокутним	рівнобедреним	рівностороннім



«Розв'язання». Побудуємо в прямокутній системі координат точки з умови завдання (див. малюнок) і скажемо «магічне» слово «Дивись!» Очевидно, що правильна відповідь – **А**.

Приклад 10. Дано вершини трикутника ABC : $A(2;1;7)$, $B(-1;1;3)$, $C(-8;1;2)$. Знайдіть внутрішній кут (в градусах) при вершині B .

«Розв'язання». Оскільки легко помітити, що у всіх трьох вершин трикутника ордината $y=1$, то цей трикутник знаходиться у площині, яка паралельна координатній площині xOz . Спроектувавши ортогонально (тобто виключивши другу координату) трикутник ABC на площину xOz і зобразивши точки у відповідній системі координат, отримаємо відповідь: $\angle B = 135^\circ$.

Зауважимо також, що до завдань із короткою відповіддю, які передбачають знаходження кутів трикутників у градусах, маючи лише координати вершин трикутника, відповідями можуть бути лише числа 30, 45, 60, 90, 120, 135 і 150. Дійсно, ці кути «чесно» знаходяться за їх косинусами через формулу скалярного добутку, а тому «гарні» відповіді можна отримати лише для табличних кутів. Зрозуміло, що за якісного малюнку на аркуші в клітинку розрізнити ці кути досить просто.

Коментар. Щоб уникнути масового застосування «грецького» прийому вгадування, на мою думку, краще підбирати в задачах такі точки, які, навіть за наявності клітинок, не дадуть однозначної відповіді лише з малюнка. Зокрема, не варто в завданнях із короткою відповіддю ставити запитання про кут саме у градусах між векторами чи відрізками, досить обмежитися знаходженням його косинуса чи іншої тригонометричної функції, яка виражається десятковим дробом і не є табличним значенням.

Прийом шостий. «Подумай і підставляй!» Прийом, який схожий за своєю сутністю на перший, однак, у даному випадку підстановка вже не є настільки очевидною, слід проявити певну спостережливість і увагу.

Приклад 11. Розв'яжіть нерівність $\frac{3}{x+1} \leq 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1; -0,4]$	$(-\infty; -1] \cup (-0,4; +\infty)$	$[-1; -0,4]$	$(-\infty; -1) \cup [-0,4; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

«Розв'язання». Спробуємо «помацати» дану нерівність у конкретних точках. Очевидно, що $x=0$ належить множині розв'язків нерівності, а $x=-1$ не належить цій множині. Перевірка показує, що лише множина з альтернативи Г задовольняє цю умову, а отже, правильна відповідь – Г.

Приклад 12. Знайдіть розв'язок системи
$$\begin{cases} 3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} = 77, \\ 3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y} = 7. \end{cases}$$

У відповідь запишіть суму $x_0 + y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи.

«Розв'язання». Формулювання цього завдання передбачає, що дана система має єдиний розв'язок. Спробуємо вгадати його. Для цього подамо число 7 з правої частини другого рівняння системи у вигляді $3^a - 2^b$. Досить просто можна знайти потрібний розклад: $3^2 - 2^1 = 7$. Отже, $\log_3 \sqrt{x} = 2$ і $\log_{16} y = 1$, звідки $x_0 = 81$ і $y_0 = 16$. Це і є шуканий розв'язок системи рівнянь. Щоб остаточно відкинути всі сумніви, можна зробити підстановку-перевірку знайденого розв'язку в перше рівняння системи. Після цього отримуємо відповідь: $x_0 + y_0 = 81 + 16 = 97$.

Прийом сьомий: «Вмикай ерудицію!» Базується на знаннях характерних особливостей виразів, функцій, рівнянь та інших математичних об'єктів, які дозволяють значно спростити шлях до розв'язання завдання. Якщо проводити аналогію з комп'ютерними науками, то такий прийом доступний лише «математичним хакерам».

Приклад 13. Який із наведених проміжків є областю визначення функції $y = \sqrt{2 - 5x - 3x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}; 1)$	$(-1; \frac{2}{3})$	$[-2; \frac{1}{3}]$	$[-1; \frac{2}{3}]$

«Розв'язання». Знаходження області визначення заданої функції передбачає розв'язування нестрогої нерівності $2 - 5x - 3x^2 \geq 0$, множина розв'язків якої може бути або відрізком, або однією точкою, або порожньою множиною (коефіцієнт біля x^2 є від'ємним числом, а тому вітки параболи $y = 2 - 5x - 3x^2$ напрямлені вниз, що й зумовлює наведений висновок). Оскільки альтернативи завдання містять лише відрізки та інтервали, то правильними відповідями можуть бути або варіант Г, або варіант Д. Знову підберемо таку точку, яку містить множина з варіанту Г, але не містить множина з варіанту Д. Нехай це буде точка $x = -2$. Після підстановки отримуємо: $2 + 10 - 12 \leq 0$, звідки маємо правильну числову нерівність $0 \leq 0$. Отже, правильна відповідь – Г.

Приклад 14. Обчисліть значення виразу $(1 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}}$.

«Розв'язання». Оскільки відповідь до цього завдання має подаватися десятковим дробом, то шукане значення виразу не може бути ірраціональним числом. А це може бути лише тоді, коли вираз $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}}$ є спряженим до виразу $(1 - \sqrt{3})$, тобто $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}} = 1 + \sqrt{3}$. Тоді шукане значення виразу дорівнює $(1 - \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$.

Коментар. Два останні прийоми вгадування певним чином перевертаються. Дійсно, для того, щоб їх застосовувати, потрібно мати певний рівень математичної підготовки. При цьому, на відміну від перших п'яти прийомів, іноді зовсім не очевидно, чи можна те чи інше тестове завдання «зламати» розумною підстановкою або за допомогою ерудиції. Тому далеко не всі завдання можна «вберегти» від такого «несанкціонованого доступу».

Однак, загальні поради стосовно зменшення ризику «зламування» існують:

- 1) перевіряти альтернативи завдань із вибором правильної відповіді на можливість їх відкидання шляхом підстановки цілих чисел;
- 2) не використовувати у якості відповідей до завдань із короткою відповіддю малих за модулем цілих чисел (1, 2, -1 тощо), оскільки найчастіше саме їх підставляють «гадальники»;

- 3) не робити завдання надмірно громіздкими, тобто бажано, щоб час на «чесне» розв'язування завдання був принаймні не більшим, ніж час, витрачений на хитрі підстановки та інші «штучки».

4. Приклади тестових завдань та поради щодо покращення їх якості. Далі наведемо ще кілька прикладів конкретних тестових завдань, взятих із діючих підручників і посібників та зі збірників завдань до ДПА з математики у 9 та 11 класах, які вгадуються одним із наведених вище методів і які, на мою думку, можна було би покращити.

До всіх розглянутих нижче завдань наведемо лише «розв'язання» за допомогою прийомів угадування, а також методичні коментарі щодо способу його вдосконалення. «Чесного» розв'язання (тобто розв'язання, яке передбачалося авторами завдання) у цій статті наводити не будемо, оскільки мета цієї статті є дещо іншою.

Для зручності завдання будуть згруповані за вісьмома тематичними блоками у відповідності до основних змістових ліній сучасного шкільного курсу математики: «Числа і вирази», «Функції», «Рівняння», «Нерівності», «Планіметрія» «Стереометрія», «Вектори і координати» і «Елементи стохастики».

Числа і вирази.

Завдання 1. Спростіть вираз $xy(2x-3y)-3y(x^2-xy)$.

А	Б	В	Г
$5x^2y$	$-x^2y-6xy^2$	$-x^2y+6xy^2$	$-x^2y$

«Розв'язання». Як сам вираз, так і запропоновані альтернативи залежать від значень змінних x та y . Застосуємо прийом угадування «Переходь від загального до часткового!» і підставимо у початковий вираз $x = y = 1$. Отримаємо: $1 \cdot 1 \cdot (2 - 3) - 3 \cdot 1 \cdot (1 - 1) = -1$. Таку саму підстановку виконаємо для кожного з варіантів відповідей. Бачимо, що тільки у варіанті Г значення виразу дорівнює -1 . Отже, правильна відповідь – Г.

Коментар. Повністю уникнути спроб вгадування в такого роду завданнях, на нашу думку, можна лише одним шляхом – шляхом спрощення завдання. Внаслідок цього, час на підбір вдалої підстановки буде перевищувати час на «чесне» виконання завдання, а отже, і втратить свій сенс.

Завдання 1 містить три логічні кроки: розкриття перших дужок, розкриття других дужок і зведення подібних доданків. Виконання цих кроків вимагає певного часу та уважності, а підстановка виконується легко і швидко. На нашу думку, замість одного цього трикрокового завдання можна було би дати два однокрокових: перше – лише на розкриття дужок, а друге – лише на зведення подібних доданків.

Функції.

Завдання 2. Знайдіть нулі функції $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$.

А	Б	В	Г
0; 1	-1	0	1

«Розв'язання». Застосуємо прийом угадування «Довго не думай, а перебирай!». І в умові завдання, і альтернативах йдеться про число нуль. Виконавши підстановку $x = 0$, переконуємося, що він нас влаштовує. Отже, правильна відповідь – **В**.

Коментар. Дистрактор **А**, який за задумом авторів мав би відвернути увагу гадальників, в цьому випадку не працює, бо формулювання завдання ніби саме по собі підштовхує учня обрати альтернативу **В** (А що тут думати! Нуль він і в Африці нуль!).

Більше того, частина тих, хто вгадуватиме це завдання, а не прагнучиме його розв'язати, навіть не виконуватиме підстановку, зреагувавши лише на «ключове слово» – «нуль». І треба ж такому статися, що саме ця відповідь і є правильною!

Щоб уникнути подібних казусів, не варто у якості ключа давати число нуль. Але при цьому серед дистракторів нуль має бути обов'язково! Наприклад, при тих самих альтернативах у завданні 3 можна було б розглянути функцію $y = \frac{x^2 - x}{x}$, нулем якої є лише число 1. «Гадальник», очевидно, знову обере відповідь **В**, але в цьому випадку вона буде неправильною, що й вимагалось.

Завдання 3. Для функції $f(x) = 3x^2$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(-1; 2)$.

А	Б	В	Г
$F(x) = x^3$	$F(x) = x^3 - 3$	$F(x) = x^3 - 1$	$F(x) = x^3 + 3$

«Розв'язання». Використаємо прийом угадування «Увага! Зайва інформація!» Шляхом підстановки координат точки $A(-1; 2)$ у функції з альтернатив **А-Г** переконуємося, що через цю точку проходить лише графік функції з альтернативи **Г**. Отже, шукати первісну для функції $f(x) = 3x^2$ зовсім не обов'язково, бо і так ясно, що правильна відповідь – **Г**.

Коментар. На мій погляд, покращити це завдання можна, замінивши в альтернативах **Б** і **В** функції, наприклад, на $F(x) = 6x$ і $F(x) = 6x + 8$ відповідно. Багато учнів плутає поняття похідної та первісної, а отже, функція $F(x) = 6x$ має відвернути увагу цих учнів. Нарешті, функція $F(x) = 6x + 8$ також певним чином пов'язана з похідною функції $f(x)$, а її графік проходить через точку $A(-1; 2)$.

Рівняння.

Завдання 4. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} y^2 - xy = 2, \\ 2y^2 + 3xy = 14. \end{cases}$$

«Розв'язання». Застосуємо прийом угадування «Вмикай ерудицію!» Якщо в системі x і y замінити на $-x$ і $-y$, то вона не зміниться. Отже, якщо пара $(a; b)$ є розв'язком системи, то пара $(-a; -b)$ теж є розв'язком системи. Більше двох пар розв'язків задана система не буде мати, оскільки її розв'язування зводиться до розв'язування квадратного рівняння. Із першого рівняння отримуємо: $y(y - x) = 2$. Тепер можна досить легко підібрати першу пару $(1; 2)$, а другою, очевидно буде пара $(-1; -2)$. Отже, відповідь: $(1; 2)$ і $(-1; -2)$.

Коментар. Звісно, наведений спосіб розв'язання доступний тільки «сильним» учням і захистити завдання від них не завжди вдається. Однак, прагнути до цього варто, оскільки

мета завдання 4 – перевірити знання методів розв’язування нелінійних систем рівнянь із двома змінними, а також уміння розв’язувати квадратні рівняння – при наведеному способі «розв’язування», очевидно, не досягається.

Тому, на мою думку, при складанні багатокрокових завдань із короткою відповіддю варто уникати різного роду симетрій, а також відповідей, що виражаються цілими числами. Якби у завданні 4 відповіддю, наприклад, були б пари на кшталт $(1, 5; 2, 25)$ і $(-1, 5; -2, 25)$, то навіть використання властивостей симетрії не дозволило б учневі уникнути процесу розв’язання квадратного рівняння, що й вимагалось.

Нерівності.

Завдання 5. Розв’яжіть нерівність $\frac{5}{x} \leq 6 - x$.

А	Б	В	Г
$(0; 1] \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup [1; 5]$	$[0; 1] \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; 0] \cup [1; 5]$

«Розв’язання». Застосуємо прийом угадування «Подумай і підставляй!» Очевидно, що $x = 0$ не є розв’язком даної нерівності, а тому варіанти В і Г неправильні, оскільки наведені в них множини містять точку $x = 0$.

Розглянемо довільну точку, яку містить множина розв’язків з альтернативи Б, але не містить множина розв’язків з альтернативи А і підставимо її в нашу нерівність. Нехай $x = -1$, тоді $\frac{5}{-1} \leq 6 + 1$, $-5 \leq 7$. Тобто число $x = -1$ є розв’язком даної нерівності. Отже, правильна відповідь – Б.

Коментар. Спираючись на власний досвід, скажемо читачам «по секрету», що у тестових завданнях із альтернативами розв’язок *будь-якої* нерівності можна вгадати шляхом підстановки точок у множини, наведені у варіантах відповідей.

Інша річ, скільки часу буде витрачено на те, щоб підібрати потрібні точки. Дуже бажано, щоб цей час перевищував (а ще краще – значно перевищував) час, який витратить «середній» учень на чесне розв’язування нерівності. Тобто завдання має бути такої складності, яка б по часу давала перевагу не тим учням, які підставляють точки (а хто їм може це заборонити?!), а тим, хто дійсно розв’язують нерівність.

Окрім рівня складності нерівності, важливим є також вдалий підбір альтернатив, який утруднює «гадальнику» пошук потрібних точок. Тобто потрібно, щоб для точок, які легко підставляти в початкову нерівність, було принаймні дві альтернативи, які її містять. Тоді підстановок має бути мінімум дві, що й вимагається.

Що ж стосується наведеного завдання 5, то його чесне розв’язання методом інтервалів займає доволі багато часу, а тому «гадальник» легко випередить сумлінного учня і отримає відповідь значно швидше за нього. Щоб зберегти це завдання для тесту, його можна переформулювати, наприклад, у вигляді завдання з короткою відповіддю.

Планіметрія.

Завдання 6. Знайдіть кути ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 7.

А	Б	В	Г
30° і 70°	20° і 140°	40° і 140°	80° і 280°

«Розв'язання». Звернемося до прийому вгадування «Увага! Зайва інформація!» Шукані кути ромба, очевидно, є різними, а тому вони повинні бути прилеглими до однієї сторони. За властивістю паралелограма (а отже, і ромба) сума таких кутів має дорівнювати 180° . Цю умову задовольняє лише пара 40° і 140° . Отже, правильна відповідь – **В**.

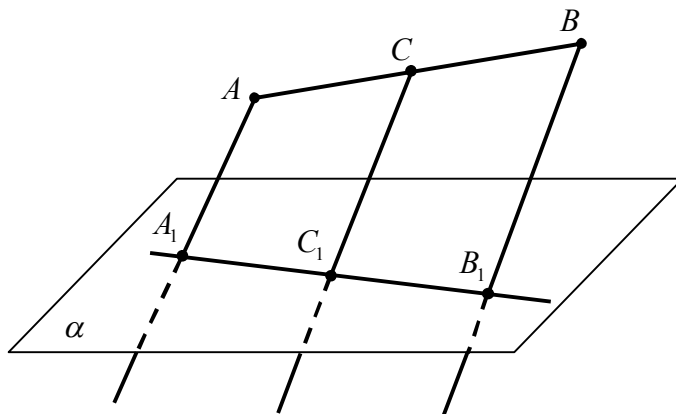
Коментар. Як бачимо, для отримання відповіді зовсім не знадобилося складати рівняння, хоч на це, скоріше за все, розраховували автори завдання. Звідки така впевненість? Давайте поміркуємо. Якби автори завдання б прагнули перевірити лише знання властивості кутів ромба, прилеглих до однієї сторони, то умова завдання могла бути сформульована, наприклад, так: «Які з наведених кутів *можуть бути* внутрішніми кутами деякого ромба?» У цьому випадку завдання ставало б якіснішим, але все одно незрозуміло, які типові помилки мали передбачати дистрактори **А** і **Б**? На нашу думку, для переформульованого завдання кращими були би такі дистрактори: **А** – 20° і 70° та **Б** – 60° і 210° .

Якщо ж повернутися до початкового варіанту формулювання завдання 9, то альтернативи до нього моли би бути, скажімо, такими:

А	Б	В	Г
20° і 70°	20° і 160°	40° і 140°	80° і 280°

Стереометрія.

Завдання 7. Через кінці відрізка AB (див. рисунок), який не перетинає площину α , та його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CC_1 , якщо $AA_1 = 12$ см, $BB_1 = 16$ см.



А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	12 см	14 см	20 см

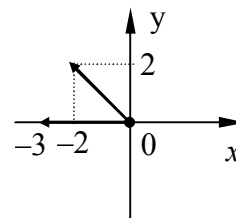
«Розв'язання». Застосуємо прийом угадування «Оцінью!» Із наведеного рисунка видно, що $AA_1 < CC_1 < BB_1$. Враховуючи умову задачі, маємо: $12 < CC_1 < 16$. Такі обмеження задовольняє лише величина 14 см із альтернативи **Г**, яка і є правильною відповіддю.

Коментар. Завдання 7 є типовим прикладом завдання, до якого штучно «приклеїли» варіанти відповідей. Важко сказати, як до цього завдання взагалі можна підібрати альтернативи, оскільки не ясно, які типові помилки можуть допустити учні під час його розв'язування.

На мою думку, найкраще переформулювати завдання 7 як завдання із короткою відповіддю, а в крайньому випадку можна навести більш правдоподібні альтернативи – скажімо, такі: 12 см, 13 см, 14 см, 15 см і 16 см.

Вектори і координати.

Завдання 8. Дано вектори $\vec{m}(-3;0)$ і $\vec{n}(-2;2)$. Знайдіть кут між векторами \vec{m} і \vec{n} .



«Розв'язання». Застосуємо прийом угадування «Малюй і дивись!». Зобразимо вектори в системі координат, відклавши їх від початку координат (див. рисунок). Бачимо, що правильна відповідь: 45° .

Коментар. Автори завдання 8 передбачали перевірити вміння учнів застосовувати формулу косинуса кута між двома векторами через скалярний добуток цих векторів. Зрозуміло, що при такому формулюванні завдання ця мета не досягається.

Щоб зробити завдання 8 більш якісним, на нашу думку, не потрібно вимагати знаходити саме *градусну міру* кута між векторами, досить обмежитися вимогою знаходження косинуса цього кута. При цьому координати векторів слід підібрати таким чином, щоб їх довжини виражалися цілими числами – наприклад, $\vec{m}(-3;4)$ і $\vec{n}(6;8)$.

Елементи стохастики.

Завдання 9. Підкинули гральний кубик. Яка ймовірність того, що випало парне число?

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$

«Розв'язання». Покладемося на інтуїцію, застосувавши прийом «Довго не думай, а перебирай!». Ось міркування гадальника: «Очевидно, що правильним є варіант відповіді **Б**! Дійсно, оскільки *будь-яка подія може або відбутись, або не відбутись*, то шанси 50 на 50. Все просто!».

Коментар. Як це не прикро визнати, але окремі учні сприймають задачі на знаходження ймовірностей подій саме так, як це наведено у «розв'язанні» завдання 9. Зрозуміло, що авторам тестових завдань слід це враховувати і, якщо це можливо, то варто уникати числа $\frac{1}{2}$ (чи 0,5 – для завдання із короткою відповіддю) у якості правильної відповіді.

Висновки. Основний підсумок цієї статті – усім розробникам тестових завдань слід дуже уважно і «з повагою» ставитися до явища вгадування відповідей до тестових завдань.

Це означає, що після появи кожного нового тестового завдання автор повинен не лише милуватися його математичною красою, новизною та оригінальністю, а і жорстко перевіряти це завдання на можливість угадування за допомогою як наведених вище, так, можливо, й інших, невідомих авторам цієї статті, прийомів.

Доволі часто після такої перевірки виявляється, що «новонароджене» завдання слід суттєво переробляти, а іноді навіть і зовсім відмовлятися від нього. Звісно, робити це прикро, але, безумовно, необхідно.

Сподіваюся, що ця стаття стане в пригоді всім, хто бажає покращити якість власних тестових завдань з математики: авторам підручників і посібників, збірників завдань до ЗНО і ДПА, а також вчителям та репетиторам, які застосовують такі завдання у своїй педагогічній діяльності.

Список використаної літератури

1. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Типи тестових завдань з математики та особливості їх побудови // Математика в школі.– 2008, №10.– С.15-24.
2. Школьний О.В. Захарійченко Ю.О. Про завдання з математики на перевірку здібностей // Математика в школі.– 2010, №11.– С.5-12.
3. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В., Захарійченко Л.І., Школьна О.В. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань.– Х.: Ранок, 2011.– 496с.
4. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Математика: Разом до вершин: навчальний посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.– К.: Генеза, 2010.– 240с.
5. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. 5 кроків до успіху. Математика: Короткий довідник з усіх розділів математики; комплект тестів різних рівнів складності; приклади розв'язування типових тестових завдань.– Х.: Ранок, 2010.– 160с.
6. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Математика: Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.– 4-те вид., переробл. і доповн.– К.: Генеза, 2011.– 96с.
7. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Тестові завдання з математики. Посібник для абітурієнтів з підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. 2-ге вид., доповн. і переробл.– К.: Вид. дім “Києво-Могилянська Академія”, 2010.– 149с.
8. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 9 кл./ О.С.Істер, О.І.Глобін, О.В.Комаренко. – К.: Центр навч.-метод. л-ри, 2011. – 112с.
9. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 11 кл./ О.С.Істер, О.І.Глобін, І.Є.Панкратова. – К.: Центр навч.-метод. л-ри, 2011. – 112с.
10. Богданова Л.Г., Кінашук Н.Л. Зовнішнє тестування. Математика: тренувальні вправи. – Х.: Гімназія, 2007. – 72с.
11. Будна О.С., Будна С.М. Математика. Репетитор. Навч. посіб. – Х.: Факт, 2008.– 224с.
12. Гальперіна А.Р., Михеєва О.Я. Математика. Типові тестові завдання. Збірник. Навч. посіб. – Х.: Факт, 2008. – 128с.
13. Гап'юк Г., Кондратьєва Л., Мартинюк С. Зовнішнє незалежне оцінювання. Математика. Навч. посіб. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. – 80с.
14. Ліпчевський Л.В. Готуємось до незалежного тестування. Математика. Збірник тренувальних вправ. – К.:Школяр, 2007. – 80с.
15. Максименко О.Ю., Тарасенко О.О. Збірник тренувальних завдань з математики для підготовки до ЗНО. – Х.: Торсінг плюс, 2007. – 96с.
16. Роганін О.М. Зовнішнє оцінювання. Математика. Зошит для підготовки. – Х.: Фактор, 2007. – 48с.
17. Роганін О.М. Збірник тренувальних вправ з математики. – Х.: Весна, 2008. – 96с.

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ ПІДГОТОВКИ МАГІСТЕРСЬКИХ РОБІТ СТУДЕНТАМИ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «МАТЕМАТИКА (ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА)»

Гончаренко Я.В.,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент,

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Розглянуто теоретико-методологічні аспекти наукової діяльності під час підготовки магістерських робіт, проаналізовано основні помилки, які виникають на різних етапах написання магістерських робіт студентами спеціальності «Математика (фінансова математика)», та вказано шляхи їх подолання.

Рассмотрены теоретико-методологические аспекты научной деятельности во время подготовки магистерских работ, проанализированы основные ошибки, возникающие на разных этапах написания магистерских работ студентами специальности «Математика (финансовая математика)», и указаны пути их преодоления.

In this paper we consider the theoretical and methodological aspects of scientific activity during the preparation of master works, analyze the main errors, that occur at various stages of writing master works by students of specialty "Mathematics (Financial Mathematics)" and find ways to overcome them.

Відповідно до Законів України "Про вищу освіту", "Про наукову і науково-технічну діяльність", науково-педагогічний працівник (викладач вищого навчального закладу, педагог вищої школи) – це особа з повною вищою освітою (яка пройшла спеціальну педагогічну підготовку і одержала освітньо-кваліфікаційний рівень магістра обраної спеціальності), яка здійснює науково-педагогічну діяльність у закладах вищої освіти у поєднанні з науковою та науково-технічною діяльністю.

Отже, фахова підготовка майбутніх науково-педагогічних працівників передбачає опанування ними вмінь і навичок науково-дослідної роботи, яку слід розглядати як джерело досвіду їх майбутньої науково-педагогічної діяльності, якого набувають студенти в процесі навчання у вищому навчальному закладі.

При цьому забезпечення принципу науковості в навчанні студентів пов'язано з розв'язанням ряду важливих педагогічних проблем. Оскільки обсяг наукових знань постійно збільшується, а проблематика ускладнюється, то чи можливо, не змінюючи строків навчання, здійснювати підготовку фахівців на сучасному науковому рівні? Нажаль на практиці підхід до вирішення цієї проблеми є чисто кількісним. Шукають методи інтенсифікації навчання, розуміючи під цим збільшення кількості засвоєного матеріалу в одиницю часу. Але, насправді, якість підготовки фахівця не виначається тільки тим, *скільки* він знає, а *як* знає, на якому рівні мислить, чи глибоко володіє методологією науки та її методами, бачить перспективи розвитку науки і чи оволодів розумовими навичками самостійно засвоювати нові наукові ідеї. Зрозуміло, що при цьому далеко не кожному науковцю (особливо початківцю) вдається зробити велике відкриття в науці. Мова йде не про це. Важливим є сам науковий пошук, вміння його організувати, розуміння суті процесу отримання нових наукових результатів.

Однією з важливих складових навчального плану будь-якої спеціальності освітньо-кваліфікаційного рівня “магістр” є написання й захист магістерської роботи, що являє собою самостійну науково-дослідну роботу студента, основними завданнями якої є демонстрація рівня наукової кваліфікації, вміння самостійно вести науковий пошук і вирішувати конкретні наукові завдання, що виконує кваліфікаційну функцію. Проте необхідно зазначити, що саме в цьому виді діяльності студенти зазнають багато труднощів.

Мета статті – розкрити теоретико-методологічні засади здійснення наукової діяльності студентами спеціальності «Математика (фінансова математика)» на різних етапах написання магістерських робіт.

Відомо, що основу методології наукової діяльності, обраної магістрантом, становить визначення наукового апарату дослідження, який є сукупністю базових структурних компонентів і параметрів магістерської роботи. Слід зазначити, що це завдання для магістранта є одним з найважчих. Саме при визначенні наукового апарату дослідження магістранти найчастіше припускаються помилок. На нашу думку, не тільки знання вимог до написання магістерської роботи, а й аналіз помилок інших магістрантів під час здійснення ними науково-дослідної діяльності, а саме визначення наукового апарату дослідження, дасть їм змогу уникнути помилок у власній роботі.

Перед тим, як визначити основні помилки магістрантів спеціальності «Математика (фінансова математика)» у формуванні наукового апарату дослідження в процесі написання ними магістерських робіт, проаналізуємо основні вимоги до нього. Зазначимо, що ці вимоги сформульовані нами відповідно до Державного стандарту України ДСТУ 3008-95 “Документація. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення”. При цьому мається на увазі те, що кандидатська дисертація відрізняється від магістерської роботи глобальністю вирішуваної в ній проблеми або завдань, глибиною та ґрунтовністю дослідження, змістовим наповненням, особистим внеском автора роботи, обсягом тощо. Разом з тим зберігається єдиний методологічний підхід до наукової діяльності, результатом якої є написання відповідних видів кваліфікаційних робіт.

Відомо, що наукове завдання чи проблема – це форма наукового знання, в якій визначаються межі достовірного та прогнозуються шляхи розвитку нового знання. Наукова проблема відображається в темі дослідження, тобто *тема магістерської роботи* являє собою наукове завдання (проблему), яке існує в теорії та практиці тієї спеціальності, з якої захищається магістерська робота.

Професор К.У. Гончаренко виділяє в педагогіці клас “вічних” проблем, таких як: мета виховання; зміст освіти; валідність оцінювання знань; опрацювання нових методів експериментального дослідження тощо [1], на які можуть звернути увагу магістранти при виборі теми магістерської роботи.

Необхідно зазначити, що вибір теми – найвідповідальніший етап у науково-дослідній діяльності магістранта. Він визначає його діяльність протягом досить тривалого часу (одного, двох, а іноді й більше років), зумовлює стратегію дослідження, яке буде покладено в основу написання магістерської роботи. Правильний вибір теми забезпечує успішне виконання магістрантом цього виду кваліфікаційної роботи, тобто її результат.

У назві магістерської роботи (темі дослідження) має бути відображено суть наукової проблеми. Серед основних критеріїв визначення теми науковці виділяють такі: актуальність, новизна й перспективність; наявність теоретичної бази; можливість виконання теми (проведення дослідження) у певному вищому навчальному закладі; зв'язок теми з конкретними господарськими планами та програмами; можливість отримання від упровадження результатів дослідження педагогічного ефекту [1, 2].

Згідно з основними вимогами ВАК України до дисертацій та авторефератів дисертацій, їх назва повинна бути: 1) по можливості, короткою (до 10 слів), але в дужках можуть додаватися 4–5 слів для її уточнення, наприклад, «Математичні методи оцінки фінансового стану підприємства (прибутковий та витратний підходи)»; 2) відповідати обраній спеціальності; 3) відповідати суті вирішеного наукового завдання (проблеми); 4) відбивати предмет дослідження; 5) вказувати на мету дослідження і його завершеність.

На підставі експертної оцінки магістерських робіт на різних етапах їх написання нами було виявлено такі *основні помилки при визначенні теми дослідження*:

- тема не актуальна;
- тема формулюється дуже «вузько», наприклад, як одне із завдань дослідження або, навпаки, занадто широко, «розмито»;
- назва магістерської роботи починається зі слова «дослідити...» (або аналогічного дієслова), що вказує на спосіб досягнення мети, а не на наукову проблему, яка є предметом дослідження;
- у назві роботи застосовується більше ніж 10 слів;

Вступ – одна з обов'язкових структурних складових магістерської роботи. У ньому розкривається сутність і стан наукової проблеми, яка в ній вирішується; її значення; формулюється інструментарій дослідження тощо. Вступ починається з формулювання *актуальності теми дослідження*, яку слід розуміти як доцільність, своєчасність і соціальну значущість роботи. Вона щільно пов'язана з темою дослідження та впливає на її визначення. Актуальність засвідчує, що в теорії та практиці науки (математики, прикладної математики, педагогіки вищої школи) є наукова проблема (завдання), яка потребує вирішення. При цьому аналізується сучасний стан дослідження даної проблеми, при потребі, вказується на основні нормативні документи, в яких, як правило, сформульовано основні напрями та перспективи розвитку освіти, забезпечення її якості тощо. Крім того, обґрунтовується необхідність проведення дослідження в обраній галузі, визначаються аспекти проблеми, що залишилися недослідженими.

Дослідження вважається актуальним і доцільним, якщо проблема, яка розв'язується в ньому, відповідає потребам науки та практики та дає змогу заповнити прогалини в науці, які потребують термінового усунення. Як правило, ці прогалини виникають там, де існують суперечності (між потребами життя й реалізацією цих потреб на практиці, між запитам практики й обмеженими можливостями теорії). Наприклад, суперечність між потребою сучасної економіки в адекватних математичних моделях та методах дослідження складних реальних процесів та явищ і застосуванням традиційних дещо застарілих методів, що не відповідають сучасному розвитку науки.

Висвітлюючи актуальність дослідження, магістранту необхідно визначити суперечності, які підлягають розв'язанню саме в його роботі.

Практика роботи у вищому навчальному закладі засвідчує, що *основні помилки магістрантів при визначенні актуальності дослідження такі:*

- визначається, хто і що зробив, однак не вказується, в чому саме полягає невирішена проблема (завдання);
- не визначається, які саме проблеми вирішуються завдяки дослідженню магістранта;
- наводиться дуже багато прізвищ тих, хто займався вивченням окремих питань проблеми, яку визначено магістрантом. При цьому «перемішуються» провідні науковців з тими, хто ще тільки починає свою науково-дослідну роботу у відповідному напрямі;
- наводиться великий обсяг інформації, в якому «тонуть» основні думки.

Мета дослідження залежить від теми дослідження, актуальності проблеми, що досліджується, об'єкта і предмета дослідження. Формування мети відображає кінцевий (запланований) результат наукової роботи, те, чого бажає досягнути магістрант у результаті проведеного ним дослідження. Мета спрямовує його науковий пошук на одержання нових знань і є одночасно результатом цієї цілеспрямованої діяльності. Вона пов'язана з предметом дослідження, але не повторює його, а вказує на його реалізацію.

Поставленої в роботі мети необхідно обов'язково досягти, це має бути відображено у висновках.

Наведемо приклади коректно сформульованої мети: розробити, науково обґрунтувати та апробувати макроекономічну динамічну математичну модель на прикладі оцінки інноваційної діяльності підприємства.

Основні помилки магістрантів при формулюванні мети дослідження:

- ототожнення її з одним із завдань дослідження;
- на початку речення використовуються такі слова, як “дослідити...”, “вивчити...”, що вказує на спосіб досягнення мети, а не на саму мету.

Загальна мета дослідження має бути конкретизована в системі завдань дослідження.

Завдання дослідження – це наукові завдання, які необхідно вирішити, щоб досягнути мети дослідження. Вони взаємопов'язані між собою і з метою, однак мета є визначальною під час визначення наукових завдань. Отже, завдання дослідження співвідносяться з метою як часткове і загальне.

Зазначимо, що завдання дослідження треба ставити в тому порядку, в якому передбачається їх вирішення; і так, щоб кожне наступне завдання логічно впливало з попереднього.

Формулювання завдань дослідження завжди має починатись з дієслова майбутнього часу, що в цьому випадку означає дію магістранта, спрямовану на вирішення конкретного наукового завдання, яке дасть змогу поряд з іншими завданнями досягти мету дослідження. Наприклад: “охарактеризувати...”, “проаналізувати...”, “встановити...”, “визначити...”, “виявити...”, “науково обґрунтувати ...” (модель, технологію, методику, нові форми занять, засоби тощо).

Основні помилки магістрантів під час формулювання завдань дослідження:

- застосовується термін “дослідити...”, проте в цьому випадку не можна перевірити кінцевий результат виконання завдання;
- завдання плутають з метою та формулюють його дуже широко;
- ставиться велика кількість завдань; для магістерської роботи достатньо сформулювати 3–4 наукові завдання;
- завдання дослідження не пов’язані з метою дослідження й не сприяють її досягненню;
- завдання дослідження не пов’язані одне з одним і сформульовані не в тому порядку, який передбачено проведенням дослідження;
- завдання дослідження неконкретні, у них не відображається, навіщо досліджувати деяке явище чи процес.

Формулювання об’єкта та предмета дослідження для магістрантів є найпроблематичнішим завданням, яке потребує допомоги керівника магістерської роботи або досвідченого фахівця. Для його вирішення необхідно розібратися з їх визначенням і взаємозалежністю.

Так, *об’єкт дослідження* – це процес або явище, що породжує проблемну ситуацію й обране для вивчення. Він являє собою сферу пошуку магістранта в галузі математики, прикладної математики або педагогіки вищої школи.

Об’єкт дослідження тісно пов’язаний з *предметом дослідження*, який виступає частиною об’єкта, певною його стороною, його досліджуваною якістю та галуззю. Це те, на що спрямоване дослідження магістранта, те, що відбиває його мету. Предмет дослідження визначає тему магістерської роботи, її назву, і за змістовим наповненням вони дуже близькі.

Об’єкт дослідження відноситься до предмета дослідження як загальне до часткового.

Наприклад, якщо об’єкт дослідження – макроекономічні динамічні моделі, то предметом дослідження можуть бути математичні методи побудови та дослідження макроекономічних динамічних моделей.

Основні помилки магістрантів при формулюванні об’єкта й предмета дослідження:

- не пов’язують між собою ці дві наукові категорії;
- визначаються два об’єкти або два предмети дослідження (обидві категорії формулюються дуже широко або дуже вузько);
- міняють місцями об’єкт дослідження з предметом;
- замість предмета дослідження вказують мету дослідження;
- замість об’єкта дослідження визначають його суб’єкт.

Позиція автора щодо досліджуваної ним проблеми виражається в гіпотезі.

Гіпотеза – це припущення (прогнозування), яке використовується для пояснення якогось явища, істинне значення якого ще не визначено. Вона є необхідною в кваліфікаційних роботах, де має місце експеримент, і потребує перевірки. Гіпотеза має бути простою і не викликати суперечностей.

Основні помилки магістрантів при формулюванні гіпотези дослідження:

- вона зовсім відсутня в роботах експериментального характеру;

- гіпотеза сформульована так, що не можна зрозуміти, як хоче магістрант досягти мети дослідження;
- між положеннями гіпотези немає зв'язку, вона формалізована;
- у гіпотезі намагаються зробити припущення того, що й без експериментальної перевірки і так зрозуміло.

Формулювання методологічної та теоретичної основи дослідження передбачає вказівку на ті теоретичні та методологічні положення, які покладено в основу науково-педагогічної діяльності магістранта, на які він спирається як на аксіому. Вони мають бути загальноновизнаними і не викликати ніякого сумніву.

Основні помилки магістрантів під час формулювання методології й теоретичної основи дослідження:

- перелічуються навіть ті положення, які не мають ніякого стосунку до роботи магістранта;
- вказується на науковців, які ще нічого в науці не зробили, а тільки починають свій науковий шлях;
- вказуються на ті наукові положення, які викликають багато нарікань з боку провідних учених.

Для вирішення поставлених у науковій роботі завдань дослідження й досягнення його мети використовується комплекс методів дослідження (способів, за допомогою яких магістрант вирішує поставлені завдання). Перелічувати їх необхідно коротко, поєднавши в декілька груп (теоретичні, емпіричні, математичні) і зазначити, що саме досліджував і за допомогою кожного із цих методів. Це підкреслює логічність або нелогічність обраних магістрантом методів дослідження.

Основні помилки магістрантів при формулюванні методів дослідження:

- вони тільки перелічуються без вказівки на те, з якою метою той чи інший метод застосовували;
- не звертається увага на методи теоретичного плану, за допомогою яких опрацьовується наукова та науково-методична література;
- не вказуються методи, які дають змогу виявити ефективність проведеної дослідником експериментальної роботи (методи математичної статистики);
- іноді плутають методи дослідження та методи навчання й виховання.

Питання новизни дослідження є одним з найбільш суперечливих і складних. *Новизна дослідження* – це нові наукові положення (рішення), запропоновані магістрантом. Вона вказує на відмінність отриманих ним результатів від відомих раніше. Новими можуть бути тільки ті положення дослідження, що сприяють подальшому розвитку математичної науки або окремих її застосувань. Новизна визначає, що зроблено вперше, що розширено й доповнено, конкретизовано й уточнено, поширено й переведено на новий клас систем, об'єктів, що перетворено й докорінно змінено, що дістало подальшого розвитку.

При формулюванні новизни бажано вживати такі словосполучення як: «вперше доведено ...», «розроблено метод, який відрізняється від...», «вдосконалено (узагальнено, поглиблено, поширено)... (відомий) метод...», «створено концептуальне положення, що

узагальнює й розвиває...», «отримано новий ефект...», «розроблено нову систему...», «вперше застосовано...». визначаються три рівні новизни: 1) що зроблено вперше; 2) що розширено й доповнено, конкретизовано й уточнено; 3) що дістало подальшого розвитку

Основні помилки магістрантів при визначенні новизни дослідження:

- новизна підміняється актуальністю, теоретичною або практичною значущістю дослідження;
- немає зв'язку між новими результатами й тим, що було одержано раніше, наявне в науковій та науково-педагогічній літературі;
- новизна приписується вже відомим фактам або явищам;
- положення новизни формулюються як анотація.

На думку багатьох науково-педагогічних працівників вищих навчальних закладів «у цьому пункті загальної характеристики роботи, а саме, новизни дослідження, автори здебільшого вдаються до простого перерахування отриманих ними наукових положень» [3, с.4].

За вимогами ВАК України, «у дисертації, що має теоретичне значення, треба подати відомості про наукове використання результатів досліджень або рекомендації щодо їх використання. Якщо робота має прикладне значення необхідно подати відомості про практичне застосування одержаних результатів або рекомендації, як саме їх використати» [5]. Отже, у роботі необхідно відзначити теоретичну й практичну цінність здобутих результатів.

Теоретичне значення дослідження визначає, що розроблено й обґрунтовано в теоретичному плані, чим збагачений зміст науки (математики, педагогіки), що створено та обґрунтовано з точки зору застосування математичних методів або методики навчання, які особливості теоретичних положень встановлені, що підлягало теоретичному обґрунтуванню (наприклад, теоретично обґрунтована технологія навчання).

ВАК України відзначає, що «до результатів реалізації дисертаційної роботи відносяться: розроблені теорії, принципи, методи, критерії, інструкції, методичні вказівки і розробки, навчальні курси, програми, методики аналізу, синтезу, визначення педагогічних вимог або умов; моделі, стенди; педагогічні процеси або обладнання тощо». Все вище зазначене має забезпечувати повний ефект (науковий, виробничий, навчальний, соціальний тощо).

Зауважимо, що багатьох описаних помилок можна уникнути, якщо на етапі вибору та затвердження теми магістрантам буде запропоновано не тільки формулювання теми та список рекомендованої літератури, а розгорнуте обґрунтування та орієнтовний план роботи, який міститиме основні змістові лінії майбутнього дослідження. Наведемо приклад такого обґрунтування теми для студентів спеціальності «Математика (фінансова математика)».

Тема. Багатоцільові багатокритеріальні моделі

Проблема прийняття рішень (вибору стратегій) в економіці виникає через дві принципові обставини: з одного боку, багатоваріантність економічних рішень, з другого — цілеспрямованість (людські прагнення) економічних систем і зумовлений цим ризик. Множина альтернативних варіантів рішень (стратегій) визначається наявними можливостями економічного розвитку; вибір з цієї множини (а він завжди існує) диктується цілями певної

економічної системи. Рішення (стратегія), що приймається, являє собою результат сумісного розгляду цілей і можливостей та узгодження їх.

Найбільш загальні моделі, що переважно використовуються в економічному аналізі, носять якісний характер і або фіксують результати порівняння альтернативних рішень (стратегій) з точки зору цілей економічної системи, або явно аналітично описують результати вибору з множини альтернативних рішень. Ціль описується у першому випадку у вигляді бінарних відношень на множині альтернативних рішень і станів економічного середовища, у другому — функцією виграшу (цільовою функцією).

Поряд з якісним описом цілей як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці економіко-математичного моделювання поширені кількісні моделі. Найпростішою та найбільш розповсюдженою моделлю такого типу є цільова функція (у дискретному випадку — функціонал оцінювання), яка зіставляє кожне альтернативне рішення та стан економічного середовища з дійсним числом.

Побудова цільової функції (функціонала оцінювання) економічної системи — досить складна задача. Причини проблем, що виникають під час побудови, зумовлені складним, багатовимірним характером цілей соціально-економічного розвитку, кінцевих результатів економічної діяльності, які стосуються різних складових соціально-економічного буття. А тому замість узагальненої цілі доводиться розглядати систему цілей (векторну цільову функцію), виділяючи в якості її складових більш прості часткові цілі, моделювання яких шляхом побудови цільових функцій (функціоналів оцінювання) вже не є таким проблематичним.

Орієнтовний план роботи

1. Поняття про багатоцільову багатокритеріальну модель.
2. Теоретико-ігровий підхід до аналізу багатоцільових моделей.
3. Критерій мінімальної відстані між інформаційними кубами.
4. Ієрархічна модель прийняття багатоцільових багатокритеріальних рішень.
5. Приклади багатоцільових задач прийняття рішень.
6. Методика вивчення багатоцільових багатокритеріальних моделей студентами економічних спеціальностей у ВНЗ.

Отже, результати проведеного аналізу теоретико-методологічних засад проведення наукових досліджень магістрантами спеціальності «Математика (фінансова математика)» на різних етапах написання магістерських робіт дають змогу зробити такі висновки:

1. Магістерські роботи студентів спеціальності «Математика (фінансова математика)» за своїм рівнем підготовки загалом мають відповідати вимогам ВАК України, що висуваються до написання дисертацій та авторефератів дисертацій, проте відрізняються від них глобальністю вирішуваної проблеми (завдання), глибиною і ґрунтовністю дослідження, змістовим наповненням і обсягом, особистим внеском автора роботи тощо. Визначення науково-методичного апарату дослідження для магістрантів є найбільш складним завданням.

2. Аналіз помилок магістрантів спеціальності «Математика (фінансова математика)» при формулюванні наукового апарату дослідження дав можливість визначити такі основні

шляхи їх виправлення, які одночасно можна вважати рекомендаціями магістрантам і керівникам магістерських робіт:

- магістранти та науково-педагогічні працівники повинні ретельно вивчати й дотримуватися сучасних вимог до написання магістерських робіт;
- необхідна ретельна індивідуальна робота керівників магістерських робіт з магістрантами щодо відпрацювання наукового апарату дослідження;
- необхідно активно обговорювати вищезазначені питання на засіданнях наукових гуртків, семінарах і конференціях для набуття магістрантами досвіду відпрацювання базових структурних компонентів магістерської роботи, який можна розглядати як стартовий майданчик для їх подальшої більш вагомої науково-дослідної роботи, що, можливо, завершуватиметься написанням кандидатських і докторських дисертацій;
- у роботі наукових гуртків і на заняттях з дисципліни “Методологія наукових досліджень” слід широко застосовувати взаємоаналіз магістрантами наукового апарату дослідження, з подальшим визначенням помилок з метою їх усунення на різних етапах написання магістерських робіт.

Список використаної літератури

1. Гончаренко С.У. Педагогічні дослідження : методологічні поради молодим науковцям. – К. : Вінниця : ДОВ “Вінниця”, 2008.
2. Ковальчук В.В. Основи наукових досліджень : навч. посіб. / В.В. Ковальчук, Л.М. Моїсєєв. – К. : Професіонал, 2004.
3. Підготовка дисертацій. Експрес аналіз якості. Керівництво для експертів та наукових керівників / А.Т. Ашерев. – Х. : Кортес-2002, 2008.
4. Основні вимоги до дисертацій та авторефератів дисертацій // Бюлетень ВАК України. – 2008. – № 6.

**Правила оформлення та подання авторських оригіналів статей
до збірника наукових праць
«Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 3.
Фізика і математика у вищій і середній школі»**

1. До друку приймаються неопубліковані раніше матеріали, які відповідають тематиці збірника науковий праць та задовольняють вимогам ВАК України (Постанова президії ВАК України від 15.01.2003 р. № 7-05/1. Бюлетень № 1, 2003, с. 2: „Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України”).
2. Авторський оригінал подається в одному примірнику (на білому папері формату А4 з одного боку аркуша) разом із *електронним варіантом статті* (назва файлу — прізвище автора) та *рецензією* (для кандидатів та докторів наук — доктора наук з відповідної спеціальності, для студентів, аспірантів, здобувачів — кандидата або доктора наук з відповідної спеціальності). Оригінал має бути представлений українською мовою. Паперовий варіант, підписаний автором, ідентичний електронному варіанту. Відповідальність за точність цитат, прізвищ, даних несе автор.
3. Відомості про автора (-ів) подаються на окремому аркуші: прізвище, ім'я, по батькові, вчений ступінь та звання, місце роботи, посада, місто, телефон, e-mail.
4. Послідовність розміщення матеріалу статті:

НАЗВА СТАТТІ

*Прізвище та ініціали автора,
науковий ступінь, вчене звання,
місце роботи*

Анотація українською мовою (не більше 75 слів).

Анотація російською мовою.

Анотація англійською мовою.

Текст статті.

Список використаної літератури

згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1:2006.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 8—10 с., враховуючи таблиці, ілюстрації, список використаної літератури. Статті, більші за обсягом, можуть бути прийняті до розгляду на підставі рішення редколегії.

5. Вимоги до оформлення:

- Текст має бути набраний у текстовому редакторі Microsoft Word (версії 97, 2000, 2003). Шрифт — Times New Roman, кегль — 12. Поля — 20 мм. Міжрядковий інтервал — 1,25. Абзац — 15 мм.
- Не використовувати примусовий та ручний перенос слів. Автоматично встановлювати заборону висячих рядків. Не встановлювати відступ (абзац) першого рядка табуляцією або декількома проміжками. Заголовки відокремлювати від тексту зверху і знизу одним пустим рядком. Слова мають бути розділені одним проміжком.

Посилання на використану літературу в тексті позначаються цифрою у квадратних дужках.

- Таблиці слід представляти безпосередньо в тексті. Вони мають бути пронумеровані арабськими цифрами і мати заголовки українською мовою. Примітки та виноски до таблиць повинні бути надруковані безпосередньо під відповідною таблицею.
- Ілюстративний матеріал слід вміщувати в текст, а також подавати окремим файлом в растровому форматі JPEG з розподільною здатністю не менше ніж 300 dpi.
- Таблиці, ілюстрації не повинні виходити на поля. Підписи до них повинні мати одні й ті самі стилі оформлення, як у всій статті.

Вимоги ВАК України до оформлення наукової статті на здобуття вченого ступеня

Згідно з постановою № 7-05/1 ВАК України від 15.01.2003 р. (див. "Бюлетень ВАК України" № 1/2003) до друку приймаються лише ті наукові статті (науковою вважається стаття, яка містить результат теоретичного або експериментального дослідження і призначена для наукового видання), які мають такі необхідні елементи:

1. Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.
2. Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми, на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття.
3. Формулювання мети статті (постановка завдання).
4. Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.
5. Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі.

До уваги авторів

- Паперовий варіант статті подається технічному редактору збірника Дерев'янку Ользі (кафедра загальної фізики НПУ імені М.П.Драгоманова). Електронний варіант статті подається або особисто, або може бути надісланий електронною поштою на адресу chasopys3@npu.edu.ua або chasopys3@ukr.net. *Лише електронні варіанти статей без паперового оригіналу не розглядатимуться!*
- Авторський оригінал повинен бути завершеним твором і не може доопрацьовуватись автором після прийняття редакцією.
- Статті, що не відповідають викладеним вимогам, редакцією не приймаються. Оригінали, не прийняті до опублікування, авторам не повертаються.
- Редакція має право робити редакційні правки, які не впливають на зміст тексту.
- За необхідності автор може бути запрошений в редакцію для ознайомлення з коректурою або йому з цією метою електронною поштою відправляється стаття.
- Гонорар за публікації не виплачується.
- Вартість публікації визначається в залежності від умов фінансування видання збірника і на 2012 рік встановлюється у розмірі 20 грн. за сторінку.

Наукове видання

НАУКОВИЙ ЧАСОПИС
НПУ імені М.П.ДРАГОМАНОВА

Серія 3. Фізика і математика у вищій і середній школі.

Випуск 9

Друкується в авторській редакції з оригінал-макетів авторів.

Редколегія не завжди поділяє погляди авторів статей.

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей.

Матеріали подано мовою оригіналу.

Головний редактор В.П.Андрущенко

Відповідальні редактори М.І. Шут, М.В.Працьовитий

Заступники відповідальних редакторів В.П. Сергієнко, В.Г. Бевз

Відповідальні секретарі О.В.Шкільний, Л.В. Мініч

Технічний редактор О.С.Дерев'янка