МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Науковий часопис

НАЦІОНАЛЬНОГО ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА

СЕРІЯ 3

ФІЗИКА І МАТЕМАТИКА У ВИЩІЙ І СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

ВИПУСК 5

Київ 2009

УДК 327.851: 372.853

НАУКОВИЙ ЧАСОПИС НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. наукових праць – К.:НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – № 5. – 225с.

У часописі розглядаються актуальні питання викладання фізики і математики у вищій школі, висвітлюються актуальні проблеми методики навчання фізики і математики у загальноосвітніх закладах та пропонуються шляхи їх вирішення.

Свідоцтво про державну *реєстрацію друкованого засобу масової інформації*
КВ № 8809 від 01.06.2004 р.

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради
НПУ імені М.П. Драгоманова

ISBN

Зміст

Фізика

Шут М.І., Шарко В.Д. *Навчання учнів природничо – математичних дисциплін у профільній школі як методична проблема…………………………………………………………………………..***5**

Благодаренко Л.Ю. *Реалізація освітніх цілей розділу «Світлові явища» за підручником фізики для 7 класу………………………………………………………………………………*…

Бурдейна Н.Б. *Наступність у фундаментальній і професійній підготовці студентів вищих будівельних навчальних закладів…*…………………………………………………………..

Кучменко О.М. *Експериментально-практичний навчальний комплекс як засіб активації самостійної роботи студентів педагогічних університетів при вивченні курсу загальної фізики…*……………………………………………………………………………………….

Кузьменко Г.М. *Методичні підходи до реалізації контекстного навчання фізики у вищих технічних навчальних закладах*…………………………………………………………..

Мініч Л.В. *Підвищення загальноосвітньої підготовки учнів основної школи в процесі гурткової роботи…*…………………………………………………………………………..

Покутній С.І., Бойко Г.М. *Квантоворозмірний екситон в напівпровідникових квантових точках…*……………………………………………………………………………………

Шут М.І., Шут А.М., Форостяна Н.П. *Історичний опис розвитку механіки машин………..***45**

Математика

Борисов Є.М., Борисова Л.Є. *Про одну числову характеристику випадкової величини……*.**55**

Гончаренко Я.В., Ляшко О.В. *Сучасна економетрія як наука і навчальна дисципліна*…….**61**

Гончаренко Я.В., Шкарін О.О. *Прикладна та професійна спрямованість математичної підготовки молодших спеціалістів геодезичних спеціальностей в професійних коледжах….***68**

Деканов С.Я. *Вивчення інтеграла Рімана з використанням скм Maxima………………………***75**

Залізко В.Д. *Використання елементів автогогіки під час вивчення математичного аналізу………………………………………………………………………………………***105**

Курченко О.О., Рябець К.В. *Два узагальнення теореми Коші для диференційованих функцій у курсі математичного аналізу……………………………………………………………*

Ленчук І.Г., Михайленко В.Є. *Професійна підготовка студентів засобами пізнавально – візуального навчання азам позиційної стереометрії………………………………………….*

Панченко Л.Л., Шаповалова Н.В. *Система контролю знань з математичного моделювання………………………………………………………………………………..*

Піхтар М.П. *Підхід «Листків» в гуртковій роботі з учнями Малої Академії наук………..*

Харламова Л.Д., Петров В.В. *Специфіка навчання курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» студентів технікумів (коледжів) в аспекті вимог компетентнісної освіти…….*

Чепорнюк І.Д. *Вивчення основних понять теорії інформації у курсі теорії ймовірностей…..*

Швець Л.В. *Психолого – дидактичні передумови формування і розвитку в старшокласників графічних вмінь під час вивчення стереометрії………………………………………………..*

Школьний О.В. *Різні аспекти тлумачення поняття «Якість освіти»……………………….*

Фізика

НАВЧАННЯ УЧНІВ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ПРОФІЛЬНІЙ ШКОЛІ ЯК МЕТОДИЧНА ПРОБЛЕМА

Шарко В.Д.
доктор педагогічних наук наук, професор
Херсонський державний університет
Шут М.І.
доктор фіз.- мат. наук, професор
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,

Проведено аналітичний огляд виступів учасників Всеукраїнської науково-практичної конференції «Особливості навчання учнів природничо-математичних дисциплін у профільній школі», яка відбувалась у Херсонському державному університеті. Увагу акцентовано на актуальних проблемах профільного навчання, вибору учнів профілю навчання, на завданнях вчителів із реалізації основних вимого диференційованого навчання.

Проведен аналитический обзор выступлений участников Всеукраинской научно-практической конференции «Особенности обучения учащихся естественно-математических дисциплин в профильной школе», которая проходила в Херсонском государственном университете. Внимание акцентировано на актуальных проблемах профильного обучения, выбора учащихся профиля обучения, на задачах учителей по реализации основных требований дифференцированного обучения.

Ukrainian scientific conference "Features of student learning natural and mathematical sciences in school it", held at Kherson State University. The attention paid to actual problems of specialized education, students are selecting students on the problems of teachers with the basic requirements of differentiated instruction.

Розпочата в Україні реформа шкільної середньої освіти передбачає впровадження рівневої і профільної диференціації. У зв’язку з цим, особливої актуальності набувають проблеми, пов’язані з їх реалізацією у практиці навчання учнів усіх шкільних дисциплін, у тому числі й природничо-математичних.

Запровадження профільного навчання у старшій школі почалося у 2010-2011 навчальному році. Попередній навчальний рік був підготовчим до реалізації цього складного завдання і передбачав підсилення уваги всіх працівників освітньої галузі до переходу шкіл на профільне навчання. До початку цього навчального року вчителі повинні були з’ясувати відмінності профільного навчання від традиційного; визначити свої обов’язки в реалізації навчального процесу, побудованого на засадах диференційованого підходу; визначитись із вибором профілів та створенням умов для їх забезпечення.

Вивчення стану підготовки вчителів природничо-математичних дисциплін до розвязання зазначених завдань та здійснення нових напрямів діяльності, повязаних із упровадженням профільного навчання, засвідчило, що в більшості шкіл готовність педагогів до переходу на профільне навчання знаходиться на початковому рівні. Труднощі, з якими зустрілись учителі на початку цього навчального року поглибились відсутністю підручників для кожного із запропонованих профілів навчання природничо-математичних дисциплін та методичних рекомендацій стосовно роботи з ними, а також запізненням інститутів післядипломної освіти щодо організації системи підготовки вчителів до роботи у профільних класах.

16-18 вересня 2010 року у Херсонському державному університеті кафедрою фізики факультету фізики, математики та інформатики була проведена Всеукраїнська науково-практична конференція "Особливості навчання учнів природничо-математичних дисциплін у профільній школі", яка мала на меті виявити основні проблеми, повязані з переходом школи на профільне навчання та визначити завдання науковців і практиків у їх розвязанні.

У роботі конференції взяли участь 102 представника різних навчальних закладів України, серед яких: 12 докторів наук, професорів з провідних університетів України; 3 докторанти; 46 кандидатів наук, доцентів; понад 40 викладачів вищих навчальних закладів України, вчителі загальноосвітніх навчальних закладів та аспіранти кафедр методик навчання природничо-математичних дисцплін. У обговоренні актуальних проблем природничо-математичної освіти прийняло участь 87 науковців із інших міст України.

На пленарному засіданні було представлено 13 доповідей, серед яких дві були пов'язані з висвітленням змісту і особливостей роботи вчителів природничо-математичних дисциплін в умовах переходу школи на профільне навчання (академік НАПН України, д.ф-м.н, професор, зав.кафедри загальної та прикладної фізики НДПУ імені М.П.Драгоманова М.І.Шут, д.п.н., професор, зав.кафедри фізики Херсонського ДУ В.Д.Шарко,); Частина доповідей стосувалися проблем проектування педагогічних середовищ, повязаних із вивченням природничо-математичних дисциплін, які розкривали різні їх аспекти: структуру навчальних середовищ, підручники як змістовий компонент середовища, комп'ютерне забезпечення навчального процесу. Це зокрема доповіді (д.п.н., професора, завідувача кафедри методики навчання фізики і астрономії НПУ імені М.П. Драгоманова Сиротюка В.Д.; д.п.н. доцент кафедри методики викладання фізики та дисциплін технологічної освітньої галузі Кам'янець-Подільського національного університету ім.І.Огієнка В.В. Мендерецького; к. п. н., доцент кафедри загальної та прикладної фізики НПУ імені М.П. Драгоманова, докторанта Л.Ю. Благодаренко , к.ф-м.н, доцента, зав.кафедри фізики Криворізького державного педагогічного університету, к.ф-м.н, доцента, зав.кафедри фізики ХДУ С. Кузьменкова, д.п.н., професор кафедри загальної та теоретичної фізики НТУ «КПІ» та інші).

Особливий інтерес в учасників конференції викликали доповіді і презентації результатів досліджень науковців з проблеми підручників для 10 класу профільної школи, комп'ютеризації навчального процесу з природничо-математичних дисциплін, розвитку творчих здібностей учнів і студентів, сучасних засобів навчання та методики їх використання у навчальному процесі профільної школи.

У ході роботи чотирьох секцій було заслухано та обговорено 68 доповідей, у яких висвітлювалися питання, пов'язані з психолого-педагогічними засадами профільного навчання учнів природничо-математичних дисциплін, підготовкою вчителів до навчання учнів природничо-математичних дисциплін у профільній школі, особливостями реалізації диференційованого підходу до навчання учнів природничо-математичних дисциплін у класах і закладах різних профілів, розкриттям можливостей комп’ютера як засобу профільного навчання учнів природничо-математичних дисциплін

Учасники конференції відзначили, що:

- спрямованість національної системи освіти на розвивальний, особистісно-зорієнтований характер пізнавальної діяльності учнів, орієнтованої на підготовку випускників ЗНЗ до свідомого вибору професії, спонукає до необхідності створення таких умов навчання, які б акумулювали у собі найважливіші ознаки процесу, побудованого на засадах диференційованого підходу до навчання, а саме: зосередження уваги на пізнавальних потребах учнів; діагностичній основі навчання; зорієнтованості змісту освіти на формування в учнів предметних, міжпредметних і ключових компетентностей, раціонально-логічне та емоційно-ціннісне його сприйняття; пристосування технологій навчання до пізнавальних можливостей школярів; стимулювання розвитку та саморозвитку кожного учня;

- українськими педагогами та науковцями здійснена значна робота з розробки нових підходів до організації навчального процесу у профільних класах та підготовки вчителів природничо-математичних дисциплін до його проектування; накопичено позитивний досвід із розробки навчальних середовищ, орієнтованих на засвоєння учнями і студентами матеріалу з природничо-математичних дисциплін на різних рівнях складності;

- сучасний стан розвитку середньої і вищої школи вимагає підсилення уваги до проблеми особливостей навчання учнів природничо-математичних дисциплін у профільній школі та створення належних умов для навчання, що обумовлює необхідність внесення необхідних коректив до методичної підготовки майбутніх учителів;

- методична підтримка профільного і рівневого навчання учнів пов’язана з трьома аспектами діяльності вчителя: *змістовим, процесуальним і управлінським. Змістовий аспект* методичної діяльності вчителя пов’язаний з аналізом навчальних планів, навчальних програм, нових підручників та навчальних посібників для учнів і вчителів, вивченням методичних рекомендацій та розробкою власних дидактичних матеріалів із реалізації диференційованого підходу до організації навчання школярів у класах стандартного, академічного та профільного рівнів. *Процесуальний аспект* пов’язаний з вибором відповідних методів, форм і засобів діяльності учнів із засвоєння навчального матеріалу в умовах профільної і рівневої диференціації. Здійснення вчителем *управління* диференційованим навчанням учнів вимагає від нього виконання наступних процедур:, зокрема діагностування, прогнозування, планування організації навчальної діяльності учнів із засвоєння матеріалу, контроль навчальних досягнень учнів із метою проведення їх наступної корекції, контроль і оцінювання результатів пізнавальної діяльності;

- завдання вчителя з реалізації основних вимог профільного навчання полягають у методичному забезпеченні: підготовки учнів до вибору профілю; змістової і процесуальної підтримки обраного учнями профілю навчання; внутрішньої професійної спеціалізації; задоволення пізнавальних інтересів школярів; поглиблення і розширення змісту предмету. Розвязання цих завдань неможливе без спеціальної підготовки вчителя, яка повинна включати:

- підготовку до здійснення рівневої диференціації;
- підготовку до здійснення профільної диференціації;

- підготовку до передпрофільного навчання учнів;
- підготовку до викладання елективних курсів;
- підготовку до використання НІТ і ТЗН в умовах профільного навчання;
- підготовку до проведення незалежного тестування в умовах профільного навчання;

- зміст підготовки вчителя до реалізації передпрофільного навчання передбачає: розвиток в учнів мотивації до обраного профілю; навчання предметів, які є базовими для обраного профілю, на компетентнісній основі; включення до навчального процесу матеріалів, які можуть розвинути інтерес до професій, пов’язаних із профілем; запровадження в навчальному процесі психолого-педагогічного супроводу учнів, проведення діагностування їх нахилів і здібностей; включення до навчального плану курсів за вибором, які орієнтують учнів на обрання відповідного профілю навчання; максимальне використання під час навчання видів діяльності, характерних для предметів майбутнього профілю;

- реалізація завдань профільного навчання визначає нові напрями в діяльності вчителя у профільній школі. Зокрема, до нових напрямків входять: *інфорамаційний,* пов'язаний з пошуком, збиранням і збереженням інформації про професії, навчальні заклади, робочі місця та ін.; *діагностичний*, що передбачає оволодіння методиками психологічного тестування професійно важливих якостей учнів, здібностей, інтересів, аналіз їх можливого застосування у майбутній професії; *професіографічний,* пов'язаний зі створенням методик аналізу і виявлення вимог різних професій до людини; *консультаційний*, що передбачає пошук, створення і систематизацію методик групового й індивідуального консультування з питань вибору професії та майбутнього професійного навчання; *освітній,* що має на меті оволодіння методиками професійно спрямованого навчання, яке включає поглиблене вивчення профільних галузей, імітаційне моделювання узагальнених видів діяльності (математичної, інформаційної, інженерної, економічної, художньо-естетичної та ін) під час вивчення природничо-математичних дисциплін.

У виступах учасників конференції зверталась увага на те, що:

- перехід на профільне навчання є необхідною умовою підготовки учнів до свідомого вибору майбутньої професії та подальшого опанування програми вищої професійної освіти; поглибленого вивчення тих предметів, які пов’язані з обраними професіями і дають можливість забезпечити наступність між середньою і спеціальною освітою; забезпечення рівного доступу до повноцінної освіти різним категоріям учнів;

- вибір профілю навчання має здійснюватися з урахуванням: підготовки вчителя до навчання учнів за відповідним профілем; матеріальної бази школи, необхідної для навчання учнів за програмою обраного профілю; інтересів учнів та ступеня їх готовності до навчання за даним профілем, що визначаються психологом і вчителями; побажань батьків;

- запровадження у старшій школі профільного навчання пов’язане з низкою проблем організаційного і методичного характеру. Підставами для виникнення проблем організаційного характеру є відсутність у багатьох школах паралельних класів та мале їх наповнення, що не дозволяє відкривати у таких школах повноцінні профільні класи. Підґрунтям для появи методичних проблем є неготовність більшості вчителів до реалізації підготовчого і основного етапів цього складного процесу, відсутність підручників для кожного з виділених профілів, відсутність переліку елективних курсів до кожного профілю та ін.;

- переважна більшість пропозицій щодо розв’язання організаційних проблем, пов’язаних із переходом на профільне навчання, пов’язана з кооперуванням сільських або міських шкіл. Одним із можливих варіантів організації профільного навчання, який дозволяє здійснювати навчання учнів за профілями у межах однієї школи (у тому числі й малокомплектної), є такий, що поєднує внутрішню (рівневу) і зовнішню (профільну) диференціації;

- завдання вчителя з реалізації основних вимог диференційованого навчання, яке виступає теоретичною основою навчання учнів у профільних класах, полягають: <u>у випадку профільної диференціації</u> – методичному забезпеченні змістової і процесуальної підтримки обраного учнями профілю навчання, внутрішній професійній спеціалізації, задоволенні пізнавальних інтересів школярів, поглибленні і розширенні змісту предмету; <u>у випадку рівневої диференціації</u> - методичному забезпеченні засвоєння навчального матеріалу з предмета на чотирьох рівнях (початковому, середньому, достатньому, високому) шляхом залучення учнів до виконання завдань відповідного рівня складності на всіх етапах засвоєння інформації;

- умови диференційованого навчання можна об’єднати у декілька груп: організаційно-процесуальні, змістові, управлінські, підсумково-прогностичні. Вони у своїй сукупності: реалізують теоретичні основи диференціації пізнавальної діяльності учнів на уроці; дозволяють здійснити системно-технологічний підхід до розв'язання проблеми диференційованого навчання; роблять можливою технологізацію навчального процесу та розробку теоретичної моделі технології диференційованого навчання; забезпечують єдність психологічного, педагогічного і дидактичного аспектів навчання.

Узагальнюючи результати виступів і обговорень, учасники конференції пропонують:

- вважати проблему переходу старшої школи на профільне навчання однією з провідних методичних проблем природничо-математичної освіти на даному етапі розвитку школи;
- при підготовці викладачів природничо-математичних дисциплін до навчання учнів у старшій профільній школі передбачити можливість у ВНЗ включення окремих питань до навчальних програм з методик вивчення шкільних курсів відповідних навчальних предметів, а до варіативного компоненту професійної освіти - спецкурсів, присвячених різним аспектам роботи вчителя у профільних класах;
- з метою залучення майбутніх учителів до проектувальної і управлінської діяльності під час навчання учнів природничо-математичних дисциплін у профільних класах включати до тем курсових і випускних робіт а також планів науково-дослідницької роботи студентів такі, що пов’язані з проблемами навчання учнів у класах рівня стандарту, та універсального і поглибленого рівнів вивчення природничо-математичних дисциплін;

- включити до програм підготовки вчителів природничо-математичних дисциплін питання, повязані з підготовкою до реалізації основних завдань передпрофільного і профільного етапів навчання учнів;
- методистам інститутів післядипломної освіти узагальнити досвід вчителів природничо-математичних дисциплін з організації навчання учнів у класах поглибеного і загальнокультурного рівнів та ознайомити з ним вчителів області;
- викладачам кафедрам методик вивчення природничо-математичних дисциплін педагогічних ВНЗ України та закладів післядипломної педагогічної освіти підготувати для вчителів методичні рекомендації з викладання елективних курсів у основній і старшій школі; з використанням НІТ у навчальному процесі; з реалізації принципу практичної спрямованості вивчення фізики, математики та інших природничих дисциплін; з основних напрямів профорієнтації учнів та мотивації їх до вивчення природничо-математичних дисциплін.

Отже, як видно із аналізу матеріалів на конференції обговорювались актуальні питання переходу на профільне питання, вибір процесів навчання, завдань вчителя з реалізації основних вимог профільного навчання та інші не менш важливі питання.

РЕАЛІЗАЦІЯ ОСВІТНІХ ЦІЛЕЙ РОЗДІЛУ «СВІТЛОВІ ЯВИЩА» ЗА ПІДРУЧНИКОМ ФІЗИКИ ДЛЯ 7 КЛАСУ

Благодаренко Л.Ю.

докторант кафедри загальної та прикладної фізики

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

У статті представлено систему формування навчального матеріалу розділу «Світлові явища» за підручником з фізики для 7-го класу, яка забезпечує реалізацію освітніх цілей розділу. Здійснено аналіз основних філософських і методологічних узагальнень, які передбачені у тексті розділу.

В статье представлена система формирования учебного материла раздела «Световые явления» учебника по физике для 7-го класса, которая обеспечивает реализацию образовательных целей раздела. Осуществлен анализ основных философских и методологических обобщений, предусмотренных в тексте раздела.

The paper presents a system of educational material section of light phenomena "in the textbook of physics for grade 7, which provides the implementation of educational goals section. The analysis of the basic philosophical and methodological generalizations, which are provided in the text section.

Метою статті є висвітлення теоретичних і методичних підходів до формування навчального матеріалу розділу «Світлові явища», спрямованих на реалізацію освітніх цілей розділу. На початку розділу ІІІ «Світлові явища» сформульовано проблемні питання, які будуть розкриті у процесі його вивчення, зокрема: «Як виникають сонячні та місячні затемнення?», «Чому ми бачимо себе у дзеркалі?», «Які кольори має природне світло?», «Як пояснюються природні оптичні явища?» тощо. Увага учнів звертається на те, що для розуміння та пояснення світлових явищ необхідно ознайомитись з природою світла та різноманітністю його властивостей. Це є вагомим мотиваційним фактором, оскільки головна відмінність світлових явищ від інших фізичних явищ полягає в тому, що світлові явища є найбільш поширеними в природі та побуті, а, отже, кожна людина спостерігає їх з дитинства.

В силу величезного світоглядного значення навчального матеріалу розділу ІІІ, він містить значну кількість важливих філософських узагальнень, які органічно випливають зі змісту навчального матеріалу. Це дозволяє учителю реалізовувати гнучке керування пізнавальною діяльністю учнів, розвитком їх мислення та становленням світогляду. Використані нами методичні підходи до формування навчального матеріалу розділу забезпечують певні переваги, оскільки учитель має можливість варіювати педагогічні прийоми підведення учнів до тих чи інших філософських узагальнень шляхом задіяння або пропуску деяких проміжних ланок логічного мисленнєвого ланцюгу, збільшення або зменшення кількості пізнавальних кроків у процесі формулювання філософських висновків. Слід відзначити, що розділ ІІІ є останнім в курсі фізики 7-го класу, отже, учні вже набули певних навиків осмислення інформації відповідно до поставлених цілей і завдань, а тому в певній мірі здатні до самостійного теоретичного аналізу навчального матеріалу розділу.

Наведемо приклади найбільш суттєвих філософських узагальнень, які передбачені у змісті розділу ІІІ.

Матеріальність світу. Уявлення про світло як хвилю підтверджує матеріальність світла та зв'язок матерії з рухом, оскільки хвиля – це поле, яке поширюється в просторі, а, отже, світло теж є формою матерії, яка перебуває в русі. Матеріальність світла підтверджується уявленнями про світло як потік фотонів, оскільки деякі реальні процеси можна пояснити лише на основі фотонної теорії. Отже, якщо світло – це потік фотонів, а фотон є реальною частинкою, то і світло є матеріальним. Переконливим свідченням того, що матерія існує лише в русі є той факт, що світло не може перебувати у стані спокою. Світло є своєрідною формою матерії, оскільки швидкість поширення світла у вакуумі є найбільшою в природі. Можливість бачення предметів, які не випромінюють світла, свідчить про те, що всі матеріальні тіла об'єктивно існують (§10). Оборотність світлових променів свідчить про те, що всі напрями в просторі є рівноправними, тобто простір є ізотропним (§12). Розкладання білого світла на сім монохроматичних кольорів підтверджує структурність всіх об'єктів світу (§16). Відмінності у швидкості світла в різних середовищах (§12), заломлюючій здатності різних речовин (§13), дисперсії в різних речовинах (§16) свідчать про різноманітність властивостей матеріальних об'єктів.

Взаємозв'язок і взаємозумовленість явищ. Закони геометричної оптики визначають закономірності поширення світла у просторі. Ці закони були встановлені шляхом спостережень і дослідів, отже, вони мають об'єктивний характер (§11, §12, §13). Виникнення затемнень Сонця і Місяця обумовлене змінами у взаємному розташуванні Сонця, Місяця та Землі (§11). Явища відбивання і заломлення світла виникають внаслідок того, що світло поширюється в середовищах з різними абсолютними показниками заломлення, тобто з різними оптичними властивостями (§12, §13). Явище дисперсії пов'язане з тим, що промені різного кольору мають неоднакову швидкість поширення в речовині призми. Оптичні явища в атмосфері зумовлені відбиванням, заломленням та розсіянням світла в атмосфері Землі (§16). Вади зору виникають внаслідок неприродного розміщення зображення відносно сітківки ока (§17). Закон освітленості встановлює зв'язок між фотометричними величинами – освітленістю та світловим потоком (§19).

Закон єдності і боротьби протилежностей. Дуалізм природи світла (подвійність його корпускулярно-хвильових властивостей) є яскравим проявом єдності та цілісності природи, оскільки перервність і неперервність – загальна властивість усієї матерії (§10).

Прикладами *діалектико-матеріалістичного характеру процесу пізнання* є такі: дослідження фізичної природи світла, що призвело до встановлення дуалізму у властивостях світла; визначення швидкості світла у вакуумі як найбільшої швидкості в природі та перевірка встановленого значення за допомогою різних методів (§10); встановлення і підтвердження законів геометричної оптики (§11, §12, §13).

У тексті розділу III також знайшли відображення питання, які дозволяють ознайомити учнів із загальнонауковими методами пізнання світлових явищ. Очевидно, що усвідомлення учнями суті методів, за допомогою яких здобувались певні фізичні знання, стимулює діяльнісний підхід до навчання і формує спрямованість особистості на подолання пізнавальних ускладнень. Тому ми вважаємо, що методологічні питання, висвітлені в розділі III, сприяють формуванню в учнів узагальнених способів пізнання та орієнтовних основ дій. Розглянемо ці питання детальніше.

Досліди: вимірювання швидкості світла Галілеєм (§10); отримання світлових пучків; утворення тіні та півтіні; встановлення закону незалежності поширення світлових пучків

(§11); визначення закономірностей відбивання світла (§12) та заломлення світла (§13); досліди Ньютона з призмою (§16).

Спостереження: одержання значення швидкості світла Ремером шляхом спостереження за астрономічними об'єктами (§10); спостереження оптичних явищ в атмосфері (§16).

Узагальнення: визначення швидкості світла за допомогою різних методів дало можливість встановити, що найбільш точними є лабораторні методи; шляхом вимірювання швидкості світла у різних середовищах було показано, що у різних середовищах світло поширюється з різними швидкостями, але меншими за швидкість світла у вакуумі; накопичення на початку XX століття експериментальних даних дозволило встановити, що в одних процесах світло поводить себе як хвиля, а в інших – яке потік частинок (§10).

Аналогія: пояснення механізму поширення світла як послідовного процесу передавання ударів між корпускулами, аналогічно до виникнення звукової хвилі, що призвело до думки про хвильову природу світла (§10); уявлення про око як складну та досконалу оптичну систему (§17).

Моделювання: уявлення про світло як сукупність світлових променів (§11).

Використання *приладів* у процесі наукового пізнання: одержання зображень за допомогою оптичних приладів (§18); вимірювання світлових величин за допомогою фотометричних приладів (§19).

Розглянемо елементи знань, які складають основний зміст розділу ІІІ.

Поняття:

- геометрична оптика, видиме випромінювання, швидкість світла, теплові та люмінесцентні джерела світла, природні та штучні джерела світла, приймачі світла (§10);
- світлові промені, світлові пучки, тінь, півтінь, точкове та протяжне джерела світла, сонячне та місячне затемнення (§11);
- дзеркальне та розсіяне (дифузне) відбивання, межа (або поверхня розділу) двох середовищ, дійсне та уявне зображення, плоске дзеркало (§12);
- заломлення, показник заломлення (§13);
- лінза, збиральна та розсіювальна лінзи, тонкі та товсті лінзи, головна оптична вісь лінзи, оптичний центр лінзи, бічні оптичні осі, головний фокус лінзи, дійсні та уявні фокуси лінзи, фокусна відстань лінзи (§14);
- прямі та перевернуті зображення, дійсні й уявні зображення, збільшені та зменшені зображення, фокальна площина, оптична сила лінзи, діоптрія, збільшення лінзи (§15);
- спектр, дисперсія світла, прості і складні кольори, доповнювальні кольори, розсіювання світла (§16);
- око, склера, рогівка, райдужна оболонка, зіниця ока, кришталик, скловидне тіло, зоровий нерв, сітківка, палички та колбочки, оптична система ока, фокусна відстань ока, область найкращого зору, акомодація й адаптація ока, відстань найкращого зору, короткозорість, далекозорість (§17);
- лупа, мікроскоп, телескоп, об'єктив, окуляр, зорова труба Галілея,

зорова труба Кеплера, фотографічний апарат, проекційні прилади, діапроекція, епіпроекція,, епідіаскоп, кінопроекційні апарати (§18);

- фотометрія, світловий потік, сила світла, тілесний кут, освітленість,

люмен, стерадіан, кандела, люкс (§19).

Закони: прямолінійного поширення світла, незалежності поширення пучків (променів) світла (§11); відбивання світла , оборотності ходу світлових променів (§12); заломлення світла (§13); освітленості (§19).

Формули: лінзи, збільшення лінзи (§15); оптичної сили лінзи (§17); сили світла (§19).

Враховуючи, що розділ «Світлові явища» включений до програми 7-го класу вперше, ми намагались при формуванні навчального матеріалу відобразити, насамперед, наукове, гуманістичне і світоглядне значення світлових явищ. При цьому необхідно було забезпечити осмислення учнями того факту, що закони геометричної оптики, незважаючи на їх простоту та наочність, відображають і пояснюють величезну кількість явищ навколишнього світу, а експерименти у галузі світлових явищ є достатньо доступними і можуть бути здійснені в умовах самостійної домашньої діяльності.

Перш за все відзначаються особливості видимого випромінювання та окреслюється низка питань, на які дає відповідь оптика. Підкреслюється методологічне значення оптики, що була першою частиною фізики, в якій здійснювались вимірювання. Важливим для розвитку матеріалістичного світогляду учнів є той факт, що оптика й нині постійно розвивається (§10, п.1). На початку ознайомлення учнів з поняттям швидкості світла, наводиться приклад: при спостереженні блискавки спочатку з’являється її яскравий спалах, і лише згодом ми чуємо грім. Наводиться значення швидкості звуку в повітрі, після чого ставиться запитання: якою ж тоді є швидкість світла? Постановка навчальної проблеми у формі запитання, що звернуте до учнів, дозволяє організувати їх пізнавальний пошук, виявлення і пояснення причинно-наслідкових зв’язків. Далі у змісті навчального матеріалу наводяться історичні відомості щодо визначення швидкості світла зі стислим описанням суті дослідів Галілея та Ремера. Наводиться значення швидкості світла, встановлене за допомогою сучасних методів вимірювання і наголошується, що швидкість світла у вакуумі є найбільшою в природі. Велике світоглядне значення має інформація про те, що величезна з погляду земних відстаней швидкість світла не є такою великою у відстанях астрономічних (§10, п.2).

Ознайомлення учнів з прикладами джерел світла та їх класифікацією теж розпочинається з формулювання навчальної проблеми у вигляді запитання, а саме: «Що потрібно для того, щоб ми бачили?» та розкриття її змісту: ми бачимо предмети, тому що вони відбивають світло, що на них падає. Після цього вводиться класифікація джерел світла за видом випромінювання (теплові, люмінесцентні) та походженням (природні, штучні). У доступній для учнів формі розкривається фізичний механізм теплового та люмінесцентного випромінювання. Далі дається означення та наводяться приклади приймачів світла. Пояснити учням роль і значення процесів поглинання світла дозволяє висвітлений в кінці параграфу приклад: одним з найважливіших і необхідних для живої природи приймачів світла на Землі є листя рослин. Цей приклад дозволяє актуалізувати знання учнів з природознавства, а також ознайомити їх з новою інформацією, яка у в подальшому буде вивчатись в курсі хімії, а саме: під дією світла в листі рослин відбувається процес фотосинтезу – утворення органічних сполук і виділення кисню (§10, п.3). Таким чином, у навчальному матеріалі реалізуються міжпредметні зв'язки з біологією та хімією.

В наступній темі даються означення світлового променя, світлового пучка, обґрунтовується закон прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі і за його допомогою пояснюються такі явища, як утворення тіні та півтіні, виникнення сонячних і місячних затемнень. Відзначається, що поняття прямої лінії сформувалося переважно на основі оптичних спостережень, оскільки це висвітлює глибокий методологічний зміст закону прямолінійного поширення світла (§11, п.1). Для з'ясування причин, якими зумовлюється виникнення тіні та півтіні, вводяться поняття точкового та протяжного джерел світла. Окремо в тексті виділяється факт, який підтверджує філософське положення про абсолютність і відносність знань, а саме: наявність півтіней пояснюється не порушенням закону прямолінійного поширення світла, а скінченими розмірами джерела світла (§11, п.3). При пояснення виникнення сонячних і місячних затемнень зауважується, що зрозуміти їх причини можна лише на підставі знань про механізм утворення тіні та півтіні. Наводяться детальні схеми затемнень із зображенням взаємного розташування Сонця, Землі і Місяця під час їх виникнення. Як приклад філософського розуміння щодо пізнаванності світу висвітлюються можливості сучасної астрономії не лише розраховувати час і місце виникнення затемнень на багато років уперед, але й визначати дати затемнень, що відбулися в давні часи. Далі на прикладі досліду встановлюється закон незалежності поширення пучків (променів) світла, при цьому виділяються різні аспекти його аналізу, що ефективно формує дивергентне мислення учнів (§11, п.4).

При переході до пояснення явища відбивання світла, за допомогою досліду з освітленням книги з'ясовуються умови дзеркального та розсіяного відбивання, оскільки обізнаність у цих поняттях є обов'язковою для розуміння закономірностей відбивання світла. Увага учнів звертається на те, що різні поверхні мають неоднакову здатність до розсіяного відбивання. Це дозволяє пояснити учням, за яких умов тіло здається темнішим на фоні оточуючих тіл (§12, п.1). З використанням оптичного диску демонструються кути падіння та відбивання на межі розділу двох середовищ і формулюється закон відбивання світла, після чого ставиться проблемне запитання: що відбуватиметься, якщо світло поширюватиметься у зворотному напрямку? Роз'яснюється, що світло має властивість, яка називається оборотністю світлових променів (§12, п.2). При ознайомленні учнів з плоским дзеркалом розглядається хід двох довільних променів, за допомогою яких виконується побудова зображення. Для того, щоб в уявленні учнів склалося цілісне уявлення про одержання зображень та їх властивості, наголошується, що зображення в плоскому дзеркалі є уявним, оскільки воно утворене перетином не самих променів, а їх продовжень, але існують й дійсні зображення, утворені перетином самих променів (§12, п.3).

Проходження світла крізь межу двох середовищ розглядається за допомогою досліду, який демонструє зміну напряму світлового променя на границі розділу *повітря-вода* (§13, п.1). Після цього наводяться приклади природних явищ, які пояснюються заломленням світлових променів. Враховуючи, що явище заломлення є доступним для спостереження, але складним для його теоретичного тлумачення, ми використали поетапний підхід до формулювання закону заломлення світла і спочатку ввели поняття заломлювальної здатності речовини та показника заломлення. Це дозволяє учням усвідомити, що різні речовини відрізняються за своїми оптичними властивостями, які зумовлюють відмінності у кутах заломлення променів у різних середовищах (§13, п.1). Формулюючи закон заломлення світла, ми вважали за доцільне сформулювати його не лише якісно, але й кількісно, незважаючи на те, що учні ще не обізнані з поняттям «синус». Нами запропоновано введення цього поняття в доступній та зрозумілій для учнів формі, а саме: *sin* – позначення важливої математичної характеристики кута, що визначає величину кута та називається синусом (від лат. *sinus* – злам); значення синуса змінюється від 0 до 1 і зростає зі збільшенням кута. На закінчення цієї теми наголошується, що закон заломлення має важливе практичне значення, оскільки за відомими кутами падіння і заломлення можна визначити показник заломлення речовини, який є її важливою оптичною характеристикою (§13, п.2).

При вивчення лінз та їх основних характеристик зазначається, що використання лінз є найбільш важливим використанням на практиці явища заломлення світла. Учні ознайомлюються з різними типами лінз, їх умовними позначеннями, основними точками і лініями, властивостями оптичного центру лінзи (§14, п.1) та її фокусів (§14, п.2). Оскільки лінзи є головними частинами багатьох оптичних приладів і широко застосовуються в побуті, увага приділяється тому факту, що лінзи відрізняються одна від одної кривизною поверхонь і показниками заломлення речовин, з яких вони виготовлені (§14, п.2).

Важливим етапом формування та систематизації знань учнів з геометричної оптики є побудова зображень за допомогою тонкої лінзи, оскільки це забезпечує розуміння учнями в подальшому дії оптичних приладів. Тому на початку розгляду цього питання формулюється навчальна проблема: чи можна заздалегідь, не виконуючи дослідів, визначити місцезнаходження зображення предмета, що дає лінза? Зазначається, що це можна зробити за допомогою геометричних побудов, після чого учні ознайомлюються з трьома променями, властивості яких використовуються з цією метою (§15, п.1). Далі наводяться побудови зображень у збиральній (§15, п.2) та розсіювальній (§15, п.2) лінзах. Всі побудовані зображення відповідним чином класифікуються; окремо відзначається, що дійсне зображення, на відміну від уявного, може бути одержане на екрані або фотоплівці, а уявне можна побачити лише оком. Це забезпечить розуміння учнями функцій розсіювальних лінз (§15, п.2). Велике значення для розв'язування задач з геометричної оптики має правильне застосування формули лінзи. Тому після ознайомлення учнів з цією формулою вводяться поняття оптичної сили лінзи, одиниця її вимірювання (діоптрії) та правило знаків. Увага учнів звертається на той факт, що зі збільшенням оптичної сили лінзи вона заломлює сильніше. Це дозволяє учням усвідомити, що оптична сила є важливою характеристикою оптичних властивостей різних лінз. Оскільки при побудові зображень за допомогою лінз було показано, що розміри зображення змінюються залежно від розміщення предмета відносно лінзи, вводиться поняття збільшення лінзи. Пояснюється, як з використанням значення такої фізичної величини, як збільшення можна дізнатись, збільшеним чи зменшеним є зображення предмета, що важливо знати при виконанні геометричних побудов, особливо у оптичних системах (§15, п.4).

Ознайомлення учнів з явищем дисперсії (§16) починається з висвітлення стану питання про кольори тіл до Ньютона. Повідомляється, що існували різні думки з приводу різноманітної забарвленості тіл: деякі дослідники вважали, що колір – це властивість самого тіла, інші – що різні кольори утворюються як суміш світла і темряви. Особлива увага приділяється тому факту, що саме експериментальні дослідження Ньютона дозволили встановити зв'язок між барвами веселки та кольорами тіл. Це дозволяє продемонструвати учням глибокий методологічний зміст дослідів Ньютона з дисперсії світла, оскільки до нього у поясненні кольорів тіл панувала повна невизначеність, до того ж жоден дослідник не співставляв між собою численні і різноманітні явища гри кольорів, хоча вони здавна були відомі. Підкреслюється, що дослідним шляхом Ньютон підтвердив свої теоретичні передбачення, які викликали багато суперечок у науковому світі. Таке викладення даного питання дозволяє продемонструвати учням не лише підсумки наукових досліджень, але й шляхи, які до них ведуть, що дуже важливо для формування їх світогляду. Далі описуються два етапи дослідів Ньютона: одержання на екрані спектру білого світла після його проходження крізь призму та одержання на екрані монохроматичного кольору у випадку, коли щілина закрита кольоровим склом. При формулюванні висновку спочатку констатується очевидний результат досліду (найбільше від початкового напряму відхиляються фіолетові промені, а найменше – червоні), після чого здійснюється узагальнення – промені різного кольору неоднаково заломлюються у призмі (§16, п.1). Така побудова навчального матеріалу дозволяє заглибити учнів у суть наукового пошуку, який при цьому набуває структури дослідження наукової проблеми, що послідовно розгортається, внаслідок чого учні усвідомлюють логіку пошуку. Далі формулюється означення дисперсії, вводяться поняття простих (монохроматичних) і складних кольорів, визначається склад білого світла. Як підсумок вивчення явища дисперсії, наводяться приклади явищ природи, пояснити які дало можливість відкриття і теоретичне обґрунтування явища дисперсії (§16, п.2). Дослід на спектральне розкладання білого світла перевіряється зворотним дослідом – додаванням спектральних кольорів за допомогою «диску Ньютона», при обертанні якого з певною швидкістю він набуває білого кольору. Усвідомлення учнями фізичного змісту цього досліду та введення поняття доповнювальних кольорів дозволяє ще раз підтвердити філософське положення про структурність матерії (§16, п.3). Значна увага в тексті §16 приділяється розв'язанню такої навчальної проблеми, як пояснення різноманітної забарвленості різних предметів. Відзначається, що основну роль у цьому відіграють явища відбивання та поглинання світла (§16, п.4). Побудована таким чином навчальна інформація забезпечує усвідомлення учнями фізичної суті оптичних явищ, які відбуваються в атмосфері. Після підготовки учнів до сприйняття цього питання, пояснюється блакитний колір неба, колір Сонця під час заходу, утворення веселки, гало, мерехтіння зірок (§16, п.5). У ході пояснення оптичних явищ в атмосфері Землі, які учні неодноразово мали можливість спостерігати, відбувається актуалізація теоретичних і фактологічних знань, що задіює учнів до самостійного осмислення конкретного навчального матеріалу.

На початку вивчення питання про око як оптичну систему (§17) учні дізнаються, що близько 90% усієї інформації про навколишній світ людина отримує завдяки зору. За допомогою схеми розглядається будова ока людини. Роз'яснюється роль кришталика, як невеликої збірної лінзи зі змінною оптичною силою, та сітківки, на якій у здоровому оці утворюється зображення. Для того, щоб учні усвідомили, що око є оптичною системою, називаються компоненти цієї системи – рогівка, кришталик і скловидне тіло. Введення поняття фокусної відстані ока дозволяє розрахувати оптичну силу ока, яка в середньому дорівнює 59 діоптрій (§17, п.1). Ґрунтовно описується процес сприйняття світла оком, при цьому наукова інформація є адаптованою до рівня підготовленості учнів. Зокрема, пояснюється, що процес бачення пов'язаний з будовою сітківки й особливостями діяльності нервової системи. Також зазначається, що сприйняття розмірів та форм предметів здійснюється паличками, а сприйняття кольору – колбочками. Одразу після цього наводиться відомий учням приклад щодо ускладнень при розрізненні кольорів у сутінках, що дозволяє учням застосувати навчальну інформацію до пояснення дійсності, а, отже, сприяє формуванню усвідомлених знань (§17, п.2). Відзначається також, що у процесі зору задіяно не лише елементи ока, але й мозок людини, внаслідок чого виникають певні особливості бачення. Зокрема, учні дізнаються, що зображення предмета на сітківці одержується як обернене, але ми бачимо його прямим завдяки участі мозку в процесі коригування зору. Розуміння цього є центральною ланкою при формування в учнів понять про око як оптичну систему і дозволяє продемонструвати найважливіше положення філософії – матерія є первинною, а свідомість – вторинною. Крім того, учні усвідомлюють важливий методологічний аспект вивчення питання про око – процес бачення не завершується на сітківці, а лише починається з неї, оскільки остаточне перетворення одержаної від ока інформації на образ об'єкта відбувається в мозку людини. Далі вводяться поняття про інші особливості бачення, зумовлені поєднання функцій ока та мозку людини – акомодацію й адаптацію ока. Цікавим і наочним для учнів є приклад про чутливість ока, яка може змінюватись у 2000 разів залежно від освітленості. Цей приклад дозволяє учням усвідомити важливу роль м'язів ока, завдяки яким зіниця може значно змінювати свій діаметр залежно від освітленості (§17, п.3). Ознайомлення учнів з вадами зору і способами їх виправлення має велике виховне значення, оскільки демонструє необхідність гігієни ока, а також ознайомлює учнів з фізичними основами здійснення корекції вад зору за допомогою окулярів (§17, п.4).

Важливий методологічний зміст має вивчення питання «Оптичні прилади» (§18). Ознайомлення з оптичними приладами та їх призначенням яскраво демонструє учням, що фізичні експерименти і спостереження неможливо здійснювати без використання приладів, оскільки більшість фізичних об'єктів сприймається лише за їх допомогою. Це пояснюється тим, що органи чуття людини мають певну обмеженість у сприйнятті доступних для спостережень властивостей цих об'єктів. Детально розглядається дія лупи, мікроскопа, телескопа, зорової труби Кеплера, зорової труби Галілея, фотографічного апарату. Показано хід променів у лупі, мікроскопі, фотоапараті, епіпроекторі. Описуються призначення кожного оптичного приладу, його конструктивні особливості, умови спостереження об'єктів, а також властивості зображень, які одержуються за допомогою цих приладів. Питання про оптичні прилади розкрито в тексті розділу з таких позицій, щоб подолати розрив між теорією і практикою та забезпечити теоретичні завершеність методологічних положень.

Ознайомлення учнів з основами фотометрії у темі «Фотометрія. Сила світла і освітленість» (§19) є логічним завершенням розділу «Світлові явища», оскільки найбільш важливою характеристикою світлового випромінювання є світлова енергія. У тексті параграфу актуалізуються знання учнями того факту, що безпосереднє сприйняття світла оком здійснюється завдяки дії світлової енергії на світлочутливі ділянки ока та інших приймачів світла. Це дозволяє підвести учнів до висновку, що встановлення кількісних характеристик світла є необхідним і зводиться до вимірювання світлової енергії (§19, п.1). Вводяться три основні фотометричні величини – світловий потік (§19, п.1), сила світла (§19, п.2) та освітленість (§19, п.3). Між цими величинами встановлюються зв'язки та вводяться одиниці їх вимірювання (люмен, кандела, люкс). Увага учнів звертається на те, що світлові вимірювання є досить суб'єктивними, тому світловий потік оцінюється за його дією на око, яке не має вад. Також зазначається, що принцип дії деяких оптичних приладів ґрунтується на реєструванні світлових потоків (§19, п.1). Також наголошується, що сила світла є характеристикою джерела світла (§19, п.2), а освітленість – освітлювальної поверхні (§19, п.3). Значної уваги приділено формуванню поняття «тілесний кут». За допомогою рисунку показано, що тілесний кут, на відміну від плоских кутів, є об'ємним кутом. У тексту наведено зрозумілу для учнів приклади тіл, які мають форму тілесного кута. Вводиться одиниця вимірювання тілесного кута – стерадіан. Для оцінки величини сили світла в 1 Кд порівнюються сили світла джерел, з якими учні обізнані (світлячки, лампочки кишенькового ліхтарика, побутові електричні лампи, автомобільні фари, Сонце). Поняття сили світла вводиться на прикладі того факту, що світловий потік від джерела світла поширюється в усіх напрямах, але для практичних потреб важливо знати не повний світловий потік, а той потік, що поширюється у певному напрямі або падає на певну поверхню. Таким чином, учні підводяться до висновку, що сила світила характеризує світлове випромінювання джерела у певному напрямі (§19, п.2). Після формулювання закону освітленості здійснюється його аналіз, в процесі якого з'ясовується залежність освітленості площі поверхні від величини тілесного кута, в якому поширюється світловий потік (§19, п.3). Вивчення основ фотометрії дозволяє учням усвідомити завдання важливих прикладних напрямів у галузі світлових явищ –забезпечення раціонального і такого, що відповідає санітарним нормам, освітлення житлових приміщень та проектування освітлювальних установок. Цей гуманістичний аспект розділу «Світлові явища» сприяє вихованню учнів, формуванню в них позитивного відношення до оточуючої дійсності, виникнення мотивів і потреб, які складаються у сфері навчальної діяльності на основі змісту навчального матеріалу, активізують можливості особистості та сприяють їх організації.

Слід зазначити, що всі питання викладені в тексті розділу «Світлові явища» глибоко і послідовно, відбір навчального матеріалу здійснений таким чином, щоб розкрити фізичний зміст фундаментальних законів і положень, висвітлити актуальні питання галузі фізики, у якій досліджуються світлові явища, розкрити роль наукового знання для потреб практики.

Отже, можна зробити *висновок*: **наведена система формування навчального матеріалу дозволяє ефективно реалізувати синтез теоретичної і практичної підготовки учнів, здійснити зв'язок основних теоретичних і методологічних положень фізики зі змістом навчального матеріалу. Особливо слід відзначити, що, незважаючи на достатньо високий ступінь науковості навчального матеріалу, застосований у тексті розділу рівень його узагальнення є адаптованим до рівня загальноосвітньої підготовки учнів 7-го класу.**

Список використаної літератури

1. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Фізика. Астрономія. 7-12 класи. – К.: ВТФ «Перун», 2006. – 80 с.
2. Шут М.І., Мартинюк М.Т., Благодаренко Л.Ю. Фізика : 7 кл. : підруч. для 7 кл. загально освіт. навч. закл. / М.І.Шут, М.Т.Мартинюк, Л.Ю.Благодаренко – К. ; Ірпінь : Перун, 2010. – 184 с. : іл.

НАСТУПНІСТЬ У ФУНДАМЕНТАЛЬНІЙ І ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ СТУДЕНТІВ ВИЩИХ БУДІВЕЛЬНИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Бурдейна Н.Б.
кандидат педагогічних наук,
Київський Національний університет будівництва та архітектури

У статті визначається місце дисципліни “Фізика” серед інших фундаментальних і спеціалізованих дисциплін вищих будівельних навчальних закладів, а також встановлюється зв'язок із ними. Досліджуються питання наступності вивчення фундаментальних наук у професійній підготовці майбутніх інженерів-будівельників.

В статье определяется место дисциплины "Физика" среди других фундаментальных и специализированных дисциплин высших строительных учебных заведений, а также устанавливается связь с ними. Исследуются вопросы преемственности изучения фундаментальных наук в профессиональной подготовке будущих инженеров-строителей.

The article defines the place of discipline of physics' among other basic and specialized subjects of building higher education and establishing a connection with them. The issues of continuity of learning the basic sciences in the training of future civil engineers.

Науково-технічний прогрес перетворив фундаментальні науки у найбільш ефективно діючу виробничу силу. Це відноситься не лише до новітніх наукоємних технологій, але й до будь-якого сучасного виробництва. Результати фундаментальних досліджень забезпечують високий темп розвитку виробництва, виникнення нових галузей техніки, насичення виробництва засобами вимірювань, досліджень, контролю, моделювання і автоматизації, які раніше використовувалися виключно у спеціалізованих лабораторіях. Усе ширше залучаються до виробництва далекі, як вважалося раніше, від практики досягнення таких областей знань як релятивіська фізика, квантова механіка, лазерна і плазмова фізика, фізика елементарних частинок, значного поширення на сьогодні набули нанотехнології тощо. Все більше фундаментальних теорій починають використовуватися для практичних цілей, трансформуючись у інженерні теорії. Конкурентоспроможність найбільш успішних компаній в значній мірі забезпечується фундаментальними розробками дослідницьких лабораторій при компаніях, університетах, у різного роду науково-технічних центрах. Усе більше фундаментальних досліджень початково передбачають вихід на конкретні прикладні та комерційні цілі.

Серед пріоритетних напрямків реформування вищої школи важливе місце посідають питання оновлення змісту базової підготовки. Особливого значення для підвищення наукового рівня підготовки майбутнього спеціаліста набуває фундаменталізація освіти у вищих навчальних закладах.

Фундаментальна теоретична і практична підготовка значно розширює професійний кругозір спеціаліста, зокрема майбутнього інженера-будівельника, дозволяє цілісно бачити будь-яку наукову проблему або виробничу задачу, знаходити її оптимальне рішення. Ґрунтовні знання з теорії допомагають майбутньому спеціалістові осмислювати сутність явищ і закономірностей; переводити теоретичні ідеї у площину практичних дій; сприяють усвідомленню перспективних тенденцій; допомагають орієнтуватися у нових ідеях, технологіях, концепціях; визначати стратегію й тактику при розв'язанні практичних задач та проблем. Так як більшість прикладних наук виникла і розвивається на основі використання законів природи, то фундаментальну складову мають практично всі інженерні дисципліни.

Базовими фундаментальними дисциплінами у вищому будівельному навчальному закладі є математика, хімія і фізика. Але якщо математичний апарат є інструментом, засобом інженерних обчислень і розрахунків, знання з хімії є основними при вивченні дисциплін технологічного спрямування, то фізичні знання виступають базовими для розуміння, вивчення та опанування дисциплінами інженерно-будівельного та конструкторського профілю.

Дисципліна "Фізика" у вищих будівельних навчальних закладах викладається перед вивченням таких дисциплін як "Теоретична механіка", "Гідравліка", "Опір матеріалів", "Будівельна механіка", "Технічна термодинаміка", "Електротехніка", "Електроніка", "Схемотехніка ЕОМ", "Будівельне матеріалознавство", "Водопостачання", "Теплогазопостачання і вентиляція", "Машини та обладнання технологічних процесів", "Фізико-хімічні методи досліджень", "Фізична хімія", "Метеорологія" тощо [1].

Фундаментальні науки пізнають природу, а прикладні створюють щось нове, причому виключно на основі фундаментальних законів природи. Той факт, що прикладні науки виникають і розвиваються на основі постійного використання фундаментальних законів природи, робить загально професійні та спеціальні дисципліни також носіями фундаментальних знань.

Ідея професіоналізму має пронизувати викладання усіх наук. Це вимагає знання викладачами специфіки професійної діяльності майбутніх спеціалістів, провідних професійних функцій і зосередження на них уваги у процесі навчання. На цьому акцентують українські вчені Атанова Г. і Пустиннікова І. [3]:

- при проектуванні і організації навчання первинними мають бути діяльність і дії задані характером майбутньої спеціальності;
- кінцевою метою навчання є формування способів дій, що забезпечує здійснення майбутньої професійної діяльності;
- змістом навчання є необхідна для майбутньої спеціальності система дій і знань;
- навчаючись, студенти мають здійснювати діяльність, яка моделює майбутню професійну діяльність.

На думку Тализіної Н. Ф., випускник вищого навчального закладу повинен уміти розв′язувати завдання "...обумовлені особливостями нашого століття, особливостями ладу, а також ті, які продиктовані вимогами професії, спеціальності" [2]. Усе це свідчить про те, що повноцінне здійснення процесів викладання і учіння має ґрунтуватися на усвідомленні кінцевої мети вищої освіти, тобто професійній підготовці громадян.

Ґрунтовні теоретичні знання допомагають майбутньому спеціалістові осмислювати сутність явищ і закономірностей; переводити теоретичні ідеї у площину практичних дій;

визначати стратегію й тактику при розв'язанні практичних задач та проблем; сприяють усвідомленню перспективних тенденцій; допомагають орієнтуватися у нових ідеях, технологіях, концепціях.

Рівень підготовки майбутнього інженера-будівельника з фізики має бути таким, що забезпечить йому можливість застосовувати теоретичні та прикладні знання з фізики в самостійній творчій роботі і практичній діяльності. Спостереження за студентами Київського національного університету будівництва і архітектури підтверджують, що більшість студентів молодших курсів пам'ятають достатню кількість формул, правил, формулювань, навіть готових штампів розв'язків "типових" задач, про що свідчать результати написання "нульової" контрольної роботи. Проте багато з них не вміють використовувати ці знання у прикладних сферах навчальної діяльності та не розуміють глибини і широти їх застосовності у будівельної галузі.

Основною метою викладання дисципліни "Фізика" є формування у майбутніх фахівців знань, що стосуються фундаментальних законів, за якими відбуваються процеси і явища навколишнього світу та теоретичної бази для вивчення дисциплін загально-технічного циклу та спеціальних дисциплін.

Основними завданнями, що мають бути вирішені в процесі викладання дисципліни, є теоретична та практична підготовка студентів за основними розділами програми: модуль 1 "Фізичні основи механіки", модуль 2 "Молекулярна фізика і термодинаміка", модуль 3 "Електрика та магнетизм", модуль 4 "Коливання та хвилі. Оптика", модуль 5 "Фізика атомів, молекул і твердого тіла", модуль 6 "Ядерна фізика".

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти вищих будівельних навчальних закладів повинні:

- уміти давати інженерну оцінку явищ і процесів, використовуючи фізичні основи механіки, термодинаміки, електрики та магнетизму, хвильових процесів, ядерної фізики;
- уміти давати інженерну оцінку екологічної, конструктивної та експлуатаційної надійності елементів мереж та будівельних споруд на основі випробувань і вимірювань, використовуючи відповідні методики;
- в умовах виробничої діяльності при проектуванні елементів господарських мереж та будівельних споруд мають уміти робити аналіз закономірностей фізичних процесів на основі інженерно-технічних досліджень, а також вибір необхідних методик визначення технічних параметрів;
- знати методи і засоби фізичних вимірювань, визначення та одиниці виміру фізичних величин, фізичні явища, що лежать в основі виробничої діяльності та закони і рівняння, що описують ці явища.

У Київському національному університеті будівництва і архітектури курс „Фізика" вивчають студенти денної та заочної форм навчання таких спеціальностей: ВВ (водопостачання та водовідведення), СВВ (споруди водопостачання та водовідведення), ЕК (екологія в будівництві), ТВ (теплогазопостачання, вентиляція та кондиціювання) санітарно-технічного факультету; ПЦБ (промислове та цивільне будівництво) факультету промислового та цивільного будівництва; МБГ (міське будівництво та господарство), ГД (геодезія), ЗКД (землевпорядкування та кадастр) факультету геоінформаційних технологій та управління територіями; АУТП (автоматизація управління технологічними процесами), ІУСТ (інформатизація та управління системами та технологіями), ІТП (інформаційні технології проектування), БМО (будівельні машини та обладнання), ПН (професійне навчання) факультету автоматизації та інформаційних технологій; ТБКВМ (технології будівельних конструкцій та виробництва матеріалів), ТКД (товарознавство) факультету технологій бетонних конструкцій, виробів та матеріалів. Для студентів спеціальності ЕК (екологія в будівництві) викладається додатково спецкурс "Основи фізики навколишнього середовища" та „Фізика поверхневих явищ", для студентів спеціальності МО (менеджмент і організація) – курс "Фізичні основи виробництва", для студентів спеціальності ТКД (товарознавство) – курс „Фізичні методи дослідження". Крім того, кафедра фізики здійснює організаційно-методичне забезпечення викладання фізики на підготовчому факультеті для іноземців.

На всіх спеціальностях викладання фізики здійснюється за робочими програмами, узгодженими з методичними комісіями спеціальностей та затвердженими рішенням науково-методичної ради університету. Робочі програми відповідають стандартам вищої освіти відповідних напрямків та типовій програмі з фізики, рекомендованій методичною комісією з фізики науково-методичної ради Міністерства освіти і науки України для технічних вузів. Обсяг дисципліни "Фізика" для інженерних спеціальностей складає 5 кредитів (270 академічних годин, з них 180 – аудиторних занять), а для комп'ютерних спеціальностей (ІУСТ, ІТП) 7,5 кредитів (405 – академічних годин, з них 270 – аудиторних занять).

Фундаменталізація освіти ефективно сприяє формуванню творчого інженерного мислення, чіткого уявлення про місце своєї професії в системі загальнолюдських знань.

Підсумовуючи вищесказане, можна стверджувати, що підготовка висококваліфікованих професіоналів у будівельній галузі завжди буде однією з провідних задач вищих будівельних навчальних закладів. Проте цю задачу неможливо виконати без фундаменталізації вищої освіти. Вищий будівельний навчальний заклад має сформувати у своїх випускників здатність щодо засвоєння основ фундаментальних наук і умінь, їх творчого використання в інженерній діяльності для забезпечення конкурентоздатності на ринку праці. Дотримання наступності у фундаментальній і професійній підготовці студентів вищих будівельних навчальних закладів неможливе без подальшої фундаменталізації фізичної освіти, що вимагає впровадження у навчально-виховний процес варіативних методичних систем навчання.

Список використаної літератури

1. Клапченко В. І. Міжпредметні структурно-логічні зв'язки в навчальних планах інженерних спеціальностей будівельних вузів / В. І. Клапченко, Н. Б. Бурдейна, Ю. І. Мінаєва // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №3. Фізика і математика у вищій і середній школі : Зб. наукових праць – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. – №2. – С. 49-52.
2. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н. Ф. Талызина. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 334 с.
3. Фіцула М. М. Педагогіка вищої школи: Навчальний посібник / М. М. Фіцула. – К. : „Академвидав", 2006. – 352 с. – (Альма-матер).

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ПРАКТИЧНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ КОМПЛЕКС ЯК ЗАСІБ АКТИВІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ПЕДАГОГІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Кучменко О.М.

завідувач лабораторії кафедри загальної та прикладної фізики

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

В роботі запропонований експериментальний-практичний навчальний комплекс. Головне завдання комплексу полягає в активізації самостійної роботи студентів в процесі самостійного складання ними експериментальних задач, виконання дослідів та розв’язування задач.

В работе предложен экспериментально-практический учебный комплекс. Главная задача комплекса состоит в активизации самостоятельной работы студентов в процессе самостоятельного составления ими экспериментальных задач, выполнения опытов и решения задач.

In this work the experimental-practical study complex is proposed. The main aim of the complex is consist of activization of independent work of students in the proces of them independent forming of experimental problems, and providing the experiments and the solving of the problems.

Основною доктриною при вивченні фізики є триєдина система, що об’єднує комплекс теоретичних, лабораторно-практичних засобів пізнання процесів природи. [1, С. 70] Тобто три способи засвоєння знань: вивчення теоретичного матеріалу на лекціях, його засвоєння, формування вмінь і навичок його практичного застосування в процесі виконання лабораторних робіт та при розв’язуванні задач на практичних заняттях – рівнозначні, по суті, в одержанні знань з фізики.

Така специфіка засвоєння фізичних знань наштовхнула нас на думку про створення навчального комплексу на основі об’єднання лекційних, лабораторних і практичних занять з метою активізації самостійної роботи студентів.

В пошуках спільного, що об’єднує лекційні, лабораторні і практичні заняття, ми звернулися до власного досвіду та методичної літератури. Цим спільним, безумовно, є фізичний експеримент, в усіх його проявах, та складені на його основі експериментальні задачі.

Підтвердження нашої думки ми знаходимо у визначенні фізичної задачі: «Фізичною задачею в навчальній практиці звичайно називають невелику проблему, яка у загальному випадку розв’язується за допомогою логічних умовиводів, математичних дій і експерименту на основі законів і методів фізики». [2]. Розвиваючи думку, закладену в цьому визначенні, ми вважаємо, що фізична задача, як навчальна проблема, повинна не лише розв’язуватися за допомогою фізичного експерименту, а перш за все формулюватися в процесі виконання лабораторних робіт, спостереження демонстраційних експериментів на лекціях та фізичних процесів і явищ природи в позааудиторний час.

При цьому ідея активізації самостійної роботи студентів полягає саме в тому, що вони мають самостійно виявити підґрунтя для складання експериментальної задачі, сформулювати її за мінімальної участі викладача та запропонувати для розв’язування на практичному занятті. Ця ідея лягла в основу запропонованого нами експериментально-практичного навчального комплексу

Експериментально-практичний навчальний комплекс.

Рис. 2.1. Експериментально-практичний навчальний комплекс.

Лабораторно-практичний навчальний комплекс

І етап. Етап ознайомлення студентів з метою, задачами та структурою лабораторно-практичного навчального комплексу.

На першому лабораторному занятті викладач повідомляє студентам про сутність, мету, задачі, призначення лабораторно-практичного навчального комплексу. Знайомить їх з особливостями організації, структурою лабораторних та практичних занять.

Окреме заняття присвячене знайомству студентів з сутністю експериментальних задач, їх видів, правилами складання та розв'язування.

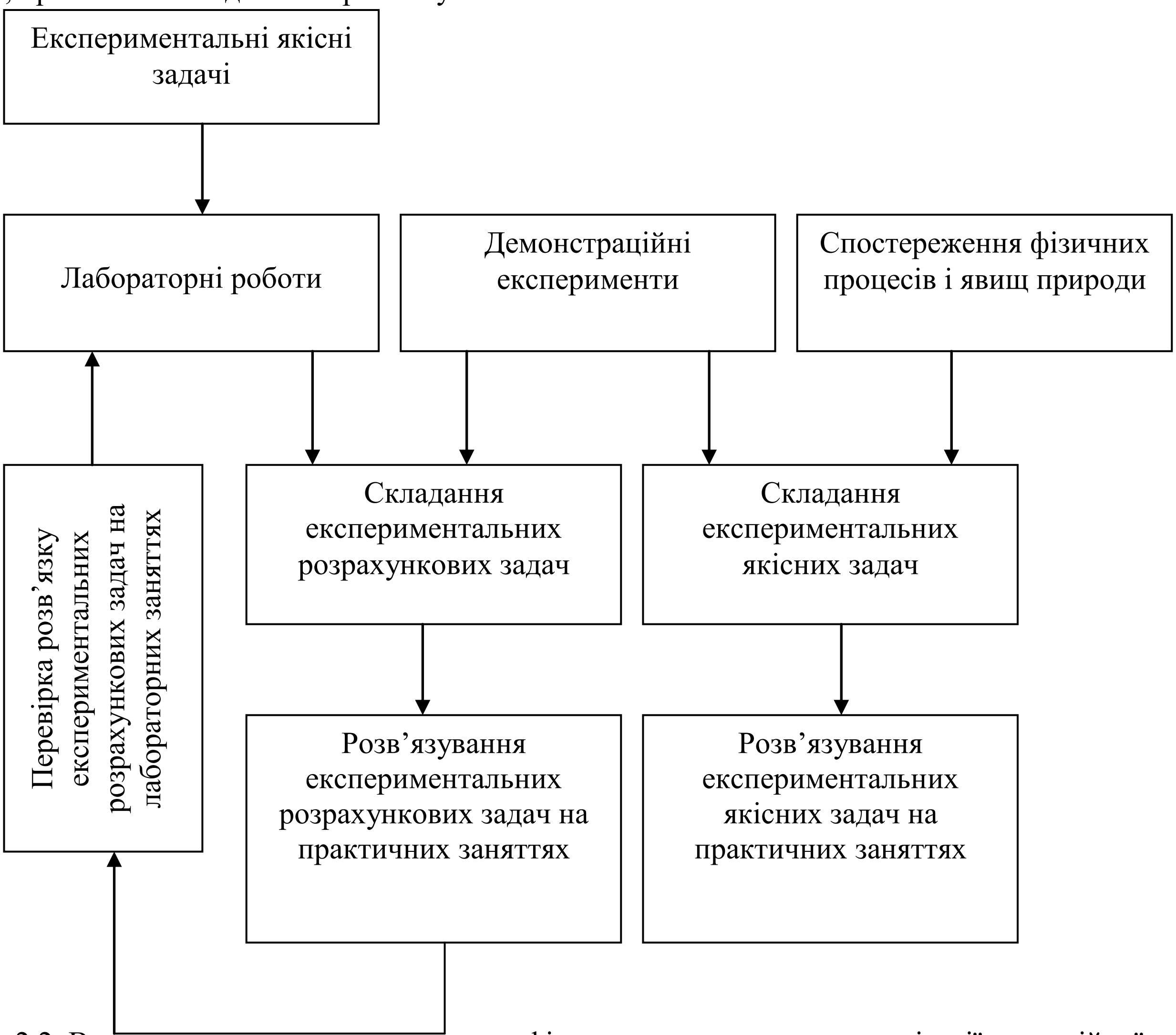


Рис. 2.2. Використання експериментальних фізичних задач з метою активізації самостійної роботи студентів.

II етап. Етап підготовки до виконання лабораторної роботи.

Студенти самостійно готуються до виконання лабораторної роботи в позааудиторний час та в лабораторії.

До переліку контрольних питань до лабораторної роботи включені експериментальні якісні задачі. Їх розв'язування сприяє більш глибокому та усвідомленому розумінню фізичних законів, закономірностей, залежностей студентами, які їм необхідно встановити, перевірити, підтвердити в ході виконання лабораторної роботи; активізації самостійної роботи.

III етап. Етап виконання лабораторної роботи, складання на її основі експериментальних розрахункових задач.

В ході виконання лабораторної боти студенти одержують від викладача завдання розпочати складання експериментальних розрахункових задач на основі теоретичних положень, що перевіряються в ході виконання лабораторної роботи, та одержаних ними результатів.

IV етап. Етап складання студентами експериментальних розрахункових задач.

На основі теоретичних положень, які досліджувалися в ході виконання лабораторної роботи, та одержаних результатів студенти самостійно складають експериментальні розрахункові задачі. Ефективність цієї роботи залежить від рівня теоретичної підготовки студентів, їх вміння організовувати власну самостійну роботу, їх особистих здібностей.

В разі виникнення ускладнень студенти звертаються до викладача під час консультацій, але до проведення практичного заняття.

V етап. Етап розв'язування експериментальних розрахункових задач на практичному занятті.

На практичному занятті студенти під керівництвом викладача переходять до розв'язування складених ними самостійно експериментальних розрахункових задач. При цьому у викладача до початку практичного заняття вже склалося уявлення про якість складених студентами експериментальних розрахункових задач, яке сформувалося у нього під час консультацій. Тому на практичному занятті до розгляди лише задачі, які мають розв'язок і слугують вивченню даної теми.

Враховуючи, що процес складання фізичних, зокрема експериментальних розрахункових, задач досить складний, ми розділили студентів за здатністю складати фізичні експериментальні задачі на три групи. До першої групи ми віднесли студентів, які самостійно складають експериментальні задачі при незначній допомозі викладача. Студентам другої групи для продовження або завершення складання експериментальних задач необхідна суттєва підтримка викладача на консультаціях. Студенти третьої групи взагалі не здатні розпочати складання експериментальних задач.

Таким студентам викладач на практичному занятті пропонує заготовлені ним експериментальні розрахункові задачі.

Зрозуміло, що протягом усього періоду навчання склад цих студентських груп змінюється. Це залежить від вміння студентів збагачувати свої знання та застосовувати їх на практиці, вдосконалювати організацію власної самостійної роботи та індивідуальних особливостей, зокрема схильності до навчання.

VI етап. Етап перевірки результатів експериментальних розрахункових задач на лабораторному занятті.

На цьому етапі студенти перевіряють результати, одержані ними при розв’язуванні експериментальних розрахункових задач на практичному занятті, шляхом постановки та проведення відповідного лабораторного експерименту на лабораторному занятті.

Така послідовність дій викладача та студентів має місце тоді, коли експериментальні розрахункові задачі складаються на основі лабораторних робіт і являються основою лабораторно-практичного навчального комплексу.

Оскільки лабораторна робота – це не єдиний вид навчального фізичного експерименту, то мають місце й інші послідовності дій викладача та студентів (див. рис. 2.2), які є основою лекційно-практичного навчального комплексу та позааудиторного навчального комплексу (див. рис. 2.1) при вивченні курсу загальної фізики.

Як і у випадку розглянутого нами вище лабораторно-практичного навчального комплексу експериментальні розрахункові та експериментальні якісні задачі виступають «ланкою», яка пов’язує в єдине ціле лекційні та практичні заняття, а також фізичний експеримент, спостереження фізичних процесів і явищ природи, виконувані студентами самостійно в позааудиторний час, та практичні заняття.

Лекційно-практичний навчальний комплекс

I етап. Етап ознайомлення студентів з метою, задачами та структурою лекційно-практичного навчального комплексу.

На одній з перших лекцій викладач знайомить студентів з метою, задачами та структурою лекційно-практичного навчального комплексу.

Окрема лекція присвячується знайомству студентів з призначенням, структурою, організацією лекційних, лабораторних, практичних занять; з призначенням, структурою експериментальних розрахункових та експериментальні якісних задач, правилами їх складання та розв’язування.

II етап. Етап накопичення та фіксації даних для складання експериментальних задач.

На лекції, яка супроводжується виконанням демонстраційного експерименту, студенти одержують від лектора завдання фіксувати в своїх конспектах: назву, мету, схему експерименту, прилади, які використовуються для його виконання. Коротко описують те, що вони спостерігають в процесі виконання експерименту. Фіксують одержані результати та висновки, зроблені по завершенню експерименту.

Якщо в ході експерименту одержують числові результати, то викладач фіксує їх на дошці.

В залежності від теми лекції, демонстраційного експерименту та одержаних в ході його виконання результатів студенти одержують від викладача завдання на складання експериментальних якісних або експериментальних розрахункових задач, які розв’язуються на практичному занятті.

III етап. Етап складання студентами експериментальних якісних та експериментальних розрахункових задач.

На основі розглянутих на лекції теоретичних положень, опису демонстраційного експерименту та одержаних в ході його виконання результатів студенти самостійно складають в поза аудиторний час експериментальні якісні, експериментальні розрахункові задачі.

На консультації викладач надає їм необхідну в цій роботі допомогу. Це дає йому можливість мати уявлення про досягнення студентів в складанні експериментальних задач та якість цих задач, підготовлених студентами для розв’язування на практичному занятті.

Цей аспект організації лекційно-практичного навчального комплексу стосується також лабораторно-практичного навчального комплексу і експериментально-практичного (позааудиторного) навчального комплексу.

IV етап. Етап розв’язування експериментальних якісних та експериментальних розрахункових задач на практичному занятті.

На практичному занятті студенти пропонують для розв’язування складені ними експериментальні задачі.

Враховуючи дефіцит часу, виділеного на проведення аудиторних, зокрема практичних, занять викладач вибирає для розв’язування ті експериментальні задачі, які мають розв’язок і слугують для подальшого вивчення розглядуваної теми. При цьому він не залишає поза увагою і ті задачі, які містять раціональне зерно, коротко зупинившись на їх аналізі.

V етап. Етап перевірки результатів експериментальних задач.

В разі можливості викладач пропонує студентам самостійно спланувати та підготувати до виконання експерименти для перевірки результатів, одержаних в процесі розв’язування експериментальних задач.

Позааудиторний навчальний комплекс

I етап. Етап ознайомлення студентів з метою, задачами та структурою позааудиторного навчального комплексу.

В ході заняття, присвяченого знайомству студентів з експериментальними задачами, викладач звертає їх увагу на можливість складання експериментальних задач в ході спостереження фізичних процесів і явищ природи.

II етап. Етап складання на основі спостереження фізичних процесів і явищ природи експериментальних якісних задач.

На основі самостійних спостережень фізичних процесів і явищ природи студенти складають в позааудиторний час експериментальні якісні задачі, одержуючи консультаційну допомогу від викладача.

III етап. Етап розв’язування експериментальних якісних задач на практичному занятті.

На практичному занятті студенти пропонують для розв’язування складені ними на основі самостійних спостережень експериментальні якісні задачі.

Враховуючи особливість складання цих задач немає потреби в експериментальній перевірці їх розв’язку.

Підтвердження правильності обраного нами шляху організації навчального процесу при вивченні курсу загальної фізики в педагогічному університеті ми знаходимо в роботах видатного методиста Коршака Є.В., який зазначає, що: «Розв’язування задач повинно органічно поєднуватися з … експериментом …” [3]

Розглянутий в роботі експериментально-практичний навчальний комплекс охоплює всі етапи вивчення курсу загальної фізики на аудиторних заняттях та в позааудиторний час, об'єднуючи їх в єдине ціле. При цьому самостійна робота студентів набуває риси активного, цілеспрямованого, неперервного процесу.

В подальшому передбачається наповнення всіх ланок функціонування експериментально-практичного навчального комплексу конкретними задачами з усіх розділів курсу загальної фізики різних рівнів складності.

Список використаної літератури

1. Кучменко О. М. Складання задач за результатами фізичного експерименту як форма самостійної роботи / О. М. Кучменко, А. В. Касперський / Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі: збірник наукових праць. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2006. - № 2. – 128 с.
2. Каменецкий С. Е. Методика решения задач по физике в средней школе : книга для учителя / С. Е. Каменецкий, В. П. Орехов. – М. : Просвещение, 1987. – С. 5.
3. Коршак Є. В. Методика розв'язування задач з фізики : практикум / Є. В. Коршак, С. У. Гончаренко, Н. М. Коршак. – К. : Вища школа, 1976. – С. 3.

МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО РЕАЛІЗАЦІЇ КОНТЕКСТНОГО НАВЧАННЯ ФІЗИКИ У ВИЩИХ ТЕХНІЧНИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Кузьменко Г.М.

Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка

У статті обґрунтовано переваги контекстного навчання фізики студентів вищих технічних навчальних закладів. Показано, що контекстне навчання найбільше відповідає сучасній освітній концепції. Визначено методичні основи контекстного навчання та головні завдання на шляху його реалізації.

В статье обоснованы преимущества контекстного обучения физике студентов высших технических учебных заведений. Показано, что контекстное обучение наиболее соответствует современной образовательной концепции. Определены методические основы контекстного обучения и главные задания на пути его реализации.

The article substantiates the benefits of contextual learning physics students of technical schools. Shown that most contextual education in line with modern educational concepts. The methodical basis of contextual learning and the main challenges in the way of its realization.

Сьогодні роль технічної освіти в Україні має докорінно змінитись, оскільки вона починає входити до розряду національних пріоритетів. Безумовно, це буде сприяти підвищенню престижу професій фізичного, фізико-технічного та технологічного профілів. Отже, нова доба вимагає якісно нового ставлення до розв’язання проблем вищої технічної освіти, до формування державницького розуміння її ролі в соціально-економічному розвитку України. Відповідно, досягнення означеної мети висуває нові вимоги до вищих технічних навчальних закладів у напрямі підготовки компетентного і освіченого фахівця. Очевидно, що випускники вищих технічних навчальних закладів повинні мати не лише ґрунтовну фундаментальні підготовку з базових навчальних дисциплін (зокрема, з фізики), але й відповідати потребам і ціннісним орієнтирам країни, бути соціально підготовленим до реалізації своїх професійних функцій.

Сьогодні навчально-виховний процес у вищому технічному навчальному закладі є складною системою, яка охоплює сукупність різноманітних компонентів. Тому освітня діяльність має ґрунтуватись не лише на традиційних підходах (які, на жаль, переважають в сучасній вищій школі), але й на пошуку і впровадженні в навчально-виховний процес нових прогресивних концепцій з використанням сучасних педагогічних технологій та науково-методичних досягнень як вітчизняних, так і зарубіжних науковців, які забезпечать синтез багатофакторних взаємодій у процесах навчання і учіння, освіти і самоосвіти, зможуть задовольнити потреби як викладача, так і студентів.

Таким чином, важливе завдання вищих технічних навчальних закладів полягає в тому, щоб студенти в процесі навчання здобули не фрагментарну інформацію, а цілісну базову підготовку, що дасть їм можливість застосувати одержані знання у будь-яких галузях науки і техніки. Очевидно, що при цьому головним фактором подальшої успішної діяльності кожного фахівця є ґрунтовна фундаментальна підготовка з базових дисциплін, зокрема, з фізики. Слід також врахувати, що специфіка професій фізичного, фізико-технічного та технологічного профілів вимагає від майбутнього фахівця не лише фундаментальних, але й методологічних знань.

Метою статті є обґрунтування переваг контекстного навчання фізики студентів вищих технічних навчальних закладів та розроблення методичних підходів до його реалізації.

На нашу думку, одним з ефективних засобів навчання фізики студентів вищих технічних навчальних закладів є контекстне навчання, як таке, що найбільше відповідає сучасній освітній концепції. Проте сьогодні переважна більшість викладачів вищої технічної школи не повною мірою використовує методичні можливості контекстного навчання, має певні ускладнення у виборі оптимальних шляхів стимулювання й організації пізнавальної діяльності студентів, у виборі відповідних форм їх творчої діяльності. Це призводить у кінцевому підсумку до зниження ролі інноваційних технологій у навчанні, що суттєво впливає на рівень науково-дослідної та інформаційно-аналітичної діяльності студентів.

Нами визначено *методичні основи* контекстного навчання фізики студентів вищих технічних навчальних закладів. Розглянемо їх детальніше.

- У процесі контекстного навчання фізики студенти залучаються до спеціально організованої діяльності, в процесі якої у них виникають потреби, що забезпечують вагомий внесок у формування їх *мотиваційної сфери*. Очевидно, що студенти на початку навчання у вищому технічному закладі вже мають певні уявлення про свою майбутню професійну діяльність та про роль в цій діяльності фундаментальних знань з базових дисциплін, проте лише задіяння їх до навчального процесу, в якому ці знання представлені в інтегрованому вигляді, перетворює несвідомі уявлення на реальні мотиви, забезпечує стійкий інтерес до фізики як основи технічних наук, утворення в структурі мотиваційної сфери професійних намірів. При цьому розвиток пізнавальної мотивації студентів відбувається не лише через засвоєння нових знань і умінь, але й через інтеграцію тих мотивів діяльності, які були сформовані на попередніх етапах навчання. Головним підтвердженням сформованості пізнавальної мотивації при цьому є наявність у студента настанови на необхідність оволодіння фундаментальними знаннями з метою перетворення їх в подальшому на професійні знання у конкретній галузі.

- Використання контекстного навчання фізики ефективно впливає на формування *фахової компетентності* випускників вищих технічних навчальних закладів, в основі якої лежить поєднання загальнонаукових та професійних знань. Динаміка формування професійних знань передбачає, насамперед, нарощування рівня фундаментальних знань з базових дисциплін, генералізацію основних умінь. Очевидно, що професійна компетентність – це не лише знання у вузькій галузі техніки, але й високий загальнонауковий рівень. У процесі ускладнення структури знань з фізики підвищуються можливості змістового наповнення елементів професійних знань. При цьому висвітлюється багатоаспектність знань з фізики, можливість їх задіяння у різних видах професійної діяльності. Це забезпечує найвищий ефект у розвитку мислення студентів, їх пізнавальної мотивації, самоконтролю і самореалізації у пізнавальній діяльності. І як наслідок – висока компетентність як у галузі професійної діяльності, так і в плані загальнонаукового розвитку.

- Контекстне навчання фізики формує у студентів цільові настанови на *неперервну цілісну освіту* шляхом відповідного змістового наповнення навчального матеріалу з фізики, створює умови для усвідомлення взаємозв’язку наукових і професійних знань, окреслює стратегію самоосвіти як невід’ємну частину майбутньої професійної діяльності.
- Контекстне навчання дозволяє цілеспрямовано формувати *творчу активність особистості* відповідно до її індивідуальних можливостей. При цьому особливої значущості набувають внутрішні збуджуючі фактори, потреби людини, її свідомі прагнення. Це пояснюється тим, що головною умовою розвитку творчої особистості в системі вищої технічної освіти, підвищення якості навчання фізики, усвідомленої самореалізації особистості є високий рівень готовності мотиваційної сфери студента, зокрема, його пізнавальної мотивації, яка найкраще формується в умовах контекстного навчання.

Очевидно, що впровадження контекстного навчання фізики в практику вищої технічної школи висуває певні вимоги до організації навчально-виховного процесу, до рівня його методичного забезпечення. Нами розроблено *методичні підходи* до впровадження контекстного навчання фізики в навчально-виховний процес вищих технічних навчальних закладів, а саме:

- стратегічним напрямом контекстного навчання є не збільшення обсягу навчальної інформації з фізики, а створення умов для осмислення студентом значущості одержаних знань, активного залучення його до процесу навчання фізики в цьому контексті, що в кінцевому підсумку забезпечить підвищення рівня пізнавальної мотивації студентів;
- у процесі організації контекстного навчання слід особливо врахувати, що воно не передбачає максимального наповнення змісту навчального матеріалу з фізики такими знаннями, які в подальшому будуть використовуватись фахівцями у їх професійній діяльності. Включення професійних знань у процес навчання фізики має бути фрагментарним, адаптованим до рівня сформованості знань і мислення студентів і логічно пов’язаним з навчальним матеріалом, що забезпечить стимулюючий сплив на формування і розвиток пізнавальної мотивації студентів;
- контекстне навчання слід будувати на основі діяльнісного підходу, який передбачає спрямованість навчання на залучення студентів до активної власної діяльності, що забезпечує засвоєння студентами теоретичних і методологічних основ фізики, а також елементів професійних знань в контексті цієї діяльності. Отже, в контекстному навчанні фізика як базова дисципліна перетворюється на динамічну систему, в процесі вивчення і використання якої відбувається інтеграція фундаментальної та професійної підготовки фахівців. Крім того, реалізація діяльнісного підходу до навчання фізики дозволяє розв’язати важливу проблему сучасної вищої школи – забезпечення діяльнісної спрямованості освіти. Зрозуміло, що особливо це стосується технічної освіти, оскільки фізика та її технічні прикладання сьогодні розвиваються дуже стрімко;
- найбільш ефективно контекстне навчання здійснюється в умовахкомплексного підходу, тобто за різних форм організації навчально виховного процесу з фізики як в

аудиторній, так і в позааудиторній роботі, а саме: на лекційних і практичних заняттях, у процесі виконання студентами лабораторних робіт, під час самостійної та науково-дослідної роботи студентів. Очевидно, що при включенні елементів професійних знань у процес навчання фізики слід враховувати специфіку змісту і форм навчальної діяльності студентів.

Нами визначено *умови*, за яких реалізація контекстного навчання фізики є найбільш ефективною, а саме:

- аналіз документації щодо основних тенденцій та вимог Болонського процесу, ступеневої освіти в Україні, зокрема, особливостей вимог до фахової підготовки студентів вищих технічних навчальних закладів у частині циклу природничих дисциплін;
- наявність відповідного навчально-методичного забезпечення для викладання курсу фізики;
- методична робота з професорсько-викладацьким складом, забезпечення високого рівня їх кваліфікації та її постійне підвищення;
- покращення матеріально-технічної бази вищих технічних навчальних закладів, насамперед, забезпечення можливостей використання інформаційних технологій навчання фізики.

Проте, до задовільного розв'язання проблеми впровадження контекстного навчання у вищих технічних навчальних закладах України ще далеко. *Головними завданнями* на шляху реалізації контекстного навчання є такі:

- розроблення методик проведення на засадах контекстного навчання лекцій, практичних занять, лабораторних робіт, самостійної та науково-дослідної роботи студентів.
- уточнення відповідності кількісного співвідношення знань з фізики та елементів професійних знань з урахуванням того факту, що насичення навчального матеріалу з фізики елементами професійних знань є продуктивним лише в тому випадку, коли ці знання вбудовані в деяку цілісну систему, певним чином інтерпретовані, співвіднесені з наявними знаннями студентів.

Все вищевикладене дозволяє зробити такий висновок: **вивчення загальної фізики у вищих технічних навчальних закладах на засадах контекстного навчання сприяє ефективному формуванню пізнавальної мотивації студентів, якісному засвоєнню ними навчального матеріалу з фізики та закріпленню його у їх свідомості, вироблення навиків застосування теоретичних та методологічних положень фізики до тих чи інших конкретних професійних завдань**.

Список використаної літератури

1. Вербицкий А.А. Новая образовательная парадигма и контекстное обучение. Монография / А.А. Вербицкий. – М. : Исследовательский центр проблем качества підготовки специалистов, 1999. – 75 с.
2. .Вербицкий А.А. Активное обучение в высшей школе: контекстный поход / А.А. Вербицький. – М. : Высшая школа, 1991. – 204 с.

УДК 373.5.016:53

ПІДВИЩЕННЯ РІВНЯ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ В ПРОЦЕСІ ГУРТКОВОЇ РОБОТИ

Мініч Л.В.

викладач,

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

В статті розкриваються можливості гурткової роботи з фізики у напрямі підвищення рівня загальноосвітньої підготовки учнів. Показано, що в рамках гурткової роботи ефективно реалізуються міжпредметні зв’язки, що сприяє мотивації учнів до вивчення фізики.

В статье раскрываются возможности кружковой работы по физике в направлении повышения уровня общеобразовательной подготовки учащихся. Показано, что в рамках кружковой работы эффективно реализуются межпредметные связи, способствует мотивации учащихся к изучению физики.

In this article the possibility of work in physics circles toward improving the comprehensive training of students. Shown that within the circle of effectively implemented cross-curricular approach that helps motivate students to study physics.

Сьогодні виникла нагальна необхідність розроблення сучасних методичних підходів до здійснення позаурочної роботи з фізики в загальноосвітній школі. Очевидно, що в сучасних умовах ця сфера педагогічної діяльності має докорінно відрізнятись від традиційної позаурочної роботи, яка ефективно використовувалась в соціалістичному суспільстві.

В радянській школі гурткові заняття вважались основною формою позаурочної роботи з фізики. Головною метою цієї роботи було закріплення і розширення знань учнів з фізики, розвиток в них допитливості, навиків суспільно-корисної праці та самостійності. За змістом роботи гуртки поділялись на фізико-технічні, теоретичні та комплексні (або загальнофізичні). У фізико-технічних гуртках учні займались моделюванням та конструюванням. Члени теоретичного гуртка вивчали питання теорії, історії науки і техніки, займались дослідницькою діяльністю, набували навичок у розв’язуванні задач підвищеної складності. В комплексних гуртках всі ці види навчальної діяльності учнів поєднувались залежно від інтелектуальних особливостей учнів, рівня їх підготовленості та потреб навчального закладу. Особливим успіхом у 60-80-х роках XX століття користувались радіотехнічні гуртки та гуртки радіоелектроніки, оскільки електронна техніка тоді все наполегливіше входила у народне господарство, науку і техніку, побут, ставала засобом пізнання світу. Молодь розуміла, що знання з радіотехніки та електроніки потрібні для будь-якого виробництва, корисні у повсякденному житті, а тому із задоволенням працювала у гуртках відповідної спрямованості [1]. Пріоритетним напрямом роботи фізичних гуртків було також виготовлення фізичних приладів і обладнання. Такі гуртки розвивали в учнів навики роботи з приладами, а також слугували для забезпечення лабораторного і демонстраційного експерименті саморобними приладами [2]. Популярними були також фотографічні, астрономічні гуртки та гуртки фізичної спрямованості [3].

Слід відзначити, що принципи організації позаурочної роботи гурткової роботи, які застосовувались в радянській школі, залишились актуальними і сьогодні та можуть бути нами з успіхом використані, а саме:

- добровільність щодо участі в позаурочній роботі;
- врахування індивідуальних особливостей учнів у процесі здійснення позаурочної роботи;
- забезпечення умов для гармонійного творчого розвитку кожного учня;
- високий рівень складності завдань, які використовуються на гурткових заняттях;
- суспільно-корисна спрямованість позаурочної гурткової роботи, її популяризація;
- тісний зв'язок позаурочної гурткової роботи з навчальною роботою учнів [5].

Основними цілями позаурочної гурткової роботи в радянській школі були такі:

- розвиток в учнів пізнавального інтересу до фізики, тобто їх мотивації до її вивчення;
- поглиблення і розширення знань учнів, набутих ними на уроках фізики, розвиток в учнів умінь застосовувати одержані знання на практиці.

Мета статті полягає у визначенні можливостей позаурочної роботи з фізики в основній школі у напрямі підвищення рівня загальноосвітньої підготовки учнів.

Фізичні гуртки користувались успіхом та попитом, при цьому учителі не мали проблем із залученням учнів до такої роботи. Проте, слід зазначити, що гурткова робота і в ті часи не мала системного характеру. Вона здійснювалась в основному на рівні окремих методичних розробок, які виконувались учителями, що займались організацією гурткової роботи. Гурткова робота не була забезпечена спеціально розробленими програмами, не існувало єдиного підходу до цього виду навчальної діяльності. Тематика занять фізичних гуртків відрізнялась різноманітністю, але *не завжди була пов'язана з вивченням відповідного програмного матеріалу.* При цьому учитель мав певний ступінь свободи – він самостійно обирав спрямованість роботи гуртка (відповідно, з урахуванням інтересів учнів, їх загальноосвітнього рівня, забезпеченості фізичного кабінету відповідним обладнанням) та розробляв його програму. У цьому були очевидні переваги – гурток дійсно створювався за інтересами учнів, а тому виконував суттєву виховну функцію.

В останні роки стан позаурочної роботи з фізики в загальноосвітній школі докорінно змінився в бік погіршання. Відомо, що популярність шкільних гуртків, секцій, товариств з середини 80-х років минулого століття лише знижувалась. На тлі політичних і соціальних перетворень позаурочна робота в школі, в тому числі з фізики, загубила свій статус. Зазначимо, що багатьох учителів таке становище задовольняло. Основним пріоритетом вони визначили проведення якісних уроків і це було зрозуміло в умовах недостатнього фінансування шкіл, зокрема позаурочної роботи.

Але стан позаурочної роботи з фізики і на теперішній час покращився незначно. Яку кількість учнів сьогодні ми зможемо зацікавити роботою у фізичному гуртку? Учні заповнюють свій вільний час заняттями відповідно до фінансових можливостей своїх батьків. А до безкоштовної позаурочної роботи в школі вони ставляться відверто зневажливо, очевидно, дотримуючись поширеного в останні роки формулювання: «Все, за що не треба платити – нічого не коштує».

Отже, наше головне завдання – виправити таке становище і залучити учнів до позаурочної гурткової роботи з фізики. А виконати це завдання можна буде лише при умові, що учні зрозуміють їх користь. Сьогодні це завдання виявляється реальним, оскільки зовнішнє незалежне оцінювання наочно продемонструвало: високі бали одержує та молода людина, яка має відповідний рівень загальноосвітньої підготовки. Таким чином, якісна освіта стала пріоритетом нового етапу розвитку української загальної середньої освіти. Відповідно, учні мають зрозуміти: позаурочна робота з фізики забезпечить для них можливості підвищення рівня своєї загальноосвітньої підготовки і одержання високих балів під час зовнішнього незалежного оцінювання, а, отже – продовження освіти у вищому навчальному закладі.

Сьогодні гурткова робота у загальноосвітніх навчальних закладах поступово поновлюється. Але, на жаль, адміністрація шкіл не завжди охоче виділяє години для функціонування фізичного гуртка. Найчастіше за все вони надаються для додаткового вивчення у кращому випадку математики, а в основному – предметів гуманітарного циклу. Прикро, що не всі директори і заступники директорів шкіл усвідомлюють значущість фізики в сучасному суспільстві. Разом з тим певні позитивні зрушення в цьому напрямі є. І головне – це те, що про необхідність позаурочної роботи заговорили на державному рівні. Зокрема, у Білій книзі національної освіти України йдеться про те, що для реалізації на методичному рівні розвивального і виховного потенціалу змісту освіти необхідний комплексний підхід, а саме поєднання змісту шкільної та позашкільної освіти [4]. У цьому ж науковому виданні також зазначено, що пріоритетними завданнями, які підлягають негайному виконанню є «…розширення мережі гуртків, секцій, клубів та інших творчих об’єднань з метою створення додаткових можливостей для духовного, інтелектуального і фізичного розвитку учнівської і студентської молоді» [4]. Отже, проблема позаурочної роботи піднімається, але розглядається вона чомусь у рамках позашкільної освіти. Виникає запитання: а для чого так ускладнювати ситуацію? Якщо планувати розв’язання вищезазначених завдань в рамках позашкільної освіти, то це пов’язане з багатьма труднощами, а саме: виділення приміщень для позашкільних навчальних закладів, усунення залишкового підходу до його фінансування, забезпеченість педагогічними кадрами. Звичайно, розвинена мережа закладів позашкільної освіти – це добре, але це справа майбутнього. А підвищувати рівень фізичної освіти вкрай необхідно вже сьогодні. На нашу думку, необхідно почати з того, щоб приділити більшої уваги позаурочній роботі на базі шкіл, розвиваючи поряд з цим і позашкільну освіту.

На нашу думку, найбільш придатною формою позаурочної роботи в основній школі з урахуванням психолого-педагогічних особливостей учнів є гурткова форма позаурочної роботи. І головним її завданням повинно стати підвищення рівня мотивації учнів до вивчення фізики.

Ми пропонуємо впровадити для учнів 8-го класу гурток під назвою «Фізика на землі, під водою і в космосі». Основною метою такого гуртка ми вбачаємо, перш за все, у збудженні в учнів інтересу до вивчення фізики. Проте, очевидно, що це буде сприяти в першу чергу підвищення рівня навчальних досягнень учнів. У рамках цього гуртка в доступній і цікавій для учнів формі ми пропонуємо висвітлювати основні наукові проблеми у їх тісному зв'язку з курсом фізики основної школи. Це означає, що певні програмні питання ми будемо підтверджувати на прикладах явищ, що відбуваються на землі, під водою і в космосі. Таким чином, це дозволить не тільки розкрити фізичну суть тих чи інших явищ, але й реалізувати міжпредметні зв'язки фізики з такими науками, як хімія, біологія, астрофізика. Це пов'язано з тим, що більшість сучасних проблем фізики не може бути вирішено в рамках однієї цієї науки. Наприклад, «червоні припливи», альтернативний носій енергії – газ на дні океану, рух дна океану.

Очевидно, що для реалізації такого гуртка необхідно розроблення відповідного навчально-методичного забезпечення. **Таким чином гурткова робота ефективно сприяє підвищенню рівня мотивації учнів основної школи до вивчення фізики.**

Список використаної літератури

1. П.П. Головин. Конструирование забавных электронных игрушек в школьном физико-техническом кружке / П.П. Головин. – 1991. – № 5. – С. 71-76.
2. А.А. Толмачёв. Наш кружок по созданию физических приборов / А.А. Толмачёв // Физика в школе. – 1988. – № 4. – С. 88-89.
3. А.А. Хекало. Поисковая работа школьного астрономического кружка / А.А. Хекало // Физика в школе. – 1985. – № 6. – С. 70-71.
4. Біла книга національної освіти України / Т.Ф. Алексєєнко, В.Н. Аніщенко, Г.О. Балл [та ін.]; за заг. ред. акад. В.Г. Кременя; НАПН України. – К.: Інформаційні системи, 2010. – 342 с. – С. 140, 167.
5. Усова А.В., Орехов В.П., Каменецкий С.Е. и др. Методика преподавания физики в 7-8 классах средней школы: Пособие для учителя / А.В. Усова, В.П. Орехов, С.Е. Каменецкий и др. / М.: Просвещение, 1990. – 320 с.

УДК 535.34

КВАНТОВОРОЗМІРНИЙ ЕКСИТОН В НАПІВПРОВІДНИКОВИХ КВАНТОВИХ ТОЧКАХ

Покутній С.І.
доктор фіз.-мат. наук, професор
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова
Бойко Г.М.
кандидат пед. наук
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Проаналізовано еволюцію енергетичного спектра екситона, що зумовлена квантоворозмірними ефектами, в напівпровідникових квантових точках. Робота може бути використана магістрами і аспірантами фізичних спеціальностей при вивченні спеціальних курсів з теоретичної фізики наносистем.

Проанализирована эволюция энергетического спектра экситона, вызванная квантоворазмерными эффектами, в полупроводниковых квантовых точках. Работа может быть использована магистрами и аспирантами физических специальностей при изучении курсов с теоретической физики.

The evolution of the energy spectrum of the exciton, due to effects of quantum, in semiconductor quantum dots. Work may be used at Masters and PhD students of physical disciplines to study courses in theoretical physics.

1.Вступ.

Досягнення твердотільної технології уможливили отримання кристалічних структур, лінійні розміри яких є сумірними з дебройлівською довжиною хвилі електрона і дірки або (і) з їх борівськими радіусами. При нанорозмірних геометричних параметрах напівпровідникових систем явище просторового розмірного квантування квазічастинок відіграє домінуючу роль в оптичних і електрооптичних процесах таких наносистем [1-15].

У даній роботі розглядатимемо прості моделі квазінульвимірних систем, якими є напівпровідникові мікро кристали сферичної форми з радіусами $\alpha \approx 1...10^2$ нм (так звані квантові точки), вирощені в напівпровідникових (діелектричних) матрицях [1-5, 9, 10]. Поняття «квантова точка» було введено в [16] для опису деякого ідеалізованого сферичного об'єкта радіуса α**,** що задовольняв умову:

$$d < \alpha < \lambda_D , \quad (1)$$

де d – постійна кристалічної гратки квантової точки; λ_D - довжина дебройлівської хвилі електрона в напівпровідниковому матеріалі.

На початку 90-х рр.. XX ст. поняття «квантова точка» стало загальноприйнятим. Воно використовувалося для позначення напівпровідникових мікрокристалів з радіусами α у кілька нанометрів. Припускалося, що розміри α давали змогу для опису квантових точок використовувати константи їх масивних монокристалів [1, 3-8].

В даній роботі проаналізовано еволюцію енергетичного спекра екситона, що зумовлена квантоворозмірними ефектами, в напівпровідникових квантових точках.

2. Спектроскопія напівпровідникових квантових точок.

Розглядатимемо квантові точки, які містять у своєму об’ємі напівпровідниковий матеріал з великим значенням (набагато більшим за одиницю) діелектричної проникності у квантовій точці з досить великими значеннями радіуса α може виникнути об’ємний екситон Ван’є-Мотта [7, 10, 17]. Екситон, структура якого (зведена маса, борівський радіус та енергія зв’язку) в квантовій точці не відрізняється від такої структури у масивному монокристалі, називається об’ємним екситоном [7-10].

Оскільки енергетична щілина напівпровідника істотно менша, ніж у напівпровідникових (діелектричних) матриць, то рух квазічастинок в квантовій точці обмежується її об’ємом у всіх трьох напрямах (тобто квазічастинки рухаються в тривимірній сферичній потенціальній ямі). Це приводить до того, що електрон і дірка, а також і екситон в квантовій точці не мають квазіімпульсу. Тому можна говорити тільки про стани квазічастинок у квантовій точці. У подальшому під екситоном в квантовій точці розумітимемо такий екситонний стан, який не має квазіімпульсу [7-10]. Слід визначити, що екситон, локалізований на домішках, також немає квазіімпільса. Це пов’язано з тими, що рух такого екситона обмежується областю локалізації, спричиненою його кулонівською взаємодією з домішками.

Оптичні та електрооптичні властивості таких наносистем значною мірою визначаються енергетичним спектром просторово обмеженої електронно діркової пари (екситона) [1, 4-13]. При цьому енергетичний спектр квазічастинок залежить від радіуса α квантової точки [6-15].

За цих умов вплив поверхні поділу «квантової точки – діелектрична матриця» може спричинити розмірне квантування енергетичного спектра електрона і дірки в квантовій точці пов’язане як з просторовим обмеженням області квантування [17], так і з поляризаційною взаємодією квазічастинок з поверхнею квантової точки [7-15].

Дискретність енергетичного спектра електронів і дірок в квантовій точці використовується для створення оптичних нанолазерів та інших приладів з високою температурною стабільністю частоти генерації [1-3]. Розміри квантових точок α повинні бути в діапазоні кількох нанометрів, щоб енергетичні зазори, які виникають між квантово розмірними рівняннями електронів і дірок $\Delta E_{e(h)}(\alpha)$, були порядка кількох kT_0 при кімнатній температурі T_0 (де k – постійна Больцмана) [6-10]. Це дає можливість усунути основну проблему сучасної опто- і наноелктроніки-«розмивання» рівнів квазічастинок в енергетичному інтервалі kT, яке призволить до деградації властивостей приладів у разі підвищення робочої температури T [1, 4, 5].

Основна причина кардинальної відмінності фізичних властивостей напівпровідникових наносистем від властивостей напівпровідникових матеріалів обумовлюється тим, що внаслідок просторового обмеження та нанорозмірів квантових точок вирішальну роль відіграє розмірне квантування енергетичних спектрів квазічастинок, зокрема, екситонів [6-15].

Можливість, змінюючи радіус αkT, варіювати енергетичним спектром квазічастинок, який до того ж має дискретну структуру [6-15], дає змогу розв'язати загальну проблему керування оптичними фундаментальними параметрами в квазінульвимірних структурах і в приладах на їх основі: шириною забороненої зони, ефективними масами квазічастинок та їх рухливостями, показником заломлення та коефіцієнтом поглинання світла тощо [7-15].

Такі наносистеми привертають до себе увагу внаслілок їх нелінійних оптичних властивостей і перспектив застосування в опто- і наноелектроніці (зокрема, як нових матеріалів, перспективних для створення елементів, що керують оптичними сигналами в інжекційних елементах та транзисторах [1, 3-5].

Перші наноструркртури з квантовими точками напівпровідників A B були синтезовані в 20-х рр.. XX ст. при розробці технологій синтезу крайових обрізаючи фільтрів – боросилікатних стекол, забарвлених сульфоселенідами кадмію [2]. В експериментальній роботі [3] вперше було досліджено ефекти насичення поглинання світла такими стеклами, які застосовувались як пасивні модулятори добротності в лазерах на рубіні.

Методами оптичної спектроскопії були вперше досліджені ефекти розмірного квантування екситонів у квантових точках CdSSe [18] і в CuCl [19] та електронів CdS [20] у матриці боросилікатного скла. Вперше теоретичні дослідження оптичних властивостей квазінульвимірних напівпровідникових структур були висвітлені в [17, 21].

3. Об'ємний екситон Ван'є-Мотта

Екситон в масивному напівпровідниковому монокристалі – елементарне нейтральне збудження, пов'язане з утворенням зв'язного стану пари електрон-дірка, спричиненого кулонівським притяганням між квазічастинками. У масивних напівпровідниках з великими значеннями діелектричної проникності ε_2 основні особливості екситонів добре описуються просторою моделлю Ван'є-Мотта [22].

Вважаєть, що взаємодія електрона і дірки описується енергією кулонівського притягання

$$V_{eh}(\vec{r}_e, \vec{r}_n) = -\frac{e^2}{\varepsilon_2 \left| \vec{r}_n - \vec{r}_e \right|}, \tag{2}$$

де $\vec{r}_e$ і $\vec{r}_n$ - радіус-вектори електрона і дірки відповідно. У наближенні ефективної маси та параболічного закону дисперсії, гамільтоніан екситону в масивному монокристалі має вигляд [22]:

$$H(\vec{r}_e, \vec{r}_n) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_e - \frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_n + E_g + V_{eh}(\vec{r}_e, \vec{r}_n), \tag{3}$$

де перші два члени оператори кінетичної енергії електрона з ефективною масою m_n. Розв'язок стаціонарного рівняння Шредінгера з гамільтоніаном $H(\vec{r}_e, \vec{r}_n)$ (3) дає енергетичний спектр екситону в масивному монокристалі в такому вигляді [22]:

$$E_n(k) = E_g - \frac{E_{ex}}{n^2} + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2M}, \tag{4}$$

де n=1,2,3,… - головне квантове число, яке визначає різні екситонні стани; E_g – ширина забороненої зони монокристала, величина E_{ex} є енергія зв'язку екситону

$$E_{ex} = \frac{\hbar^2}{2\mu\alpha_{ex}^{\ 2}}, \tag{5}$$

У формулах (4) і (5) введені такі позначення: M=(m_e+m_n) – трансляційна (повна) маса екситона; $\vec{k} = (\vec{k}_e + \vec{k}_n)$ - хвильовий вектор екситона; $\mu = m_e m_n /(m_e + m_n)$ - зведена ефективна маса екситона; $\alpha_{ex} = (\varepsilon_2 \hbar^2 / \mu e^2)$ - броунівський радіус екситона.

Екситон Ван'є-Мотта – нейтральна квазічастинка, яка рухається у монокристалі з квазіімпульсом $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Екситон характеризується внутрішнім станом, що описується хвильовою фінкцією воднеподібного атома. Завдяки наявності внутрішнього руху, екситон у стані n має радіус $(\alpha_{ex})_n = n^2 \alpha_{ex}$.

У напівпровідниках з прямими оптичними переходами при $\vec{k} = 0$ спектр екситону $E_n(\vec{k} = 0)$ (4) є безмежною дискретною сукупністю значень енергії, які розміщені в забороненій зоні під дном зони провідності і утворюють там серію рівнів воднеподібного атома. Стан n=1 є найнижчим збудженим станом монокристала як системи електронів, або основним станом ексистона. Оскільки хвильовий вектор $\vec{k}$ перебігає всі значення у зоні Бріллюена, то кожному дискретному рівневі екситона (з квантовим числом n) відповідає своя енергетична зона $E_n(\vec{k})$ (4). При цьому спектр екситона (4) має квазінеперервний характер.

4. Спектр екситона в наносистемі

У роботі [17] вперше був отриманий енергетичний спектр екситона в напівпровідниковій точці в припущенні, що квантова точка є нескінченно глибокою потенціальною ямою для електрона і дірки. Було показано, що вплив квантового розмірного ефекту на спектри поглинання квантових точок істотно залежав від співвідношення трьох характерних розмірів: α, α_e, α_n, (де α_e і α_n – борівські радіуси електрона і дірки в напівпровідникові з діелектричною проникністю ε_2).

У разі виконання умови

$$d << \alpha << \alpha_e, \alpha_n, \tag{6}$$

в гамільтоніані екситона (3) в квантовій точці малого радіуса у першому наближенні можна знехтувати енергією $V_{eh}(\vec{r}_e, \vec{r}_n)$ (2). Таке наближення відповідає наближенню сильного розмірного квантування електрона і дірки в квантовій точці. При цьому, сумарна енергія розмірного квантування електрона і дірки перевищує енергію зв'язку екситона E_{ex} (5), і рух електрона і дірки в квантовій точці кантується незалежно. У результаті при між зонному поглинанні світла квантовими точками прямозонних напівпровідників, в останніх повинна простежуватися серія дискретних ліній з частотою $\omega_{en}(\alpha)$:

$$\hbar\omega_{ni}(\alpha) = E_{ni}(\alpha) = E_g + E^e{}_{nl}(\alpha) + E^h{}_{nl}(\alpha), \tag{7}$$

де n і l – головне і обертальне квантове число електрона (дірки) відповідно. В (7) спектр електрона (дірки) в квантовій точці малого радіуса описувався рівнянням енергії електрона (дірки), який рухався в сферичній ямі нескінченної глибини

$$E_{nl}{}^{e(h)}(\alpha) = \frac{\hbar^2}{2m_{e(h)}\alpha^2}(\varphi_{nl}{}^{e(h)})^2, \tag{8}$$

де φ_{nl} - корені функції Бесселя $J_{l+1/2}(\varphi_{nl})=0$. правилами відбору дозволені лише переходи, для яких квантові числа n і l зберігаються.

У разі виникнення умови

$$\alpha_n, \alpha_l << \alpha, \tag{9}$$

Найбільшою величиною з енергії, що входять у гамільтоніан H($\vec{r}_e$, $\vec{r}_n$) (3), є енергія кулонівського притягання електронів з діркою $V_{eh}(\vec{r}_e, \vec{r}_n)$(2), яка визначає енергію зв'язку екситрона E_{ex} (5). В квантовій точці великого радіуса α (9) екситон кантувався як ціле, а його енергетичний спектр визначається так [17]:

$$E_{nl}(\alpha) = E_g - E_{ex} + \frac{\left|\vec{p}_{nl}\right|^2}{2M}, \tag{10}$$

У цьому випадку в квантовій точці можна збудити об'ємний екситон Ван'є-Мотта, як і в масивному кристалі. Проте рух центра мав такого екситона переміщується в об'ємі квантової точки із квазіімпульсом

$$\left|\vec{p}_{nl}\right| = \hbar(\varphi_{nl}/\alpha), \tag{11}$$

Квазіімпульс $\vec{p}_{nl}$ (11) квантується, набуваючи при цьому дискретних значень, які визначаються квантовими числами n і l, та залежить від радіуса α квантової точки [10].

5. Еволюція спектра екситона, зумовлена квантово розмірними ефектами

При переході від масивного монокристала до квантової точки поняття квазінеперервних енергетичних зон електронів і дірок втрачає свій зміст [10]. Квазінеперервний спектр екситона $E_n(\vec{k})$ (4) переходить у спектр екситона $E_{nl}(\alpha)$ (10) в квантовій точці великого радіуса $\alpha>>\alpha_{ex}$ (9). При цьому екситон квантується як ціле, а його енергетичний спектр $E_{nl}(\alpha)$ (10) носить дискретний характер [10]. При зменшенні величини α, в квантовій точці малого радіуса $\alpha<<\alpha_{ex}$ (6), рух електрона і дірки квантується незалежно, а спектр електрона $E^e{}_{nl}(\alpha)$ (8) і дірки $E^h{}_{nl}(\alpha)$ (8) є набором квантоворозмірних рівнів, що носить дискретний характер [10].

Зміст представленої роботи може бути використаний в підготовці магістрів і аспірантів фізичних спеціальностей з метою налагодження більш тісних зв’язків між навчальною діяльністю студентів (аспірантів) та їх майбутньою професійною діяльністю. Не заперечним є твердження, що формування професійної компетентності фахівців повинно здійснюватись засобами змісту професійної науково-предметної підготовки на рівні сучасного вістря розвитку науки, яким є нанотехнології – міждисциплінарна область фундаментальної і прикладної науки, в якій вивчаються закономірності фізичних і хімічних систем протяжністю порядку декількох нанометрів або часток нанометра. Викладений авторами аналіз еволюції енергетичного спектру екситона в напівпровідникових квантових точках дозволяє успішно ввести складну професійну інформацію в навчальну діяльність студента (аспіранта).

Список використаної літератури

1. Алферов Ж.И. Перспективы развития исследований наносистем /Алферов Ж.И. //Физика и техника полупроводников. – 1998. – №1. – с. 3-18.
2. Варгин В.В. Производство цвітного стекла./Варгин В.В. – М.-Л.: Гизлегпром, 1940. – с.324.
3. Лисица М.П. Назначения поглощения света боросиликатными стеклами /Лисица М.П., Кулиш Н.Р., Гиц В.И., Коваль П.М. //Оптика и спектроскопия. – 1966. – №3. – с.508-520.
4. Гапоненко С.В. Оптические свойства наносистем (обзор) /Гапоненко С.В. //Фізика и техника полупроводников. – 1996. – №4. – с.577-601.
5. Венгер В.Ф. Оптика малих частинок і дисперсних середовищ /Венгер В.Ф., Гончаренко А.В., Дмитрук М.Л. – К.: Наукова думка, 1999. – с.328.
6. Ткач М.В. Квазічастинки у наногетеросистемах. Квантові точки та дроти /Ткач М.В. – Чернігів: Чернігівський нац. ун-т, 2003. – с.320.
7. Покутний С.И. Теория экситонов в квазинульмерных полупроводниковых системах /Покутний С.И. - К.: Академпериодика, 2003. – с.324.
8. Покутний С.И. Спектроскопия электронных и екситонных состояний в наносистемах. /Покутний С.И. – К.: Академпериодика, 2005. – с.334.
9. Покутний С.И. Оптика наносистем /Покутний С.И.. – К.: Академпериодика, 2007. – с.324.
10. Pokutnyi S.I. Spectroscopy of excion states in quasi-zero-dimensional semiconductor systems (revier) /Pokutnyi S.I. //Ukr. J.Phys. Rev. – 2006. - №1. – p.46-49.
11. Покутний С.И. Поглощение рассеяние света в квазинульмерных структур /Покутний С.И. //Физика твердого тела. – 1997. – №4. – с.606-609.
12. Pokutnyi S.I. Start effect in semiconductor dots /Pokutnyi S.I. //J. Appl. Phys. – 2004. – №2. – p.1115-1125.

13. Pokutnyi S.I. Optical nanolaser on the heavy hole transition in semiconductor nanocrystals: Theory /Pokutnyi S.I. //Phys. Lett. A. - 2005. – №5, 6. – p. 347-350.
14. Pokutnyi S.I. Excion states in semiconductor quantum dots in the framework of the modified effective mass method /Pokutnyi S.I. //Semiconductors. - 2007. – №11. – p. 1323-1328.
15. Pokutnyi S.I. The excion sinding energy in semiconductor quantum dots /Pokutnyi S.I //Semiconductors. - 2010. – №4. – p. 507-512.
16. Sehmitt-Pink S. Optical properties semiconductor quantum dots /Sehmitt-Pink S., Miller D.,Chemla D.//Phys. Rev. B. – 1987. - №15. – p.8113-8225.
17. Эфрос А.Л. Межзлнное поглощение света в полупроводниковом шаре /Эфрос А.Л. //Физика и техника полупроводников. – 1982. – №7. – с. 1209-1214.
18. Кулиш Н.Р. Оптичне насичення боросилікатних стекол /Кулиш Н.Р., Кунец В.П., Лисица М.П. //Український фізичний журнал. – 1982. – №12. – с.1817-1821.
19. Екимов А.И. Размерное квантование экситонов в микрокристаллах полупроводников /Екимов А.И., Онущенко А.А. //Письма в ЖЭТФ. – 1981. – №6. – с.363-366.
20. Екимов А.И., Размерное квантование экситонов в микрокристаллах сульфида кадмия /Екимов А.И., Онущенко А.А. //Письма в ЖЭТФ. – 1984. – №8. – с.337-340.
21. Єфремов А.И. Макроскопические лакальные состояния носите лей заряда в ультрадисперсных средах /Єфремов А.И., Покутний С.И. //Фізика твердого тела. – 1985. – №1. – с.48-56.
22. Ансельм А.И. Введение в теорію полупроводников /Ансельм А.И. – М.: Наука, 1978. – с.644.

ІСТОРИЧНИЙ ОПИС РОЗВИТКУ МЕХАНІКИ МАШИН

Шут М.І.,
доктор фіз.- мат. наук, професор
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Шут А.М.,
кандидат фіз.-мат. наук
Київський Національний уверситет технології і дизайну,
Форостяна Н.П.,
доцент КНТЕУ

В роботі розглядаються окремі питання історії розвитку теорії і практики машин і механізмів. Проаналізувано внесок окремих учених у розвиток механіки машин і механізмів, зокрема, Ейлера, Г.Монта, А.Геніво, Р.Вілліса, В.Гамільтона.

В работе рассматриваются отдельные вопросы истории развития теории и практики машин и механизмов. Проанализувано вклад отдельных ученых в развитие механики машин и механизмов, в частности, Эйлера, Г. Монта, А. Генов, Р. Уиллиса, В. Гамильтона.

This paper examines selected issues of the history of theory and practice of machines and mechanisms. Are analyzed the contribution of individual scientists in the development of mechanical machinery, including Euler, G.Monti, A. Gene, R. Willis, W. Hamilton.

Так як головним призначенням машин протягом довгого часу було піднімання вантажів, то ще в античному світі існувала думка, що всі машини складаються із *„простих машин”* і єдиним правилом, за яким і будували машини було правило важеля. Власне машини як такі, з’явилися не раніше середини першого тисячоліття до нашої ери. Першими були водяні машини, будівельні машини, машини з піднімання води і зрошення земель, військові машини (катапульти, балісти).

Створення статистики *„простих машин”* належить Архімедові, який здійснив такі винаходи як нескінченний і прикріпний гвинт, зубчате колесо, різні військові машини і пристосування. Пізніше в елліністичну епоху олександрійський механік Герон написав декілька праць з прикладної механіки, у яких розглянув вантажопідйомні, водопідйомні і військові машини того часу, а також *„автомати”*.

Практична механіка ранньої Римської імперії знайшла своє відображення в енциклопедичному творі Вітрувія *«десять книг про архітектуру»*. Машинам присвячена 10 книга цього твору. Саме тут ми знаходимо перше означення машини: *«Машиною є структура з’єднаних разом дерев’яних частин, яка має велику силу для пересування вантажів»*.

Наука першого тисячоліття нашої ери не внесла історичного вкладу в механіку машин. У галузі практичної механіки найвидатнішими подіями можна вважати винахід механічного годинника IX–X ст. Наприкінці XII ст. у Європі з’явився і набув широкого використання повітряний млин. Таким чином, відбувається енергетичний прогрес: на рівні з силою мускулів людини і тварин використовують силу води та повітря. Поряд із повітряними машинами з'являються масло збивальні машини, деревообробні млини. XIII ст. датуються трактати про машини, у яких більш-менш зрозумілі описи деяких машин. На межі XV–XVI ст. з'являються геніальні твори і роботи великого італійського вченого, механіка і художника Леонардо да Вінчі. Він не тільки вдосконалив велику кількість машин, додавши до них схеми, а розробив багато нових вузлів, деталей і машин. Але його роботи не були сприйняті сучасниками.

У другій половині XVI століття машинна техніка розвивається ще стрімкіше. Створюються мануфактури. Кількісний і якісний розвиток машин вимагав керівництва з машинознавства, *„театрів машин"* у яких, крім опису машин були описи окремих деталей і вузлів. Так, В. Брінгуччо і Г. Агрікола (наприкінці XV – початку XVII ст.) розглядають передачу від одного двигуна до кількох машин. Міланський лікар, інженер і математик Дж. Кардано сформулював загальне правило передачі руху в механізмах млинів і годинників. Багато кінематичних ідей є в книзі А. Рамеллі *«Різні і витончені машини».*

У XVII – на початку XVIII ст. *«технологічні млини»* отримали значний розвиток у Нідерландах. Саме тут публікується *«Книга про млини»* П.Лімперка (1690), *«Велика загальна книга про млини»* Я.Ван-дер-Зіла (1734) та ін.

У 1724 р. у Саксонії виходить у світ багатотомна енциклопедія Я. Лейпольда *«Театр машин».* За життя автора вийшло сім томів, а після смерті ще два, з яких останній, дев'ятий, був написаний вже іншим автором, але можливо, за матеріалами, зібраними Лейпольдом. Ця грандіозна праця неодноразово передруковувалась у якості навчального твору, яким користувались навіть на початку XIX ст. Лейпольд вперше намагається не лише описати машини, але й знайти принципи їх побудови. За його означенням, *«машина є штучною спорудою, завдяки якій можна отримати корисний рух і пересування предметів зберігаючи час і силу, чого не можна було б досягти інакше. Машини бувають прості і складні. До простих машин відносять так звані важелі, блоки, вороти, клин, гвинт.*

Складні машини – ті, які складаються із двох або більше однорідних або різних простих машин: сюди слід віднести всі види млинів, фонтани…»

У XVIII ст. були з'ясовані деякі питання теорії зубчатого з'єднання (Лагів, Камю, Ейлер), досліджено сухе тертя тіл при невеликих швидкостях руху (Амонтон, Белідор, Ейлер, Кулон, Проні), дано початок теорії тертя еластичних тіл (Ейлер). Але всі ці дослідження були лише деякими питаннями теорії машин. Проте у XVIII ст. наука про машини так і не була сформована. Замість неї була теорія *«простих машин».* Навіть на початку другої половини XVIII ст. вчені Петербурзької Академії публікуючи основні роботи з механіки машин користуються все тією ж теорією *«простих машин»* (Ейлер, Крав, Котельников).

Виникнення теорії механіки машин наприкінці XVIII ст. належить роботам Л. Ейлера, Г. Монжа.

Пріоритетом у розвитку динаміки машин безперечно належить Ейлеру. У своїх працях він наголошує про необхідність виділення із загальної механіки питань, які безпосередньо належать чистому рухові (тобто питання кінематики). Він зазначав ненауковість вивчення машин з позицій простих механізмів, тобто у стані спокою. *«Головною ознакою машини є рух, а отже, і вивчати її потрібно у стані руху із врахуванням* *дії сили»* – писав Ейлер. Кожна машина повинна мати: силу, що надає їй руху, передаючий механізм і корисне навантаження. Також розглядав рівняння руху машин, коефіцієнт корисної дії та інші характеристики.

Необхідність у теорії механіки машин виникла наприкінці XVIII ст., коли в результаті промислового буму з'явилась нова галузь промисловості – *машинобудівна*.

Гаспар Монж встановив, що основною функцією машин є передача і перетворення руху. Він запропонував на основі цього принципу класифікувати рух і виявити ті *«елементарні машини»* (механізми), завдяки яким можна отримати встановлені перетворення руху. Метод Монжа був розроблений його учнем і послідовником у Паризькій політехнічній школі Ж. Ансеттом і двома викладачами Вищої школи А. Бетанкуром і Х.М. Ланцем.

У 1807 р. Бетанкур разом з Ланцем написав *«Курс побудови машин»,* який у 1808 р. був виданий Радою Політехнічної школи в якості підручника.

Підручник, написаний Ланцем і Бетанкуром, витримав три перевидання й мав великий вплив на розвиток науки про машини. У ньому було вперше систематизовано *«елементарні машини».* Виходячи із принципу Монжа, автори запропонували розділити всі *«елементарні машини на 21 групу за типом виконання перетворення руху: наприклад, перетворення прямолінійного неперервного руху в обертальний неперервний; прямолінійного обертально-поступального в обертальний неперервний і т.п.»* Таким чином, при вивченні машин кінематичні якості вперше були поставлені, як головні.

Навчальний посібник Ашетта відрізняється від розглянутого тим, що він розглядає рух машин з позицій динаміки. Його класифікація була набагато простішою ніж його попередників.

Наприкінці XVIII – початку XIX ст. універсальний двигун – парова машина – вже зайняла всі ключові позиції у промисловості, як у гірничій, так і у фабрично-заводській, і поступово охоплюючи транспорт. У 1810 р. у Парижі вийшла в світ праця А. Геніво *«Досвід науки про машини»,* в якій він уперше дає теорію маховика. А. Геніво вважав, що радіус маховика слід робити великим: при цьому маса обода буде залежати від потужності машини; дано рекомендації з використання маховика в машинах. Значних успіхів у теорії маховика досяг А. Нав'є, якому належать перші теоретичні розрахунки ваги обода маховика.

Динаміка машин знайшла розвиток у роботах бельгійського вченого Ж.Ж. Крістіана, що довгий час був директором Паризької консерваторії мистецтв і ремесел.

Але важливе значення для створення динаміки машин мали роботи Г. Коріоліса, а особливо Ж.-В. Понсельє.

Дослідження Понсельє в галузі прикладної механіки викладені в його курсах, що друкувалися під різними назвами майже до кінця XIX ст. Разом із Коріолісом він ввів у механіку поняття роботи, вивів на основі принципу живих сил загальне рівняння руху машин і привів до ладу всі задачі динаміки машин, розв'язаних на той час. Щодо кінематики, то Понсельє наслідував туринського академіка Ж. Борньї, який у 1818-1821 рр. опублікував восьмитомник енциклопедичних творів із теорії машин, які мали деякі відмінності із роботою Монжа.

До першої чверті XIX ст. віднесено узагальнення поняття – кінематика. Цій темі присвячені роботи польського математика і філософа І. Геке-Вронського і французького фізика А. Ампера.

У 1837 р. була опублікована праця Ампера *«Досвід класифікації наук».* У ній вперше зустрічається слово *«кінематика»,* винайдене самим автором.

Розробка поняття кінематики механізму продовжується в Англії. У 1841 р. професор Кембріджського університету Р.Вілліс друкує свій чудовий твір *«Принципи механізмів».* У ньому вперше уточнюються поняття механізму, вводиться новий принцип класифікації механізмів, розробляється теорія зчеплення і систематизуються всі знання у галузі теорії механізмів того часу.

В основі класифікації Вілліса лежить відношення швидкостей та елементарна форма механізму. За цією класифікацією всі механізми розділені на чотири групи: I – з'єднання за типом кочення; II – за ковзанням; III – плавне зчеплення; IV – шарнірне. Класифікація Вілліса була значним кроком вперед. Нею користувалися аж до 30-х років XX ст. Вона зазнала лише незначних змін і доповнень. Але все ж вона не змогла розв'язати головну проблему, що постала перед кінематикою: створення єдиних методів дослідження механізмів. Як у роботах Монжа, так і в роботах Вілліса одні і ті ж механізми належали до різних розділів класифікації.

У цей час активно розвивається аналітична механіка. Загальні рівняння Лагранжа механічної системи з скінченою кількістю ступенів вільності узагальнили роботи механіків і математиків кінця XVIII ст. Ці рівняння дали можливість звести розв'язок будь-якої задачі про рух механічної системи до інтегрального чи диференціального рівняння. Таким чином, виникло нове вчення – аналітична механіка.

Весь розвиток механіки у XIX ст. пов'язаний з роботами ірландського математика В. Гамільтона, який запропонував нові методи для інтегрування рівнянь аналітичної механіки.

Дослідження Гамільтона з аналітичної механіки були ніби продовженням великого твору Бринклея під назвою *«Theory of System of Rays»* (1818 р.), що були представлені у 1834 – 1835 рр. і були невдовзі опубліковані. Ці роботи давали опис загального методу динаміки і були базою розвитку всієї аналітичної механіки XIX ст.

У першій частині мемуару *«Про загальний метод у динаміці»* Гамільтон використовує отримані ним формули до розв'язку задачі про дві точки, взаємо притягувані за будь-яким законом залежно від відстані між ними. Із великою точністю і скрупульозністю розглядає випадок притягання, обернено пропорційного квадрату відстані.

У другій частині свого мемуару Гамільтон звертає увагу на загальну задачу про рух трьох і більше тіл, що підкоряються будь-якому закону притягання. Записує рівняння для визначення характеристичної функції і пропонує наближений метод для визначення даної функції, коли одне із тіл має порівняно велику масу.

Завдяки цьому методу Гамільтон пропонує переглянути визначення збурень орбіт планет.

У другому мемуарі *«Другий нарис про загальний метод у динаміці»* Гамільтон звертається до встановлення нової форми рівняння руху системи вільних матеріальних точок у довільній криволінійній системі координат. Використовуючи принцип Даламбера він встановлює рівняння Лагранжа і, вводячи в них замість похідних нові змінні, отримує знамениті канонічні рівняння, які використовуються і сьогодні.

Отже, розглядаючи у двох мемуарах лише рух вільних точок, Гамільтон встановив канонічну систему рівнянь саме для руху таких точок.

Доречно сказати, що вагома частина «*Другого нарису про загальний метод у динаміці*» присвячена побудові теорії збурень на основі канонічних рівнянь і понятті головної функції. Гамільтон пропонує два методи в теорії збурень. Перший метод ґрунтується на введенні поправок до початкових значень змінних у незбуреній задачі. Другий – тісно зв'язаний з теорією канонічних перетворень рівнянь динаміки.

Головна ціль, яку ставив перед собою Гамільтон, полягала в розвитку метода інтегрування рівнянь динаміки. Ціль була досягнута.

Дослідження Гамільтона дозволили з’явитись численним і важливим роботам з аналітичної механіки в XIX ст., а деякі наслідки варіаційних рівнянь розглядаються і нині. Серед численних робіт XIX ст. вирізняються роботи К. Якобі, які безпосередньо продовжують дослідження Гамільтона. Головні результати, отримані Якобі з аналітичної механіки, були викладені ним у курсі лекцій, які він прочитав зимового семестру у Кенігсберзькому університеті 1842-1843 рр.

У перших семи лекціях Якобі виводить рівняння динаміки систем із принципу Деламбера і, користуючись цим принципом, дає інтеграли руху центра тяжіння, інтеграли площі, інтеграли живих сил; у цих же лекціях дає виклад *принципу найменшої дії – так звані «умови Якобі».* У восьмій і дев'ятій лекціях Якобі переходить до викладення механіки Гамільтона. Крім того слід зазначити, що канонічні рівняння Гамільтона Якобі застосовує і для точок, рух яких підкоряється геометричним зв’язкам.

Головною частиною *«Лекцій динаміки»* (1936 р.) є та, де Якобі дає свою теорію *«останнього множника».*

Загальні теореми про множник Якобі використав при розв’язку цілої низки задач і до теорії інтегрування диференціальних рівнянь механіки, взятих у їх різноманітних формах.

У 19, 20 і 21 лекціях Якобі вносить істотне вдосконалення в метод інтегрування канонічних рівнянь Гамільтона. Сьогодні ця теорія відома як теорема Якобі – Гамільтона. Саме Якобі дав новий розв’язок відомих задач небесної механіки про рух планет у полі тяжіння Сонця; про рух точки, що притягується двома нерухомими центрами; разом з тим він визначив геодезичні лінії триосного еліпсоїда. Розв'язок двох останніх задач Якобі описав викладенням теорії еліптичних координат у багатомірному просторі.

Необхідно згадати й роботи М.В. Остроградського з аналітичної механіки, які в основному з’явилися під впливом робіт Лагранжа.

У статті *«Загальні міркування відносно моментів сил»* (Зібрання робіт, 1958) Остроградський розглядає питання про використання методів аналітичної статики до визначення рівноваги механічних систем, що підкоряються несталим силам. Аналізуючи поняття про можливі переміщення, він показує зміну основного рівняння аналітичної статики при наявності таких зв'язків. Цьому ж питанню присвячені й наступні його роботи: *«Про миттєве переміщення систем під дією змінних умов»* та *«Про принцип віртуальних* *швидкостей і про силу інерції»*, які стали наслідком підготовки його до читання лекцій з механіки.

Остроградський намагався викласти з належною якістю поняття про можливі переміщення для стаціонарних зв'язків і для зв'язків, які залежать від часу.

Дуже цікава робота про метод варіацій довільних сталих у використанні до інтегрування рівнянь Гамільтона*: «Про варіації довільних сталих у задачах динаміки»*. У цій роботі Остроградський виводить із великою витонченістю диференціальне рівняння теорії збурень, використовуючи дужки Пуассона і записуючи завдяки ним похідні від сталих, які входять до інтегралів незбуреного руху. У всій статті використовуються лінійні форми від варіацій канонічних змінних, відомих сьогодні в теорії інтегральних інваріантів динамічних систем.

У статті *«Про інтеграли загальних рівнянь динаміки»* Остроградський показує, що теорія інтегрування рівнянь динаміки за допомогою повного інтеграла Гамільтона – Якобі може бути поширена і на механічні задачі, коли рух системи залежить від часу.

При відшуканні випадків інтегрування рівнянь динаміки цілком нова ідея була внесена в аналітичну механіку К. Вейерштрассом. Розглядаючи задачу про рух важкого твердого тіла навколо нерухомої точки, він поставив запитання: коли рівняння цієї задачі можуть бути про інтегровані в функціях часу? Подібне використання теорії функцій комплексної змінної до аналітичної механіки відразу дало результати: роботи С.В. Ковалевської, яка відкрила новий випадок інтегрування другого порядку, привели до відкриття сімейства нових трансцендентних аналітичних функцій.

Список використаної літератури

1. Марк Витрувий. Десять книг по архитектуре / Перев. Ф.А.Петровского. – М.: Соцэкгиз, 1934. – 190 с.)
2. Рыжков К.В. 100 великих изобретений. – М.:Вече, 1999. – 528 с. – (100 великих).
3. История механики с конца XVIII века до середины XX века. / Под общей редакцией А.П. Григорьяна, И.Б. Погребысского. – М.: Изд-во «Наука», 1972. – 394 с.
4. Sivan Kartha, Patric Grimes. Fuel cells: Energy conversion for the next century/ Physics Today. –1994. – N11. – p. 53-61.
5. Б. А. Лукіянець. Екологічні проблеми з точки зору термодинаміки. ДУЛП, Львів, 1996. – 40 с.
6. Історія танкобудування України. Персоналії: Навч.посібн. / Є.Є. Александров, І.Є. Александрова, Л.М. Бєсов та ін. – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – 200 с.
7. Таньшина А.В. Основатели харьковских научных школ в физике. Учеб. пособие по истории физики. – Ч.1. – Х.: Изд-во Харьковского университета, 2002. – 512 с.

УДК 519.863

ПРО ОДНУ ЧИСЛОВУ ХАРАКТЕРИСТИКУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ.

Борисов Є.М.,
к.ф.-м.н., доцент,
Борисова Л.Є.
асистент,
Глухівський національний педагогічний
університет ім.. О. Довженка

В роботі досліджується одна із основних числових характеристик випадкової величини - ексцес. Показано, що у відповідності до загально прийнятого означення, ексцес в більшості випадків неможливо визначити або охарактеризувати користуючись тільки графіками щільності ймовірності розподілів випадкових величин.

В работе исследуется одна из основных числовых характеристик случайной величины - эксцесс. Показано, что в соответствии с обще принятого определения, эксцесс в большинстве случаев неизвестна или охарактеризовать пользуясь только графиками плотности вероятности распределений случайных величин.

We study one of the basic numerical characteristics of random variable - kurtosis. Shown that, in accordance with generally accepted definition, kurtosis in most cases impossible to define or describe the graphs using only the probability density distributions of random variables.

Вступ. В більшості навчально методичних посібниках та в інших виданнях з теорії ймовірностей та математичної статистики, в яких використовують поняття числової характеристики – ексцес в означені цієї величини або в її характеристиці йдеться про так звану "гостровершинність" або "плосковершинність" [1, 2, 3]. Однак зміст цих термінів залишається не зовсім зрозумілим, а в деяких випадках призводить до хибних висновків щодо визначення ексцесу або принаймні його знака користуючись лише графіками відповідних функцій щільності розподілу. Адже, у відповідності до означень, для "гостровершинних" кривих ексцес додатній, а для "плосковершинних" від'ємний.

В зв'язку з вищесказаним, пропонується розглянути графіки деяких симетрично розподілених функцій щільності розподілу та криву нормального розподілу, адже саме в порівнянні з цією кривою, у відповідності до означень, визначається "гостровершинність" або "плосковершинність" інших, а, отже, і знак ексцесу.

Побудуємо на одному рисунку (рис. 1) графіки двох функцій щільності розподілу: нормально розподіленої випадкової величини (а=0, $\sigma = 1$) та функції, що має форму рівнобедреного трикутника і має такий аналітичний вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} b^2x+b, & \dfrac{-1}{b}\le x\le 0 \\ -b^2x+b, & 0\le x\le \dfrac{1}{b}, \end{cases} \tag{1}$$

Зауважимо, для функцій щільності розподілу, які мають вигляд (1), (2) умова нормування виконується для будь-яких значень параметра b. В даному випадку $b=\dfrac{2}{3}$.

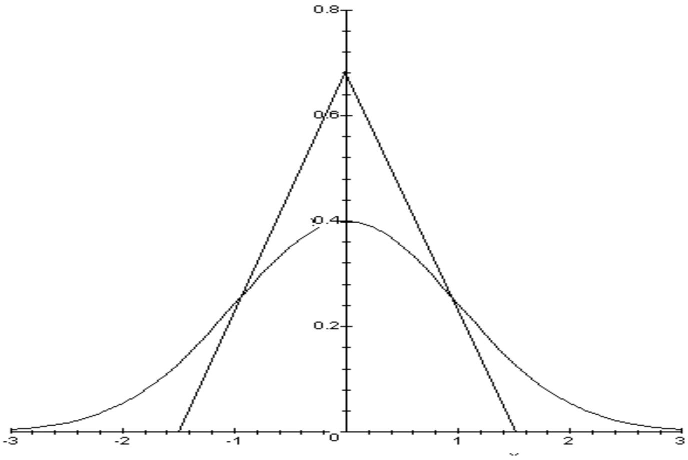


Рис.1

Відповідно до рис. 1 "гостровершинність" вочевидь спостерігається для кривої, що має форму трикутника. Однак підрахунки для ексцесу стверджують протилежне, а саме: для цієї кривої ексцес від'ємний, що вказує на "плосковершинність" розподілу випадкової величини.

Побудуємо ще один графік. На рисунку 2 зображено графіки щільності нормального розподілу (а=0, $\sigma=1$) та рівномірного розподілу.

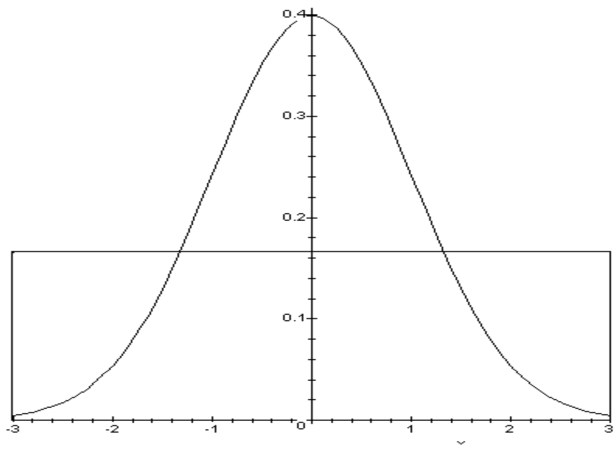


Рис.2

В даному випадку спостерігаємо "плоску вершину" для графіка рівномірного розподілу, про що говорить і числове значення ексцесу, який приймає від'ємне значення. Але, візуально порівнюючи графіки на цих двох рисунках (рис.1 та рис.2), очевидно не можна зробити висновок , що вони обидва "плосковершинні".

В зв'язку з наведеними прикладами постає питання в коректності самого означення для ексцесу (або його характеристики), яке фігурує в багатьох виданнях. Слід відмітити, що не у всіх цих виданнях означення однакові, а мають свої незначні відмінності (можливо викликані перекладом цього означення з російськомовних видань). Тут не будемо наводити ці означення, за виключенням одного, яке на думку авторів є найбільш коректним в сенсі розглянутих вище питань. В зв'язку з викладеною вище важливістю кожного терміна в цьому питанні, характеристику ексцесу тут представлено мовою оригіналу: «Величина эксцесса характеризует «крутость» кривой плотности вероятности по сравнению с кривой Гаусса» [1].

2. Проаналізуємо ще один аспект цього питання. На рисунку 3 зображено графіки двох функцій щільності розподілу (1), які мають вигляд рівнобедрених трикутників(в даному випадку $b=\frac{1}{4}, b=1.$). Якщо оцінювати ці графіки з точки зору "гостровершинності", то може з'явитися хибний висновок, про те що ексцеси за своїм числовим значенням у них різні. Одна числовий підрахунок говорить про те, що ексцеси у них однакові і дорівнюють $-\frac{3}{5}$. Більш того, неважко переконатись у тому, що це значення для ексцесу залишається незмінним для будь-яких функцій щільності, які мають форму рівнобедрених трикутників і задаються формулою (1).

Той самий висновок можна зробити стосовно кривих, які зображено на рисунку 4. На цьому рисунку зображено графіки функцій щільності розподілу, які функціонально мають вигляд квадратичної функції ($b=1, \quad b=1{,}5$):

$$f(x)=b^2-\frac{16}{9}b^6x^2, \quad -\frac{b}{a}\le x\le\frac{b}{a}, \quad a=\frac{4}{3}b^3 \qquad (2)$$

Ексцес для цих двох функцій однаковий і дорівнює $-\frac{6}{7}$, а також для всіх інших функцій щільності розподілу, які мають аналітичний вигляд (2).

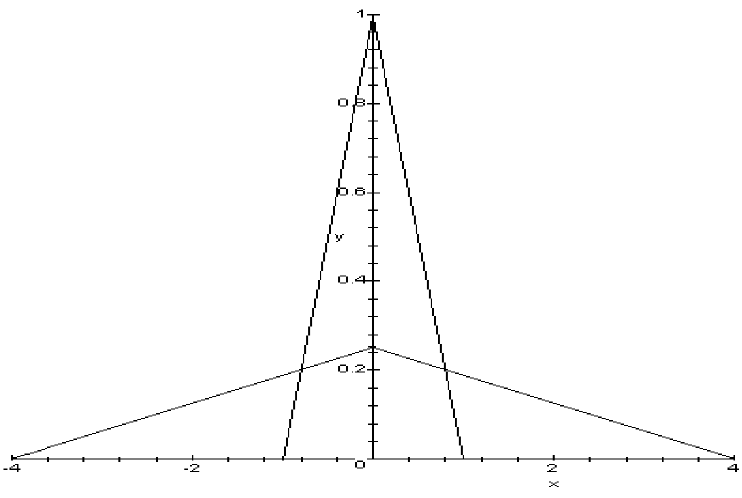


Рис.3

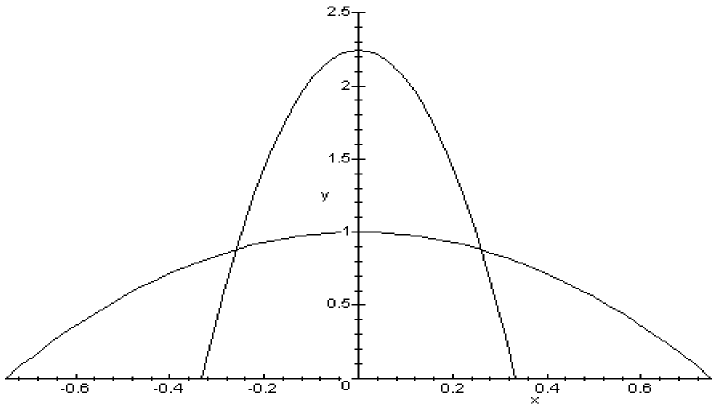


Рис.4

Продовжуючи, по аналогії, для всіх рівномірно розподілених величин значення ексцесу також однакове і дорівнює $-\frac{6}{5}$.

Вище наведені приклади дають змогу зробити висновок про те, що ексцес або його знак не можна однозначно визначити візуально через так звану "гостровершинність" чи "плосковершинність". Принаймні в багатьох випадках це неможливо або результат такого визначення може привести до хибних висновків.

З іншого боку, два приклади дають змогу стверджувати про те , що ексцес визначається функціональним (аналітичним) виглядом самої функції щільності розподілу, а не виглядом свого графіка. Також залишаються не зрозумілими, що означають терміни "гостровершинність", "плосковершинність" (що таке вершина, гостра чи плоска вершина).

В зв'язку з вищесказаним пропонуються більш уважно відноситись до самого означення, а також до його тлумачення.

3. Нижче наведені розрахунки ексцесу для симетрично розподілених функцій щільності розподілу, що мають такий аналітичний вигляд:

$$f(x) = b^{2k} - (ax)^{2k}, \quad -\frac{b}{a} \le x \le \frac{b}{a}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

При цьому умова нормування виконується для будь-яких дійсних b. Були виведені формули, які дають змогу знаходити ексцес для будь-яких k та b. При, слід зауважити, що цьому ексцес визначається тільки параметром k.

Так, наприклад, для $k = 1,\ a = \frac{4}{3}b^3,\ Es = -\frac{6}{7}$, $\quad k = 2,\ a = \frac{8}{5}b^5,\ Es = -\frac{26}{25}$, $k = 3,\ a = \frac{12}{7}b^7,\ Es = -\frac{426}{385}$, $\quad k = 4,\ a = \frac{16}{9}b^9,\ Es = -\frac{74}{65}$.

На рисунку 5 зображено дві криві розподілу, які визначаються формулою (3). Перша крива відповідає випадку $b = 1,\ k = 1$ (крива виділена "жирною" лінією) та друга - $b = 1,\ k = 3$. В цьому випадку з огляду на графіки можна зробити висновок, що більш плоску вершину має друга крива, що підтверджує і саме знайдене значення ексцесу.

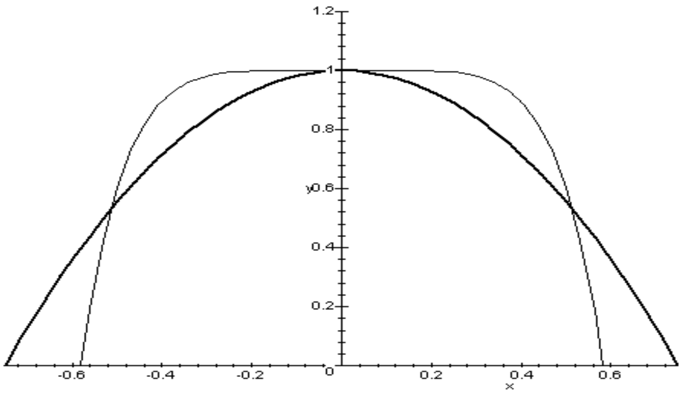


Рис. 5

Висновки. Таким чином, в роботі досліджена числова характеристика випадкової величини - ексцес. Показано, що ексцес в більшості випадків неможливо визначити або охарактеризувати користуючись тільки графіками щільності ймовірності розподілів випадкових величин.

Список використаної літератури

1. Г.И. Агапов. Задачник по теории вероятности. // "Высшая школа".- М.- 1986. 80с.
2. Е.С. Вентцель. Теория вероятностей. // "Наука".- М.- 1964. 576с.
3. Жлуктенко В.І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей та математична статистика, Київ: ІЗМН, 1997, 408с.

СУЧАСНА ЕКОНОМЕТРІЯ ЯК НАУКА І НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА

Гончаренко Я.В.,
кандидат фіз.мат наук, доцент
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,
Ляшко О.В.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Київська державна академія водного транспорту імені П.Конашевича-Сагайдачного

В статті проаналізовано сучасні підходи до визначення предмету та методу економетрії як науки, сформульовані мета та основні завдання курсу «Економетрія» в системі підготовки студентів економічних та математико-економічних спеціальностей та коротко описано його структуру.

В статье проанализированы современные подходы к определению предмета и метода эконометрии как науки, сформулированы цель и основные задания курсу «Эконометрия» в системе подготовки студентов экономических и математико-экономических специальностей и коротко описана его структура.

The article deals with the modern approaches to the definition of subject and method of econometrics as a science, formulated goals and main tasks of the course "Econometrics" in training students of economic-mathematical and economic skills and briefly describes its structure.

Вступ

Процес прийняття науково обгрунтованих рішень в економіці тісно пов'язаний з визначенням кількісних співвідношень між економічними показниками. Можна навести багато прикладів, які показують, що ефективність прийнятих рішень у підприємництві, комерції, бізнесі та інших сферах діяльності залежить від того, наскільки особа, яка приймає ці рішення, використовує інформацію, що характеризує кількісний зв'язок між економічними процесами та явищами.

Економетрія — це наука, що вивчає кількісні і якісні характеристики та взаємозв'язки економічних об'єктів і процесів за допомогою математичних і статистичних методів і моделей.

З огляду на це економетрія є однією з найважливіших дисциплін фундаментальної підготовки як бакалаврів з економіки, так і вчителів (викладачів) економічних та економіко-математичних дисциплін. Донедавна економетрія як окремий предмет не вивчалася у вищих навчальних економічних закладах нашої країни. Дисципліни з математичного моделювання економічних процесів та явищ, що входили до програм вузів України, містили лише окремі теми з економетрії, які здебільшого базувалися на класичному регресійному аналізі.

Як відомо, застосувати метод найменших квадратів для оцінювання параметрів економетричної моделі можна лише в разі виконання певних умов, які далеко не завжди виконуються на практиці для вихідної економічної інформації. Якщо ці умови порушуються, доводиться застосовувати інші методи оцінювання параметрів економетричної моделі. Вивчити методи оцінювання параметрів моделі та особливості економічної інформації з метою кількісного вимірювання взаємозв'язку між досліджуваними процесами та явищами — основне завдання курсу «Економетрія».

У вітчизняній та зарубіжній літературі висловлювалися різні погляди щодо того, які власне проблеми вирішує і які методи вивчає саме економетрія. Сьогодні вже практично повністю сформоване коло задач та методів, які належать до економетрії. Порівняно з підходом, притаманним математичній статистиці, власне економетричний підхід до задач, які вивчаються, виявляється не в тому, що приклади і термінологія беруться з економічної галузі, а насамперед у тій увазі, яка приділяється питанню про відповідність вибраної моделі економічному об'єкту. Зокрема, ідеться про формулювання гіпотез, серед яких потрібно зробити вибір, щоб застосувати ті чи інші методи оцінювання параметрів моделі.

1. Структура сучасної економетрії

Спочатку з'ясуємо, що звичайно розуміють під економетрією. Потім обговоримо сучасний стан економетрії як науково-практичної дисципліни.

Економетрія — порівняно молода галузь науки, відома під такою назвою лише з 1930 року, коли було засновано Економетричне об'єднання, яке визначило себе так: «Міжнародне об'єднання для розвитку економічної теорії і її зв'язку зі статистикою та математикою». З 1933 р. виходить журнал «Економетрія», який видається цим об'єднанням.

Термін «економетрія» запропонував львівський вчений П. Чомпа, опублікувавши у Львові в 1910 році книгу «Нариси економетріі і природної теорії бухгалтерії, яка грунтується на політичній економії».

За рубежем перші праці з економетрії, що належали Муру, вийшли друком протягом 1914–1917 рр. У 1928 році було опубліковано роботи Ч. Кобба і П. Дугласа про виробничу функцію. Ця функція ввійшла в економетрію як класичний приклад і досі є важливим інструментом економічного аналізу.

На початку XX століття в деяких країнах були спроби скласти так звані «барометри розвитку». Найвідоміший з них «гарвардський барометр», за допомогою якого в 20-ті роки намагались передбачити поводження товарного і грошового ринку.

Гарвардська школа вважалася в той час центром економічних досліджень. Тут вперше почали системно вивчати ряди економічних показників з урахуванням взаємозв'язку між ними і на основі цих показників досліджувати тенденції та цикли економічних процесів. Криза 1929–1933 рр. призвела до критичного перегляду методів аналізу, які застосовувалися в економіці. В дослідженнях почали враховувати випадкові аспекти економічних явищ, що стало початком формування економетрії як галузі економічної науки.

Засновники економетрії — Р. Фріш, Е. Шумпетер, Я. Тінберген. Усі вони перебували під впливом неокласичної школи і кейнсіанства і намагалися поєднати економічну теорію з математичними й статистичними методами. Спочатку обмежувались вивченням деяких моделей попиту і пропозиції. Тільки після Другої світової війни було побудовано комплексні економетричні моделі на макрорівні, в яких основна увага приділялась попиту, фінансовому стану і податкам, прибутку, цінам і т.ін.

Протягом останніх п’ятдесяти років розвиток економетрії відбувався в таких двох напрямках: 1) розробка нових методів оцінювання параметрів моделей з урахуванням особливостей вихідної економічної інформації; 2) розширення економічних досліджень на основі економетричних методів.

Особливі досягнення пов’язані з розвитком економетрії за останні 30 років. Сюди можна віднести такі проблеми:

1) вивчення і врахування мультиколінеарності;

2) специфікація помилок;

3) коваріаційний аналіз параметрів моделі;

4) побудова моделі з фіктивними змінними;

5) визначення лагових змінних і побудова та аналіз моделей розподіленого лагу.

Термін «економетрія» означає вимірювання в економіці**,** і вимірювання справді є важливою частиною економетрії. Але не всі вимірювання в економіці належать до економетрії. Якщо раніше деякі автори майже всі прикладні математичні дослідження в економіці відносили до економетрії, то тепер поширений погляд, згідно з яким зміст її значно звужується.

Згідно з сучасними поглядами, можна говорити, що *економетрія вивчає методи оцінювання параметрів економетричних моделей, які характеризують кількісні взаємозв’язки між економічними показниками, а також розглядає основні напрямки застосування цих моделей в економічних дослідженнях.*

У світовій науці економетрія займає гідне місце. Нобелівські премії з економіки одержали економетрики Ян Тільберген, Рагнар Фріш, Лоуренс Клейн, Трюгве Хаавельмо. У 2000 р. до них додалися ще двоє — Джеймс Хекман і Деніель Мак-Фадден. Випускається ряд наукових журналів, цілком присвячених эконометрике, у тому числі: Journal of Econometrics (Швеція), Econometric Reviews (США), Econometrica (США), Sankhya. Indian Journal of Statistics. Ser.D. Quantitative Economics (Індія), Publications Econometriques (Франція).

В економетрії, як дисципліні на стику економіки (включаючи менеджмент) і статистичного аналізу, природно виділити три види наукової і прикладної діяльності (по ступені специфічності методів та заглибленості в конкретні проблеми):

а) розробка і дослідження економетричних методів (методів прикладної статистики) з врахуванням специфіки економічних даних;

б) розробка і дослідження економетричних моделей відповідно до конкретних потреб економічної науки і практики;

в) застосування економетричних методів і моделей для статистичного аналізу конкретних економічних даних.

Коротко розглянемо три тільки що виділених види наукової і прикладної діяльності. По мірі руху від а) до в) звужується широта області застосування конкретного економетричного методу, але при цьому підвищується його значення для аналізу конкретної економічної ситуації. Якщо роботам виду а) відповідають наукові результати, значимість яких оцінюється по загальноеконометричних критеріях, то для робіт виду в) основне —

успішне розв'язання задач конкретної області економіки. Роботи виду б) займають проміжне положення, оскільки, з одного боку, теоретичне вивчення економетричних моделей може бути досить складним і математизованим (див., наприклад, монографію [5]), з іншого боку – результати становлять інтерес не для всієї економічної науки, а лише для деякого напрямку в ній.

Прикладна статистика — інша область знань, ніж математична статистика. Це чітко виявляється і при викладанні. Курс математичної статистики складається в основному з доведень теорем, як і відповідні навчальні посібники. У курсах прикладної статистики та економетрії основне — методологія аналізу даних і алгоритми розрахунків, а теореми наводяться як обґрунтування цих алгоритмів, доведення ж, як правило, опускаються (їх можна знайти в науковій літературі.

Прикладна статистика — методична дисципліна, що є центром статистики. При застосуванні до конкретних областей знань і галузей народного господарства одержуємо науково-практичні дисципліни типу "статистика в промисловості", "статистика в медицині" та ін. З цього погляду економетрія — це "статистичні методи в економіці".

Математична статистика відіграє роль математичного фундаменту для прикладної статистики. До нашого часу очевидно чітко виражене розмежування цих двох наукових напрямків. Прикладна статистика націлена на рішення реальних задач. Тому в ній виникають нові постановки математичних задач аналізу статистичних даних, розвиваються нові методи. Обґрунтування звичайно проводиться математичними методами. При цьому велику роль грає методологічна складова — як саме ставити задачі, які припущення прийняти з метою подальшого математичного вивчення. Велика роль сучасних інформаційних технологій, зокрема, комп'ютерного експерименту.

Для аналізу економічних даних можуть застосовуватися всі розділи прикладної статистики, а саме:

- статистика випадкових величин;
- багатомірний статистичний аналіз;
- статистика часових рядів і випадкових процесів;
- статистика об'єктів нечислової природи, у тому числі статистика интервальних даних.

Перераховані чотири області виділені на основі математичної природи елементів вибірки: у першій з них це — числа, у другій — вектори, у третій — функції, у четвертій — об'єкти нечислової природи, тобто елементи просторів, у яких немає операцій додавання і множення на число. Прикладами об'єктів нечислової природи є значення якісних ознак, бінарні відношення (ранжування, розбивки, толерантності), послідовності з 0 і 1, інтервали, тексти.

Як і для застосувань статистичних методів в інших областях, в економетрії розв'язуються задачі опису даних (у тому числі усереднення), оцінювання, перевірки гіпотез, відновлення залежностей, класифікації об'єктів і ознак, прогнозування, прийняття статистичних рішень тощо.

Однак у деяких відносинах економічні дані відрізняються від технічні або астрономічних, і ці відмінності необхідно враховувати при виборі методів аналізу конкретних економічних даних.

Багато економічних показників невід'ємні. Виходить, їх треба описувати невід'ємними випадковими величинами. А от нормальні розподіли принципово не підходять, оскільки для них ймовірність від'ємних значень завжди додатна.

Економічні процеси розвиваються в часі, тому велике місце в економетрії займають питання аналізу і прогнозування часових рядів, у тому числі багатомірних. При цьому в одних задачах більше уваги приділяють вивченню трендів (середніх значень, математичних сподівань), наприклад, при аналізі динаміки цін. В інших же важливі відхилення від середньої тенденції, наприклад, при застосуванні контрольних карт (карт Шухарта, кумулятивних сум тощо).

Взагалі кажучи, економетрія не розглядається як галузь математики, але математика відіграє в ній дуже важливу роль. Тому методи викладання і вивчення економетрії практично такі самі, як у математичних курсах. Вони передбачають постановку задачі, а також аналіз розв'язків, що базуються на теоремах і основних визначеннях. В економетрії не завжди всі твердження строго доводяться, але алгоритми задач неодмінно грунтуються на методах математичної статистики, широко використовуються матрична алгебра та інші класичні розділи математики.

2. Задачі економетричного дослідження

Роль економетричного дослідження визначається тими задачами, які може розв'язувати економетрія.

Найважливішою задачею є оцінювання параметрів і перевірка значущості економетричної моделі. Першим етапом цього процесу є специфікація моделі в математичній формі. Другий етап — збір і підготовка економічної інформації. На третьому етапі оцінюються параметри моделі. Четвертий етап — це перевірка моделі на вірогідність. Дуже важливими на цьому етапі є оцінки дисперсії залишків моделі. Ці оцінки відіграють вирішальну роль при з'ясуванні якості економетричних моделей, вони необхідні для визначення надійності

У стислому вигляді економетричний аналіз складається з таких етапів.

1. Формулювання теорії чи гіпотези.
2. Розробка економетричної моделі для перевірки цієї теорії.
3. Оцінка параметрів обраної моделі.
4. Перевірка моделі, статистичні висновки.
5. Прогнозування на основі отриманої моделі.
6. Застосування моделі (для контролю тощо).

Можна виділити такі основні завдання, які розв'язує економетрія.

1. Специфікувати модель, тобто необхідно, щоб усі функціональні зв'язки входили до моделі у явному вигляді. Цього можна досягти методом “від простого до складного”: почавши з найпростіших функцій, вводити та перевіряти різні гіпотези і поступово, виходячи з реальних даних, ускладнювати характер функціональних зв'язків.

2. Вибрати означення та одиниці вимірювання змінних, які входять до моделі.
3. Оцінити всі невідомі параметри моделі та розрахувати інтервали довіри (інтервали, до яких із заданою ймовірністю попадатиме обчислювана величина).
4. Оцінити якість побудованої моделі за допомогою різних тестів та критеріїв. Це допомагає остаточно вирішити питання, чи треба змінювати початково обрану модель, та деякі теоретичні припущення. Якщо така зміна необхідна, то треба проводити нові розрахунки і нове тестування.
5. Провести аналіз результатів, які планується використовувати на практиці для прийняття рішень.

3. Предмет, метод і завдання курсу «Економетрія»

Основною метою вивчення курсу "Економетрія" є формування в студентів вмінь і навичок, які дозволяли б їм встановлювати закономірності та взаємозв'язки економічних об'єктів і процесів за допомогою математико-статистичних методів та моделей. Економетрія є синтетичною дисципліною, яка поєднує в собі економічну теорію, математичну економіку, теорію матриць, теорію ймовірностей, економічну та математичну статистику, а тому є важливим елементом у підготовці висококваліфікованих кадрів відповідного профілю.

Особливу увагу при вивчені курсу приділено розв'язанню реальних практичних задач економіки, оскільки економетрія, в основному, є прикладною дисципліною. Для розв'язання цих задач досить часто доцільно використовувати сучасну обчислювальну техніку, що також відображено в програмі курсу при плануванні практичних занять.

Вивчення курсу передбачає формування у студентів **знань:**

– основних понять та загальних принципів математичного моделювання;
– основ регресійного аналізу: лінійна однофакторна регресійна модель, основні нелінійні моделі, багатофакторні регресійні моделі;
– основних статистичних критеріїв, що використовуються в економетрії: критерій Пірсона, Фішера, Стьюдента, Дарбіна-Уотсона та ін.
– методів дослідження побудованих моделей на адекватність, а обчислених параметрів — на значущість;
– методів побудови довірчих інтервалів для прогнозованих значень та невідомих параметрів;
– методів визначення наявності мультиколінеарності та автокореляції в багатофакторних моделях та позбавлення від них;
– методів дослідження якісних економічних показників.

На основі цих знань повинні бути сформовані **уміння:**

– будувати економетричні моделі реальних процесів і явищ;
– досліджувати парні зв'язки в економіці, використовуючи лінійну регресійну модель, та інші моделі, що зводяться до неї;
– будувати і досліджувати багатофакторні регресійні моделі;

– використовувати побудовані моделі для аналізу реальних процесів і явищ та прогнозування з заданою надійністю;
– визначати наявність мультиколінеарності та автокореляції та позбавлятись від них в побудованих моделях (будувати дистрибутивно-лагові та автокореляційні моделі);
– оцінювати параметри систем одночасних рівнянь, прогнозувати та будувати довірчі інтервали для прогнозів;
– досліджувати якісні економічні показники.

Для засвоєння курсу необхідна належна математична підготовка, особливо з матричної алгебри, диференціального числення. Однаковою мірою слід володіти методами математичної статистики. Важливо також знати економічні категорії і поняття.

Умовно курс економетрії можна поділити на дві частини:

1) економетричні методи;

2) економетричні моделі економічних процесів і явищ.

Економетричні методи можна умовно розбити на чотири групи. До першої групи входять методи оцінювання параметрів класичної економетричної моделі за методом найменших квадратів, їх верифікація. До другої групи належать методи оцінювання параметрів узагальненої моделі, коли порушуються деякі передумови використання методу найменших квадратів. До третьої групи входять методи оцінювання параметрів динамічних економетричних моделей, їх верифікація. Четверта група охоплює методи оцінювання параметрів економетричних моделей, які побудовані на основі системи одночасових структурних рівнянь.

Список використаної літератури

1. Джонстон Дж. Эконометрические методы. — М., 1980.
2. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. — М., 1977. — Вып. 12.
3. Клас А., Гергели К., Колек Ю., Шуян И. Введение в эконометрическое моделирование. — М., 1978.
4. Леонтьев В. Экономические эссе. Теория, исследования, факты и политика: Пер. с англ. - М.: Политиздат, 1990. - 415 с.
5. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической обработки наблюдений. — М., 1962.
6. Маленво Э. Статистические методы в эконометрии. — М., 1975—1976. — Вып. 1,2.
7. Моргенштерн О. О точности экономико-статистических наблюдений. - М.: Статистика, 1968. - 324 с.
8. Титнер Г. Введение в эконометрию. — М., 1964.
9. Тутубалин В.Н. Границы применимости (вероятностно-статистические методы и их возможности). - М.: Знание, 1977. - 64 с.
10. Фишер Ф. Проблема идентификации в эконометрии. — М., 1978.
11. Чупров А.А. Основные проблемы теории корреляции. — М.: Госстатиздат., 1960.

ПРИКЛАДНА ТА ПРОФЕСІЙНА СПРЯМОВАНІСТЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ МОЛОДШИХ СПЕЦІАЛІСТІВ ГЕОДЕЗИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ В ПРОФЕСІЙНИХ КОЛЕДЖАХ

Гончаренко Я. В.,
кандидат фіз.-мат. наук
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,
Шкарін О. О.,
Коледж інформаційних технологій та землевпорядкування НАУ

У статті досліджуються проблеми прикладної та професійної спрямованості математичної підготовки молодших спеціалістів геодезичних спеціальностей в професійних коледжах.

В статье исследуются проблемы прикладной и профессиональной направленности математической подготовки младших специалистов геодезических специальностей в профессиональных колледжах.

In this paper we investigate the problems of applied and professional direction of mathematical training for students of geodesic specialities in professional colleges.

Геодезія, як і інші науки, постійно впроваджує нові досягнення математики та сучасні інформаційні технології. Нові технічні та технологічні можливості базуються на нових методах збору та комп'ютерної обробки просторових даних. Зокрема, методи визначення положення точок місцевості вийшли в останні роки на новий якісний рівень в зв'язку з застосуванням супутникових технологій, електронних тахеометрів, лазерного сканування та дистанційного зондування з використанням цифрових методів. Моделювання оточуючого простору здійснюється тепер в цифровій формі, з'явились нові комп'ютерні технології накопичення, оновлення та використання геопросторових даних, все більш широке застосування знаходять геоінформаційні системи.

Таким чином, розвиток суспільства і економіки в сучасних умовах, нові досягнення науки і техніки приводять до виникнення проблеми: кількість фахівців геодезичних спеціальностей, які здатні на високому професійному рівні з використанням сучасних методів і технологій виконувати інженерно-технічні роботи, обслуговувати будівельні роботи, виконувати роботи в галузі землевпорядкування, гірничої геодезії, гідрографії тощо, є недостатньою.

Це, в свою чергу, зумовлює зростання вимог до підготовки студентів геодезичних спеціальностей. Основним завданням на шляху підвищення якості геодезичної освіти є приведення змісту освіти у відповідність до сучасних вимог практики та сучасного рівня розвитку науки і технологій.

Геодезія (грецьк. geodaisia — "розподіл землі") – це наука про методи визначення форми та розмірів Землі і зображення її поверхні на картах і планах, а також про способи проведення різних вимірів на поверхні Землі, під землею, в околоземному просторі, на інших планетах.

Швидкий розвиток та ускладнення методів геодезії привели до розділення її на кілька наукових дисциплін:

- Вища геодезія вивчає форму Землі, її розміри, гравітаційне поле, забезпечує поширення прийнятих систем координат в межах держави, континенту або всієї Землі, досліджує давні та сучасні рухи земної кори, а також вивчає форму, розміри та гравітаційні поля інших планет.
- Топографія досліджує методи топографічної зйомки місцевості з метою зображення її на картах і планах.
- Картографія вивчає методи і процеси створення і використання карт, планів, атласів та іншої картографічної продукції.
- Фотограметрія вивчає методи створення карт і планів за фото- і аерофотознімками.
- Інженерна геодезія вивчає методи і засоби проведення геодезичних робіт при дослідженнях, проектуванні, будівництві та експлуатації різних споруд.
- Маркшейдерія вивчає методи проведення геодезичних робіт в підземних гірничих виробітках.

Зрозуміло, що чітко визначених границь між названими дисциплінами не існує. Але вже із цього неповного переліку геодезичних дисциплін видно, які різноманітні задачі теоретичного і прикладного характеру доводиться вирішувати геодезистам.

Предметом нашого дослідження є математична підготовка молодших спеціалістів геодезичних спеціальностей в професійних коледжах. Сучасне суспільство висуває високі вимоги до професійної підготовки молодших спеціалістів: високий професіоналізм, мобільність, здатність до «неперервного навчання», наявність професійно-значущих особистих якостей тощо. В той же час випускник професійного коледжу при сучасному стані планування і організації виробництва не може вважатись достатньо підготованим до реалій сучасного життя та роботи по обраній спеціальності без фундаментальної математичної підготовки. Майбутній фахівець має на належному рівні володіти математичними методами, вміти створювати і аналізувати математичні моделі при розв’язанні професійних задач.

Таким чином метою математичної освіти студентів професійних коледжів має стати не просто передача суми певних знань, вмінь та навичок в галузі вищої та прикладної математики, а формування спеціаліста, здатного використовувати їх в своїй професійній діяльності.

Отже, прагматичні цілі навчання математики студентів професійних коледжів з одного боку, і певна «академічність» (відірваність від прикладних задач) навчання, з іншого, вказують на існуючі протиріччя у змісті та технологіях математичної освіти, які свідчать про необхідність її реформування. Досвід автора, аналіз науково-методичної літератури, результатів педагогічних досліджень свідчать про те, що одним з основних шляхів підвищення якості математичної підготовки студентів професійних коледжів є реалізація прикладної та професійної спрямованості навчання.

Проілюструємо на прикладах реалізацію принципів особистісно-орієнтованого навчання, зокрема, таке використання педагогічних засобів (змісту, форм, методів навчання), яке, забезпечуючи засвоєння студентами програмного обсягу знань, вмінь та навичок, сприяє формуванню і розвитку професійних якостей особистості.

Розглянемо реалізацію міжпредметних зв'язків під час вивчення теми «Побудова планових знімальних мереж засічками».

З курсу геодезії студентам відомо, що для визначення пунктів планових знімальних мереж можуть застосовуватись засічки різних типів: кутові, лінійні, лінійно-кутові. Широке застосування отримали на виробництві кутові засічки (пряма, зворотня, комбінована). Розглянемо методику їх побудови.

Пряма кутова засічка

Прямою кутовою засічкою називають побудову на місцевості, в якій координати невідомого пункта P визначають за координатами вихідних пунктів A і B і виміряними на цих пунктах кутами A і B (рис.1)

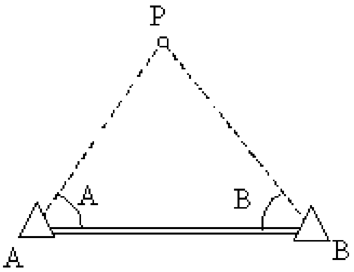


Рис. 1. Пряма одноразова засічка

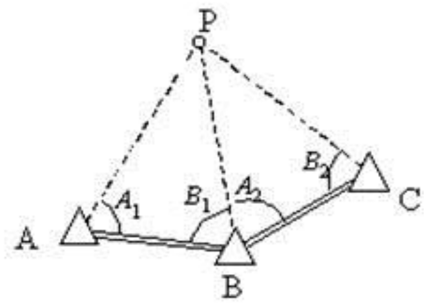


Рис. 2. Пряма багаторазова засічка

Засічку, показану на рис.1 називають прямою одноразовою засічкою.

В прямій одноразовій засічці відсутній контроль виміряних кутів, отже координати пункта P також визначаються безконтрольно.

На рис. 2 показаний випадок, коли пункт P визначається за координатами трьох вихідних пунктів A, B і C і виміряними на цих пунктах кутами A_1, B_1 та A_2, B_2. Таку засічку називають багаторазовою.

Пряма багаторазова засічка фактично являє собою дві одноразових засічки, які можуть бути розв'язані окремо, а отже, координати пункта P будуть знайдені з контролем.

Виведемо формули для обчислення координат пункта P із прямої одноразової засічки

З трикутника ABP запишемо:

$$\left.\begin{aligned} X_P - X_A &= S\cos\alpha_{AP} \\ Y_P - Y_A &= S_{AP}\sin\alpha_{AP} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

де дирекційний кут

$$\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - A, \qquad (2)$$

причому дирекційний кут α_{AB} може бути знайдений за координатами пунктів A і B з розв'язання оберненої геодезичної задачі.

Підставимо (2) в (1). Матимемо

$$\left.\begin{aligned} X_P - X_A &= S_{AP}\cos(\alpha_{AB} - A) \\ Y_P - X_A &= S_{AP}\sin(\alpha_{AB} - A) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

або

$$\left.\begin{aligned} X_P - X_A &= S_{AP}(\cos\alpha_{AB}\cos A + \sin\alpha_{AB}\sin A) \\ Y_P - Y_A &= S\sin_{AP}(\sin\alpha_{AB}\cos A - \cos\alpha_{AB}\sin A) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Але

$$\cos\alpha_{AB} = \frac{X_B - X_A}{S_{AB}}, \tag{5}$$

$$\sin\alpha_{AB}\frac{Y_B - Y_A}{S_{AB}}. \tag{6}$$

Підставимо вирази (5) і (6) в (4). Отримаємо

$$\left.\begin{aligned} X_P - X_A &= S_{AP}\frac{(X_B - X_A)\cos A + (Y_B - Y_A)\sin A}{S_{AB}} \\ Y_P - Y_A &= S_{AP}\frac{S_{AB}}{(Y_B - Y_A)\cos A - (X_B - X_A)\sin A} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В правих частинах виразів (7) винесемо sinA за дужки:

$$\left.\begin{aligned} X_P - X_A &= \frac{S_{AP}}{S_{AB}}\sin A\frac{X_B - X_A}{\sin A}\cos A + Y_B - Y_A \\ Y_P - Y_A &= \frac{S_{AP}}{S_{AB}}\sin A\frac{Y_B - Y_A}{\sin A}\cos A - X_B + X_A \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Замінимо вираз $\frac{\cos A}{\sin A}$ через ctgA і отримаємо

$$\left.\begin{aligned} X_P - X_A &= \frac{S_{AP}}{S_{AB}}\sin A(X_B - X_A)ctgA + Y_B - Y_A) \\ Y_P - Y_A &= \frac{S_{AP}}{S_{AB}}\sin A(Y_B - Y_A)ctgA - X_B + X_A) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

З трикутника АВР за теоремою синусів запишемо

$$\frac{S_{AP}}{S_{AB}} = \frac{\sin B}{\sin(A + P)}. \tag{10}$$

Скористаємося формулою для синуса суми кутів: $\frac{S_{AP}}{S_{AB}} = \frac{\sin B}{\sin A\cos B + \cos A\sin B}$. Домножимо обидві частини цієї рівності на sinA

$\frac{S_{AP}}{S_{AB}}\sin A = \frac{\sin B\sin A}{\sin A\cos B + \cos A\sin B}$. Поділимо чисельник і знаменник правої частини на sinBsinA. Отримаємо

$$\frac{S_{AP}}{S_{AB}}\sin A = \frac{1}{ctgB + ctgA}. \tag{11}$$

Підставимо значення $\frac{S_{AP}}{S_{AB}}\sin A$ в формули (9):

$$\left.\begin{aligned} X_P - X_A &= \frac{(X_B - X_A)ctgA + Y_B - Y_A}{ctgA + ctgB} \\ Y_P - Y_A &= \frac{(Y_B - Y_A)ctgA - X_B + X_A}{ctgA + ctgB} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

звідки остаточно запишемо

$$\left.\begin{aligned} X_P &= X_A + \frac{(X_B - X_A)ctgA + (Y_B - Y_A)}{ctgA + ctgB} \\ Y_P &= Y_A + \frac{(Y_B - Y_A)ctgA - (X_B + X_A)}{ctgA + ctgB} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Формули (13) називають *формулами котангенсів* або *формулами Юнга*.

Звертаємо увагу, що формули (13) можна застосовувати у випадку, коли пункт А — лівий, пункт В — правий (див. рис. 1) та коли між пунктами А і В існує видимість. Якщо ж видимість між пунктами А і В відсутня, але існує можливість передачі на напрямки АР і ВР дирекційних кутів α_{AP} і α_{BP} з інших напрямків планової мережі, наприклад, як показано на рис. 3, $\alpha_{AP} = \alpha_{AP} + \beta_1 \qquad \alpha_{BP} = \alpha_{BD} + \beta_2$

тоді для знаходження координат пункту Р застосовують формули Гауса, які ми наводимо без доведення

$$\left.\begin{aligned} X_P &= X_A + \frac{X_A tg\alpha_{BP} - X_B tg\alpha_{BP} + Y_B - Y_A}{tg\alpha_{AP} - tg\alpha_{BP}} \\ X_P &= X_B + \frac{X_A tg\alpha_{AP} - X_B tg\alpha_{AP} + Y_B - Y_A}{tg\alpha_{AP} - tg\alpha_{BP}} \\ Y_P &= Y_A + (X_P - X_A)tg\alpha_{AP} \\ Y_P &= Y_B + (X_P - X_B)tg\alpha_{BP} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

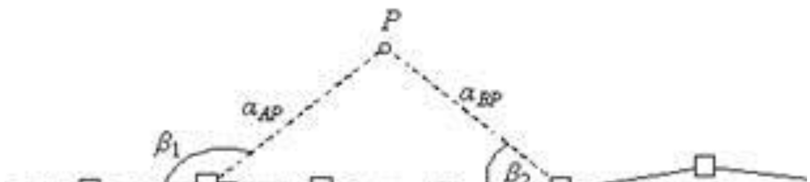


Рис.3. Випадок прямої одноразової засічки, коли між пунктами А і В відсутня видимість

Проектування прямих засічок

Оцінку проекту пункта Р, визначеного із такої засічки можна виконати таким чином.

Спочатку визначають очікувану середню квадратичну помилку в положенні пункта Р з прямої одноразової засічки з пунктів А і В за формулою

$$M_1 = \frac{m_\beta \sqrt{S_{AP}^{\ 2} + S_{BP}^{\ 2}}}{\sin^2 \angle APB}, \quad (15)$$

а потім з прямої одноразової засічки з пунктів В і С за формулою

$$M_2 = \frac{m_\beta \sqrt{S_{BP}{}^2 + S_{CP}{}^2}}{\sin^2 \angle BPC}, \qquad (16)$$

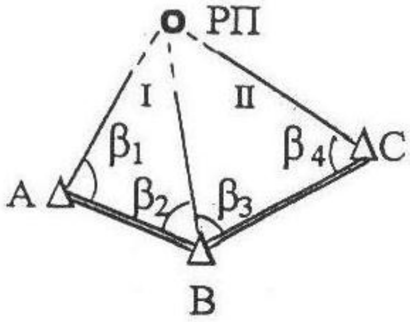
після чого обчислюють середнє вагове з двох значень

$$M^2 = \frac{M_1{}^2 \cdot M_2{}^2}{\sqrt{M_1{}^2 + M_2{}^2}}. \qquad (17)$$

Оскільки середні квадратичні помилки в положенні предметів і контурів на плані не повинні лежати в межах 0.5 мм в масштабі плану, то середні квадратичні помилки пунктів знімальної основи мають бути принаймні в 2–2.5 рази меншими, тобто 0.2 мм в масштабі плану. Для знімань в масштабі 1:5000, координати пункта Р повинні визначатися з прямої засічки з середньою квадратичною помилкою М не більшою 1.0 м, в масштабі 1:2000 не більшою 0.4 м, а в масштабі 1:1000 — не більшою 0.2 м.

Детальний аналіз формул (15) і (16) показує, що найбільш сприятливими випадками прямої засічки є такі, коли кути АРВ та ВРС близькі до 90º, $\angle A_1 >> \angle B_1$, $\angle A_2 >> \angle B_2$. Чим коротші віддалі АР, ВР і СР, тим точнішим буде визначення координат пункта Р.

Задача. Обчислити координат РП, який визначений прямою засічкою.



Вихідні дані:

X_a = 9639,34

Y_a = 9694,84

X_b = 9469,64

Y_b = 9831,71

X_c = 9199,87

Y_c = 9987,00

Вимірні кути:

$\beta_1 = 100^0 52' 40''$

$\beta_2 = 56^0 29' 33''$

$\beta_3 = 132^0 28' 07''$

$\beta_4 = 30^0 51' 28''$

Робочі формули (формули Юнга):

$$X_{\text{ÐÏ}} = \frac{X_a ctg\beta_2 + X_b ctg\beta_1 + Y_b - Y_a}{ctg\beta_1 + ctg\beta_2}; \quad Y_{РП} = \frac{X_a ctg\beta_2 + Y_b ctg\beta_1 + X_a - X_b}{ctg\beta_1 + ctg\beta_2}.$$

	Назва пунктів 1-вихідний 2-вихідний 3-шуканий	Кути β_1 β_1	X_a X_b $X_{\text{ÐÏ}}$	$ctg\beta_2$ $ctg\beta_1$ $ctg\beta_1 + ctg\beta_2$	Y_a Y_B $Y_{\text{ÐÏ}}$
	А В РП В С РП	$100^0 52' 40''$ $56^0 29' 33''$ $132^0 28' 07''$ $30^0 51' 28''$	9639,34 9469,64 10000,01 -9469,64 9199,87 10000,02	+0,66207 -0,19217 +0,46990 +1,67368 -0,91532 +0,75836	9694,84 9831,71 10000,00 9831,71 9987,00 10000,01

Середнє значення 10000,015 10000,005

Таким чином, шляхом реалізації принципів фундаментальності та професійної спрямованості навчання математики у студентів професійних коледжів формується: уявлення про взаємозв'язок математичної освіти та їх спеціалізації (предметний аспект); інтелектуальні вміння, обумовлені характером професійної діяльності (інтелектуальний аспект); сприйняття математики як засобу професійного вдосконалення особистості (мотиваційний аспект). При цьому можна виділити ряд професійно значущих якостей майбутнього фахівця: розуміння ролі математики в професійній діяльності; набуття студентами знань, умінь та навичок, необхідних для успішного засвоєння інших дисциплін, якісного виконання курсового та дипломного проектування; вміння здійснювати адекватний вибір математичних методів при розв'язанні прикладних задач; вміння знайти відповідний поставленій задачі спосіб її розв'язання в літературі або іншому джерелі інформації, а також вміння використати відповідні інформаційні технології; вміння самостійно розв'язувати математичні задачі; вміння аналізувати, порівнювати різні способи розв'язання однієї і тієї ж задачі; вміння адекватно оцінювати свою діяльність тощо.

Список використаної літератури

1. Білокриницький С.М. Геодезія. Навчальний посібник. Частина 1. Чернівці. : Рута. – 2008. – 88 с.
2. Божок А.П. Топографія з основами геодезії: Підручник. – К. : Вища школа. – 1995. – 275 с.
3. Клюшин Е.Б. Михалев Д.Ш. Инженерная геодезия. – М.: Недра. – 1990. – 264 с.
4. Куштин И.Ф., Куштин В.И. Инженерная геодезия. Ростов-на-Дону: Феникс. – 2002. – 416 с.
5. Лабораторний практикум по инженерной геодезии: Учебн.пособие для вузов / В.Ф.Лукьянов, В.Е. Новак, Н.Н.Борисов и др. – М.: Недра. – 1990. – 334 с.
6. Павлів П.В. Геодезія: Навч.посібник. – К.: 1997. – 200 с.
7. Ранський М.П. Геодезія. Методичні вказівки до практичних занять. Чернівці. „Рута": 2004. – 29 с.
8. Решетняк М.П. Інженерна геодезія. – К.: Урожай. – 1996. – 224 с.
9. Тартачинський Р.М. Основи інженерної геодезії. – Львів.: ДУЛП. 1999. – 182 с.
10. Грабовий В.М. Геодезія. — ДНВП " Аерогеодезія ". – 2002.—293с.

ВИВЧЕННЯ ІНТЕГРАЛА РІМАНА З ВИКОРИСТАННЯМ СКМ MAXIMA

Деканов С. Я.
кандидат фіз.-мат. наук,
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

У роботі розглядається застосування системи комп’ютерної математики Maxima до вивчення теми «Інтеграл Рімана» у педагогічних навчальних закладах.

В работе рассматривается применение системы компьютерной математики Maxima к изучению темы «Интеграл Римана» в педагогических учебных заведениях.

We consider the application of computer mathematics system Maxima to studying of the topic "Riemann integral" in teacher training universities.

1. Вступ. В умовах сьогодення, коли на зміну таблицям Брадіса, логарифмічній лінійці і калькулятору прийшли потужні сучасні системи комп’ютерної математики (СКМ), причому вони вже теж багато років оновлювались і вдосконалювались, оволодіння такими СКМ стало об’єктивною необхідністю для тих, хто вивчає математику та її застосування. Тому природно поєднувати вивчення математичних дисциплін у внз з вивченням сучасних багатофункціональних СКМ, до яких належать: Mathematica, MathLab, Maple, MathCAD, Maxima, Derive та інші. Перелічені СКМ дозволяють розв’язувати математичні задачі як чисельно, так і в символьному поданні, вміщують у собі широку базу математичних знань, мають досконалі засоби графічної візуалізації.

У даній роботі робиться спроба показати, яким чином процес вивчення інтеграла Рімана функцій однієї змінної можна зробити ефективнішим і цікавішим завдяки використанню програми Maxima [1, 2].

За можливостями використання і характеристиками Maxima близька до найбільш потужних професійних систем комп’ютерної математики Mathematica і Maple, які є дорогими комерційними продуктами, тоді як Maxima розповсюджується через Інтернет безкоштовно [3].

2. Короткий опис програми Maxima. Робота з цією програмою здійснюється через певну графічну оболонку, причому найзручніше користуватися графічною оболонкою wxMaxima 0.7.4 з українським інтерфейсом (рис. 1).

Вікно програми wxMaxima містить рядок меню, кнопки редагування, вікно виведення результатів, рядок введення команд і внизу додаткові кнопки для роботи з виразами. У вікні виведення результатів кожен вираз, який вводиться, позначається (%iN), а відповідний йому результат позначається (%oN) (від англ. ***input*** – вхідні дані, ***output*** – результат), де N – номер формули. Окремо взятий символ % набуває значення останнього виведеного виразу. Команди вводяться у рядку введення і починають автоматично опрацьовуватися після натиснення клавіші **Enter.**

Для обчислення за допомогою програми Maxima невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$

або R-інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ використовуються відповідно команди

integrate(f(x),x) та integrate(f(x),x,a,b).

Обчислимо невизначений інтеграл $\int (2z - \sqrt[3]{z} + 3\cos z)dz$.

Для цього у командному рядку вводимо integrate(2*z-z^(1/3)+3*cos(z),z) і, натиснувши **Enter,** дістаємо (рис. 1):

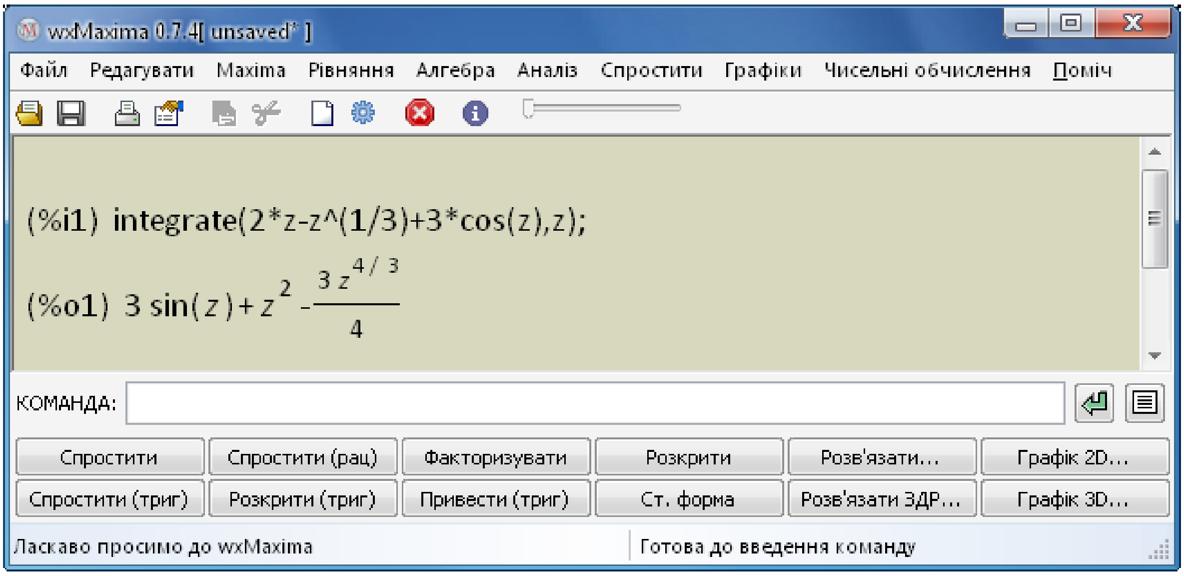


Рис. 1.

Надалі при демонструванні роботи даної програми будемо наводити лише вміст вікна виведення результатів. При цьому команди можна задавати і з командного рядка, і через меню (можна вибирати, що зручніше).

3. Використання Maxima для з'ясування суті поняття інтеграла Рімана та його геометричного змісту. Як відомо [4, с. 194], інтеграл Рімана, або R-інтеграл, функції f на відрізку $[a;b]$ вводиться як границя інтегральної суми: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)\Delta x_k$. У зв'язку з цим при вивченні цього поняття СКМ можна використати для: 1) обчислення інтегральних сум, 2) ілюстрування суті поняття інтеграла як границі інтегральних сум, 3) обчислення інтеграла у символьному або чисельному вигляді, 4) ілюстрування геометричного змісту інтеграла. Проілюструємо можливі застосування програми Maxima на прикладах розв'язування деяких типів задач.

Задача 1. *Для заданої функції* $f(x)$ *і довільного заданого розбиття* T *відрізка* $[a;b]$ *обчислити інтегральну суму* $S(T, X^*)$ *з машинною точністю. За проміжні точки узяти ліві (праві) кінці відрізків розбиття.*

□ Спершу задаємо функцію, наприклад, $f(x) = e^{-x^2}$.

(%i1) f(x):=exp(-x^2)$

Розбиття T задаємо у вигляді упорядкованого списку. Зауважимо, що цим самим автоматично задається і відрізок $[a;b]$.

(%i2) T:[-2,-1.7,-1.3,-1,-0.5,0,0.25,0.5,0.8,1,1.2,1.6,1.8,2]$

Підраховуємо, скільки елементарних відрізків у даному розбитті:

(%i3) N:length(T)-1$

Складемо інтегральну суму $S(T,X^*)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$, узявши ліві кінці в якості проміжних точок. У комп'ютерному поданні $x_k = T[k]$ – це k-тий елемент списку T, причому нумерація повинна починатися від $k=1$.

(%i4) S:sum(f(T[k])*(T[k+1]-T[k]),k,1,N)$

Обчислюємо дану інтегральну суму S:

(%i5) float(S);

(%o5) 1.672013850279529

Для того щоб проміжними точками слугували праві кінці, у рядку (%i4) потрібно було б записати f(T[k+1]). ■

Задача 2. *Для заданої функції* $f(x)$ *і заданого розбиття* T *обчислити верхню й нижню суми Дарбу* $S^*(T)$ *і* $S_*(T)$.

□ Порівняно з попередньою, ця задача набагато складніша, тому що при її розв'язуванні потрібно шукати інфімуми та супремуми функції на відрізках розбиття. У комплект з Maxima включено пакет riemsum.mac, призначений для чисельного обчислення сум Дарбу функції $f(x)$, яка є раціональною функцією, зокрема многочленом. Після завантаження цього пакету стає доступною команда upper_and_lower_sums(f(x),x,T), де T – розбиття відрізка $[a;b]$ у вигляді списку, не обов'язково упорядкованого. В якості результату ця команда повертає список з трьох чисел: $[S^*(T), S_*(T), S^*(T)-S_*(T)]$.

Продемонструємо відшукання сум Дарбу за допомогою пакету riemsum на прикладі функції $f(x) := \dfrac{x^3-2x-1}{x^2+4}$.

(%i1) load(riemsum)$

(%i2) f(x):=(x^3-2*x-1)/(x^2+4)$

Розбиття візьмемо з розв'язання попередньої задачі:

(%i3) T:[-2,-1.7,-1.3,-1,-0.5,0,0.25,0.5,0.8,1,1.2,1.6,1.8,2]$

Знайти суми Дарбу й різницю між ними для заданої функції і заданого розбиття можна за допомогою команди:

(%i4) upper_and_lower_sums(f(x),x,T);

Дістанемо відповідь:

(%o4) [–0.48156168761106, –1.10581480373927, 0.62425311612821]

Точність цих значень не більша за 10^{-7}, оскільки саме з такою точністю запрограмоване відшукання коренів многочленів у пакеті riemsum.mac.

Вручну вводити розбиття T довго і незручно. Для випадку розбиття відрізка $[a;b]$ на n рівних частин у пакеті riemsum.mac є команда make_partition(a,b,n), яка виконує таке розбиття і повертає його точки у вигляді списку. Наприклад, продовжуючи відкриту сесію

Maxima, утворимо розбиття відрізка $[-2;2]$ на 50 частин:

(%i5) T:make_partition(-2,2,50)$

Обчислимо тепер суми Дарбу для цього розбиття:

(%i6) upper_and_lower_sums(f(x),x,T);

(%o6) [–0.70720147773207, –0.86352100977965, 0.15631953204758]

Помічаємо закономірність, що при подрібненні розбиття різниця між верхньою й нижньою сумами Дарбу все ближче наближається до нуля. А ще, оскільки інтеграл Рімана міститься між сумами Дарбу, то за його наближене значення можна прийняти середину між сумами Дарбу:

(%i7) (%[1]+%[2])/2;

(%o7) -0.78536124375586

Отже, $\int_{-2}^{2}\frac{x^3-2x-1}{x^2+4}dx \approx -0.78536$. Зауважимо, що точне значення цього інтеграла дорівнює $-\frac{\pi}{4} \approx -0.78539816339745$. +

Задача 3. *Для заданої функції* $f(x) \geq 0$ *та заданого відрізка* $[a;b]$ *обчислити інтегральну суму, яка відповідає розбиттю відрізка на* N *рівних частин і конкретному способу вибору проміжних точок (наприклад, як середин елементарних відрізків). Проілюструвати геометричний зміст інтегральної суми.*

 Розглянемо розв'язання цієї задачі на прикладі функції $f(x) = \cos x$, заданої на відрізку $[a;b] = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}]$, і коли $N = 20$.

Спочатку задамо функцію, відрізок і кількість точок розбиття.

(%i1) f(x):=cos(x)$ a:-%pi/2$ b:%pi/4$ N:20$

Визначимо послідовність розбиттів $T_n = \{x(k,n)\}$ і відповідну послідовність наборів $X_n^* = \{c(k,n)\}$ проміжних точок:

(%i2) x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$

Визначимо послідовність інтегральних сум $S(n)$:

(%i3) S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$

Знайдемо точне значення інтеграла:

(%i4) I:integrate(f(x),x,a,b)$

Виведемо на екран значення інтегральної суми при $n = N = 20$:

(%i5) print("S(",N,")=",float(S(N)))$

(%o5) $S(20) = 1.708094395922389$

Для уявлення про ступінь наближення інтегральної суми до інтеграла виведемо ще й точне значення інтеграла.

(%i6) print("I=",I,"=",float(I))$

(%o6) $I = 1/\sqrt{2}+1 = 1.707106781186548$

Аналітичну частину завершено. Перейдемо до графічного зображення. Скористаємося допоміжним пакетом draw.lisp, який служить інтерфейсом між Maxima і графічним редактором gnuplot. Перевагами цього пакету є зручне керування опціями зображень; можливість побудови графіків неявних функцій, многокутників, прямокутників, еліпсів та векторів; зручна можливість заповнення кольором фігур.

Основною командою пакету draw для зображення плоских кривих і фігур є draw2d(параметри, фігури). Скористаємося цією командою для зображення геометричного змісту інтегральної суми. Задамо графічні об'єкти, які треба намалювати. Спочатку визначимо графік функції $f(x)$ на відрізку $[a-0,2;b+0,2]$ з товщиною лінії 2 тч:

(%i7) graph:[line_width=2,explicit(f(x),x,a-0.2,b+0.2)]$

Далі опишемо серію прямокутників, поставлених на відрізки розбиття:

(%i8) pp(n):=makelist(rectangle([x(k,n),0],[x(k+1,n),f(c(k,n))]),k,0,n-1)$

Визначимо параметри малюнка, в даному випадку – колір заповнення фігур (прямокутників pp(n)) і пропорційні осі, тобто однакові масштаби по осях.

(%i9) options:[fill_color=light-blue, proportional_axes=xy]$

Визначимо тепер весь малюнок як один об'єкт. Він буде списком, який складається з фігур та параметрів зображення.

(%i10) mal(n):=append(options,pp(n),graph)$

(Команда append об'єднує декілька списків в один.) Завантажимо пакет draw:

(%i11) load(draw)$

і виконаємо побудову нашого зображення шляхом застосування команди draw2d до об'єкта mal(n) при $n=N=20$:

(%i12) apply(draw2d,mal(N))$

Після цього з'явиться вікно графічного редактора gnuplot, а в ньому малюнок, який ілюструє геометричний зміст інтегральної суми (рис. 2). ■

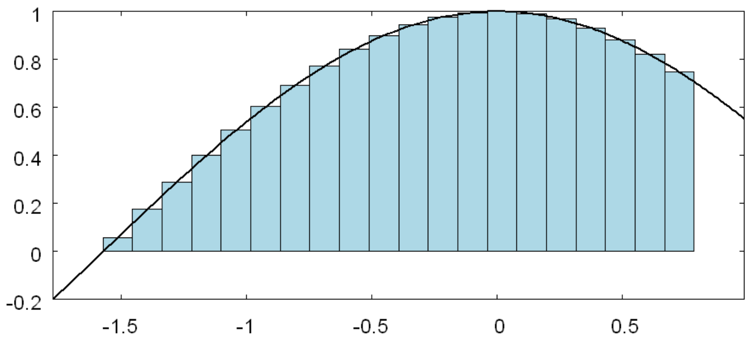


Рис. 2.

Задача 4. *Обчислити R-інтеграл заданої функції на заданому відрізку як границю певної послідовності інтегральних сум.*

□ Послідовність (T_n) розбиттів відрізка $[a;b]$ природно отримується шляхом його поділу на n рівних частин. А природним способом вибору проміжних точок є вибір лівих, правих чи середніх точок відрізків розбиття. Саме такі послідовності було побудовано при розв'язуванні задачі 3. Тому можна переписати звідти перші три рядки вводу:

(%i1) f(x):=x^2$ a:-1$ b:2$

x(k,n):=a+k*(b-a)/n$

c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$

S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$

Тепер залишається знайти $\lim\limits_{n\to\infty} S(n)$. Але за допомогою команди limit(S(n),n,inf), призначеної для обчислення границь, одразу не вийде обчислити границю такого складного об'єкта, як сума. Тому перш ніж обчислювати границю послідовності $S(n)$ потрібно цю послідовність спростити. Стандартною опцією у Maxima, яка виконує спрощення сум, є опція simpsum, яку потрібно вводити через кóму після суми. Застосуємо опцію simpsum до нашої суми $S(n)$, причому для одержання менш громіздкої відповіді поєднаємо її з опцією ratsimp:

(%i7) S(n),simpsum,ratsimp;

(%o7) $\dfrac{12n^2-9}{4n^2}$

Після такого спрощення знаходження границі стає елементарним:

(%i8) limit(%,n,inf);

(%o8) 3

Таким же чином Maxima допоможе знайти границю інтегральної суми і у випадку, коли $f(x)$ є довільним многочленом. Наприклад, знайдемо інтеграл $\int\limits_{-2}^{3}(x^3-x-1)dx$ як границю інтегральної суми. Для цього повернемося до команди (%i1), перезадамо в її першому рядку функцію і відрізок:

(%i1) f(x):=x^3-x-1$ a:-2$ b:3$

x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$

S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$

і переобчислимо цю команду. У результаті буде визначено нову послідовність $S(n)$ інтегральних сум. Знайдемо її границю командою

(%i16) limit(ev(S(n),simpsum),n,inf);

(%o16) $\dfrac{35}{4}$

Можливості опції simpsum, по суті, вичерпуються спрощенням сум вигляду $\sum\limits_k a^k$ і $\sum\limits_{k=m}^{n} p(k)$, де $p(k)$ – многочлен відносно k. Разом з тим, у комплекті з Maxima є додатковий пакет simplify_sum.mac, у якому є значно потужніша за опцію simpsum команда simplify_sum. Вона вміє спрощувати суми, які містять факторіали (чи біноміальні коефіцієнти), а також суми вигляду

$$\sum_{k=m}^{n} p(k)\exp(ak),\ \sum_{k=m}^{n} p(k)\cos(ak),\ \sum_{k=m}^{n} p(k)\sin(ak),$$

де $p(k)$ – многочлен відносно k.

Наведемо декілька прикладів, як працює команда simplify_sum.

(%i17) load(simplify_sum)$

(%i18) sum(k*3^k,k,1,n);

(%o18) $\sum_{k=1}^{n} k3^k$

(%i19) simplify_sum(%);

(%o19) $\frac{(2n-1)3^{n+1}}{4}+\frac{3}{4}$

(%i20) sum(k^2*4^k,k,1,n);

(%o20) $\sum_{k=1}^{n} k^2 4^k$

(%i21) simplify_sum(%);

(%o21) $\frac{\left(9n^2-6n+5\right)4^{n+1}}{27}-\frac{20}{27}$

(%i22) sum(k!/(n+k)!,k,1,n);

(%o22) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+k)!}$

(%i23) simplify_sum(%);

(%o23) $\frac{n+1}{(n-1)(n+1)!}-\frac{(n+1)!}{(n-1)(2n)!}$

(%i24) sum(cos(k*x),k,0,n);

(%o24) $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$

(%i25) simplify_sum(%);

(%o25) $\frac{\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}+\frac{e^{-i(n+1)x}-1}{e^{-ix}-1}}{2}$

(%i26) trigrat(%)

(%o26) $\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

(%i27) sum(k*cos(k*x),k,1,n);

(%o27) $\sum_{k=1}^{n} k\cos(kx)$

(%i28) trigrat(simplify_sum(%));

(%o28) $\dfrac{n\cos((n+1)x)+(-n-1)\cos(nx)+1}{2\cos(x)-2}$

Повернемося до задачі про обчислення границі послідовності інтегральних сум за допомогою системи Maxima. Наведемо ще кілька прикладів, які демонструють можливості даної системи. При цьому розпочнемо новий сеанс роботи.

$$\int_0^1 2^x dx = ?$$

(%i1) f(x):=2^x$ a:0$ b:1$

x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$

S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$

(%i7) S(n),factor;

(%o7) $\dfrac{\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n}+\frac{1}{2n}}}{n}$

(%i8) %,simpsum;

(%o8) $\dfrac{2^{\frac{1}{2n}}}{n(2^{\frac{1}{n}}-1)}$

(%i9) limit(%,n,inf);

(%o9) $\dfrac{1}{\log(2)}$

$$\int_{-\pi/4}^{3\pi/2} \cos x dx = ?$$

(%i1) f(x):=cos(x)$ a:-%pi/4$ b:3*%pi/2$

x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$

S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$

(%i16) S(n),factor;

(%o16) $\dfrac{7\pi\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\dfrac{\pi(2n-14k-7)}{8n}\right)}{4n}$

(%i17) load(simplify_sum)$

(%i18) simplify_sum(%o16),rectform,trigreduce;

(%o18) $\dfrac{7\sqrt{2}\pi\sin\left(\dfrac{7\pi}{8n}\right)-7\pi\sin\left(\dfrac{7\pi}{8n}\right)}{\left(2^{\frac{5}{2}}\cos\left(\dfrac{7\pi}{4n}\right)-2^{\frac{5}{2}}\right)n}$

(%i19) limit(%,n,inf),expand;

(%o19) $\frac{1}{\sqrt{2}}-1$

Розв’язування задачі 4 підтверджує, що обчислення границь інтегральних сум тісно пов’язане з проблемою спрощення сум, яка є набагато складнішою, ніж обчислення визначених і невизначених інтегралів. ■

Задача 5. *Продемонструвати у середовищі Maxima геометричний зміст інтеграла Рімана функції* $f(x)$*, неперервної і невід’ємної на відрізку* $[a;b]$.

□ Відомо, що інтеграл Рімана $\int_a^b f(x)dx$ неперервної і невід’ємної на відрізку $[a;b]$ функції f виражає собою площу криволінійної трапеції, тобто фігури, обмеженої графіком функції f, віссю OX і прямими $x=a$ та $x=b$.

Покажемо, як зобразити у Maxima заповнену кольором криволінійну трапецію. Це робиться дуже просто за допомогою пакету draw. Наприклад, для зображення криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $x\sin x$, $x\in[0;\pi]$, досить ввести набір команд

```
(%i1) load(draw)$
        draw2d(fill_color=magenta,filled_func=true,
                    explicit(x*sin(x),x,0,%pi),
                    line_width=5,filled_func=false,
                    explicit(x*sin(x),x,0,%pi));
```

У результаті буде побудовано такий рисунок 3:

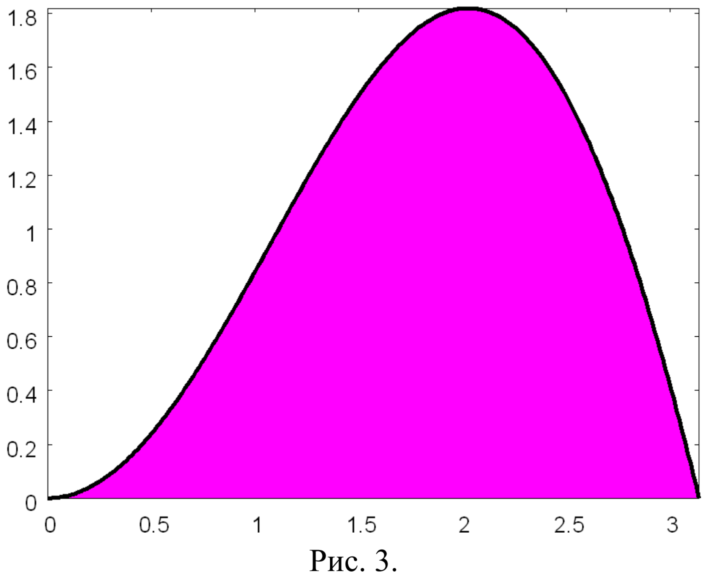


Рис. 3.

Звичайно, існує ще багато налаштувань зображень, про які можна дізнатися у інтерактивній довідці системи Maxima. ■

4. Використання Maxima для виконання заміни змінної у *R*-інтегралі. У програмі Maxima є вбудована команда changevar(I,x=g(t),t,x), яка дозволяє зробити заміну $x=g(t)$ в інтегралі $I=\int_a^b f(x)dx$, попередньо заданому командою I:’integrate (f(x), x,a,b).

При цьому спочатку на екран буде виведено новий інтеграл по новій змінній та з новими межами інтегрування, а потім його можна буде обчислити командою nouns. Як і при невизначеному інтегруванні, цю формулу доцільно застосовувати, коли треба перевірити ефективність різних підстановок, а також тоді, коли інтеграл не береться безпосередньо командою integrate. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. *Обчислити задані інтеграли за допомогою вказаних підстановок:* 1) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $\sqrt{x}=t$; 2) $\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$, $\frac{a+x}{a-x}=t^2$; 3) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$, $e^x-1=t^2$; 4) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$, $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

□ Введемо перший інтеграл:

(%i1) 'integrate(1/(sqrt(x)+1),x,0,4);

(%o1) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$

(%i2) changevar(%o23,sqrt(x)=t,t,x);

Машина запитає:

Is t positive, negative, or zero?

Давши відповідь p, тобто $t>0$, дістаємо

(%o2) $2\int_0^2 \frac{t}{t+1}dt$

Обчислюємо одержаний інтеграл командою

(%i3) %,nouns;

(%o3) $2(2-\log(3))$

До речі, зауважимо, що інтеграл (%o1) командою integrate не береться.

Переходимо до другого інтеграла.

(%i4) 'integrate(sqrt((a+x)/(a-x)),x,0,a/2);

(%o4) $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x+a}{a-x}}dx$

(%i5) changevar(%o2,(a+x)/(a-x)=t^2,t,x);

(%o5) $-4a\int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{t|t|}{t^4+2t^2+1}dt$

Для подальшого обчислення цього інтеграла потрібно спростити підінтегральну функцію, розкривши модуль. Судячи з меж інтегрування, робимо припущення

(%i6) assume(t<0)$

Виведемо інтеграл (%o5) на екран ще раз, тепер уже в спрощеному вигляді:

(%i7) %o5,simp;

(%o7) $4a\int_{-\sqrt{3}}^{-1}\frac{t^2}{t^4+2t^2+1}dt$

(%i8) %,nouns;

(%o8) $4\left(\frac{4\pi-3^{\frac{3}{2}}}{24}-\frac{\pi-2}{8}\right)a$

Така сама відповідь виходить і при безпосередньому обчисленні інтеграла (%o4) командою integrate.

Перейдемо до третього інтеграла, очистивши попередньо з пам’яті припущення $t<0$:

(%i9) forget(t<0)$

(%i10) ’integrate(sqrt(%e^x-1),x,0,log(2));

(%o10) $\int_{0}^{\log(2)}\sqrt{e^x-1}dx$

(%i11) changevar(%,%e^x-1=t^2,t,x);

(%o11) $-2\int_{-1}^{0}\frac{t|t|}{t^2+1}dt$

(%i12) assume(t<0)$

(%i13) %o11,simp;

(%o13) $2\int_{-1}^{0}\frac{t^2}{t^2+1}dt$

(%i14) %,nouns;

(%o14) $-\frac{\pi-4}{2}$

Цю відповідь можна перевірити і за допомогою команди integrate, застосованої до інтеграла (%o10).

Очистимо всі факти про змінну t з оперативної пам’яті командою

(%i15) kill(t)$

Нарешті, обчислимо четвертий інтеграл:

(%i16) ’integrate(1/(3+2*cos(x)),x,0,%pi/2);

(%o16) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos(x)+3}dx$

(%i17) changevar(%,tan(x/2)=t,t,x);

(%o17) $2\int_{0}^{1}\frac{1}{\left(2t^2+2\right)\cos\left(2\operatorname{atan}(t)\right)+3t^2+3}dt$

(%i18) %,trigexpand,ratsimp;

(%o18) $2\int\limits_0^1 \frac{1}{t^2+5}dt$

(%i19) %,nouns;

(%o19) $\dfrac{2\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}$

Зробимо перевірку:

(%i20) %o16,nouns;

(%o20) $\dfrac{2\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}$

Приклад 1 розв’язано повністю. ■

Приклад 2. *Обчислити задані інтеграли за допомогою вказаних підстановок і проілюструвати ці підстановки графічно:* 1) $\int\limits_1^2 x^2dx$, $x^2=t$; 2) $\int\limits_1^2 x^3dx$, $x^3=t$; 3) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$, $4-x^2=(tx-2)^2$; 4) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$, $x=2\sin t$.

□ Заміну змінної будемо виконувати, як і в попередньому прикладі, але крім цього зображатимемо графіки функцій, що задаються вказаними підстановками.

(%i1) I1:’integrate(x^2,x,1,2)$

(%i2) changevar(I1,x^2=t,t,x);

(%o2) $-\dfrac{\int\limits_1^4 \sqrt{t}\,dt}{2}$

Очевидно, ця відповідь неправильна, оскільки початковий інтеграл був невід’ємним, а вийшов інтеграл від’ємний. Подивимось графічне зображення зробленої підстановки (рис. 4).

```
(%i3) load(draw)$
      draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
            xlabel="Ot",ylabel="Ox",
      xaxis_width=2,yaxis_width=2,
      line_width=4,color=blue,
      proportional_axes=xy,xtics=1,ytics=1,
      implicit(x^2=t,t,0,4,x,-2,2));
```

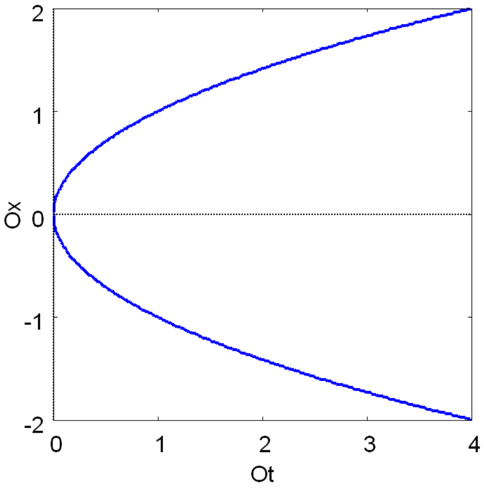


Рис. 4.

Рівняння $x^2=t$ задає дві функції $x(t)$, а саме $x=-\sqrt{t}$ і $x=\sqrt{t}$ (нижню й верхню вітки параболи). При переході до нової змінної необхідно вибрати якусь одну з цих функцій. Комп'ютер вибирає нижню вітку, бо вона є першим розв'язком при виконанні команди solve(x^2=t,x). А нові межі він знаходить, просто підставляючи старі межі у функцію $t = x^2$.

Перейдемо до інтеграла 2).

(%i5) I2:'integrate(x^3,x,1,2)$

(%i6) changevar(I2,x^3=t,t,x);

(%o6) $$\frac{\left(\sqrt{3}i-1\right)\int_{1}^{8} t^{\frac{1}{3}}dt}{6}$$

Цей результат неправильний, тому що він є уявним комплексним числом. Подивимось по графіку (рис. 5), чи законним було виконання підстановки $x^3 = t$ для даного інтеграла.

(%i7) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xlabel="Ot", ylabel="Ox",
xtics=1, ytics=1,xaxis_width=2, yaxis_width=2,
proportional_axes=xy, line_width=4, color=blue,
implicit(x^3=t,t,-8,8,x,-2,2));

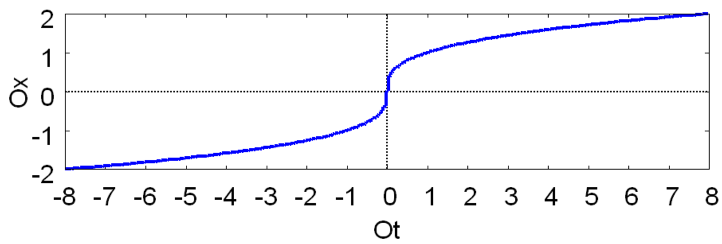


Рис. 5.

З геометричної точки зору все виглядає бездоганно. Лінія $t = x^3$ має рівносильне задання $x = t^{1/3}$, причому для відрізка $[1;2]$ на осі OX очевидно існує відрізок на осі Ot, який відображається на нього. Проте потрібно ще з'ясувати, як комп'ютер шукає функцію $x = x(t)$ з рівності $x^3 = t$. Скоріш за все, він знову бере перший розв'язок, одержаний за допомогою команди:

(%i8) solve(x^3=t,x);

(%o8) $$[x=\frac{\left(\sqrt{3}i-1\right)t^{\frac{1}{3}}}{2}, x=-\frac{\left(\sqrt{3}i+1\right)t^{\frac{1}{3}}}{2}, x=t^{\frac{1}{3}}]$$

Справді, бачимо, що першими йдуть комплексні розв'язки, а потрібний дійсний розв'язок сиротливо притулився в самому кінці. Таким чином, ***при застосуванні команди changevar завжди можуть виникати помилки, коли рівняння*** $G(t,x)=0$***, яке задає підстановку, має комплексні розв'язки відносно*** x ***(що можна перевірити командою*** **solve(G(t,x),x)).**

Так, якщо для обчислення інтеграла 1) замість підстановки $x^2 = t$ зробити підстановку $x = \sqrt{t}$, то дістанемо цілком коректне розв'язання:

(%i9) changevar(I1,x=sqrt(t),t,x);

Is x positive, negative, or zero? p;

(%o9) $\dfrac{\int\limits_1^4 \sqrt{t}\,dt}{2}$

Аналогічно, інтеграл 2) коректно обчислиться підстановкою $x = t^{1/3}$.

Далі розглянемо інтеграл 3) і виконаємо для нього запропоновану другу підстановку Ейлера.

(%i10) I3:'integrate(sqrt(4-x^2),x,0,1)$

(%i11) changevar(I3,4-x^2=(t*x-2)^2,t,x);

(%o11) $-\int\limits_0^{2-\sqrt{3}} \dfrac{8t^4-16t^2+8}{t^6+3t^4+3t^2+1}dt$

Обчислимо тепер початковий інтеграл і поряд з ним новий інтеграл:

(%i12) [ev(I3,nouns),ev(%o11,nouns)];

(%o12) $[\dfrac{2\pi+3^{\frac{3}{2}}}{6}, \dfrac{8\operatorname{atan}\left(\sqrt{3}-2\right)-\sqrt{3}}{2}]$

То наскільки відрізняються обидві відповіді? Переобчислимо їх ще раз, вже чисельно:

(%i13) %o12,numer;

(%o13) $[1.913222954981036, -1.913222954981037]$

Нарешті стало зрозуміло, що новий інтеграл відрізняється від початкового знаком. Побудуємо графік застосованої тут підстановки (рис. 6).

```
(%i14) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
              xlabel="Ot",ylabel="Ox",
              xaxis_width=2,yaxis_width=2,
              line_width=4,color=blue,
              proportional_axes=xy,xtics=2,ytics=1,
              implicit(4-x^2=(t*x-2)^2,t,-6,6,x,-3,3));
```

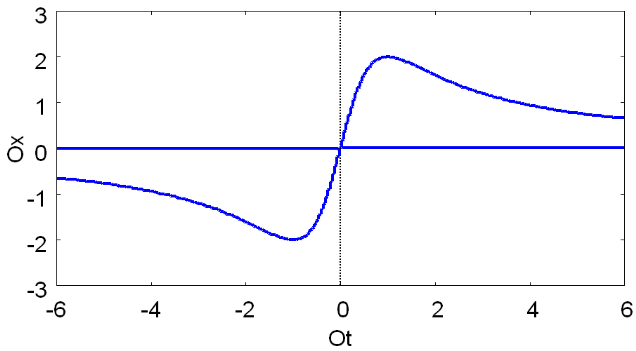


Рис. 6.

Дослідимо, яку функцію $x(t)$ міг узяти комп'ютер в якості розв'язку рівняння $4 - x^2 = (tx-2)^2$:

(%i15) solve(4-x^2=(t*x-2)^2,x);

(%o15) $[x=\dfrac{4t}{t^2+1},x=0]$

Отже, комп'ютер знаходить два розв'язки (що відповідає геометричній ілюстрації), причому для переходу до нової змінної команда changevar могла взяти тільки функцію $x(t)=\dfrac{4t}{t^2+1}$, і це правильний вибір. Неважко перевірити шляхом підстановки, що й нові межі знайдено правильно.

Чому ж тоді кінцевий результат має помилку в знаці? Звернемо увагу, що команда заміни змінної повертає свій результат у вигляді спрощеного інтеграла. У заданому інтегралі 3) був присутній корінь квадратний, а у відповідному йому інтегралі (%o11) ніяких радикалів уже нема. Це наводить на думку, що неправильний знак може виникати при спрощенні радикалів. Підставимо "вручну" вираз $\dfrac{4t}{t^2+1}$ в підінтегральну функцію $\sqrt{4-x^2}$ і подивимося, як Maxima спростить отриманий вираз.

(%i16) sqrt(4-x^2),x=(4*t)/(t^2+1);

(%o16) $\sqrt{4-\dfrac{16t^2}{\left(t^2+1\right)^2}}$

Серед основних команд спрощування (ratsimp, factor, radcan) розкрити корінь може тільки остання команда. Тому застосуємо її для спрощення нашого виразу:

(%i17) radcan(%o16);

(%o17) $\dfrac{2t^2-2}{t^2+1}$

Легко бачити, що в заданих межах інтегрування, тобто при $t\in[0;2-\sqrt{3}]$, вираз (%o17) від'ємний, і він не годиться для представлення виразу (%o16). Це і є причиною помилкового знаку в інтегралі (%o11).

Отже, ***при спрощенні виразів потрібно обережно користуватися командою radcan. А якщо робиться заміна змінної у визначеному інтегралі командою changevar і при цьому зникають знаки коренів, то дуже вірогідно, що може виникнути помилка.*** На жаль, на результат команди changevar користувач вплинути не може.

Перейдемо до розв'язування пункту 4) прикладу 2. Оскільки інтеграл I3 вже задано, то одразу зробимо в ньому тригонометричну заміну:

(%i18) changevar(I3,x=2*sin(t),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o18) $4i\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(t)\sqrt{\sin(t)-1}\sqrt{\sin(t)+1}dt$

Зобразимо графічну ілюстрацію даної підстановки (рис. 7).

(%i19) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xlabel="Ot",ylabel="Ox",

xaxis_width=2,yaxis_width=2,line_width=4,color=blue,
proportional_axes=xy,xtics=2,ytics=1,explicit(2*sin(t),t,-6,6));

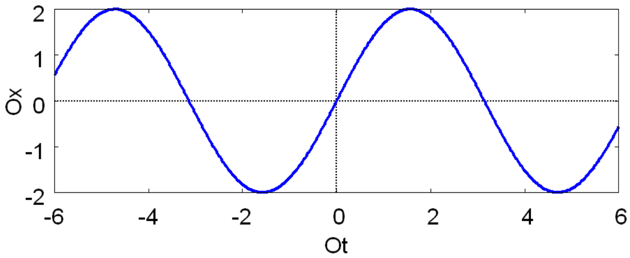


Рис. 7.

З малюнка видно, що дана підстановка підходить для переходу до нової змінної, тільки потрібно правильно вибрати нові межі. Скоріш за все, команда changevar спочатку шукає обернену функцію $t(x)$ до заданої функції $x(t)$, а потім шукає нові межі, як значення функції $t(x)$ при відповідних старих межах. При відшуканні оберненої функції якраз і виникала неоднозначна ситуація, про яку говорилося в супровідному повідомленні.

Неважко пересвідчитися, що межі в новому інтегралі вибрані правильно. А от підінтегральна функція за формою не виглядає прийнятно, бо містить комплексний множник i та від'ємний вираз $\sin t - 1$ під знаком одного з коренів. Можливо, за змістом вивід (%o18) правильно виражає шуканий інтеграл?.. Спростимо його, а потім обчислимо:

(%i20) rootscontract(%o18);

(%o20) $4i\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)\sqrt{\sin(t)^2-1}dt$

(%i21) trigsimp(%);

(%o21) $-4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)|\cos(t)|dt$

Далі треба підказати комп'ютеру, який знак у виразу під знаком модуля. Враховуючи межі інтегрування, задаємо припущення

(%i22) assume(cos(t)>0)$

(%i23) %o21,simp;

(%o23) $-4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)^2 dt$

Обчислимо тепер початковий інтеграл 4) і поряд його значення після заміни змінної:

(%i24) [ev(I3,nouns),ev(%o23,nouns)];

(%o24) $[\frac{2\pi+3^{\frac{3}{2}}}{6},-\frac{2\pi+3^{\frac{3}{2}}}{6}]$

Отже, виявилось, що помилка при заміні змінної в інтегралі все-таки вкралася – неправильний знак мінус. Виокремимо чіткіше причину цієї помилки. До проведення усіляких спрощень інтеграл (%o18) повинен був мати вигляд

(%i25) ’integrate(sqrt(4-4*sin(t)^2)*2*cos(t),t,0,%pi/6);

(%o25) $$2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)\sqrt{4-4\sin(t)^2}\,dt$$

Оскільки в інтегралі (%o18) один корінь розпався на два, то напевно за алгоритмом команди changevar на підінтенгральну функцію подіяла команда radcan. Справді,

(%i26) radcan(%o25);

(%o26) $$4i\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)\sqrt{\sin(t)-1}\sqrt{\sin(t)+1}dt$$

Бачимо, що підтвердився результат (%o18), що є опосередкованим доказом застосування команди radcan в алгоритмі команди changevar, а в даному випадку її застосовувати було недоцільно. Для того щоб повернутися до початкового вигляду інтеграла, тобто до (%o25), необхідно виконувати обернену операцію rootscontract, яка збирає корені докупи. При цьому, якщо комплексний множник i стоїть безпосередньо біля кореня, то він вноситься під корінь. А якщо цей множник винесений за знак інтеграла, то такого внесення не відбувається. Порівняємо результат (%o20) дії rootscontract на інтеграл (%o18) (де i так і залишилося за знаком інтеграла) і окремо на його підінтегральну функцію:

(%i26) 4*%i*cos(t)*sqrt(sin(t)-1)*sqrt(sin(t)+1);

(%o26) $4i\cos(t)\sqrt{\sin(t)-1}\sqrt{\sin(t)+1}$

(%i27) rootscontract(%);

(%o27) $4\cos(t)\sqrt{1-\sin(t)^2}$

Отже, при розв’язуванні інтеграла 4) прикладу 2 було виявлено ***недоречності в роботі команди changevar, пов’язані з наслідками застосування нею команди radcan, автоматично усунути які певною командою в Maxima неможливо.*** ■

Для усунення виявлених недоліків убудованої в Maxima команди заміни змінної changevar, а також для отримання більшого контролю над процесом заміни змінної пропонуємо визначити нову команду chv(expr,G,t,x). За своїм призначенням вона еквівалентна команді changevar(expr,G,t,x), тільки будується на іншому алгоритмі. При визначенні цієї команди використовуються оператори програмування та деякі нові функції системи Maxima, опис яких можна знайти в довідці Maxima. Доцільно зберегти означення команди chv у файл Maxima-5.21.0\share\maxima\5.21.0\share\integration\changevar1.mac, після чого вона стане доступною через load(changevar1).

```
chv(expr,G,t,x):=(block([g,h,a,b,a1,b1,G1,G2,n1,n2,i0,gpr,ghpr,apr,bpr],
if string(part(expr,0))="integrate" and  part(expr,2)=x
then (f:part(expr,1),
    if length(expr)=2
    then (G1:sort(solve(G,x)),n1:length(G1),i0:0,
        for i:1 step 1 while (i<=n1 and is(scalarp(part(G1[i],2)))) do i0:i0+1,
        if i0<n1
        then (i0:i0+1,
            if part(G1[i0],1)=x and freeof(x,part(G1[i0],2))
```

```
then (g:part(G1[i0],2),
      if freeof (%i,g)
      then 'integrate(subst(g,x,f)*diff(g,t),t)
      else (print("– Function",x,"(",t, ")","=",g,"is complex!.."),
      expr))
   else (print("– It is impossible to express",x,"(",t,").") ,expr))
else (print("– All solutions",x,"(",t,")", "are constant!.."),expr))
else (a:part(expr,3),b:part(expr,4),G1:sort(solve(G,x)),
   n1:length(G1),G2:sort(solve(G,t)),n2:length(G2),
   a1:%gamma,b1:%gamma,g:1,i0:0,gpr:false,ghpr:false,
   for i:1 step 1 while (i<=n1 and is(scalarp(part(G1[i],2)))) do i0:i0+1,
   if i0<n1
   then (i0:i0+1,apr:plus,bpr:minus,
      for i:i0 step 1 unless (i>n1 or ghpr)
        do (if part(G1[i],1)=x and freeof(x,part(G1[i],2))
              then (g:part(G1[i],2),gpr:true)
              else g:1,
            for j:1 step 1 unless (j>n2 or ghpr)
            do (h:part(G2[j],2),a1:limit(h,x,a,plus),
               b1:limit(h,x,b,minus),
               if a1<=b1
               then (apr:plus,bpr:minus)
               else (apr:minus,bpr:plus),
               if string(float(a))=string(float(limit(g,t,a1,apr)))
               and string(float(b))=string(float(limit(g,t,b1,bpr)))
               then ghpr:true )),
      if ghpr
      then (if not(freeof(%i,g))
            then print("– Function",x,"(",t, ")","=",g,"is complex!.."),
            if imagpart(a1)#0 or imagpart(b1)#0
            then print("– New bounds are complex!.."),
            'integrate(subst(g,x,f)*diff(g,t),t,a1,b1))
      else (if not(gpr)
            then print("– It is impossible to express",x,"(",t,").")
            else print("– Substitution is not correct!"),expr))
   else (print("– All solutions",x,"(",t,")", "are constant!.."),expr)))
else (if string(part(expr,0))#"integrate"
   then (print("– Expression must be a single integral
              without any coefficients!.."),return(expr)),
   if part(expr,2)#x
   then print("– The 4-th argument must be marked as",part(expr,2),"!.."),expr)
))$
```

Описану вище програму-команду chv(expr,G,t,x) можна застосовувати як до визначених, так і до невизначених інтегралів. Вираз expr повинен являти собою тільки один інтеграл, причому без коефіцієнтів.

Розв'яжемо всі інтеграли прикладу 2 за допомогою нової команди заміни змінної chv.

(%i1) load(changevar1)$

(%i2) 'integrate(x^2,x,1,2);

(%o2) $\int\limits_{1}^{2} x^2\, dx$

(%i3) chv(%o2,x^2=t,t,x);

(%o3) $\dfrac{\int\limits_{1}^{4} \sqrt{t}\, dt}{2}$

(%i4) ’integrate(x^3,x,1,2);

(%o4) $\int\limits_{1}^{2} x^3\, dx$

(%i5) chv(%o4,x^3=t,t,x);

(%o5) $\dfrac{\int\limits_{1}^{8} t^{\frac{1}{3}}\, dt}{3}$

(%i6) ’integrate(sqrt(4-x^2),x,0,1);

(%o6) $\int\limits_{0}^{2-\sqrt{3}} \sqrt{4-\dfrac{16t^2}{(t^2+1)^2}}\left(\dfrac{4}{t^2+1}-\dfrac{8t^2}{(t^2+1)^2}\right)dt$

(%i7) factor(%)

(%o7) $-8\int\limits_{0}^{2-\sqrt{3}} \dfrac{(t^2-1)\sqrt{t^4-2t^2+1}}{(t^2+1)^3}dt$

Зараз необхідно подумати. Під знаком кореня квадратного міститься вираз $t^4-2t^2+1=(t^2-1)^2$, але він не спростився. На жаль, команда factor не заходить вглиб ірраціональних виразів і саме через це повний квадрат залишився непоміченим. Позбутися цього кореня, а відтак, завершити обчислення інтеграла можна двома шляхами: вдумливим використанням команди radcan або вручну замінивши його на потрібний вираз. Пояснимо детальніше обидва способи.

Перший спосіб. Оскільки radcan завжди спрощує таким чином: $\sqrt{x^2-2ax+a^2}=x-a$ (де a – число або якась літера латинського алфавіту, яка йде перед x), то $\sqrt{t^4-2t^2+1}$ буде спрощено до t^2-1. Враховуючи, що $t\in[0;2-\sqrt{3}]$, треба було б той корінь спростити до $1-t^2$. Тому якщо нічого не коригувати і довести розв’язування цим шляхом до кінця, то отриманий результат буде відрізнятися від правильного знаком.

Другий спосіб. Краще зробити так. Виділити вміст рядка (%o7), натиснути по черзі **F5, F4.** Тепер можна редагувати потрібний вираз у рядку введення. Щоб інтеграл поки що не обчислився, перед ним слід поставити апостроф. Корінь $\sqrt{t^4-2t^2+1}$ витираємо і замість нього пишемо $1-t^2$:

(%i8) -8*’integrate(((t^2-1)*(1-t^2))/(t^2+1)^3,t,0,2-sqrt(3));

(%o8) $-8\int\limits_{0}^{2-\sqrt{3}}\frac{(1-t^2)(t^2-1)}{(t^2+1)^3}dt$

(%i9) %,nouns;

(%o9) $-\frac{8\operatorname{atan}\left(\sqrt{3}-2\right)-\sqrt{3}}{2}$

Застосуємо тепер до інтеграла (%o6) тригонометричну підстановку:

(%i10) chv(%o6,x=2*sin(t),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o10) $2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos(t)\sqrt{4-4\sin(t)^2}\,dt$

(%i11) trigsimp(%o10);

(%o11) $4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos(t)|\cos(t)|dt$

(%i12) assume(cos(t)>0)$

(%i13) %o11,simp;

(%o13) $4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos(t)^2\,dt$

(%i14) %,nouns;

(%o14) $\frac{2\pi+3^{\frac{3}{2}}}{6}$

Таким чином, на відміну від штатної команди changevar, нова команда chv дозволила безпомилково розв’язати усі завдання прикладу 2. Розглянемо ще одну збірку цікавих інтегралів.

Приклад 3. *Обчислити наступні інтеграли методом підстановки:*

1) $\int\limits_{2}^{4}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ $(a>0,b>0)$; 3) $\int\limits_{-a}^{a}\sqrt[3]{\frac{x-2a}{x+2a}}dx$ $(a>0)$;

4) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; 5) $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\sqrt{\cos x}\sin(x)dx$.

□ 1) Щоб позбутися кореня, використаємо формулу $\operatorname{tg}^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}-1$ і зробимо заміну $x = \dfrac{2}{\cos t} = 2\sec t$:

(%i1) load(changevar1)$

(%i2) 'integrate(sqrt(x^2-4)/x^4,x,2,4);

(%o2) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$

(%i3) chv(%o2,x=2*sec(t),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) $\dfrac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{4\sec(t)^2-4}\tan(t)}{\sec(t)^3}dt}{8}$

(%i4) trigsimp(%o3);

(%o4) $\dfrac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t)|\sqrt{\cos(t)}||\sin(t)|\,dt}{4}$

(%i5) apply(assume,[cos(t)>0,sin(t)>0]);

(%o5) $[\cos(t)>0, \sin(t)>0]$

(%i6) %o4,simp;

(%o6) $\dfrac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(t)\sin(t)^2\,dt}{4}$

(%i7) %,nouns;

(%o7) $\dfrac{\sqrt{3}}{32}$

Спробуємо ще застосувати до інтеграла 1) третю підстановку Чебишова:

(%i8) chv(%o2,x^2-4=t^2*x^2,t,x);

– Function x (t) = $\dfrac{2i}{\sqrt{t^2-1}}$ is complex!..

(%o8) $\dfrac{i\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} t\sqrt{t^2-1}\sqrt{-\frac{4}{t^2-1}-4}\,dt}{8}$

Попередження про комплексну функцію не означає помилку, адже судячи за межами інтегрування $|t|<1$ і тому вираз $\dfrac{2i}{\sqrt{t^2-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-t^2}}$ є комплексним тільки за формою, а за змістом – дійсним. Тому продовжимо розв’язування:

(%i9) factor(%o8);

(%o9) $\dfrac{\int\limits_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} t^2\,dt}{4}$

(%i10) %,nouns;

(%o10) $\dfrac{\sqrt{3}}{32}$

Після спрощення стало зрозуміло, наскільки ефективною є підстановка Чебишова для даного інтеграла і комп’ютер виконав її правильно.

Обчислимо ще інтеграл 1) за допомогою першої підстановки Ейлера.

(%i11) chv(%o2,x^2-4=(x-t)^2,t,x);

(%o11) $-16\int\limits_{4-2\sqrt{3}}^{2}\dfrac{t^4\left(1-\dfrac{t^2+4}{2t^2}\right)\sqrt{\dfrac{\left(t^2+4\right)^2}{4t^2}-4}}{\left(t^2+4\right)^4}dt$

(%i12) factor(%);

(%o12) $-4\int\limits_{-2(\sqrt{3}-2)}^{2}\dfrac{(t^2-4)\sqrt{t^4-8t^2+16}|\,t\,|}{(t^2+4)^4}dt$

(%i13) assume(t>0)$

(%i14) %o12,simp;

(%o14) $-4\int\limits_{-2(\sqrt{3}-2)}^{2}\dfrac{t(t^2-4)\sqrt{t^4-8t^2+16}}{(t^2+4)^4}dt$

Знайдемо приблизне значення нижньої межі:

(%i15) -2*(sqrt(3)-2),numer;

(%o15) 0.53589838486225

Корінь $\sqrt{t^4-8t^2+16}$ в інтегралі (%o14) розкриємо вручну, замінивши його на $(4-t^2)$, враховуючи, що $|t|\le 2$. Коефіцієнт -4 перед інтегралом поки що приберемо (щоб мати можливість одразу зробити ще одну заміну змінної в отриманому інтегралі), але потім треба не забути на нього домножити.

(%i16) ’integrate((t*(t^2-4)*(4-t^2))/(t^2+4)^4,t,-2*(sqrt(3)-2),2);

(%o16) $\int\limits_{-2(\sqrt{3}-2)}^{2}\dfrac{t(4-t^2)(t^2-4)}{(t^2+4)^4}dt$

(%i17) chv(%o16,t^2=u,u,t);

(%o17) $$\frac{\displaystyle\int_{28-16\sqrt{3}}^{4} \frac{(4-u)(u-4)}{(u+4)^4} du}{2}$$

(%i18) (-4)*%o17,nouns,ratsimp;

(%o18) $$\frac{\sqrt{3}}{32}$$

Отже, на прикладі одного інтеграла 1) за допомогою комп’ютера було виявлено, яка з рекомендованих у теорії підстановок дозволяє звести його до найпростішого вигляду.

Перед розв’язуванням кожного наступного інтеграла прикладу 3 перезапускатимемо сеанс Maxima.

2) Цей інтеграл цікавий наявністю параметрів a, b. Теорія рекомендує робити для нього заміну $t = \mathrm{tg}\,x$, хоч можна спробувати і такі підстановки, як $t = \mathrm{ctg}\,x$ або $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

Зупинимо вибір на першій підстановці.

(%i1) load(changevar1)$

(%i2) ’integrate(1/(a^2*cos(x)^2+b^2*sin(x)^2),x,0,%pi/4);

(%o2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{b^2\sin(x)^2 + a^2\cos(x)^2} dx$$

(%i3) chv(%o2,t=tan(x),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) $$\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)(\frac{b^2t^2}{t^2+1} + \frac{a^2}{t^2+1})} dt$$

(%i4) ratsimp(%);

(%o4) $$\int_0^1 \frac{1}{b^2t^2 + a^2} dt$$

(%i5) %,nouns;

(%o5) $$\frac{\mathrm{atan}\left(\frac{b}{a}\right)}{ab}$$

Інтеграл 2) обчислено.

3) Даний інтеграл цікавий тим, що він містить параметр і в підінтегральній функції, і в межах інтегрування. Крім того, в середовищі Maxima безпосереднім інтегруванням він не обчислюється.

(%i1) load(changevar1)$

(%i2) ’integrate(((x-2*a)/(x+2*a))^(1/3),x,-a,a);

(%o2) $\int_{-a}^{a}\frac{(x-2a)^{\frac{1}{3}}}{(x+2a)^{\frac{1}{3}}}dx$

(%i3) chv(%o2,(x-2*a)/(x+2*a)=t^3,t,x);

(%o3) $\int_{-3^{\frac{1}{3}}}^{-\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}}\frac{\left(-\frac{2at^3+2a}{t^3-1}-2a\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{3t^2(2at^3+2a)}{(t^3-1)^2}-\frac{6at^2}{t^3-1}\right)}{\left(2a-\frac{2at^3+2a}{t^3-1}\right)^{\frac{1}{3}}}dt$

(%i4) ratsimp(%);

(%o4) $12a\int_{-3^{\frac{1}{3}}}^{-\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}}\frac{t^3}{t^6-2t^3+1}dt$

(%i5) %,nouns,logcontract;

(%o5) $\frac{\left(4\sqrt{3}\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}-23^{\frac{5}{6}}}{3}\right)-4\sqrt{3}\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}-23^{\frac{1}{6}}}{3}\right)-3^{\frac{5}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)a}{3}$

Інтеграл 3) обчислено точно і красиво, у символьному вигляді. А чи можливо дістати якесь підтвердження правильності результату (%o5)?

Для цього можна скористатися іншим засобом комп’ютерної математики, наприклад, програмою Gran1.

Переобчислимо чисельно вираз (%o5):

(%i6) %o5,numer;

(%o6) $-2.041614878242466a$

До речі, штатна команда

(%i7) changevar(%o5,(x-2*a)/(x+2*a)=t^3,t,x);

приводить до інтеграла з комплексними межами:

(%o7) $12a\int_{-\frac{3^{\frac{5}{6}}i-3^{\frac{1}{3}}}{2}}^{-\frac{\sqrt{3}i-1}{23^{\frac{1}{3}}}}\frac{t^3}{t^6-2t^3+1}dt$

Зрозуміло, що за допомогою цього інтеграла коректно обчислити інтеграл 3) неможливо.

4) Даний інтеграл цікавий тим, що безпосереднім інтегруванням у програмі Maxima він не береться:

(%i1) integrate(sqrt(x)/(sqrt(x)+1),x,0,1);

(%o1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

Проте відповідний невизначений інтеграл береться:

(%i2) integrate(sqrt(x)/(sqrt(x)+1),x);

(%o2) $-4(\sqrt{x}+1)+(\sqrt{x}+1)^2+2\log(\sqrt{x}+1)$

Маючи первісну, досить просто скористатися формулою Ньютона – Лейбніца:

(%i3) ev(%,x=1)-ev(%,x=0);

(%o3) $2\log(2)-1$

Другим способом обчислення інтеграла 4) є, звичайно, спосіб заміни змінної:

(%i4) changevar(%o1,t=sqrt(x),t,x);

Is t positive, negative, or zero?p;

(%o4) $2\int_0^1 \frac{t^2}{t+1}dt$

(%i5) %,nouns;

(%o5) $2\log(2)-1$

5) Спробуємо обчислити даний інтеграл безпосередньо:

(%i1) ’integrate(sqrt(cos(x))*sin(x),x,%pi/2,3*%pi/2);

(%o1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\cos(x)}\sin(x)dx$

(%i2) %,nouns;

(%o2) 0

Тепер спробуємо обчислити інтеграл 5) за допомогою вбудованої команди заміни змінної:

(%i3) changevar(%o1,cos(x)=t,t,x);

(%o3) 0

Двома способами Maxima видала однаковий результат.

Зауважимо, що у прикладі 3, 5) підінтегральна функція як дійсна функція не визначена в жодній точці всередині проміжку інтегрування. Проте ця функція визначена і неперервна на заданому відрізку як комплекснозначна функція дійсної змінної. Система Maxima дозволяє обчислювати інтеграли і від таких функцій. Так, якщо $a<0$, то в якості кореня $\sqrt{a}$ береться його головне значення, а саме $i\sqrt{-a}$. Тому й виходить, що

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin x dx = i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{-\cos x}\, d(-\cos x) = i\int_0^0 \sqrt{t}\, dt = 0.$$

Взагалі, при інтегруванні функції $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ по відрізку $[a;b]\subset(-\infty;0]$ у випадку непарного n в якості значень $\sqrt[n]{x}$ беруться дійсні значення, а у випадку парного n – головні значення: $\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{|x|}(\cos\dfrac{\arg x}{n}+i\sin\dfrac{\arg x}{n})$. Наприклад,

(%i4) integrate(x^(1/5),x,-32,0);

(%o4) $-\dfrac{160}{3}$

(%i5) integrate(x^(1/4),x,-16,0);

(%o5) $\dfrac{128(-1)^{\frac{1}{4}}}{5}$

(%i6) rectform(%);

(%o6) $\dfrac{2^{\frac{13}{2}}i}{5}+\dfrac{2^{\frac{13}{2}}}{5}$

Цю особливість системи Maxima слід також мати на увазі під час обчислення інтегралів. ■

5. Використання Maxima для обчислення *R*-інтегралів методом інтегрування частинами. У комплекті з даною програмою є додатковий пакет bypart.mac, який містить команду відшукання невизначеного інтеграла методом інтегрування частинами:

byparts(exp,x,u,dv):=(dv:integrate(dv,x),u*dv-integrate(dv*diff(u,x,1),x));

Оскільки аналогічної команди для *R*-інтеграла немає, то можна визначити її самостійно, додавши у файл bypart1.mac такий рядок:

byparts2(x,u,dv,a,b):=(block([v],v:integrate(dv,x),subst(b,x,u*v)-
subst(a,x,u*v)-’integrate(v*rat(diff(u,x)),x,a,b)))$

В аргументах цієї команди задається ліва частина формули інтегрування частинами (змінна інтегрування, вирази, які ми хочемо позначити за u, v', та межі інтегрування). Результатом виконання наведеної вище команди є права частина формули інтегрування частинами (причому вираз $uv|_a^b$ буде одразу обчислено, а інтеграл $\int_a^b vdu$ буде виведено у необчисленій формі, щоб можна було його проаналізувати).

Приклад 4. *Обчислити наступні інтеграли:* 1) $\int_{-1}^{1} x2^x dx$; 2) $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$; 3) $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\dfrac{xdx}{\sin^2 x}$; 4) $\int_0^{1/2}\arcsin^2 x dx$; 5) $\int_0^{\pi/2}\sin 2x \operatorname{arctg}(\sin x)dx$.

□ Інтеграли 1) – 3) обчислюються методом інтегрування частинами звичайно. Тому просто проілюструємо обчислення їх у системі Maxima.

(%i1) load(bypart1)$

(%i2) byparts2(x,x,2^x,-1,1);

(%o2) $\dfrac{5}{2\log(2)}-\dfrac{\int_{-1}^{1}2^{x}\,dx}{\log(2)}$

(%i3) %,nouns;

(%o3) $\dfrac{5}{2\log(2)}-\dfrac{3}{2\log(2)^{2}}$

(%i4) byparts2(x,log(1+x^2),1,0,1);

(%o4) $\log(2)-2\int_{0}^{1}\dfrac{x^{2}}{x^{2}+1}dx$

(%i5) %,nouns;

(%o5) $\log(2)+\dfrac{\pi-4}{2}$

(%i6) byparts2(x,x,1/sin(x)^2,%pi/4,%pi/3);

(%o6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{\tan(x)}dx-\dfrac{\pi}{3^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\pi}{4}$

(%i7) %,nouns;

(%o7) $\log\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\dfrac{\log(2)}{2}-\dfrac{\pi}{3^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\pi}{4}$

4) Для обчислення даного інтеграла потрібно двічі застосувати формулу інтегрування частинами.

(%i8) byparts2(x,asin(x)^2,1,0,1/2);

(%o8) $\dfrac{\pi^{2}}{72}-2\int_{0}^{\frac{1}{2}}\dfrac{x\operatorname{asin}(x)}{\sqrt{1-x^{2}}}dx$

(%i9) byparts2(x,asin(x),-2*x/sqrt(1-x^2),0,1/2);

(%o9) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}-1$

(%i10) %pi^2/72+%;

(%o10) $\dfrac{\pi^{2}}{72}+\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}-1$

5) Обчислення цього інтеграла доцільно розпочати із заміни змінної $\sin x=t$, а вже потім продовжити інтегрувати частинами.

(%i11) load(changevar1)$

(%i12) ’integrate(sin(2*x)*atan(sin(x)),x,0,%pi/2);

(%o12) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\operatorname{atan}(\sin(x))dx$

(%i13) chv(%o12,sin(x)=t,t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o13) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{atan}(t)\sin(2\operatorname{asin}(t))}{\sqrt{1-t^2}}dt$

(%i14) trigexpand(%);

(%o14) $2\int\limits_{0}^{1} t\operatorname{atan}(t)dt$

(%i15) byparts2(t,atan(t),2*t,0,1);

(%o15) $\frac{\pi}{4}-\int\limits_{0}^{1}\frac{t^2}{t^2+1}dt$

(%i16) %,nouns,expand;

(%o16) $\frac{\pi}{2}-1$

Знайдемо наближене десяткове значення цього інтеграла:

(%i17) %o16,numer;

(%o17) 0.5707963267949

А тепер виконаємо безпосереднє обчислення інтеграла 5):

(%i18) %o12,nouns;

(%o18) $-\frac{\pi}{8}-1$

Яка прикра помилка! До цього команда integrate не робила таких непояснюваних помилок і викликала повагу своєю потужністю й коректністю. Це ще раз підтверджує тезу про те, що далеко не всі результати, отримані за допомогою систем комп'ютерної математики, можна вважати доконаними фактами. ■

Метод інтегрування частинами часто застосовують до виведення рекурентних формул для обчислення інтегралів.

Приклад 5. *Обчислити інтеграл* $I=\int\limits_{0}^{\pi/b} e^{ax}\sin bx dx \;\; (a>0, b>0)$.

□ Застосуємо формулу інтегрування частинами:

(%i1) load(bypart1)$

(%i2) byparts2(x,%e^(a*x),sin(b*x),0,%pi/b);

(%o2) $\dfrac{a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\cos(bx)dx}{b}+\dfrac{e^{\frac{\pi a}{b}}}{b}+\dfrac{1}{b}$

Далі застосуємо формулу інтегрування частинами до інтеграла, який утворився, причому за u знову позначимо e^{ax}:

(%i3) byparts2(x,%e^(a*x),cos(b*x),0,%pi/b);

(%o3) $-\dfrac{a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{b}} e^{ax}\sin(bx)dx}{b}$

Отже, $I=\%o2$, де інтеграл в %o2 дорівнює $\%o3=-\dfrac{a}{b}I$. Складемо рівняння:

(%i4) (a*(-a)/b*I)/b+%e^((%pi*a)/b)/b+1/b=I;

(%o4) $-\dfrac{a^2 I}{b^2}+\dfrac{e^{\frac{\pi a}{b}}}{b}+\dfrac{1}{b}=I$

Розв'язавши це рівняння, тим самим знайдемо шуканий інтеграл:

(%i5) solve(%,I),factor;

(%o5) $[I=\dfrac{b\left(e^{\frac{\pi a}{b}}+1\right)}{b^2+a^2}]$ ■

6. Висновки. Вище розглянуто можливості застосування системи Maxima при вивченні поняття *R*-інтеграла, причому і в якості методичного засобу для супроводу навчального процесу, і в якості серйозного математичного інструменту, який повинен допомагати виконувати точні обчислення *R*-інтегралів.

Подаючи навіть нескладні інтеграли у вигляді границі інтегральних сум, ми зіткнулися зі складною проблемою спрощування суматорних виразів, у розв'язанні якої Maxima може суттєво допомогти, проте далеко не завжди.

Далі ми ґрунтовно зупинилися на особливостях застосування програми Maxima до обчислення *R*-інтегралів методом заміни змінної і можемо підвести такі підсумки щодо цього:

1) операція заміни змінної складна для комп'ютерної реалізації і марно сподіватися, що комп'ютер зможе правильно зробити в довільній елементарній функції $f(x)$ заміну незалежної змінної на довільну елементарну функцію $x(t)$, навіть якщо така заміна буде теоретично обґрунтованою;

2) при виконанні цієї операції потрібно якомога сильніше контролювати ситуацію на предмет законності виконуваної заміни та можливих дій комп'ютерної системи у неоднозначних ситуаціях;

3) для цього рекомендується впевнитися, чи існує заданий інтеграл; зобразити графік функції $G(t,x)=0$, яка задає підстановку; виразити явно функції $x(t)$ і

$t(x)$ за допомогою команди solve тощо;

4) вбудована команда changevar досить часто працює некоректно, тому краще користуватися визначеною нами користувацькою командою chv.

Для розширення можливостей Maxima щодо обчислення *R*-інтегралів ми запропонували доповнити її набір команд командою реалізації формули інтегрування частинами для *R*-інтеграла і продемонстрували цю команду у роботі.

Взагалі, на сучасному етапі розвитку СКМ справедливими будуть такі тези: 5) бажано перевіряти результати, отримані в одних програмах, за допомогою інших програм або за допомогою письмових викладок; 6) майже завжди у сумнівних випадках доцільно розглядати отримані за допомогою комп'ютера результати як гіпотези, котрі вимагають перевірки.

Список використаної літератури

1. Семеріков С. О. Maxima 5.13: довідник користувача / За ред. академіка АПН України М.І. Жалдака. – Київ, 2007. – 48 с.
2. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов / *Е. А.* Чичкарёв. – М.: ALT Linux, 2009. – 233 с. (Сайт книги: http://books.altlinux.ru/altlibrary/)
3. http://sourceforge.net/projects/maxima/files/
4. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3-х ч. Ч. 1. Функції однієї змінної. – К.: ВШ, 1990. – 384 с.

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ АВТОГОГІКИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.

Залізко В. Д.

кандидат фіз.-мат. наук,

Національний педагогічний університет імені М .П. Драгоманова

В статті розглянуто основні проблеми, з якими зустрічаються студенти та викладачі під час вивчення математичного аналізу та вказано можливе використання елементів автогогіки.

В статье рассмотрены основные проблемы, с которыми сталкиваются студенты и преподаватели при изучении математического анализа. Указано возможное использование элементов автогогики.

The article describes the main problems faced by students and teachers in the study of mathematical analysis. Indicated the possible use of elements autogogics.

Основна мета даної статті – зруйнувати міф про складність вивчення математичного аналізу (МА) і вказати можливі шляхи для спрощення самостійного його вивчення враховуючи особливості кредитно-модульної системи організації навчального процесу. Подібними питаннями займались: В. Луценко, О. Микитюк, Г. Михалін, І. Підласий, І. Прокопенко, Н. Сидорчук, М. Шкіль та багато інших вчених. Справа в тому, що під час складання сесії більшість студентів вважають екзамен з МА одним із найскладніших. Проблема полягає в неправильному (застарілому) підході до викладання. І це не дивно, оскільки склад кафедр більшості вищих навчальних закладів України на 60 % і більше складається з викладачів перед пенсійного віку, які навчалися за класичними підручниками, слухали академічні лекції (крейда і дошка – необхідна і достатня умови викладання). В XXI сторіччі цих двох «наочних» засобів недостатньо. Використання діа-, кодо-, медіа- чи комп'ютерних проекторів відбувається з рідка і обмежується лише звичайним переписуванням з екрану. До того ж багато студентів не вміє писати лекцію. Вони під диктовку викладача (в багатьох випадках навіть професора) пишуть нікому не потрібний диктант. Якщо ще врахувати, що їхня швидкість і грамотність написання в більшості не велика, то конспект стає часто джерелом дезінформації або більше того анекдотів. Наведемо один приклад, коли студент не встигаючи за лектором записав «…сформулюємо теорему кошіля,» замість «… сформулюємо теорему Коші» або «формула Ньютонолейбніца» замість «формула Ньютона-Лейбніца».

Викладачі ВНЗ апріорі вважають, що студенти мають істотну математичну базу, оскільки вони вступили до фізико-математичного інституту. Проте рівень математичної підготовки учнів з кожним роком знижується. Рівень математичної підготовки випускників ЗОШ 70-х років кращий за рівень учнів 90-х і 2000-х років разом взятих. Проведені зрізи знань серед студентів першокурсників виявляють значні прогалини в цілих розділах математики. Найчастіше це тригонометрія, інтегральне числення і головне алгебраїчні перетворення. Із ста опитаних нами студентів - першокурсників в середньому 10-20 не знають основну властивість дробів або не вміють виконувати правильно арифметичні операції над ними. Про яку математичну базу можна говорити? Постає питання, як ці студенти потрапили на фіз-мат із такими знаннями?! Гаразд, можна зіслатись на те, що все забувається і при бажанні можна взяти підручник і вивчити потрібний матеріал самостійно. Більше того, згідно навчальної програми передбачено самостійне вивчення досить непростих тем з математичного аналізу. І тут виникає проблема в тому, що учнів ніхто в школі не навчав як самостійно готуватись до уроків. Самовиховання та самопідготовка в нашій країні знаходиться на досить низькому рівні. Якщо на 5 курсі запитати студентів теми, які виносились на самостійне вивчення, то більшість не зможе відповісти навіть на оцінку «задовільно». Це не означає, що сучасні абітурієнти, по суті діти, мають низький розумовий рівень розвитку (IQ). Ні! Навіть навпаки, якщо поспілкуватись з ними на теми які для них цікаві, можна відчути, що і з пам'яттю, і з логікою у них все нормально. Багато з них легко запам'ятали імена всіх героїв з книги «Гарі Потер» або проходять такі складні рівні на стратегічних комп'ютерних іграх, що можна лише їм позаздрити. Отже, з вище сказаного випливає, що проблема не в дітях, а в дорослих – в батьках і викладачах.

Згідно з даними відділу кадрів НПУ імені М. П. Драгоманова на математичних кафедрах лекції, переважно, викладаються лекторами пенсійного та перед пенсійного віку. Молодь, яка йде працювати на зміну, замість того, щоб створювати нові форми викладання навчального матеріалу змушена клонувати лекції своїх старших колег. Оскільки, на заробітну плату в 1500 -2000 грн. утримувати сім'ю неможливо, то молоді викладачі шукають або інший вид діяльності (заробітна плата менеджера середньої ланки близько 5000 грн.), або виїжджають за кордон, або в кращому випадку працюють на декількох роботах. А для того щоб розробити цікаву, енергетично насичену, наукову, пізнавальну лекцію з використанням ПК, навчальних та контролюючих тестів, роздаткового матеріалу, з постановкою проблемних завдань та глибоким історичним екскурсом, потрібно витратити навіть не декілька днів, а декілька місяців, а може й років. Тому молоді викладачі рухаються по шляху найменшого опору. Читають «диктанти» з математичного аналізу під назвою академічні лекції, на яких дуже гарно засипають студенти на останніх партах.

Одним з логічних виходів із утвореної ситуації є інтеграція молодості і досвідченості. Не можна допустити, щоб класична фундаментальна дисципліна вивчалась вибірково і поверхнево, проте і формальне вивчення, точніше переписування, без розуміння можливого застосування нікому не потрібне.

Якщо взяти більшість підручників з МА, які є в бібліотеці, то вони написані максимум в 70-х або перевидані пізніше. Хочеться відзначити, що і сучасні підручники мало чим відрізняються. Бо простіше добавити кілька задач з розв'язанням або змінити доведення і все, новий підручник готовий. Цього не достатньо. Потрібно створювати принципово нові підручники з кольоровими ілюстраціями, зрозумілими геометричними інтерпретаціями, цікавими історичними легендами чи фактами про відомих математиків та ін. Мало хто задумувався, чому студенти годинами можуть розгадувати сканворди, кросворди і не втомлюються, а порозв'язувавши на практичному занятті (90 хв.) задачі з МА скаржаться на втому. Тому основною задачею викладачів є розробити нові підходи до викладання фундаментальних дисциплін таких як математичний аналіз, диференціальні рівняння, вища алгебра та геометрія, теорія ймовірностей та математична статистика та ін., які б були цікавими для молоді.

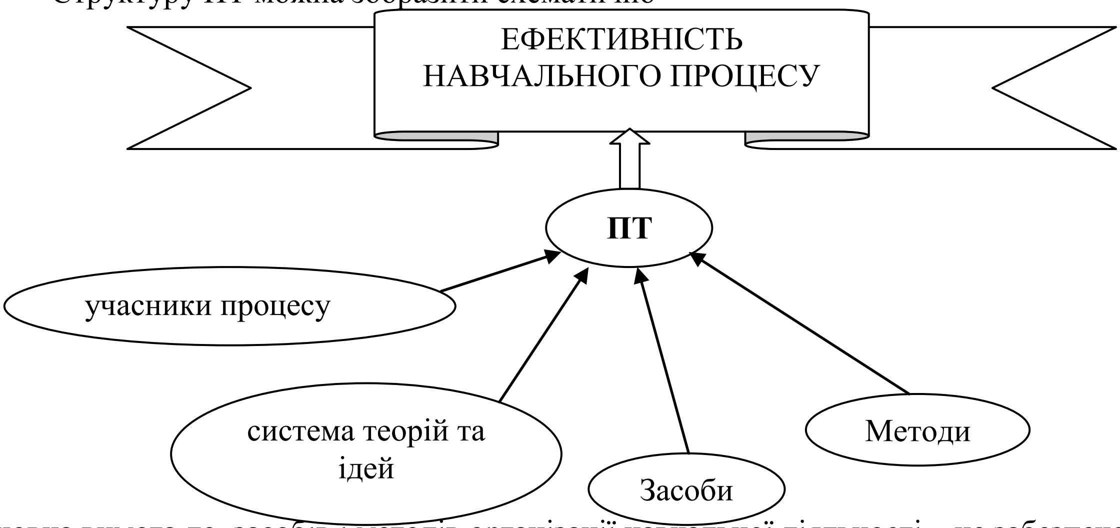
Для розв'язання перелічених вище проблем потрібно залучити всі можливі засоби. Перш за все потрібно не лише навчати студентів конкретної формули чи теореми, а показувати як самостійно можна опанувати цей матеріал і вказати де можна його використати в подальшому.

Саме наука *автогогіка* займається питаннями самоосвіти, самовиховання та ін. Тому озброївшись сучасними педагогічними технологіями автогогіка зможе допомогти в процесі вивчення математичного аналізу. Зупинимось детальніше на поняттях «технологія», «педагогічна технологія» і як їх можна використовувати для самонавчання.

Поняття “технологія” виникло у світовій педагогічній практиці як альтернатива поняттю “метод”, оскільки більшість існуючих методів викладання (зокрема методи викладання МА) є досить негнучкими, прямолінійними та статичними за означенням.

Термін “технологія” є індустріальним. В освіті набув поширення у 40-х рр. XX ст. і був пов’язаний із застосуванням нових на той час технічних засобів навчання ТЗН (аудіовізуальні засоби). У 1960-х рр. поняття “технологія освіти” розглядали під кутом зору програмного навчання й використання обчислювальної техніки в навчанні. З початку 80-х рр. XX ст. дедалі частіше використовують термін “педагогічні технології”. педагогічна технологією (ПТ) це вивчення, розробка й системне використання принципів організації навчального процесу на основі новітніх досягнень педагогіки, психології, теорії управління та менеджменту, інформатики, соціології тощо для розробки таких засобів навчання, що підвищують ефективність навчального процесу.

Структуру ПТ можна зобразити схематично



Основна вимога до засобів і методів організації навчальної діяльності – це забезпечення всіх аспектів засвоєння знань і практичних умінь.

Не існує універсальної ПТ, яку можна успішно застосовувати для всіх дисциплін. При її виборі потрібно визначати пріоритетність та важливість завдань. ПТ можна порівнювати між собою тільки в межах однієї мети або розв’язання схожих завдань (не можна використовувати одну й ту ж ПТ для викладання диференціальних рівнянь та теорії апроксимації). Слід зазначити, що тема використання технологій процесу навчання та педагогічних технологій у цілому для самостійного навчання (автогістичного), виступала предметом дискусій і суперечок багатьох вчених та педагогів, таких як В. Євдокимов, А. Макаренко, Н. Попова, А. Рівін, В. Сорока-Росинський, В. Сухомлинський та ін.

Актуальним завданням стає пошук таких ПТ, які дали б можливість викладачам математичного аналізу підготувати висококваліфікованих, конкурентоспроможних фахівців, здатних не лише виконувати складні науково-дослідні, фахово-прикладні та творчі завдання, а головне здатних для наступного саморозвитку. Оскільки розвиток технологій настільки швидкий, що стають доступними нові комп'ютерні технології за допомогою яких можна розв'язувати ще складніші завдання, використовувати МА як потужний науковий інструмент в інших дисциплінах. Таким чином, під час створення нової технології навчання математичного аналізу потрібно врахувати думку засновників кібернетичної концепції навчання (С. І. Архангельського, Н. В. Кузьміної, Н. Ф. Тализіна та ін.) і ставити акценти на вмінні студента проводити самоконтроль, самооцінку, коригувати знання в залежності від новітніх розробок та цілей. Цим самим ми успішно виконаємо основні складові процесу навчання у вищій школі і підготуємо майбутніх педагогів для подальшого розвитку за межами ВНЗ (альмаматері). Відомим, наприклад, є факт, що студенти, які звикли самостійно контролювати результати своєї діяльності, є більш організованими, ефективними та адаптивними до життєвих негараздів, ніж ті студенти, що навчаються під строгим наглядом батьків, чи адміністрації (див. наприклад [2]). Це пояснюється також тим, що студент, який знаходиться під постійним контролем і управляється ззовні завжди знайде спосіб ухилитися від цього контролю (списати, обманути…). Студент, що сприймає контроль як обов'язкову умову свого існування, буде навпаки зацікавлений в удосконаленні процесу контролю.

Таким чином, в статті обґрунтовано важливість використання і більш широкого застосування елементів автогогіки в процесі вивчення математичного аналізу. Вказано на необхідність розробки конкретних педагогічних прийомів, які базуються на покроковому аналізі розв'язання та зіставлення отриманих результатів з вихідними даними задачі., та вдосконалення керуючо-коригуючої діяльності викладача, що сприяють напрацюванню і розвитку у студентів навичок самоконтролю, самокоригування, самооцінки, що сприяє формуванню фахової компетентності майбутніх учителів.

Список використаної літератури

1. Болонський процес і кредитно-модульна система організації навчального процесу (методичні рекомендації для викладачів і студентів) / В. І. Євдокимов, О. М. Микитюк, Л. П. Харченко, В. В. Луценко. – Х. : ХНУРЕ, 2004. – 40 с.
2. Кремень В. Г. Дистанційна освіта – перспективний шлях розв'язання сучасних проблем професійної освіти / В. Г. Кремень// Вісник Академії дистанційної освіти. – 2003. – №1. – С. 4–11.
3. ЛобашовВ.Д. Педагогические технологии. Право на эксперименты: Методические вопросы тестирования как вида контроля учебного процесса / В. Д. Лобашов, С. М. Лаврушина// Педагогические технологии. – 1999. – №5. – С. 160–170.
4. Педагогічні технології / О. С. Падалка, А. М. Нісімчук, І. О. Смолюк, О.Т. Шпак. – К., 1995 – 253 с.
5. Підласий І. Педагогічні інновації: Освіта XXI століття / І. Підласий // Рідна школа. – 1999. – №2. – С. 3–17.
6. Сидорчук Н. Г. Організація самоосвітньої діяльності майбутніх учителів у процесі вивчення предметів педагогічного циклу: Дис … к. п. н.: 13.00.04 / Житомирський державний педагогічний університет ім. Івана Франка. – Житомир, 2001. – 218 с

ДВА УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ У КУРСІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Курченко О.О.,
доктор фіз.-матем. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка професор
Рабець К.В.,
кандидат фіз.-матем. наук, доцент,
Київський національний університете імені Тараса Шевченка, докторант

Стаття містить два узагальнення теореми Коші про середнє значення для диференційовних функцій та методичний аспект цих узагальнень у курсі математичного аналізу для студентів математичних факультетів класичних і педагогічних університетів.

Статья содержит два обобщения теоремы Коши о среднем значении для дифференцируемых функций и методический аспект этих обобщений в курсе математического анализа для студентов математических факультетов классических и педагогических университетов.

This article contains two generalizations of Cauchy's mean value theorem and the methodical aspect of these generalizations in the course of mathematical analysis for mathematical faculties in classical and pedagogical universities.

Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, формула Тейлора – золотий ланцюжок теорем диференціального числення функції однієї змінної класичного математичного аналізу. Вже більше століття вони входять до навчальної програми нормативного курсу математичного аналізу в університетах всього світу. У цій статті ми наводимо два маловідомих узагальнення теореми Коші. Перше узагальнення стосується відношення залишкових членів асимптотичних розвинень приростів двох функцій: чисельник і знаменник відношення нагадують формулу Тейлора. Його доведення грунтується на комбінації ідей доведення теореми Коші для диференційовних функцій та доведення формули Тейлора із залишковим членом у формі Шлемільха і Роша. Наведені приклади застосування цього узагальнення для доведення нерівностей та для доведення формули Тейлора із залишковим членом у формі Шлемільха і Роша. Друге узагальнення отримано для скінченних різниць $n-$го порядку.

Теорема 1. Нехай $m,n-$ невід'ємні цілі числа, інтервал $J\subset \mathrm{R}$, функції $f,g:J\to \mathrm{R}$ задовольняють наступні умови:

1) функція f $n+1$ разів диференційовна на J;

2) функція g $m+1$ разів диференційовна на J;

3) для довільного $t\in J$: $g^{(m+1)}(t)\neq 0$.

Тоді для довільних $x_0, x\in J$ існує таке число $\theta\in(0;1)$, що

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{g(x)-\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}=\frac{m!}{n!}\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{g^{(m+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}(1-\theta)^{n-m}(x-x_0)^{n-m}\ .$$

(1)

Доведення. Нехай $x_0, x \in J$. Відрізок та інтервал з кінцями x_0, x позначимо відповідно символами $\bar{I}, I$. Спочатку доведемо, що знаменник дробу у правій частині рівності (1) відмінний від нуля. Для цього розглянемо допоміжну функцію

$$\chi(z)=g(x)-\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k,\ z\in J.$$

Функція χ неперервна на відрізку $\bar{I}$ та диференційовна на інтервалі I:

$$\chi'(z)=-g'(z)-g''(z)(x-z)+g'(z)-\frac{g'''(z)}{2!}(x-z)^2+g''(z)(x-z)-$$

$$-\frac{g^{(4)}(z)}{3!}(x-z)^3+\frac{g^{(3)}(z)}{2!}(x-z)^2-\ldots-\frac{g^{(m+1)}(z)}{m!}(x-z)^m+\frac{g^{(m)}(z)}{(m-1)!}(x-z)^{m-1}.$$

Після взаємного знищення доданків правої частини цієї рівності отримаємо

$$\chi'(z)=-\frac{g^{(m+1)}(z)}{m!}(x-z)^m,\ \ z\in J.$$

Очевидно, $\chi(x)=0,$ а $\chi(x_0)$ дорівнює знаменнику дробу лівої частини рівності (1). Припустимо, що $\chi(x_0)=0.$ Тоді, внаслідок теореми Ролля для функції χ на відрізку $\bar{I}$, існує таке число $c\in I,$ що $\chi'(c)=0,$ звідки випливає рівність $g^{(m+1)}(c)=0,$ яка суперечить умові 3). Отже, $\chi(x_0)\neq 0,$ тобто знаменник дробу лівої частини рівності (1) відмінний від нуля.

Перейдемо до доведення власне твердження теореми. Ліву частину рівності (1) позначимо через λ і введемо допоміжну функцію

$$\varphi(z)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k-\lambda\chi(z),\ \ z\in J.$$

Ця функція неперервна на відрізку $\bar{I}$ та диференційовна на інтервалі $I.$ Похідна за змінною z виразу $f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k$ обчислюється аналогічно похідній функції χ і дорівнює $-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$. Тому

$$\varphi'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n+\lambda\frac{g^{(m+1)}(z)}{m!}(x-z)^m.$$

Крім того, функція φ дорівнює нулю на кінцях відрізка $\bar{I}$: $\varphi(x)=\varphi(x_0)=0.$ Тому, внаслідок теореми Ролля, існує таке число $c\in I,$ що $\varphi'(c)=0,$ тобто

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\lambda\frac{g^{(m+1)}(c)}{m!}(x-c)^m=0,$$

звідки $\lambda=\frac{m!}{n!}\frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(m+1)}(c)}(x-c)^{n-m}$. Точка c належить інтервалу I з кінцями x_0, x, а отже існує таке число $\theta\in(0;1)$, що $c=x_0+\theta(x-x_0)$. При цьому $x-c=(1-\theta)(x-x_0)$. Таким чином,

$$\lambda=\frac{m!}{n!}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{g^{(m+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}(1-\theta)^{n-m}(x-x_0)^{n-m}.$$

Беручи до уваги, що через λ позначена ліва частина рівності (1), отримаємо твердження теореми. Теорема доведена.

У теоремі Коші для диференційовних функцій розглядаються функції, задані на відрізку $[a;b]$. Тож сформулюємо отриманий результат для визначених на відрізку функцій.

Теорема 2. Нехай $m,n-$ невід'ємні цілі числа, функції $f,g:[a;b]\to\mathrm{R}$ задовольняють наступні умови:

1) функція f неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$ n разів і
$n+1$ разів диференційовна на інтервалі $(a;b)$;

2) функція g неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$ m разів і
$m+1$ разів диференційовна на інтервалі $(a;b)$;

3) для довільного $t\in(a;b)$: $g^{(m+1)}(t)\neq 0$.

Тоді існує таке число $c\in(a;b)$, що

$$\frac{f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{g(b)-\sum_{k=0}^{m}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}=\frac{m!}{n!}\frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(m+1)}(c)}(b-c)^{n-m}.$$

(2)

Зауваження 1. При $m=n=0$ теорема 2 переходить у теорему Коші для дифенційовних функцій. Якщо при цьому покласти $g(x)=x$, $x\in[a;b]$, то отримаємо теорему Лагранжа для диференційовних функцій.

Наведемо прклади застосування теореми 2 для доведення нерівностей.

Приклад 1. Нехай натуральне число n має остачу 3 від ділення на 4.

Тоді для довільного числа $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$ справджується нерівність

$$\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}>\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}.$$

(3)

Для доведення цієї нерівності застосуємо теорему 2 для функцій $f(t)=\cos t,\ \ g(t)=\sin t$ на відрізку $[0;x]$ і $m=n.$ Натуральне число $n+1$ ділиться на 4, тобто $n+1=4k,$ де $k-$ натуральне число. Далі,

$$f^{(4k)}(t)=\cos\left(t+\frac{4k\pi}{2}\right)=\cos t,\qquad g^{(4k)}(t)=\sin\left(t+\frac{4k\pi}{2}\right)=\sin t.$$

Внаслідок теореми 2, існує таке число $c\in(0;x),$ що

$$\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}}=\frac{f^{(4k)}(c)}{g^{(4k)}(c)}=\frac{\cos c}{\sin c}=\mathrm{ctg}c.$$

Котангенс на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ набуває значень, більших одиниці. Отже,

$$\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}}>1.$$

(4)

Знаменник лівої частини цієї нерівності додатний. Для доведення цього твердження знову застосуємо теорему 2 для $f(t)=\sin t,\ g(t)=t,\ n=4k-1,\ m=0$ на відрізку $[0;x].$ Внаслідок цієї теореми, існує таке число $c_1\in(0;x),$ що

$$\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-...+\frac{x^n}{n!}}{x}=\frac{0!}{n!}\frac{\sin(c_1)}{1}(x-c_1)^n>0,$$

оскільки синус додатний на інтервалі $\left(0;\frac{\pi}{4}\right).$ Таким чином, нерівність (3) еквівалентна нерівності (4).

Зокрема, для $x=\alpha=\frac{\pi}{4},\ n=4k-1$ із нерівності (3) отримаємо наступну нерівність:

$$\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{\alpha^3}{3!}-\frac{\alpha^4}{4!}+...+\frac{\alpha^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{\alpha^n}{n!}>1.$$

Зауважимо, що нерівність (3) можна також довести за допомогою формули Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа для функціїї $\cos x-\sin x,\ \ x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right].$

У наступному прикладі комбінація гіперболічного косинуса і гіперболічного синуса дозволяє отримати відому нерівність для $e^{-x},\ x>0.$

Приклад 2. Нехай $n-$ непарне натуральне число, $n=2k-1,\ k\in \mathrm{N}$. Тоді для довільного $x>0$ справджується нерівність

$$e^{-x}>1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!}-\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

(5)

Для доведення цієї нерівності застосуємо теорему 2 для функцій $f(t)=\mathrm{ch}(t),\ g(t)=\mathrm{sh}(t)$ на відрізку $[0;x]$ і $m=n=2k-1$. Натуральне число $m+1=n+1=2k$ парне. Далі, $(\mathrm{ch}t)^{(2k)}=\mathrm{ch}t,\quad (\mathrm{sh}t)^{(2k)}=\mathrm{sh}t.$ Внаслідок теореми 2, існує таке число $c\in(0;x)$, що

$$\frac{\mathrm{ch}x-1-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}-\ldots-\dfrac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}}{\mathrm{sh}x-x-\dfrac{x^3}{3!}-\ldots-\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}}=\frac{\mathrm{ch}c}{\mathrm{sh}c}=\mathrm{cth}c.$$

Котангенс гіперболічний на інтервалі $(0;+\infty)$ набуває значень, більших одиниці. Отже,

$$\frac{\mathrm{ch}x-1-\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}-\ldots-\dfrac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}}{\mathrm{sh}x-x-\dfrac{x^3}{3!}-\ldots-\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}}>1.$$

(6)

Знаменник лівої частини цієї нерівності додатний. Для доведення цього твердження знову застосуємо теорему 2 для $f(t)=\mathrm{sh}t,\ g(t)=t,\ n=2k-1,\ m=0$ на відрізку $[0;x]$. Внаслідок цієї теореми, існує таке число $c_1\in(0;x)$, що

$$\frac{\mathrm{sh}x-x-\dfrac{x^3}{3!}-\ldots-\dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}}{x}=\frac{0!}{(2k)!}\frac{\mathrm{sh}(c_1)}{1}(x-c_1)^{2k-1}>0,$$

оскільки гіперболічний синус додатний на інтервалі $(0;+\infty)$. Таким чином, нерівність (6) еквівалентна нерівності

$$\mathrm{ch}x-1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}-\ldots-\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}>\mathrm{sh}x-x-\frac{x^3}{3!}-\ldots-\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Враховуючи, що $\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x=e^{-x}$, із останньої нерівності отримуємо нерівність (6).

Через α_0 позначимо корінь рівняння $\cos x=\mathrm{sh}x$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Існування та єдиність такого кореня випливає із теореми Коші про проміжне значення нуль, застосованої до неперервної і спадної на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функції $\varphi(x) = \cos x - \text{sh} x$. Зауважимо, що $\alpha_0 \approx 0,7$.

Приклад 3. Нехай $n-$ натуральне число, що має остачу 3 від ділення на 4, тобто $n = 4k - 1,\ k \in \mathrm{N}$. Тоді для довільного $x \in (0,\ \alpha_0]$ справджується нерівність

$$\cos x - \text{sh} x > 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots - \frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!} - \frac{x^{4k-1}}{(4k-1)!}.$$

(7)

Для доведення цієї нерівності застосуємо теорему 2 для функцій

$f(t) = \cos t,\ g(t) = \text{sh} t$ на відрізку $[0; x]$ і $m + 1 = n + 1 = 4k$. Далі, $(\cos t)^{(4k)} = \cos t,\ (\text{sh} t)^{(4k)} = \text{sh} t.$ Внаслідок теореми 2, існує таке число $c \in (0; x)$, що

$$\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!}}{\text{sh} x - x - \frac{x^3}{3!} - \ldots - \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}} = \frac{\cos c}{\text{sh} c} > 1.$$

У прикладі 2 показано, що знаменник дробу лівої частини останньої нерівності додатний. Тому отримана нерівність рівносильна нерівності (7).

Приклад 4. Для довільного натурального n та для довільного дійсного числа $x > 0$ справджується нерівність

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right).$$

(8)

Для доведення цієї нерівності застосуємо теорему 2 для функцій

$f(t) = g(t) = e^t,\ m = n - 1$ на відрізку $[0; x]$. Оскільки $\left(e^t\right)^{(n)} = e^t$, то, внаслідок теореми 2, існує таке число $c \in (0; x)$, що $\dfrac{e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}} = \dfrac{(n-1)!}{n!} \dfrac{e^c}{e^c}(x - c)$, звідки

$$\frac{e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}{e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}} < \frac{x}{n}.$$

(9)

Знаменник дробу лівої частини останньої нерівності додатний. Для доведення цього твердження знову застосуємо теорему 2 для $f(t) = e^t,\ g(t) = t$ для невід'ємних чисел $n - 1,\ \ 0$ на відрізку $[0; x]$. Внаслідок цієї теореми, існує таке число $c_1 \in (0; x)$, що

$$\frac{e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}}{x} = \frac{0!}{(n-1)!} \frac{e^{c_1}}{1} (x-c)^{n-1} > 0.$$

Таким чином, нерівність (9) еквівалентна нерівності (8). Нерівність (8) доведена.

Із нерівності (8) випливає, що для всіх натуральних n і для всіх $x > 0$ має місце нерівність

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}\left(e^x - 1\right).$$

(10)

Дійсно, для $n \in \mathrm{N},\ x > 0:$ $e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \le e^x - 1$. Нерівність (10) пропонується довести у задачі IV.4.51* збірника задач [1]. Як відмічено у зауваженні до розв'язання цієї задачі на с. 296 [1], справджується більш сильна нерівність, а саме

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n+1}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}\right).$$

Цю нерівність можна довести за допомогою розкладу функції $e^x,\ x \in \mathrm{R}$ у степеневий ряд.

Застосуємо теорему 1 для виводу формули Тейлора із залишковим членом у формі Шлемільха і Роша ([2], п. 126).

Теорема 3. Нехай $n-$невід'ємне ціле число, $p > 0,$ функція $f : (a;b) \to \mathrm{R}$ $n+1$ разів диференційовна на інтервалі $(a;b).$ Тоді для довільних $x_0, x \in (a;b)$ існує таке число $\theta \in (0;1),$ що

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x),$$

(11)

де $$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{n!\,p}(1-\theta)^{n+1-p}(x - x_0)^{n+1}.$$

(12)

Залишковий член (12) формули Тейлора називається залишковим членом у формі Шлемільха і Роша.

Доведення. Нехай $x_0 < x.$ Застосуємо теорему 1 для функцій $f(t),$ та $g(t) = (x-t)^p,\ t \in [x_0; x]$ і невід'ємних цілих чисел $n,$ 0. Зауважимо, що у доведенні цієї теореми була використана відмінність від нуля $g^{(m+1)}(t)$ лише на інтервалі $(x_0; x).$ Внаслідок теореми 1, існує таке число $\theta \in (0;1),$ що

$$\frac{f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{0-(x-x_0)^p}=\frac{0!}{n!}\cdot\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{-p\left(x-x_0-\theta(x-x_0)\right)^{p-1}}(1-\theta)^n(x-x_0)^n$$

(13)

Враховуючи, що $x-x_0-\theta(x-x_0)=(1-\theta)(x-x_0)$, із рівності (13) отримуємо рівності (11), (12).

Для випадку $x<x_0$ теорема 1 застосовується для функцій $f(t)$, та $g(t)=(t-x)^p$, $t\in[x;x_0]$. Теорема 3 доведена.

При $p=n+1$ отримаємо залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Залишковий член Шлемільха і Роша при $p=1$ називається залишковим членом формули Тейлора у формі Коші:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

Перейдемо до узагальнення теореми Коші для диференційовних функцій на випадок різниць $n-$го порядку.

Означення 1 ([2], п. 122). Нехай $n-$ натуральне число, функція $f:(a;b)\to\mathrm{R}$, $h>0$; $x\in(a;b)$, $x+nh\in(a;b)$. Різницею $n-$го порядку з кроком h функції f на відрізку $[x;x+nh]$ називається число

$$\Delta_h^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+kh),$$

де $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0\le k\le n-$ біномні коефіцієнти.

При $n=1$ маємо різницю першого порядку:

$$\Delta_h^1 f(x)=\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x).$$

При $n=2-$ різницю другого порядку:

$$\Delta_h^2 f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x).$$

Нехай функція $f:[a,b]\to\mathrm{R}$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Покладемо $x=a,\ h=b-a.$ Тоді формулу скінченних приростів для функції f на відрізку $[a;b]$ можна записати наступним чином: існує така точка $c\in(a;b)$, що $\Delta_h f(a)=f'(c)h.$

Узагальнення теореми Лагранжа для різниць другого порядку називають теоремою Гельдера ([3], с. 91).

Теорема Гельдера. Нехай $x, h \in \mathrm{R}$, $h>0$, функція $f:[x; x+2h] \to \mathrm{R}$ неперервно диференційовна на відрізку $[x; x+2h]$ і двічі диференційовна на інтервалі $(x; x+2h)$. Тоді існує таке число $c \in (x; x+2h)$, що

$$\Delta_h^2 f(x) = f''(c) h^2.$$

Добре відоме узагальнення теореми Лагранжа та теореми Гельдера на випадок різниць $n-$го порядку, $n \geq 3$ ([2], п.122). Сформулюємо і доведемо відповідне твердження.

Теорема 4. Нехай $n-$натуральне число, $x, h \in \mathrm{R}$, $h>0$, функція $f:[x; x+nh] \to \mathrm{R}$ $n-1$ разів неперервно диференційовна на відрізку $[x; x+nh]$ і n разів диференційовна на інтервалі $(x; x+nh)$. Тоді існує таке число $c \in (x; x+nh)$, що

$$\Delta_h^n f(x) = f^{(n)}(c) h^n.$$

(14)

Лема 1 ([4], задача 4.42). Нехай $n-$натуральне число, функція $\psi:[a; b] \to \mathrm{R}$ $n-1$ разів неперервно диференційовна на відрізку $[a; b]$ і n разів диференційовна на інтервалі $(a; b)$. Нехай, далі, існують такі числа $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in [a; b]$, $\alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n$, що $\psi(\alpha_0) = \psi(\alpha_1) = ... = \psi(\alpha_n)$. Тоді існує таке число $c \in (\alpha_0; \alpha_n)$, що $\psi^{(n)}(c) = 0$.

Доведення леми 1. На кожному відрізку $[\alpha_k; \alpha_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$, внаслідок теореми Ролля, існує таке число $\alpha_k^{(1)} \in (\alpha_k; \alpha_{k+1})$, $0 \leq k \leq n-1$, що $\psi'\left(\alpha_k^{(1)}\right) = 0$. Далі, на кожному відрізку $\left[\alpha_k^{(1)}; \alpha_{k+1}^{(1)}\right]$, $0 \leq k \leq n-2$, внаслідок теореми Ролля, існує таке число $\alpha_k^{(2)} \in \left(\alpha_k^{(1)}; \alpha_{k+1}^{(1)}\right)$, $0 \leq k \leq n-2$, що $\psi''\left(\alpha_k^{(2)}\right) = 0$. Продовжуючи ці міркування, на $n-$тому кроці отримаємо існування такого числа $c = \alpha_0^{(n)} \in \left(\alpha_0^{(n-1)}; \alpha_1^{(n-1)}\right) \subset (\alpha_0; \alpha_n)$, що $\psi^{(n)}(c) = 0$. Лема доведена.

Доведення теореми 4. Покладемо

$$\varphi_j(t) = \prod_{i=0,\ i \neq j}^{n} \frac{t - x - ih}{(j-i)h}, \quad t \in [x; x+nh].$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$g(t) = \sum_{j=0}^{n} f(x+jh) \varphi_j(t), \ t \in [x; x+nh].$$

Неважко бачити, що $\varphi_j(x+kh) = \delta_{kj}$, $0 \leq k, j \leq n$, де δ_{kj} $-$символ Кронекера, рівний одиниці при $k=j$ і нулю при $k \neq j$. Тому $g(x+kh) = f(x+kh)$, $0 \leq k \leq n$. Покладемо $\psi(t) = g(t) - f(t)$, $t \in [x; x+nh]$. Функція ψ задовольняє умови леми 1 при $[a; b] = [x; x+nh]$ і $\alpha_k = x+kh$, $0 \leq k \leq n$. Тому, внаслідок леми 1, існує таке число

$c \in (x; x+nh)$, що $\psi^{(n)}(c) = 0$, тобто $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$. Функція $\varphi_j(t)$, $0 \le j \le n-$ многочлен степеня n з коефіцієнтом $\left(h^n \prod_{i=0,\, i\ne j}^{n} (j-i)\right)^{-1}$ при t^n. Тому

$$\varphi_j^{(n)}(t) = \frac{n!}{h^n \prod_{i=0,\, i\ne j}^{n} (i-j)} = (-1)^{n-j} C_n^j \cdot \frac{1}{h^n},\ t \in [x; x+nh].$$

Остаточно,

$$f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c) = \sum_{j=0}^{n} f(x+jh)\varphi_j^{(n)}(t) = \frac{1}{h^n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j} C_n^j f(x+jh) = \frac{1}{h^n}\cdot \Delta_h^n f(x),$$

звідки випливає рівність (14). Теорема доведена.

Наступна теорема є узагальненням теореми Коші для диференційовних функцій на випадок різниць $n-$го порядку.

Теорема 5. Нехай $n-$натуральне число, $x, h \in \mathrm{R}$, $h>0$, функції $f, g : [x; x+nh] \to \mathrm{R}$ $n-1$ разів неперервно диференційовні на відрізку $[x; x+nh]$ і n разів диференційовні на інтервалі $(x; x+nh)$. Нехай, далі, для довільного $t \in (x; x+nh)$: $g^{(n)}(t) \ne 0$. Тоді існує таке число $c \in (x; x+nh)$, що

$$\frac{\Delta_h^n f(c)}{\Delta_h^n g(c)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

(15)

Доведення. Внаслідок теореми 4 для функції g, існує таке число $c_1 \in (x; x+nh)$, що $\Delta_h^n g(x) = g^{(n)}(c_1)h^n \ne 0$. Таким чином, знаменник дробу у лівій частині рівності (15) відмінний від нуля.

Покладемо $\lambda = \dfrac{\Delta_h^n f(x)}{\Delta_h^n g(x)}$ і розглянемо допоміжну функцію

$$\psi(t) = f(t) - \lambda g(t),\ \ t \in [x; x+nh].$$

Ця функція задовольняє умови теореми 4 і тому існує таке число $c \in (x; x+nh)$, що $\Delta_h^n \psi(x) = \psi^{(n)}(c)h^n$, тобто $0 = \Delta_h^n f(x) - \lambda\Delta_h^n g(x) = f^{(n)}(c) - \lambda g^{(n)}(c)$, звідки випливає (15). Теорема доведена.

Приклад 5. Нехай $n-$ парне натуральне число, $n = 2k$, $k \in \mathrm{N}$; $x,\ x+nh \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Тоді

$$\frac{\Delta_h^{2k}\cos(x)}{\Delta_h^{2k}\sin(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{2k}(-1)^{n-i} C_n^k \cos(x+kh)}{\sum_{i=0}^{2k}(-1)^{n-i} C_n^k \sin(x+kh)} > 1.$$

(16)

Функції $f(t)=\cos t$ і $g(t)=\sin t$ задовольняють умови теореми 5 на відрізку $[x;x+nh]$. Внаслідок цієї теореми існує таке число $c\in(x;x+nh)\subset\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, що $\frac{\Delta_h^{2k}f(x)}{\Delta_h^{2k}g(x)}=\frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}=\frac{\cos c}{\sin c}>1$, звідки випливає (16). Зокрема, для парного натурального $n,\ x=0,\ h=\frac{\pi}{4n}$ справджується нерівність

$$\frac{\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^k\cos\frac{\pi i}{4n}}{\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^k\sin\frac{\pi i}{4n}}>1.$$

Зауважимо, що при $n=4k,\ k\in\mathrm{N}$ чисельник і знаменник дробу у лівій частині цієї нерівності додатні.

Наведені у статті узагальнення теореми Коші для диференційовних функцій можуть бути використані у науково-дослідній роботі студентів молодших курсів, для підготовки курсових робіт, у спеціальних курсах для студентів-математиків педагогічних і класичних університетів.

Список використаної літератури

1. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. – К., Вища школа, 1987. – 408 с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. – М., "Наука", 1969. – 608 с.
3. Бляшке В. Круг и шар. – М., "Наука", 1967. – 232 с.
4. Денисьєвський М.О., Курченко О.О., Нагорний В.Н., Нестеренко О.Н., Петрова Т.О., Чайковський А.В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції однієї змінної. – К., ВПЦ "Київський університет", 2005. – 240 с.

ПРОФЕСІЙНА ПІДГОТОВКА СТУДЕНТІВ ЗАСОБАМИ ПІЗНАВАЛЬНО-ВІЗУАЛЬНОГО НАВЧАННЯ АЗАМ ПОЗИЦІЙНОЇ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Ленчук І.Г.,
кандидат технічних наук,
ЖДУ імені Івана Франка,
Михайленко В.Є.,
доктор технічних наук, професор,
Київський Національний університет будівництва та архітектури

Пропонується викладачам геометрії, методистам університетів, учителям математики ЗОШ погодитися, що важлива позиційна задача на перетин тіла площиною розв'язується виключно методом внутрішнього проекціювання, а метод слідів (взаємно однозначної відповідності) є лише його особливим частинним випадком.

Предлагается преподавателям геометрии, методистам университетов, учителям математики общеобразовательных школ согласиться, что важная позиционная задача на пересечение тела плоскостью решается исключительно методом внутреннего проецирования, а метод следов (взаимно однозначного соответствия) является лишь его особым частным случаем.

We propose to teachers of geometry, methodists of universities, teachers of mathematics of secondary schools to agree, that the important position problem about the intersection of the body by plane, that is solved solely by the internal projection, and the trace method (one-to-one correspondence) is only its special case.

Постановка проблеми. Сьогодні досить важко безпомилково назвати дату та прізвище особи, з чиєї „легкої руки" в часи формування методологічної системи поглядів у конструктивній стереометрії започатковано в обіг назви двох нібито різних прийомів побудови перерізів тіл площиною загального розташування, як-от: „Метод внутрішнього проекціювання" та „Метод слідів". Очевидно, що така , не зовсім виважена ідіома диференціації методів, була зумисне озвучена з єдиною метою, щоб в якості особливого елемента конструкції категорично вирізнити із загальногеометричної схеми закономірних побудовних дій слід січної площини на площині основи тіла, котрий деінде допомагає – пришвидшує та оптимізує процес вирішення важливої позиційної задачі. Прикро, але не всі поважні інтерпретатори й оповідачі можливих рисункових варіацій на цю тему змістовно строго сприйняли привнесений фразеологізм. Які понятійні підвалини кожного з методів? Що спільного і чим вони відрізняються?

Аналіз останніх досліджень. Не секрет, що в переважній більшості навчальних посібників і, навіть, підручників, адресованих учителеві чи учневі, де висвітлюються питання образно-наочного представлення позиційних задач, немає належної уваги до їх геометричного тлумачення. Оцінюючи наявну педагогічну ситуацію словами вітчизняних геометрів-методистів В. Є. Михайленка та І.Ф. Тесленка, висловлених на адресу дещо інших конструктивних реалій, констатуємо: *„В них часто переважає рецептура того „як робити?", а питання „чому?" залишається відкритим"* ([1], с. 18).

Приміром, у діючому підручнику для ЗОШ ([2], пп. 41,48) подається лише метод слідів, й той у примітивному трактуванні, далекому від наукового. Чомусь без ґрунтовних пояснень, за принципом „роби як я” чи „як показано на малюнку”(?), коротко описується варіант відшукання перетинів із січною площиною граней багатогранника, й тільки.

У класичній, загалом змістовній, якісній книзі „Методика викладання стереометрії”, виданій колективом відомих освітян за редакцією О. М. Астряба і О.С. Дубинчук, говориться: „Існує **два** способи розв’язання задачі на перерізи на проекційному рисунку: 1) спосіб *відповідності*, 2) спосіб *слідів*”. Щоб глибше осягнути перший із них, відразу ж додаються посутні пояснення: „Спосіб відповідності ґрунтується на взаємно однозначній відповідності точок шуканого перерізу і точок нижньої основи багатогранника ” ([3], с. 208). Потім окремо виписано зауваження: „Цей метод краще називати методом внутрішнього проекціювання, але в умовах шкільної роботи його краще називати методом відповідності, бо цей термін зрозуміліший учням” ([3], с. 209). Мимоволі з’являються небезпідставні сумніви стосовно еквівалентності назв методу, окрім того, варто посперечатися із приводу кращого чи гіршого розуміння кожного терміну учнями.

Не оригінальні в зазначеному сенсі й навчальні посібники, видані на допомогу вчителю значно пізніше – в 90-ті рр. минулого століття [4,5]. Той самий підхід, ті ж принципи, хоч і корисних прикладів для справи здобуття графічних навичок у побудові перерізів тіл площиною (навіть, циліндра і конуса) значно більше.

Основна частина. Ми глибоко переконані, що мовчазно-компромісний стан речей з дивними, на наш погляд, недомовками в навчанні конструктивній стереометрії помилковий, а традиційні установки на подання учням підвалин позиційних перетворень на проекційному кресленні недосконалі, місцями алогічні, й тому – неправильні.

Тож найперше з’ясуємо, яке походження терміну „внутрішнє проекціювання за напрямом бічних ребер”?, яка його природа? Вчителю математики це конче потрібно знати, тим паче, що справжні знання першопредмету приходять через його розуміння.

Нехай площина $\boldsymbol{\Pi}$ (рис. 1) є картинною площиною (дошка, зошит), а a – напрямом проекціювання ($a \nparallel \boldsymbol{\Pi}$). Візьмемо трійку найпростіших об’єктів геометрії: точку A', пряму p' і площину $\boldsymbol{\Sigma'}$, загально розташовані відносно визначеної площини проекцій $\boldsymbol{\Pi}$. Спроекціюємо A', p' і $\boldsymbol{\Sigma'}$ на площину $\boldsymbol{\Pi}$ за напрямом a. В результаті одержимо їх паралельні проекції A, p і $\boldsymbol{\Sigma}$ відповідно. Тепер, не без задуму, абстрагуємося в думці від оригіналу, тобто уявимо собі лише картинну площину $\boldsymbol{\Pi}$ із зображеними на ній точкою, прямою і площиною. Чи можна за цим кресленням з’ясувати взаємне розташування у просторі перерахованих геометричних об’єктів? Безумовно, що ні! Єдине, що можна стверджувати категорично, то це, що точка A' не належить прямій p' ([2], § 2, п. 13). На запитання „Як взаємно розташовані точка і площина, пряма і площина?”, або (знаючи напевне, що пряма не паралельна площині) “Як установити точку перетину прямої і площини?”, дати однозначну відповідь неможливо, оскільки такі зображення найпростіших геометричних фігур на картинній площині $\boldsymbol{\Pi}$ об’єктивно не вміщують у собі відповідної інформації, тобто вони є позиційно невизначеними.

Подолати невизначеність, дійти позиційної злагоди на проекційному кресленні можна наступним прийомом. Побудуємо спочатку паралельні проекції точки A' і прямої p' ($B'C'$) на площину $\boldsymbol{\Sigma'}$ ($K'L'M'$) за деяким напрямом a', не паралельним $\boldsymbol{\Sigma'}$, а потім спроекціюємо одержану просторову модель на площину зображень $\boldsymbol{\Pi}$ за напрямом a, тобто виконаємо не одне, а **два** упорядковані проекціювання (рис. 2). Матимемо уявлювану конструкцію, в якій точка, пряма і площина вже не будуть окремо взятими геометричними об'єктами, довільно розташованими у просторі, а такими, що жорстко пов'язані між собою певною стереометричною фігурою, в нашому конкретному випадку – призмою. Нижня основа трикутної призми – трикутник $A'_1B'_1C'_1$ – належить площині $\boldsymbol{\Sigma'}$, верхня основа паралельна нижній, її розташування у просторі не суть важливо, а бічні ребра $A'A'_1$, $B'B'_1$ і $C'C'_1$ є проекціювальними прямими на $\boldsymbol{\Sigma'}$ за напрямом a'. До речі, такий зв'язок між точкою, прямою і площиною можна принагідно встановити не лише через паралельне проекціювання за визначеним напрямом a', а й за допомогою центрального проекціювання з визначеним центром проекцій S' (рис. 3). У цьому випадку пов'язуючою стереометричною фігурою буде вже піраміда $S'A'_1B'_1C'_1$.

Тепер на площині креслення $\boldsymbol{\Pi}$ матимемо таке зображення призми (піраміди), на якому кожна вершина (точка) багатогранника визначається не тільки зображенням самої точки ($A'\to A$, $B'\to B$, $C'\to C$), а й зображенням її проекції на площину $\boldsymbol{\Sigma'}$ ($A'_1\to A_1$, $B'_1\to B_1$, $C'_1\to C_1$). Інакше кажучи, на картинній площині $\boldsymbol{\Pi}$ побудовано не лише зображення точки A', прямої p' і площини $\boldsymbol{\Sigma'}$, а також зображення їх проекцій на $\boldsymbol{\Sigma'}$ ($\boldsymbol{\Sigma'}_1\equiv\boldsymbol{\Sigma'}$) разом із апаратом первісного паралельного (чи центрального) проекціювання. Очевидно, що в цьому останньому варіанті позиційна поінформованість про задані найпростіші фігури помітно зросла.

Отож, за введених умовностей, точка на площині проекцій $\boldsymbol{\Pi}$ визначатиметься своїм власним зображенням і зображенням своєї ж проекції на деяку площину $\boldsymbol{\Sigma'}$. Тут точку A_1, приміром, називають ***вторинною проекцією точки*** A', адже A' спочатку проекціюють визначеним методом на площину $\boldsymbol{\Sigma'}$ у точку A'_1, а потім останню паралельним проекціюванням – на площину $\boldsymbol{\Pi}$ в точку A_1. Проекціювання на площину $\boldsymbol{\Sigma'}$, що в динаміці дії є першим, називають ***внутрішнім***, оскільки воно виконується "всередині" – паралельно ребрам (твірним) призми чи циліндра або з вершини піраміди чи конуса. Внутрішнє проекціювання може бути або паралельним (циліндричним), або центральним (конічним). Інше ж проекціювання (друге в упорядкованій парі), тепер вже на площину проекцій $\boldsymbol{\Pi}$, називають ***зовнішнім***. Воно, відповідно до вибору методу зображень в шкільних реаліях, завжди є виключно паралельним. При цьому площину $\boldsymbol{\Sigma}$ на зображенні називають ***основною площиною***, оскільки вона є паралельною проекцією площини основи $\boldsymbol{\Sigma'}$ певної пов'язуючої стереометричної фігури, а точки A_1, B_1, C_1 – ***основами точок*** A, B, C відповідно. Нарешті, відрізки AA_1, BB_1 і CC_1, що зображають на картинній площині $\boldsymbol{\Pi}$ промені внутрішнього проекціювання $A'A'_1, B'B'_1, C'C'_1$ відповідно, називають, за термінологією М. Ф. Четверухіна, *"**шпицями**"*.

Таким чином, *будь–яка точка простору вважається заданою на проекційному кресленні, якщо на ньому зображено точку і її паралельну (центральну) проекцію на основну площину (основу). У свою чергу, якщо на кресленні кожна точка стереометричної фігури є заданою, то зображення такої фігури називається* **позиційно визначеним** *або* **повним.** Іншими словами, ***зображення просторової фігури є повним, якщо всі її елементи задані***.

Отже, нами щойно доказово й вичерпно з’ясовано геометричну суть методу зображень просторових фігур за допомогою упорядкованого ***внутрішньо-зовнішнього*** **проекціювання,** що за певних суб’єктивних умов може забезпечити вірність зображень, наочність розміщення цих фігур на картинній площині, а також сприятиме виконанню ефективних (однак, дещо обмежених за змістом) побудов на готовому проекційному кресленні.

Напевне, що *повні зображення цілком характеризують об’єкт позиційно. За ними можна зробити висновок про розміщення його окремих елементів відносно інших. На них можна шукати і знаходити спільні елементи (інциденції) двох заданих на кресленні геометричних фігур, тобто – розв’язувати позиційні задачі*.

Тож уявляючи в динаміці процес формування на картинній площині якісного зображення стереометричного тіла, учень пізнає природу ***методу внутрішнього проекціювання*** “за напрямом бічних ребер”. Тепер уже немає сумнівів, що метод внутрішнього проекціювання в геометрії не є надуманим, тому його слід сприймати як органічно невід’ємну складову переважної більшості побудовних операцій. Зрозуміло, що конус (піраміда), циліндр (призма) і куля, зображені на дошці (в зошиті) звичним прийомом із дотриманням указаних вимог, позиційно визначені й на них можна саме методом внутрішнього проекціювання побудовно строго розв’язати будь-яку задачу на інциденції, зокрема – на перерізи стереометричних тіл площиною, що досить часто трапляється в обчислювальних задачах ЗОШ.

Натомість зараз підійдемо до охарактеризування складових розглядуваного питання дещо з іншого боку, з інших теоретичних засад, уявлювано строго опрацьованих видатним російським геометром М. Ф. Четверухіним. Додамо якомога стисло і містко переказ основ ключового дійства в геометрії – проекціювання [6].

Нехай нам задано у площині $\boldsymbol{\Sigma_1}$ (рис. 4, *а*) деяку плоску фігуру Φ_1, наприклад, трикутник $A_1B_1C_1$. Припустимо, що його потрібно спроекціювати з точки S (центр проекції) на площину $\boldsymbol{\Sigma}$ (площина проекцій чи зображень). Це роблять наступним чином. Кожну вершину трикутника A_1, B_1, C_1 сполучають із центром S і знаходять точки перетину A, B, C проекціювальних прямих SA_1, SB_1, SC_1 із площиною зображень $\boldsymbol{\Sigma}$. Трикутник ABC називають **центральною проекцією** або **перспективою** трикутника-оригінала $A_1B_1C_1$.

Так, загалом, кожній точці площини $\boldsymbol{\Sigma_1}$ можна поставити у відповідність цілком певну точку площини $\boldsymbol{\Sigma}$ і навпаки[1]. Через це говорять, що центральне проекціювання встановлює *взаємно однозначну* **відповідність** між двома плоскими точковими полями $\boldsymbol{\Sigma_1}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$: „При цьому кожну фігуру площини $\boldsymbol{\Sigma_1}$ треба розглядати як місце точок, якому відповідає перспективна фігура – місце точок на площині $\boldsymbol{\Sigma}$ ” ([6], с.21). Істотною властивістю відповідності є те, що: *всякій прямій одного плоского поля відповідає пряма іншого поля*. Справді, якщо взяти у площині $\boldsymbol{\Sigma_1}$, скажімо, пряму A_1B_1, то проекціювальні прямі SA_1 і SB_1 утворюють проекціювальну площину SA_1B_1, яка перетинає площину зображень $\boldsymbol{\Sigma}$ вздовж відповідної прямої AB. Наголосимо, що пряма перетину площин $\boldsymbol{\Sigma_1}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ є особливою прямою в цій перспективній відповідності: *кожна точка прямої s* (див. рис.), *що розглядається як*

[1] У випадку, коли проекціювальний промінь паралельний площині Σ, вважатимемо, що він перетинає останню в нескінченно віддаленій точці.

оригінал, збігається із своєю проекцією, а отже, *вся пряма сама собі відповідає*. Ця пряма називається **віссю** перспективної відповідності двох площин.

Коли ж точку S в уявленнях віднести в нескінченність, то проекціювальні промені SA_1, SB_1, SC_1 будуть паралельні (рис. 4, *б*) деякому напряму a, непаралельному жодній із площин $\boldsymbol{\Sigma_1}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$. Тут між площинами $\boldsymbol{\Sigma_1}$ і $\boldsymbol{\Sigma}$ встановлюється перспективна відповідність особливого виду, яку називають **перспективно-афінною** (або **спорідненою**). Як і в загальному випадку, у спорідненій відповідності *будь-якій прямій площині* $\boldsymbol{\Sigma_1}$ *відповідає єдина пряма площини* $\boldsymbol{\Sigma}$, й *ця відповідність має своєю віссю лінію перетину s площин* $\boldsymbol{\Sigma_1}$ *і* $\boldsymbol{\Sigma}$, а *всі точки прямої s подвійні*. Крім цього, перспективно-афінна відповідність має ще дві особливі властивості: *зберігається паралельність прямих* і *зберігається відношення відрізків на прямій*. Цікаво, що виділені **три базові** властивості паралельного проекціювання є змістовною складовою теми „Зображення просторових фігур на площині” у стереометрії ЗОШ, там вони строго доведені ([2], п.13, с.10). Ситуаційна ж відмінність підходів до висвітлення цих властивостей полягає лише в тому, що у шкільному варіанті точки і прямі, як оригінальні об’єкти проекціювання, вибираються будь-де у просторі, а не в заздалегідь визначеній площині $\boldsymbol{\Sigma_1}$, проте це суті справи не змінює.

А тепер, задля виваженого з’ясування геометричного змісту кожного з методів, посилаючись до уявлень та візуального супроводу міркувань якісними проекційними кресленнями, спробуємо оперувати виключно достовірними фактами й категоріями логіки.

Найперше зауважимо, що строго обґрунтовуючи об’єктивно природне походження терміну „внутрішнє проекціювання”, ми жодним словом не обмовилися щодо взаємно однозначної відповідності двох якихось площин. Й не дивно, адже *характеристичними пріоритетами цього уявно-динамічного дійства* в геометрії є вражаюче інші поняття та закономірності, а саме: 1). *Усяке ребро піраміди чи призми (твірна конуса чи циліндра) належить проекціювальному променю, який вироджується на площину основи тіла в точку*. 2). *Бічна поверхня піраміди чи призми (конуса чи циліндра) теж є проекціювальною й вироджується на площину основи у багатокутник (коло) основи, частково, кожна окремо взята бічна грань багатогранника вироджується у відрізок – відповідну сторону багатокутника основи*. Таким чином, тут ми безапеляційно маємо справу виключно із проекціювальними прямими, площинами і поверхнями, вироджені проекції яких, як результат внутрішнього проекціювання, володіють так званою **збиральною властивістю**: *будь-яка точка проекціювальної прямої,* а також, *будь-яка точка, пряма чи інша фігура бічної поверхні тіла,* зокрема, *проекціювальної площини (грані багатогранника) має свою основу – проекцію за напрямом бічних ребер, розташовану відповідно на виродженій (слід-) проекції прямої або ж поверхні (площини).* Саме ця, напрочуд елементарна в уявленнях прописна істина, вкупі з поняттям „належності” точок, прямих і площин, складають достатню умову успішної графічної реалізації методу внутрішнього проекціювання на всякому позиційно визначеному проекційному кресленні, *якраз у цьому, й винятково в цьому проявляється **геометрична сутність** методу.*

Нарешті, щоб розумом осягнути ступінь ідентичності методів внутрішнього проекціювання і слідів, вирізнити їх споріднені та розрізняльні риси і остаточно визначитися з термінологією, зумисне повернемося до рисунка 4. На ньому наочно проілюстровано січну площину Σ і площину основи багатогранника $\boldsymbol{\Sigma_1}$. Між цими площинами встановлено, як відомо, взаємно однозначну відповідність, яку у випадку **центрального** внутрішнього проекціювання краще всього задавати центром S, парою відповідних точок A і A_1 та віссю s, а у випадку **паралельного** внутрішнього проекціювання – парою відповідних точок A і A_1 та віссю s. Що ж започаткувало, спонукало з'яву такої взаємно однозначної відповідності двох площин? – звичайно ж, дія внутрішнього проекціювання! В побудові інших пар відповідних елементів цієї справді чудової відповідності (напр., B і B_1 чи C і C_1), потрібно скористатися такими двома її характеристичними властивостями: 1) *всяка пара відповідних точок належить променю внутрішнього проекціювання;* 2) *будь-яка пара відповідних прямих перетинається на осі відповідності s* (див. правило-орієнтир у три кроки, навіч відображене на рис. стрілками).

Отже, слід s площини Σ на площині $\boldsymbol{\Sigma_1}$ є лише окремим допоміжним робочим інструментом конструктивних пошуків перерізу, й тому, швидше всього, саме **метод слідів** варто перейменувати в **метод відповідності**, що звучить переконливо й більш значимо, *але в жодному разі – не* **метод внутрішнього проекціювання**, оскільки *останній охоплює, включає в себе метод слідів* (відповідності), *тобто точкова взаємно однозначна відповідність площини перерізу і площини основи тіла об'єктивно* ***індукована природою внутрішнього проекціювання*** *за напрямом бічних ребер*.

Висновки. Всім відомо, що будь-яка руйнація стереотипів – пóранка з розряду невдячних. Можливо й нам не варто було ревізувати усталені, традиційні підходи висвітлення такого, як здавалося, несуперечливого й простого в конструктивній стереометрії питання: „Перерізи тіл площиною". Однак, за тезою старовічних – „істина дорожче"! Особливо, коли справа стосується педагогічних аспектів методики навчання геометрії майбутніх учителів.

Як з'ясувалося, реально **існує єдиний природний метод** побудовного подання популярної в геометрії позиційної задачі – **метод внутрішнього проекціювання** *за напрямом бічних ребер*, назва якого відображає єство одноіменного динамічного перетворення всередині стереометричного тіла та геометричну сутність уявних і рисункових дій учня. Взаємно однозначна відповідність між точками січної площини та площини основи тіла безперечно навіч проглядається в методі, однак, лише „міжрядково", в якості цікавого результативного компоненту операції внутрішнього проекціювання, а слід січної площини, у свою чергу, є одним із визначальних елементів такої перспективної (перспективно-афінної) відповідності двох площин, який в багатьох випадках просто неможливо зобразити на проекційному кресленні, оскільки цілком можливо, що він за даними умови задачі розташовується поза межами формату дошки (зошита).

Таким чином, *метод слідів принципово немислимий у графічній реалізації без свідомого задіяння методу внутрішнього проекціювання*, й навпаки, **метод внутрішнього проекціювання цілком автономний і самодостатній**, для його застосування слід категорично необов'язковий. Іншими словами, ***метод слідів (відповідності) є лише частинним випадком методу внутрішнього проекціювання***, хоч інколи вже побудований слід на проекційному рисунку виявляється дуже ефективним посередником у вирішенні серйозних питань теорії і практики конструктивної стереометрії (див., напр., [7]).

Список використаної літератури

1. *Михайленко В.Є., Тесленко І.Ф.* Зв'язки у викладанні геометрії і креслення. – К.: Радянська школа, 1965. – 82 с.

2. *Погорєлов О.В.* Геометрія: Стереометрія. // Підручник для 10-11 кл. серед. шк. – К.: Освіта, 2002. – 129 с.

3. Методика викладання стереометрії. / За ред. О.М. Астряба і О.С. Дубинчук. – К.: Радянська школа, 1956. – 280 с.

4. *Гольдберг Я.Е.* З чего начинается решение стереометрической задачи. / Пособие для учителя. – К.: Радянська школа, 1990. – 120 с.

5. *Жовнір Я.М.* Позиційні задачі в стереометрії. / Посібник для вчителя. – К.: Освіта, 1991. – 96 с.

6. *Четверухін М.Ф.* Рисунки просторових фігур у курсі геометрії. / Посібник для вчителів– К.: Радянська школа, 1953. – 188 с.

7. *Ленчук И.Г., Боравлёв А.Ф.* Построение опорных точек конических сечений на проекционно-полном чертеже Четверухина. // Сб. науч.-метод. ст. «Начертательная геометрия и инженерная графика». – М.: Из-во МПИ, 1990. – Вып. 17. – С. 112-119.

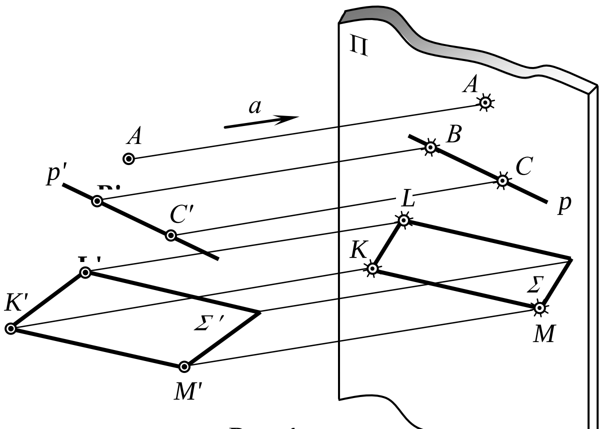


Рис. 1

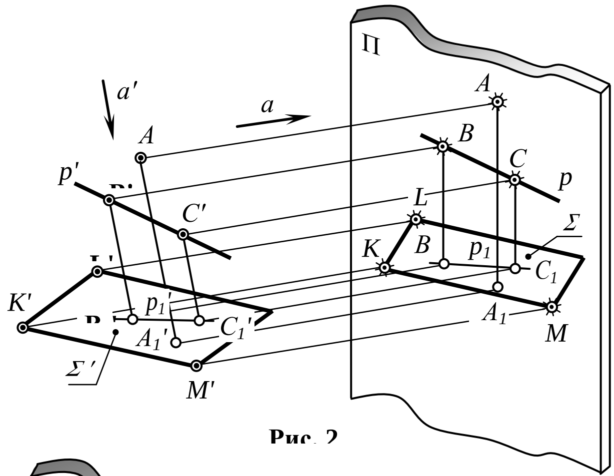


Рис. 2

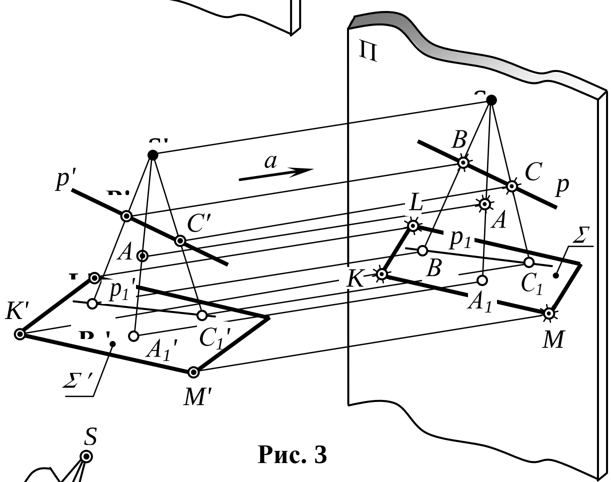


Рис. 3

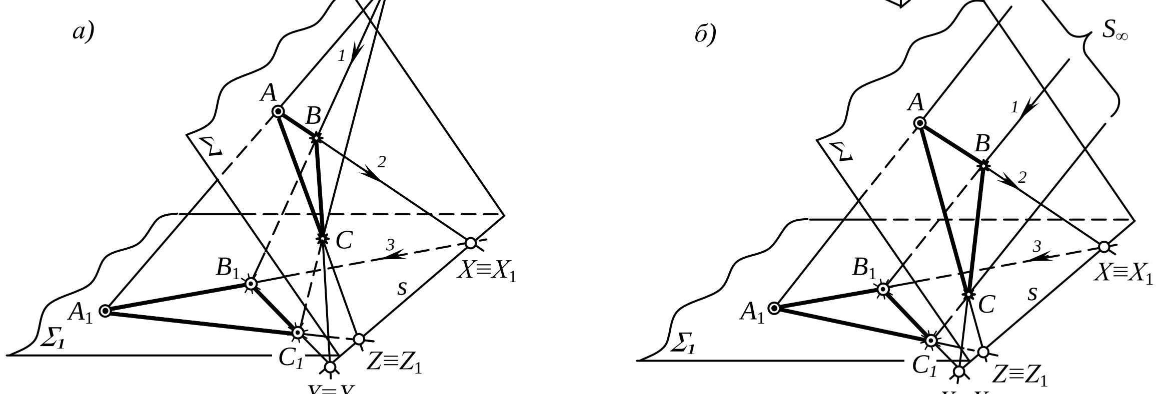


Рис. 4

СИСТЕМА КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ СТУДЕНТІВ З МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Панченко Л.Л.,

кандидат пед. наук,

доцент кафедри вищої математики

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Шаповалова Н.В.,

кандидат фіз.-мат. наук,

доцент кафедри вищої математики

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

У статті запропонована система проведення контролю знань та вмінь студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів з математичного моделювання. Формується структура контролю результатів навчання, досліджуються функції та форми педагогічного контролю, описуються рівні досягнень студентів та рівні засвоєння знань з математичного моделювання.

В статье предложена система проведения контроля знаний и умений студентов математических специальностей педагогических университетов по математическому моделированию. Формируется структура контроля результатов обучения, исследуются функции и формы педагогического контроля, описываются уровни достижений студентов и уровни усвоения знаний по математическому моделированию.

The article offers a system of conducting control over knowledge and skills in mathematic modeling of students of mathematic faculties of pedagogical universities. The authors formulate a structure of control over results of study, investigate functions and forms of pedagogic control and depict levels of students' progress and levels of mastering knowledge in mathematic modeling.

В умовах особистісної зорієнтованості навчально-виховного процесу контроль результатів навчання стає дійовим засобом розкриття індивідуальності студента і підтримки його особистісного розвитку. Розглянувши різні підходи до тлумачення контролю результатів навчання, висвітлені в дисертаційних дослідженнях В.О. Швеця [5] та І.А. Дремової [1], а також у посібнику [4] і враховуючи сучасні вимоги до навчального процесу, будемо дотримуватись такої *структури контролю* результатів навчання.

Перевірка – виявлення результатів навчання в опануванні певним обсягом предметних знань, навичок, вмінь, в інтелектуальному, психічному й соціальному розвитку студента і реалізації його можливостей, нахилів, інтересів. Перевіркою визначається:

- правильність виконання навчального завдання;
- сформованість загальних і предметних знань, навичок, вмінь;
- виявлення помилок, відхилень, недоліків у формуванні понять, способів дій;
- виявлення причин неуспіхів, індивідуальних особливостей, резервів розвитку кожного студента;
- планування коригуючої роботи.

Оцінювання – вимірювання досягнутих результатів навчання студентів і порівняння їх із запланованими програмою і конкретизованими у навчальних цілях, а також з його власними попередніми досягненнями. Результатом оцінювання є оцінка. В умовах кредитно-модульної організації навчального процесу встановлено порядок перерахунку рейтингових показників нормованої 100-бальної університетської шкали оцінювання в традиційну 4-бальну шкалу та європейську шкалу ECTS (табл. 1).

Таблиця 1

Оцінювання знань та вмінь студентів в умовах кредитно-модульної організації навчального процесу

<table>
<tr><th rowspan="2">За шкалою ECTS</th><th rowspan="2">За шкалою університету</th><th colspan="2">За національною шкалою</th></tr>
<tr><th>Екзамен</th><th>Залік</th></tr>
<tr><td>A</td><td>90-100 (відмінно)</td><td>5 (відмінно)</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>B</td><td>80-89 (дуже добре)</td><td rowspan="2">4 (добре)</td></tr>
<tr><td>C</td><td>70-79 (добре)</td></tr>
<tr><td>D</td><td>65-69 (задовільно)</td><td rowspan="2">3 (задовільно)</td></tr>
<tr><td>E</td><td>60-64 (достатньо)</td></tr>
<tr><td>FX</td><td>35-59 (незадовільно – з можливістю повторного перескладання)</td><td>2 (незадовільно)</td><td>не зараховано</td></tr>
<tr><td>F</td><td>1-34 (незадовільно – з обов’язковим повторним курсом)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Облік – фіксація й збереження даних про досягнуті результати навчання, об’єктивне відображення динаміки розвитку особистості.

Корекція – усунення виявлених недоліків і прогалин у знаннях, вміннях студентів шляхом навчальної роботи, вдосконалення організації навчального процесу тощо.

Контроль знань та вмінь студентів з математичного моделювання має описану структуру і як педагогічний контроль, взагалі, виконує такі *основні функції*: діагностичну, навчаючу, розвиваючу, виховну, контролюючу.

Діагностика – це процес виявлення і оцінювання властивостей особистості, які нас цікавлять. Педагогічна діагностика – частина наукової системи контролю, яка безпосередньо пов’язана з процесом виявлення рівня знань, навичок та вмінь, розвитку, вихованості, оцінки реальної поведінки студентів.

На різних етапах навчання предметом діагностики в університеті є різні аспекти навчальної, науково-дослідної, суспільної діяльності студентів, а метою – отримання науково обґрунтованої інформації для удосконалення процесу навчання [2].

Навчаюча функція зумовлює таку організацію контролю навчальних досягнень студентів, коли його проведення сприяє повторенню, уточненню і систематизації навчального матеріалу, вдосконаленню підготовки студента. *Розвиваюча і виховна функції* контролю спрямовані на формування у студентів загальних і специфічних розумових дій і прийомів розумової діяльності та відповідального ставлення до занять, розвитку своїх здібностей, виховання активного прагнення навчатися. *Контролююча функція* передбачає визначення рівня досягнень окремого студента (групи), виявлення рівня готовності до засвоєння нового матеріалу, що дає змогу викладачеві відповідно планувати і викладати навчальний матеріал.

Всі ці функції тісно пов'язані між собою у навчально-виховному процесі. Заліки, екзамени і колоквіуми виконують діагностичну і контролюючу функцію, семінари, практичні заняття – діагностичну, навчаючу, розвиваючу і виховну.

Навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики буде успішним лише за умови постійної діагностично-контролюючої роботи не лише на початковому етапі організації навчання (під час вступних лекцій та практичних занять), а й протягом усіх періодів його здійснення (під час вивчення кожної математичної дисципліни, а також під час впровадження спецкурсу «Математичне моделювання»).

Контроль знань та вмінь математичного моделювання на різних етапах навчання є важливим складовим компонентом системи навчання математичного моделювання майбутніх учителів математики в процесі вивчення ними різних математичних дисциплін.

Як зазначено в посібнику З.І. Слєпкань [4, с. 144], «*Педагогічний контроль* – це система перевірки результатів навчання, розвитку і виховання студентів. Існування і розвиток різних видів педагогічного контролю пояснюється стимулюючою і діагностичною роллю перевірки у навчальній діяльності учнів і студентів.

Система контролю знань, навичок і вмінь повинна будуватися на єдиних об'єктивних критеріях, бути простою і зручною, одночасно визначати стан якості підготовки даного контингенту студентів не тільки з точки зору наявності предметних знань і вмінь, але і сформованості загальних і специфічних розумових дій та тих прийомів навчальної роботи, без яких програма навчання не може бути реалізована».

В умовах організації навчального процесу за кредитно-модульною системою для визначення якості оволодіння навчальним матеріалом із подальшим його оцінюванням рекомендується застосовувати такі рівні досягнень студентів. *Високий рівень*. Студент вільно володіє навчальним матеріалом на підставі вивченої основної та додаткової літератури, аргументовано висловлює свої думки, проявляє творчий підхід до виконання індивідуальних та колективних завдань при самостійній роботі. *Достатній рівень*. Студент володіє основним обсягом навчального матеріалу, здатний його аналізувати, але не має достатніх знань та вмінь для формулювання висновків, допускає несуттєві неточності. *Задовільний рівень*. Студент володіє навчальним матеріалом на репродуктивному рівні або володіє частиною навчального матеріалу, уміє використовувати знання в стандартних ситуаціях. *Низький рівень*. Студент володіє навчальним матеріалом поверхово і фрагментарно. *Незадовільний рівень*. Студент не володіє навчальним матеріалом.

Трансформуючи зазначені рівні на тему «Математичне моделювання», можна виділити такі рівні засвоєння знань з математичного моделювання.

Низький рівень передбачає засвоєння таких понять як «математична модель», «математичне моделювання», «метод математичного моделювання», «спрощена евристична схема діяльності математичного моделювання», «прикладна задача», застосування спрощеної евристичної схеми діяльності математичного моделювання до розв'язування простих задач (шкільного типу). Наприклад, таких:

Задача 1. Залежність витрат *y* на купівлю молочної продукції від щомісячного доходу *x* сім'ї виражається функцією $y=0{,}3x-36$. Який дохід повинна мати сім'я щомісяця, щоб витрачати на молочну продукцію 120 грн. у місяць? Скільки сім'я витрачатиме на молочну продукцію, маючи дохід у 1500 грн.?

Задача 2. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t)=6-33t+32t^2-\dfrac{t^5}{20}$, де $s(t)$ – шлях, м, t – час, с. В який момент часу тіло має найбільшу швидкість? Знайти цю швидкість.

На задовільному рівні студенти повинні свідомо володіти спрощеною схемою діяльності математичного моделювання [3], вміти виконувати всі етапи схеми, а це вміння безпосередньо пов'язане з вміннями математичного моделювання, описаними у галузевих стандартах. Особливістю цього рівня навчальних досягнень є те, що знання і способи діяльності математичного моделювання базуються на відповідних знаннях і вміннях з математичної дисципліни, що вивчається, і ці знання і вміння проявляються під час виконання етапу «Реалізація математичної моделі математичними методами». Приклади:

Задача 3. Переріз тунелю заданого периметра *p* має форму прямокутника з насадженим півкругом. За яких розмірів сторін прямокутника площа перерізу буде найбільшою?

Задача 4. Скільки тканини треба витратити на виготовлення пляжного зонта, що має форму частини сферичної поверхні радіуса 4 м, вирізаної прямим круговим циліндром радіуса 2 м?

Необхідно, щоб студенти вміли: для задачі 3 – знаходити похідну функції однієї змінної; знаходити найбільше та найменше значення функції однієї змінної; для задачі 4 – знаходити частинні похідні функції двох змінних; здійснювати перехід від прямокутної декартової системи координат до полярної системи координат; знаходити подвійний інтеграл.

На цьому рівні досягнень студенти знайомляться з розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання [3]. Вони повинні знати послідовність етапів цієї схеми. Викладач наводить приклади розв'язування задач за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Студентам пропонуються завдання: виділити етапи розширеної евристичної схеми діяльності математичного моделювання в процесі розв'язування певної задачі. Приклад:

Задача 5. Двоє друзів замовили в кафе каву та вершки. Коли їм одночасно подали однаково гарячу кафу та вершки, вони вчинили таким чином. Один з них додав до кави трішки вершків, накрив чашку паперовою серветкою і вийшов зателефонувати. Інший накрив чашку паперовою серветкою, а додав ту ж кількість вершків лише через 10 хвилин, коли повернувся перший, і вони почали пити каву разом. Хто з них пив більш гарячу каву?.

На достатньому рівні студенти повинні вміти розв'язувати простіші задачі за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, чітко виконувати кожний етап цієї схеми, використовувати різні методи математичного моделювання.

Високий рівень передбачає діяльність студентів за розширеною евристичною схемою творчого характеру, яка вимагає високого рівня знань і вмінь студента з математики та інформатики, вміння визначати, до якої галузі знань відноситься проблема, поставлена в задачі, вміння користуватися довідковою літературою з цієї галузі, актуалізувати свої знання та свій життєвий досвід. Цього рівня, як правило, досягають не всі студенти і це закономірно.

Щодо оцінювання знань та вмінь математичного моделювання слід зазначити наступне. У процесі вивчення кожної математичної дисципліни студенти досягають достатнього рівня засвоєння знань та вмінь з математичного моделювання, що відповідає оцінці «добре». Це повинно, на нашу думку, так впливати на загальну оцінку з математичної дисципліни (див. табл. 2).

У графі «Оцінювання основних знань та вмінь» оцінюються знання, навички та вміння студентів відповідно до вимог програми з кожної математичної дисципліни зокрема.

Під час вивчення спецкурсу з математичного моделювання зберігається загальноприйнята відповідність між рівнем навчальних досягнень та оцінкою, яка проілюстрована в табл. 3.

Таблиця 2

Оцінювання знань та вмінь студентів при вивченні математичної дисципліни

Оцінювання основних знань та вмінь			Оцінювання знань та вмінь з математичного моделювання			Загальна оцінка		
	нац.	ECTS		нац.	ECTS		нац.	ECTS
відмінно	5	A	добре	4	B, C	відмінно	5	A
добре	4	B, C	добре	4	B, C	добре	4	B, C
задовільно	3	D, E	добре	4	B, C	задовільно	3	D, E
відмінно	5	A	задовільно	3	D, E	добре	4	B, C
добре	4	B, C	задовільно	3	D, E	добре	4	B, C
задовільно	3	D, E	задовільно	3	D, E	задовільно	3	D, E

нац. – за національною шкалою

ECTS – за шкалою ECTS

Таблиця 3

Відповідність між рівнем навчальних досягнень

Оцінювання основних знань та вмінь			Оцінювання знань та вмінь з математичного моделювання			Загальна оцінка		
	нац.	ECTS		нац.	ECTS		нац.	ECTS
відмінно	5	A	добре	4	B, C	відмінно	5	A
добре	4	B, C	добре	4	B, C	добре	4	B, C
задовільно	3	D, E	добре	4	B, C	задовільно	3	D, E
відмінно	5	A	задовільно	3	D, E	добре	4	B, C
добре	4	B, C	задовільно	3	D, E	добре	4	B, C
задовільно	3	D, E	задовільно	3	D, E	задовільно	3	D, E

Високий рівень (творчий) з математичного моделювання досягається здібними та обдарованими студентами також у процесі індивідуальної та групової роботи під керівництвом викладача під час написання курсових, кваліфікаційних робіт, наукових студентських робіт, підготовки доповідей на засідання наукових гуртків та наукові конференції.

До форм педагогічного контролю з математичного моделювання віднесемо екзамени, заліки, усне опитування, письмові контрольні роботи, реферати, колоквіуми, семінари, лабораторні заняття, курсові, кваліфікаційні роботи тощо.

Педагогічний контроль з математичного моделювання поділяється на такі види: попередній, поточний, модульний, рубіжний, підсумковий і заключний.

З метою вибору ефективних форм, методів і засобів навчальної діяльності здійснюється *попередній* (*діагностичний*) *контроль*. Його проведення сприяє актуалізації опорних знань та чуттєвого досвіду студентів, а результати дають змогу викладачу виявити можливі «прогалини» і «слабкі» місця знань та вмінь студентів, більш цілеспрямовано планувати вивчення навчального матеріалу та навчально-пізнавальної діяльності студентів. З математичного моделювання попередній контроль проводиться у вигляді усного фронтального опитування, коли студенти повторюють, наприклад, спрощену чи розширену евристичні схеми.

Поточний контроль здійснюється під час занять (усне опитування, письмові самостійні та контрольні роботи). Наприклад, при проведенні письмових контрольних робіт з окремих математичних дисциплін студентам слід пропонувати прикладні задачі, які дають змогу перевірити не тільки основні знання і вміння із заданої теми, а і вміння математичного моделювання.

При вивченні теми «Множини та операції над ними» (лінійна алгебра) студентам можна запропонувати в письмовій контрольній роботі такі задачі.

Задача 6. Із 30 студентів групи 20 займаються волейболом (множина A), 15 – тенісом (множина B). Відомо, що 8 студентів займаються обома видами спорту. За допомогою діаграм Венна з’ясувати, скільки студентів займаються тільки одним видом спорту, не займаються жодним видом спорту?

Задача 7. Для визначення впливу реклами на купівлю мийних засобів було проведено опитування, після якого з’ясувалося, що при виборі товару 50 % осіб керувалися рекламою, 40 % – власною думкою про якість товару, 30 % – порадами друзів та знайомих. При цьому 10 % осіб керувалися рекламою і власною думкою, 8 % – рекламою та порадами друзів, 7 % – власною думкою і порадами друзів. Скільки процентів опитуваних при виборі товару керувалися одночасно рекламою, власною думкою та порадами друзів?

При розв’язанні цих задач студенти не тільки демонструють вміння складати та аналізувати діаграми Венна, а і вміння працювати за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

Письмові контрольні роботи на одну-дві задачі слід давати на кожному практичному занятті, причому як всім студентам на 15-20 хв., так і 4-6 студентам, відсадивши їх окремо за перші парти, а з рештою студентів проводити усне опитування. Письмові контрольні роботи з комбінованим опитуванням слід чергувати. Це сприятиме систематичності знань та вмінь студентів та активізації їх готовності до кожного практичного заняття зокрема. Так само організовувати поточний контроль слід під час вивчення кожної математичної дисципліни.

Організація навчальної діяльності студентів за кредитно-модульною системою навчання передбачає модульний контроль.

Модуль – задокументована завершена частина освітньо-професійної програми (навчальної дисципліни, практики, державної атестації), що реалізується відповідними формами навчального процесу.

Змістовний модуль – цілісна система навчальних елементів, що поєднані за ознакою відповідності певному навчальному об'єктові, яка забезпечує досягнення мети модуля.

Модульний контроль – це оцінювання результатів засвоєння певного модуля. Такий контроль, як правило, проводиться у вигляді письмової контрольної роботи або тестів. До завдань такої контрольної роботи входять як теоретичні питання, так і задачі. Тривалість контрольної роботи 45 хв. або 1,5 години в залежності від обсягу теми, матеріал якої контролюється. Так, при проведенні спецкурсу «Математичне моделювання» доцільно перевірити знання і вміння студентів з теми «Методи математичного моделювання», запропонувавши їм контрольну письмову роботу з чотирьох варіантів. Наведемо зміст одного з варіантів цієї контрольної.

Варіант № 1.

1. Навести приклад застосування фундаментальних законів природи до побудови математичних моделей.
2. Описати математичну модель визначення траєкторії спливання підводного човна.
3. Назвати та коротко охарактеризувати основні методи математичного моделювання.

На виконання запропонованих завдань доцільно відвести 45 хв. Оцінюється робота наступним чином. Оцінка «відмінно» (5, A) – виконання всіх трьох завдань. Оцінка «добре» (4) – виконання всіх трьох завдань, питання 3 (4, B) або 1 (4, C) можуть бути розкриті неповністю. Оцінка «задовільно» (3) – виконання двох завдань, 1-го та 2-го або 2-го та 3-го завдань (3, E), 1-го та 3-го завдань та аналіз і побудова математичної моделі в 2-му завданні (3, D). Одержана за письмову контрольну роботу оцінка виставляється студентам як оцінка за модуль.

Рубіжний контроль – заліки за модулями, виявлення готовності виконання курсових та кваліфікаційних робіт.

Найпоширенішим видом рубіжного контролю є залікова контрольна робота. Як правило, робочі програми з кожної математичної дисципліни передбачають проведення двох таких контрольних робіт. На факультетах складається графік проведення цих контрольних робіт. Це сприяє серйозному ставленню студентів до цього виду контролю. З досвіду роботи слід зауважити, що ці контрольні роботи є ефективними тоді, коли студентам пропонується для розв'язування 4-6 варіантів. Текст цих контрольних робіт складається з 5-6 завдань різного рівня складності. З запропонованих студентам 5-6 задач одна або дві повинні розв'язуватися студентами методом математичного моделювання за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання.

Наведемо приклад тексту варіанту № 1 залікової контрольної роботи № 1 з курсу «Проективна геометрія та методи зображень».

Варіант № 1.

1. На евклідовій прямій дано своїми неоднорідними координатами фундаментальні точки проективної системи координат: $E_0(0)$, $E_1(1)$, $E_2(-1)$. Знайдіть проективні координати точок $A(2)$, $B(3)$, $C(-2)$, $D(-3)$ і невласної точки K_∞.
2. Дано дві пари точок проективної прямої: $A(2;-1)$, $A'(0;1)$ і $B(1;0)$, $B'(1;4)$. Знайти пару точок, що гармонійно розділяє кожну з даних пар.
3. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $l:\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 = 0$ і $m:\ x_2 - 4x_3 = 0$, і точку $A(1;-2;3)$.
4. В однорідних афінних координатах дано рівняння кривої
$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 8x_1x_3 = 0.$$
Знайти рівняння цієї кривої в проективній системі координат R з фундаментальними точками $E_1 = (1:1:1), E_2 = (1:1:0), E_3 = (1:-1:0), E_4 = (2:1:1)$.
5. Використовуючи теорему Дезарга, доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.
6. Нехай A і A' – інверсні точки, K і L – точки перетину прямої AA' з колом інверсії. Доведіть, що пари точок A, A' і K, L гармонічно розділяються.

Задачі 1 та 4 даної контрольної роботи слід розв'язувати за спрощеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання, вибравши за математичну модель проективної прямої розширену евклідову пряму (задача 1) та за математичну модель проективної площини – розширену евклідову площину (задача 4).

Залікова контрольна робота проводиться також і під час проведення спецкурсу з математичного моделювання. Ця робота має за мету перевірити вміння застосовувати знання та вміння з математичних дисциплін та одержані у процесі вивчення спецкурсу до побудови і дослідження математичних моделей реальних процесів та явищ і проводиться під час практичного заняття. Наведемо приклад тексту варіанту контрольної роботи.

Варіант № 1.

1. Струмінь води фонтана досягає найбільшої висоти 4 м на відстані 0,5 м від вертикалі, що проходить через точку O виходу струменя. Знайти висоту струменя над горизонтом на відстані 0,75 м від точки O.
2. Побудувати зображення правильного дванадцятикутника.
3. Проективною площиною називають довільну множину елементів (точок) та систему її підмножин (прямих), якщо виконуються такі аксіоми:
   a_1: Через дві різні точки проходить одна і тільки одна пряма.
   a_2: Дві довільні прямі мають щонайменше одну спільну точку.
   a_3: Існують три точки, що не лежать на одній прямій.
   a_4: На прямій лежить щонайменше дві точки.
   У просторі візьміть довільну точку O і розгляньте множину П усіх прямих, що проходять через цю точку. Чи буде множина П математичною моделлю проективної площини?
4. Населення міста зростає на 2 % за рік. У скільки разів воно збільшиться через n років? Обчислення провести, якщо n =10, 25, 50, 100 років.

5. Знайти максимальну швидкість зниження парашутиста, якщо його маса разом з парашутом дорівнює 80~кг, а сила опору повітря при цьому пропорційна квадрату швидкості його руху (вважати, що коефіцієнт пропорційності $k = 3 \cdot 10^2$ г/см).

У задачах цієї контрольної роботи математичні моделі будуються засобами аналітичної геометрії (задача 1), теорії методів зображень – геометричного моделювання (задача 2), основ геометрії та лінійної алгебри (задача 3), математичного аналізу (задача 4), диференціальних рівнянь (задача 5). Задачі 1, 4, 5 – прикладні. Задачі 2 та 3 контролюють розуміння розвитку математичної теорії.

Щодо оцінювання даної контрольної роботи, то слід зауважити, що оцінка «відмінно» (5, А) ставиться за правильне виконання п'яти завдань. Оцінка «добре» (4, В) – за виконання чотирьох завдань, допускається невиконання однієї з прикладних задач або однієї із задач 2, 3. Оцінка «добре» (4, С) ставиться також за виконання п'яти завдань з незначними неточностями, пропусками, помилками (не більше однієї, двох). Оцінка «задовільно» (3, D) ставиться за виконання трьох завдань, допускається невиконання однієї з прикладних задач та задачі 2 або 3 («задовільно», 3, Е). В усіх інших випадках ставиться оцінка «незадовільно» і студенти повинні переписувати дану контрольну роботу.

Охарактеризуємо *підсумковий контроль* це екзамен або залік за весь курс. В білети курсових екзаменів доцільно включати задачі, які розв'язуються методом математичного моделювання, що дозволяє викладачеві перевірити не тільки основні вміння застосовувати теорію до розв'язування задач, а й вміння математичного моделювання. Наведемо білет екзамену з «Диференціальної геометрії та топології».

Білет № 3.

1. Просторові криві. Супровідний тригранник Френе просторової фігури.
2. Неперервні відображення. Гомеоморфізм. Приклади гомеоморфних топологічних просторів.
3. Дослідити траєкторію руху тіла, кинутого під кутом α до горизонту, що рухається зі швидкістю v_0.
4. Показати, що метричний простір є топологічним простором.

Задача 3 даного білета є прикладною. Траєкторію польоту тіла описує обвідна сім'ї парабол $y = xtg\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2 \cos\alpha}$, яка також є параболою.

Спецкурс «Математичне моделювання» передбачає підсумковий контроль у вигляді диференційованого заліку. На залік виносяться теоретичні питання та задачі, що розв'язуються за розширеною евристичною схемою діяльності математичного моделювання. Теоретичні питання та зразки задач даються студентам для підготовки за два тижні до заліку. Залік проводиться у письмовій формі за розкладом деканату. Викладачу до заліку доцільно скласти окремі білети, які на заліку вибирають студенти. У білет включаються два теоретичні питання та задача. Оскільки розв'язування задачі передбачає діяльність математичного моделювання за розширеною евристичною схемою, то залік слід проводити в комп'ютерному класі. Наведемо приклад білета до заліку зі спецкурсу «Математичне моделювання».

Білет № 5.

1. Процес розмноження бактерій та його математична модель.

2. Метод аналогій при побудові математичних моделей.
3. Знайти температуру деталі циліндричної форми при її локальному охолодженні кільцевою зоною з торця. Коефіцієнт теплопровідності (α) матеріалу, з якого виготовлено деталь, і густина (q) теплових джерел, розташованих в ній, є сталими при таких вихідних даних: $\rho_1 = 0{,}2$, $\rho_2 = 0{,}4$, $R = 1$, $h = 1$, $\lambda = 0{,}1$, $k = 0{,}04$, $q = 2$, $T_0 = 0^0$, $n = 7$, $n(z) = 6$.

Для одержання заліку обов'язково слід відповісти на одне теоретичне запитання і розв'язати задачу. При цьому залік буде зараховано з оцінкою «задовільно» (3, D). Оцінка «зараховано» (3, E) виставляється за правильну відповідь на 2 теоретичних питання та виконання аналізу і побудови математичної моделі задачі. Залік зарахований з оцінкою «добре» (4, B), коли студент відповів на всі питання і розв'язав задачу, допустивши при цьому 2 недоліки, з оцінкою «добре» (4, C), коли допустить ще і 1 помилку. І залік зараховується з оцінкою «відмінно» (5, A) за глибоку, змістовну відповідь на теоретичні питання і правильне розв'язування задачі та її оформлення.

Заключний контроль знань та вмінь студентів – майбутніх учителів – здійснюється комісією на державних екзаменах та під час захисту кваліфікаційних робіт. Наприклад, до білетів державного екзамену з математики в НПУ імені М.П. Драгоманова входить обов'язково прикладна задача, яка розв'язується методом математичного моделювання.

Як показує досвід, майже всі студенти, що прослухали спецкурс з математичного моделювання, розв'язують прикладну задачу методом математичного моделювання і одержують високі оцінки на державному екзамені з математики.

Описані нами види контролю, хоч і є в сьогоднішній університетській практиці дуже поширеними, проте не є досконалими. Головна перевага традиційної системи контролю – простота, а недоліки – суб'єктивізм в оцінці, а також слабка диференціююча здібність.

Вища школа, яка знаходиться на етапі переходу до інтенсивних методів навчання, шукає свою більш досконалу систему педагогічного контролю, оскільки традиційна система контролю успішності студентів не відповідає сучасним вимогам до вищої школи і не задовольняє потреб систематичної діагностики успішності навчання студентів.

Зараз вищі заклади освіти впроваджують кредитно-модульну систему навчання і контролю успішності студентів у відповідності з рекомендаціями Болонської декларації, яку підписала Україна.

При умові впровадження описаної системи контролю та оцінювання знань і вмінь щодо математичного моделювання і при вивченні інших навчальних дисциплін, перехід на кредитно-модульну систему навчання може пройти без проблем.

Список використаної літератури

1. Дремова І.А. Контроль знань учнів з алгебри в основній школі: Дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / НПУ імені М.П. Драгоманова. – К., 2003. – 211 с.
2. Калмыкова З.И. Обучаемость и принципы построения методов ее диагностики // Проблемы диагностики умственного развития учащихся. – М.: Педагогика, 1975. – 207 с.

3. Панченко Л.Л. Про понятійний апарат математичного моделювання в загальноосвітній школі та педагогічному вузі // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – № 1. – С. 89-97.

4. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

5. Швец В.А. Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы: Дис. канд. пед. наук 13.00.02. – К., 1988. – 209 с.

ПІДХІД «ЛИСТКІВ» В ГУРТКОВІЙ РОБОТІ З УЧНЯМИ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК

Пихтар М.П.
викладач Славутицької філії НТУУ «КПІ»,
учитель математики Славутицького ліцею

Стаття присвячена проблемі підбору задач для учнів – членів МАН при вивченні матеріалу в гуртковій роботі секції математики. Як один з шляхів вирішення вищевказаної проблеми пропонується використання простого прийому – підхід «листків».

Статья посвящена проблеме подбора задач для учащихся – членов МАН при изучении материала в кружковой работе по секции математики. Как один из путей решения вышеуказанной проблемы предлагается использование простого приема – подход «листков».

The article is devoted to problem of items selection for pupils, that are members of the Small Academy of Sciences, during their working in the section of mathematics. As one of the ways to solve the above problems is proposed to use simple device - "sheets"approach.

При дослідженні проблеми дуже важливим є не тільки результат, відповідь до задачі, а й знайдений при розв’язанні метод, завдяки якому часто вдається розв’язати багато інших задач. При правильному підході накопичені результати та методи об’єднуються в єдине ціле – нову математичну теорію. Отримуємо, таким чином, ланцюг розвитку реального дослідження: ЗАДАЧА – РОЗВ’ЯЗАННЯ – МЕТОД – ТЕОРІЯ – ЗАСТОСУВАННЯ.

Традиційно перед учнями рідко одразу ставлять нову задачу з невідомим методом розв’язання, а ще рідше просять учня самого ставити нову задачу. Вивчати матеріал можна в двох протилежних напрямках: від теорії та від задач, кожен з яких має свої переваги і недоліки. Відокремленим є підхід – «*листків*», при якому керівник гуртка не пояснює теоретичного матеріалу (або пояснює певній частині), а учень (або інша частина) вивчає тему, самостійно розв’язуючи дану послідовність задач, спеціально сформульованих і упорядкованих керівником.

Наведемо приклад такого «листка», який було складено автором для гурткової роботи з кандидатами МАН за темою «Многочлен та його корені».

Листок із теми «Многочлен та його корені»

Означення. Многочленом степеня n від змінної x будемо називати вираз виду $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, де $n \in N_0, a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots, a_0$ – будь-які числа.

Многочлен нульового степеня є многочленом-константою, тобто $P(x) \equiv C$. Будемо також вважати многочленом константу, яка рівна нулю, такий многочлен будемо називати нуль-многочленом (нуль-многочлен не має степеня, на відміну від інших многочленів).

Терміни і позначення:

1) Многочлени від змінної x будемо позначати символами $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ і т. д.

2) Степінь многочлена $P(x)$ позначимо так: $\deg(P)$.

3) Числа $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ будемо називати коефіцієнтами многочлена $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, a_n – старшим коефіцієнтом, a_0 – вільним членом.

4) Нехай $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ – даний многочлен і x_0 –деяке число, тоді $P(x_0)=a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_{n-2}x_0^{n-2} + \ldots + a_1 x_0 + a_0$ називається значенням многочлена $P(x)$ при $x = x_0$.

Означення. Число x_0 називається коренем многочлена $P(x)$, якщо при $x = x_0$ значення $P(x_0)=0$.

5) Многочлени $\mathrm{P}(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n\text{-}1} + \ldots + a_{n\text{-}1}x + a_n$, $Q(x)=b_0 x^m + b_1 x^{m\text{-}1} + \ldots + b_m$ вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли $m = n$ і коефіцієнти многочленів відповідно рівні, тобто $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_m$.

Зауважимо, що коли $P(x)$ і $Q(x)$ рівні многочлени, то для довільного числа $c \in R$ їхні значення при $x = c$ збігаються. Має місце і обернене твердження: якщо для довільного числа c виконується рівність $P(c)=Q(c)$, то $P(x)=Q(x)$.

Вправи для колективного обговорення. (Цикл опорних задач)

<u>Теорема Безу</u>. Остача від ділення будь-якого многочлена $P(x)$ на двочлен $(x-\alpha)$ дорівнює значенню многочлена $P(x)$ при $x=\alpha$.

Доведення. Нехай $P(x)$ – многочлен-ділене, а $Q(x)=x-\alpha$ – дільник, тоді остача $R(x)$ або многочлен нульового степеня або нуль, тобто $R(x)=C (C = const)$ і тоді $R(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)+R(x)$, звідси $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot Q(\alpha)+R(\alpha)$, $P(\alpha)=R$.

Наслідки:

1. $P(x) \vdots (x-\alpha) \Leftrightarrow P(\alpha)=0$, тобто $x=\alpha$ – корінь $P(x)$.

2. Якщо $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ – різні корені многочлена $P(x)$, то $P(x) \vdots ((x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n))$.

Доведення. Доведемо методом математичної індукції:

1) при $n=1$ – твердження вірне.

2) нехай воно вірне для $n=k$ різних коренів, доведемо його для $n=k+1$ різних коренів. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ – різні корені многочлена $P(x)$, тоді за припущенням: $P(x) \vdots ((x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k))$, тобто існує $Q(x)$ такий, що $P(x)=(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)\cdot Q(x)$. Підставимо $x=\alpha_{k+1}$, отримаємо: $(*) P(\alpha_{k+1})=(\alpha_{k+1}-\alpha_1)\cdot(\alpha_{k+1}-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\cdot Q(\alpha_{k+1})=0$, бо $P(\alpha_{k+1})=0$.

І оскільки $\alpha_{k+1} \neq \alpha_i\, (i=\overline{1,n})$, то $Q(\alpha_{k+1})=0$, звідси $Q(x)\vdots(x-\alpha_{k+1})$, тобто $Q(x)=(x-\alpha_{k+1})\cdot S(x)$ і $P(x)=\underbrace{(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)\cdot(x-\alpha_{k+1})}_{T(x)}\cdot S(x) \Rightarrow P(x)\vdots T(x)$.

3. Число різних коренів многочлена, відмінного від нуля, не більше, ніж його степінь.

Доведення. Нехай $P(x)\neq 0$ і $\deg P = n$. Припустимо, що $P(x)$ має $(n+1)$ різних коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, тоді за наслідком 2 отримаємо $P(x)\vdots(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n+1})$, що неможливо, оскільки степінь дільника не може бути більшим за степінь діленого.

<u>Теорема (критерій Ейзенштейна)</u>: Якщо для даного многочлена $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ з цілими коефіцієнтами a_i $(i=\overline{0,n})$ виконуються умови:

1) $a_0, a_1 ..., a_{n-1}$ діляться на деяке просте число *p*;

2) a_0 не ділиться на p^2;

3) a_n не ділиться на *p*, то даний многочлен *P*(*x*) є незвітним над полем *Q*.

Наприклад, многочлен $P(x)=x^4-2x^3-4x^4+2x-6$ є незвітним над *Q*, бо при *p* = 2, $a_3=-2, a_2=-4, a_1=2, a_0=-6$ – діляться на 2, $a_0=-6$ не ділиться на 2^2, $a_4=1$ не ділиться на 2.

Складіть доповідь про доведення цієї теореми і вкажіть джерело прочитаного.

<u>Теорема</u>: Якщо кубічний многочлен степеня *P*(*x*) з раціональними коефіцієнтами не має раціональних коренів, то *P*(*x*) – незвітний над полем *Q*.

<u>Теорема (Вієта)</u>: Якщо $x_1, x_2 .. x_n$ – корені многочлена $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, то

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\ldots x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

1. Доведіть, що якщо x_0 – корінь многочлена $P(x)$, то $P(x)$ ділиться на $(x-x_0)$.

2. Доведіть теорему Безу: остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен $(x-a)$ рівна значенню многочлена $P(x)$ при $x=a$.

3. Доведіть, що якщо многочлен P ділиться на многочлен Q, то всі корені Q є коренями P. Чи вірне обернене твердження?

4. Доведіть, що многочлен степеня n має не більше n коренів.

5. а) Доведіть, що для будь-яких $a_0,\ldots,a_{n-1}$ існує таке число C, що при всіх $x>C$ вірна нерівність $x^n > a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$.

б) Доведіть, що будь-яких $a_0,\ldots,a_{n-1}$ многочлен непарного степеня має дійсний корінь.

6. (теорема Вієта)

а) Нехай квадратний тричлен $a(x)=x^2+px+q$ розкладається на лінійні множники: $a(x)=(x-x_1)(x-x_2)$. Доведіть формули Вієта: $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$.

б) Нехай кубічний чотиричлен $b(x)=x^3+px^2+qx+r$ розкладається на лінійні множники: $b(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Доведіть, що $x_1+x_2+x_3=-p,$ $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=q,\quad x_1x_2x_3=-r$.

в*) Виведіть аналогічні формули для многочлена довільного степеня, що розкладається на лінійні множники.

7. Нехай многочлен P такий, що для всіх x $P(x)=P(-x)$. Чи може P містити непарні степені x?

8. Нехай значення многочленів P і Q співпадають при n різних значеннях змінної, і степені цих многочленів менші n. Доведіть, що тоді $P=Q$.

9. Доведіть, що для будь-яких різних чисел $a_1,\ldots,a_n$ і для будь-яких чисел $b_1,\ldots,b_n$ існує єдиний многочлен $P(x)$ степеня менше n такий, що $P(a_1)=b_1,\ldots,P(a_n)=b_n$ (цей многочлен називається інтерполяційним многочленом Лагранжа).

10. 1). Знайдіть суми всіх коефіцієнтів многочлена: а) $(x-1)^{1000}$, б) $x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\ldots(x+2010)$, в) $P(x)=\left(5x^2+x-6\right)^{100}+\left(6x^2+x-6\right)^{101}$.

2). Доведіть, що:

а) сума всіх коефіцієнтів многочлена $P(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_kx^k$ обчислюється за формулою $\sum_{k=0}^{n}a_k=P(1)$;

б) сума коефіцієнтів многочлена $P(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_kx^k$, що стоять при парних (непарних) степенях *x* обчислюється за формулою: $\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$ $\left(\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}\right)$.

11. Якщо многочлен $P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ з цілими коефіцієнтами і $a, b \in Z$, то $(P(a) - P(b)) \vdots (a - b)$. Доведіть це.

12. При діленні многочлена $P(x)$ на $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+1)$ остачі відповідно рівні 3, 15, 0. Яку остачу отримаємо при діленні цього многочлена на $x^3 - 2x^2 + 2$?

13. а) Нехай $f(x) = 2x^2 - 1$. Розв'язати рівняння $f_n(x) = x$.

б) Нехай $f(x) = 4x^3 - 3x$. Розв'язати рівняння $f_n(x) = x$.

в) Чи існує такий многочлен $f(x)$ другого степеня, що для будь-якого $n \in N$ рівняння $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n\ \text{раз}} = 0$, має рівно 2^n розв'язки?

14. Нехай $P(x)$ – многочлен такий, що для кожного многочленна $Q(x)$ має місце функціональне співвідношення: $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Знайти $P(x)$.

15. Знайдіть усі многочлени $f(x)$ такі, щоб рівність $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$ виконувалася для всіх x, y.

16. Знайдіть усі многочлени $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, відмінними від константи, такі, що для довільного $x \in R$ виконується рівність: $f(\sin x + \cos x) = f(\sin x) + f(\cos x)$.

17. Нехай $P(x)$ – а) квадратний тричлен; б) многочлен парного степеня з невід'ємними коефіцієнтами. Доведіть нерівність: $(P(xy))^2 \le P(x^2)P(y^2)\ \ \forall x, y \in R$.

Запрошуємо до розгляду пошуково-дослідницьких задач

Нехай $n > 2, n$ є N. Розглянемо множини M усіх многочленів виду $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ з дійсними коефіцієнтами. Яку підмножину S множини M ви зможете визначити (охарактеризувати), щоб $\min\limits_{P \in S}(a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2) = \frac{4}{n-1}$?

Пропонуємо таку схему:

1). Аналіз структури задачі. Вираз, який потрібно отримати, складається, щонайменше, з суми квадратів коефіцієнтів заданого многочленна. Найбільш логічно його порівняти із сумою коефіцієнтів цього многочленна, оскільки така сума дорівнює $P(1)$.

2). Перетворення виразу. Для подальших досліджень представимо даний вираз у вигляді $a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2 = \left(\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2}{n-1}}\right)^2 (n-1)$.

3). Підхід до дослідження. Скористаємося відомою нерівністю між середнім квадратичним та середнім арифметичним для невід'ємних величин, а також особливостями абсолютних величин.

4). Розв'язання задачі.

Оскільки $\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2}{n-1}} \geq \frac{|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{n-1} \geq \frac{|a_1+\ldots+a_{n-1}|}{n-1} = \frac{|P(1)-2|}{n-1}$, то $a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2 \geq \frac{(P(1)-2)^2}{n-1}$. Отже, якщо $P(1)=0$ або $P(1)=4$, то $a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2 \geq \frac{4}{n-1}$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли всі a_i рівні між собою і дорівнюють $\pm\frac{2}{n-1}$.

5). Відповідь. Шуканою підмножиною S є, наприклад, множина всіх вказаних многочленів, для яких $P(1)=0$ або $P(1)=4$.

6). Узагальнення. Міркуючи аналогічно, отримаємо нерівність $\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2}{n-1}} \geq \frac{|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{n-1} \geq \frac{|-\mathrm{a}_1+a_2-\ldots+(-1)^{n-1}a_{n-1}|}{n-1}$. Звідси при парному *n* будемо мати $a_1^2+\ldots+a_{n\text{-}1}^2 \geq \frac{(P(-1)-2)^2}{n-1}$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли всі $|a_i|$ рівні між собою і дорівнюють $\frac{2}{n-1}$, а знаки коефіцієнтів a_i чергуються. Таким чином, до знайденої вище підмножини S можна додати ще й многочлени, для яких $P(-1)=0$ або $P(-1)=4$. Якщо ж *n* парне, то при тих самих умовах отримуємо нерівність $a_1^2+\ldots+a_{n-1}^2 \geq \frac{(P(-1))^2}{n-1}$. У такому випадку до S додаються многочлени, для яких $P(-1)=\pm 2$.

Відзначимо ще й такий можливий напрям узагальнення даної задачі як виділення підмножини S, для якої $\min\limits_{P\in S}\left(|a_1|^k+\ldots+|a_{n-1}|^k\right)=\frac{a^k}{(n-1)^{k-1}}$, де $a>0$, $k-$ довільне дійсне число, більше одиниці. Скориставшись нерівністю $\left(\frac{|a_1|^k+\ldots+|a_{n-1}|^k}{n-1}\right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{|a_1|+\ldots+|a_{n-1}|}{n-1} \geq \frac{|a_1+..a_{n-1}|}{n-1}$ між середнім степеневим і середнім арифметичним, легко отримати, міркуючи аналогічно, що у ролі *S* можна взяти множину заданих многочленів, для яких $P(-1)=a\pm 2$. Зокрема, при $k=2,\ a=2$ одержуємо дану задачу.

Зауважимо, що окремо для парних та непарних n множину S легко розширити за рахунок многочленів, для яких відповідно $P(-1) = a \pm 2$ чи $P(-1) = \pm a$.

7). Висновок. Запропонований нами підхід до дослідження виявився вдалим, оскільки ми змогли виділити достатньо об'ємну підмножину S. Більше того, цією ж ідеєю ми змогли скористатися для розв'язування більш загальної задачі. Цікаво відзначити, що при цьому значення $P(1)$ виявилися незалежними від числа k. Крім того, маючи додаткову інформацію про n, виділену підмножину S ми змогли суттєво розширити. Цікаво, що і тут вибір значень $P(1)$ також не залежить від k.

18. Дано многочлен P з а) натуральними; б) цілими коефіцієнтами. Для кожного натурального числа n позначимо суму цифр десяткового запису числа $|P(n)|$ через a_n. Доведіть існування числа, яке зустрічається в послідовності $a_1, a_2, a_3, \ldots$ нескінченно багато разів.

19. Розглянемо послідовність многочленів $P_0, P_1, P_2, \ldots$, заданих формулами $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ і $P_{n+1} = x \cdot P_n(x) - P_n(x) - P_{n-1}(x)$ для будь-якого натурального x.

Доведіть рівності:

а) $$x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \ldots \frac{1}{x}}}} = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)},$$ де в лівій частині n букв x;

б) $\dfrac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = P_n(2\cos\varphi)$, якщо $\dfrac{\varphi}{\pi}$ не ціле;

в) $t^{n+1} - \dfrac{1}{t^{n+1}} = (t - \dfrac{1}{t}) P_n(t + \dfrac{1}{t})$, якщо $t \neq 0$; г) $P_n(x) = \prod\limits_{1 \le k \le n} (x - 2\cos\dfrac{\pi k}{n+1})$;

д) $P_n(x) = \sum\limits_{0 \le k \le \frac{n}{2}} (-1)^k \cdot C_{n-k}^k \cdot x^{n-2k}$; е) $\prod\limits_{1 \le k \le n} \cos\dfrac{\pi k}{2n+1} = \dfrac{1}{2^n}$.

є) Придумайте аналогічну рівність для послідовності многочленів, яка визначена таким же рекурентним співвідношенням, але яка починається не з многочленів 1 і x, а з многочленів 2 і x.

20. Нехай дано многочлен $f(x) = x^3 - x + 1$. Доведіть, що $\forall m \in N (m > 1)$ числа $m, f(m), f(f(m)), \ldots$ попарно взаємно прості.

21. Чи існує натуральне число $k > 1$ і такий відмінний від константи многочлен P з цілими коефіцієнтами, що кожні два з чисел $P(k), P(k^2), P(k^3), \ldots$ взаємно прості?

22. Побудуйте многочлен з раціональними коефіцієнтами, мінімальне значення якого дорівнює: а) $-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) доведіть, що не існує многочлена 4-го степеня, який

задовольняв би умові пункту б); г) чи існують многочлени з цілими коефіцієнтами, один з яких задовольняє умові пункту а), а інший – умові пункту б)?

23. Знайдіть многочлен з цілими коефіцієнтами а) 4-го степеня, серед коренів якого є число $\sqrt[4]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}$; б) 5-го степеня, серед коренів якого є число $\sqrt[5]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[5]{2-\sqrt{3}}$; в) доведіть існування многочлена з цілими коефіцієнтами *n*-го степеня, серед коренів якого є число $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[n]{2-\sqrt{3}}$; г) доведіть або спростуйте твердження: число $\sqrt[3]{2}+\sqrt{\sqrt{2}-1}$ є коренем деякого многочлена з цілими коефіцієнтами.

24. а) Всі коефіцієнти многочлена P цілі, причому $P(x)>x$ для будь-якого додатного числа *x*. Розглянемо послідовність, задану формулами $a_0=0,$ $a_n=P(a_{n-1})\forall n\in N$. Доведіть рівність: $НСД(a_m,a_n)=a_{НСД(m,n)}$ $\forall m\in N, n\in N$.

б) Доведіть аналогічну рівність для послідовності Фібоначчі, що задається рівностями $\varphi_1=\varphi_2$ і $\varphi_{n+2}=\varphi_{n+1}+\varphi_n\forall n\in N$.

25. Позначимо через $T_k(n)$ суму добутків по k чисел від 1 до *n*. Наприклад, $T_2(4)=1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 4$.

а) Знайдіть формули для $T_2(n)$ і $T_3(n)$.

б) Доведіть, що $T_k(n)$ є многочленом від n степеня $2k$.

в) Вкажіть метод знаходження многочленів $T_k(n)$ при $k=2,3,4,\ldots$ та використайте його для знаходження многочленів $T_3(n)$ і $T_4(n)$.

Запрошуємо до розгляду відкритих проблем.

Цікаву проблему про значення многочленів запропанували О. Г. Кукуш та Р. П. Ушаков: Зафіксуємо натуральне число $m\geq 2$.

Означення. Многочлен $P_m(x)$ з цілими коефіцієнтами називається *m*-подільним, якщо при будь-якому цілому *k* число $P_m(k)$ ділиться на *m* без остачі.

Приклад. $P_2(x)=x^2-x$, $P_3(x)=x^3-x$, $P_5(x)=x^5-x$. Многочлен x^2 є також 6-подільним, а многочлен $Q(x)=(x^2-1)(x^2+2x)$ є *m*-подільним при $m=4$ та $m=8.$ Легко бачити, що при будь-якому $m\geq 2$ многочлен $R(x)=(x+1)(x+2)\ldots(x+m)$ є *m*-подільним.

***Теорема*.** Нехай є *m* – просте число, тоді $P(x)=x^m-x$ є *m*-подільним.

Доведення. Якщо $k=ml$, $l\in Z$, то $P(k)=k(k^{m-1}-1)=ml(k^{m-1}-1)$, ділиться на *m*. Якщо ж $k\neq ml$, $l\in Z$, то числа *k* та *m* взаємно прості і згідно з малою теоремою Ферма $k^{\varphi(m)}-1$ ділиться на *m*. Тут $\varphi(m)$ – це функція Ейлера, вона дорівнює кількості натуральних чисел, менших за *m* та взаємно простих з ним. Для простого *m* $\varphi(m) = m-1$. Тому при $k \neq ml$ $P(k) = k(k^{m-1} - 1) = k(k^{\varphi(m)} - 1) \vdots m$.

Пропонується проблема: *для довільного натурального* $m \geq 2$ *якомога точніше оцінити зверху та знизу найменший степінь m-подільного многочленна з взаємно простими коефіцієнтами* (цілі числа $a_0, a_1, \ldots, a_m$ називаються взаємно простими, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює 1).

Зокрема можна довести, що для простого числа *m* цей степінь рівний *m*.

Література для початкового ознайомлення з темою:

1. Энциклопедический словарь юного математика / Сост. А.П Савин. – М.: Педагогика, 1985. – 352с.
2. Курант Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс – [3-е изд.] – М.: МЦНМО, 2001. – 586 с.
3. Вибрані питання елементарної математики / За редакцією А. В. Скорохода. «Вища школа», 1982. – 456с.
4. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Пойа Д.: [пер. с англ.]. – [2-е изд., испр.]. – М.: Наука, 1975. – 463 с.

Література, рекомендована для фахової підготовки:

1. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв‘язання / В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – Львів: Євросвіт, 1999. – 128 с.
2. Завало С. Т., Костарчук В. Н., Хацет Б. И. Алгебра і теорія чисел. – Ч. 2. – К.: Вища школа, 1980. – 408 с.
3. Проскуряков И. В. Числа и многочлены. – М.: АПН РСФСР, 1949.
4. Пойа Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2 / Г. Пойа, Г. Сеге. – М.: Наука, 1978. – 392с., 432с.

Листок із завданнями при цьому має обов'язково містити наступні положення:

–основні мінімальні теоретичні питання, яких достатньо буде для розв'язання циклу запропонованих задач, або достатньо, щоб здобути нові невідомі факти самостійно завдяки поставленим задачам;

–завдання для колективного розв'язування;

–завдання пошукового і дослідницького характеру;

–нерозв'язані задачі і відкриті проблеми та гіпотези даної теми;

–література, за допомогою якої можна збагатити знання з розглядуваної теми.

Вивчаючи «від теорії», ми виховуємо користувача науки, який успішно може використовувати відомі методи в різних ситуаціях. Вивчаючи «від задач» – виховуємо творця науки, здатного знаходити нові методи та ставити нові задачі. Отже, для дітей, обдарованих з математики, з'являється нова можливість – поглиблюватися не за рахунок пасивного вивчення більш складної теорії, а за рахунок активної самостійної роботи при вивченні того ж матеріалу. Зрозуміло, що навчання «від задач» має більш індивідуальний підхід, у порівнянні з навчанням «від теорії», а тому на заняттях гуртка МАН можливі тільки деякі елементи такого навчання. Такого роду різні форми організації пізнавальної діяльності дають широку можливість диференціації навчально-дослідницької діяльності та систематичності її здійснення.

Система «листків» неодмінно впливатиме позитивно на розвиток у школярів:

– самостійного мислення;

– критичного ставлення до навколишнього;

– логіки та математичної культури;

– уміння читати спеціальну літературу.

Звісно тут присутня і зворотна сторона, бо така система:

– забирає багато часу в школярів та у викладачів;

– вимагає безперервної роботи зі складання листків.

Сам «листок» із завданнями має відображати той колектив, для якого він написаний, а тому часто доповнюється чи переробляється. Аудиторією визначається глибина проникнення темою, а тому послідовність і кількість задач та рівень їх складності переорієнтовується.

Список використаної літератури

1. Український математичний журнал «У світі математики». Київ:«ТВіМС» – Т. 7. – Вип. 1, 2001. – С. 12; – Т. 1. – Вип. 2, 1995. – С. 43; – Т. 7. – Вип. 4, 2001. – С. 25–26; – Т. 1. – Вип. 1, 1995. – С. 61; – Т. 4. – Вип. 1, 1998. – С. 11.
2. *Пихтар М. П.* Розвиток математичних та дослідницьких здібностей учнів у рамках Малої академії наук / М. П. Пихтар // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 24–28.

СПЕЦИФІКА НАВЧАННЯ КУРСУ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ» СТУДЕНТІВ ТЕХНІКУМІВ (КОЛЕДЖІВ) В АСПЕКТІ ВИМОГ КОМПЕТЕНТНІСНОЇ ОСВІТИ

Л. Д. Харламова

Індустріально-педагогічний технікум Конотопського інституту Сумського державного університету

В. В. Петров

Криворізький державний педагогічний університет

У даній статті запропоновані інноваційні технології навчання, що застосовуються для реалізації компетентнісного підходу та наступності математичної освіти в системі «школа – технікум (коледж) – університет». Наведено приклади застосування різних методів і форм навчання.

В данной статье предложены инновационные технологии обучения, применяемых для реализации компетентностного подхода и преемственности математического образования в системе «школа - техникум (колледж) - университет». Приведены примеры применения различных методов и форм обучения.

This paper proposed an innovative learning technologies used for implementing the competence approach and continuity of mathematical education in the "School - College (College) - University. The examples use different methods and forms of education.

Постановка проблеми.

Головною суперечністю сучасних освітніх систем є розрив між реальним та необхідним рівнем підготовки частини випускників загальноосвітніх навчальних закладів, студентів-першокурсників і студентів другого курсу при переході від середньої освіти до вищої. У зв'язку з принципом безперервності і наступності математичної освіти, її змісту та методів навчання загальноосвітньої та вищої школи, перехід від одного рівня освіти до іншого викликає додаткові труднощі.

За результатами спостережень і експериментальної перевірки остаточних знань шкільного курсу з математики виявлено недостатній рівень математичної підготовки студентів до навчання систематичним курсам математичних дисциплін, які передбачені освітньо-професійною програмою підготовки молодшого спеціаліста за напрямом «Програмна інженерія» спеціальності 5.05010301 «Розробка програмного забезпечення». Навчальний план підготовки техніка-програміста у циклі дисциплін природничо-наукової підготовки містить дисципліну «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», що має забезпечити фундаментальність, міжпредметну узгодженість і допомогти сформувати вміння розв’язувати професійні задачі. Навчальна програма дисципліни передбачає, що студент має необхідний рівень знань та вмінь для успішного засвоєння курсу. Але зміст навчальної дисципліни потрібно співвіднести з реальними можливостями студентів технікумів (коледжів) щодо його засвоєння та застосувати такі педагогічні технології навчання, які забезпечать результативність й ефективність навчального процесу.

Мета роботи. Розкрити сутність інноваційних технологій навчання спрямованих на реалізацію компетентністного підходу при навчанні курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» та реалізації наступності математичної освіти в системі «школа – технікум (коледж) – університет».

Виклад основного матеріалу. Стрімкий зріст нових інформаційних технологій вимагає формування у нового покоління фахівців інноваційного мислення, що безпосередньо пов’язане із творчим підходом кожного викладача до організації навчального процесу, вільним володінням і застосуванням у своїй роботі різних методів, прийомів, засобів, новітніх технологій навчання.

«Методом навчання слід називати спосіб взаємопов’язаної діяльності викладача й учня, спрямований на вирішення комплексних завдань. Методика – система науково обґрунтованих правил і прийомів навчання, а технологія навчання - інструмент досягнення цілей навчання або систематичне і послідовне втілення на практиці спроектованого процесу навчання. Звідси випливає, що технологія навчання - це система способів і засобів досягнення цілей управління процесом навчання.» (Сибірська М.П.)

З метою реалізації компетентнісного підходу та наступності математичної освіти в системі «школа – технікум (коледж) - університет» при навчанні курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» потрібно:

- визначити рівень математичної культури і підготовки студентів другого курсу до вивчення дисципліни та забезпечити належну підготовку студентів до сприйняття нового навчального матеріалу, тобто виявити «умови ефективного формування у студентів життєвої компетентності» (Кобильник Т. П.);

- "збудувати" орієнтири практичної значущості та необхідності теоретичного матеріалу для успішного вивчення суміжних дисциплін та дисциплін професійно-практичної підготовки, що сприяє формуванню навчально-пізнавальної компетентності майбутнього програміста;

- забезпечити засвоєння навчального матеріалу дисципліни, що сприяє досягненню мети навчання курсу в цілому, а саме: забезпечити формування відповідних математичних компетентностей у студентів, які у сукупності з іншими компетентностями [4] забезпечать формування професійних компетентностей фахівців, спроможних використовувати математичний апарат у професійній діяльності та продовжувати навчання та самоосвіту за вказаним напрямом підготовки.

Перелічимо складові реалізації компетентнісного підходу та наступності математичної освіти в системі «школа – технікум (коледж) - університет»:

- визначення змісту, мети, цілей (дидактичної, розвиваючої та виховної) та завдань навчання курсу, спрямованого на реалізацію принципу фундаментальності, та реалізація його в навчальній програмі дисципліни;
- організація і проведення вхідного діагностичного контролю залишкових знань та вмінь студентів з вибіркових тем ШК МІФ (метод координат і вектори в математиці, в інформатиці, у фізиці (системи відліку, вектори переміщення, швидкості, прискорення, сил)), з метою визначення можливостей засвоєння ними курсу та формування відповідних компетенцій, зазначених в освітньо-кваліфікаційній характеристиці (ОКХ) випускників вищого навчального закладу;

- реалізація мотивації навчання курсу за допомогою методів проблемно-пошукового навчання та застосування комп'ютерних технологій в усіх формах навчання;
- розробка навчально-методичних матеріалів для реалізації різних форм організації навчального процесу з використанням новітніх технологій навчання, інноваційних методів навчання студентів;
- реалізація внутрішньопредметних та міжпредметних зв'язків із застосуванням проблемно-пошукового методу навчання при розв'язанні професійних задач;
- реалізація міжпредметних зв'язків при використанні студентами прикладного програмного забезпечення, як засобу навчання під час вивчення дисципліни (наприклад, для розв'язання практичних задач, для створення тестів в EXCEL тощо) та розробка програмного забезпечення курсу після його вивчення;
- організація самостійної роботи студентів, контроль та самоконтроль за нею; забезпечення необхідними методичними рекомендаціями щодо реалізації контролю та самоконтролю із застосуванням інформаційних технологій навчання (наприклад, самостійна перевірка рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь засобами програм Excel, MATHCAD, складанням власних алгоритмів мовою програмування тощо);
- реалізація диференційованого підходу до навчання курсу лінійної алгебри та аналітичної геометрії за допомогою новітніх засобів навчання;
- організація факультативних занять з метою поглиблення й розширення наукових і прикладних знань [6] та ознайомлення з можливостями прикладного програмного забезпечення курсу із застосуванням методу проектів, що сприяє формуванню ключових компетентностей у студентів.

Реалізація диференційованого підходу в процесі навчання, індивідуалізація навчання неможливі без попереднього виявлення викладачем рівня підготовки студентів до вивчення дисципліни "Лінійна алгебра і аналітична геометрія". Діагностику наявного рівня базових знань та умінь студентів із вибіркових тем ШК МІФ бажано провести методом анкетування та самодіагностики на першому практичному занятті. З метою виявлення рівня вмінь розв'язувати типові задачі із вказаних тем шкільного курсу, крім анкети, студентам пропонується виконати вхідну контрольну роботу за двома варіантами. Зразки листа анкетування і самооцінки залишкових знань студентів з ШК МІФ та завдань контрольної роботи наведені у додатку 1. Інший варіант контрольної роботи пропонується виконати вдома і оформити як домашню контрольну роботу.

Традиційно, вступна лекція спрямована викликати у студентів інтерес до навчальної дисципліни. З метою реалізації проблемно-пошукових методів навчання та розвитку навчально-пізнавальної компетентності бажано провести її у формі творчої бесіди, яка дозволить визначити шляхи вирішення проблемних питань курсу, пов'язаних з майбутньою професійною діяльністю студентів, та спрямованих на даному етапі навчання на актуалізацію знань студентів з шкільних курсів математики, інформатики та фізики (ШК МІФ). Наведемо деякі з них, наприклад:

1.Геометричні перетворення – це основа геометрії комп'ютерної графіки. Крім того, геометричні перетворення допомагають деякі факти з теорії систем лінійних рівнянь інтерпретувати на геометричній мові. Які геометричні перетворення площини вам відомі? Чи можете ві знайти координати образу точки за координатами прообразу цієї точки и навпаки? Чи достатньо ваших наявних знань для розв'язання задач на геометричні перетворення?

2.Для виведення зображення точки на екран графічного пристрою необхідно розв'язати дві основні задачі: 1) вказати положення всіх точок об'єкта у просторі; 2) визначити положення їх образів на моніторі. Для задання положення точок в просторі і на моніторі застосовуються різні системи координат. Які системи координат ви знаєте? Як пов'язані між собою різні системи координат? Чи достатньо ваших знань для рішення вказаних проблем?

3.Де ви зустрічалися під час навчання в школі (або на першому курсі в технікумі) з координатним методом розв'язання задач (в яких класах і в яких шкільних дисциплінах)?

4.Які відомості ви пам'ятаєте про вектори зі шкільних курсів алгебри, геометрії, фізики та інформатики (ШК МІФ)?

Для успішного виконання домашньої контрольної роботи та усвідомленого засвоєння курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» студентам пропонується повторити такі теми навчального матеріалу ШК МІФ:

1. Вектор (в планіметрії і стереометрії).
2. Застосування векторів при розв'язанні геометричних задач (зокрема, кінематичний метод розв'язання геометричних задач при наявності високого рівня знань з ШК МІФ).
3. Застосування векторів при розв'язанні задач з фізики.
4. Алгоритми роботи з таблицями (лінійними, двовимірними).
5. Розв'язання систем лінійних рівнянь.
6. Геометричні перетворення площини.

Метою організації і проведення вхідного діагностичного контролю залишкових знань та вмінь студентів з вибіркових тем ШК МІФ та актуалізації знань студентів з зазначених тем, є виявлення і усвідомлення студентами взаємозв'язків курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» з іншими навчальними дисциплінами та необхідності вивчення курсу для набуття і розвитку власних професійних компетенцій.

Висновки. Реалізація інноваційних технологій навчання забезпечує не тільки міцні предметні знання, але й формування особистісних та професійних компетенцій студентів [4], тобто сприяє реалізації компетентністного підходу та наступності математичної освіти в системі «школа – технікум (коледж) – університет» при навчанні курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», його окремих модулів, тем.

Список використаних джерел

1. Журавлёва О. Б., Крук Б. И., Соломина Е. Г. Управление Интернет-обучением в высшей школе/ Под ред Б. И. Крука. -2-е изд. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 224 с.

2. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.

3. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: Учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф. пед. кадров / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеева, А. Е. Петров; Под ред. Е. С. Полат. – М.: Издательский центр „Академия", 2003. – 272 с.

4. Татур Ю. Г. Высшее образование: методология и опыт проэктирования. Учебно-методическое пособие. – М.: Университетская книга; Логос. - 2006. – 256 с.

5. Трайнев В. А., Трайнев И. В. Системы и методы стратегии повышения качества педагогического образования. Обобщение и практика. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К», 2006. – 294 с.

6. Фіцула М. М. Педагогіка вищої школи: Навч. посіб. – К.: «Академвидав», 2006. – 352 с.

7. Хуторской А. В. Ключевые компетенции. Технологии конструирования // Народное образование. – 2003. – № 5. – С. 55 - 61.

Додаток 1.

САМООЦІНКА ЗАЛИШКОВИХ ЗНАНЬ З ШК МІФ

Теми ШК МІФ:

- *Метод координат в математиці та інформатиці.*
- *Системи відліку у фізиці.*
- *Вектори в математиці, в інформатиці, у фізиці.*

П. І. Б.:____

Група: ___________________________________;

Назва навчального закладу, в якому навчався до вступу на другий курс технікуму

____

Середній бал атестата (для випускників шкіл)**:______**;

Оцінки в атестаті (за перший курс):

з алгебри _____;

з геометрії _____;

з фізики_____;

з інформатики_____.

В наведеній нижче таблиці навпроти кожного із завдань (у другій колонці) проставте кількість балів, які на даний момент найбільше відповідають рівню Ваших знань.

Критерії оцінювання:

“**1**” – нічого не пам'ятаю (не вивчав за навчальною програмою);

“**2**” – пам'ятаю, вивчав, але без повторення розв’язати задачу або відповісти на питання не зможу;

“**3**” – можу дати визначення і розв’язати задачу, але недостатньо надано часу;

“**4**” **–** знаю теоретичний матеріал і розв’яжу типову задачу рівня А та можливо В, але не С (із зовнішнього незалежного оцінювання або державної підсумкової атестації);

“**5**”– знаю теорію і розв’язую задачі всіх рівнів на цю тему.

Залишкові знання з фізики

Вектори і системи відліку у фізиці	Відповідь	Кількість балів
1. Якими величинами визначається положення тіла (точки) у просторі?		
2. Скільки скалярних величин потрібно для задання вектора а) на площині? б) у просторі?		

3. Що у фізиці називають системою відліку?		
4. Чи може координата бути від'ємною величиною? А зміна координати бути від'ємною величиною?		
5. Спостереження за рухом футболіста показали: за час матчу він пробіг 12 км. Що це за величина — переміщення чи пройдений шлях?		
6. Черговий по гаражу записав збільшення показника лічильника на 300 км. Що означає цей запис - пройдений шлях чи довжину переміщення?		
7. Які величини у фізиці називають векторними?		
8. Як у фізиці зображають векторні величини?		
9. Що називають проекцією вектора на координатну вісь?		
10. Як пов'язаний вектор переміщення тіла з його координатами?		
11. Якщо координата точки збільшилася, то який знак має проекція вектора переміщення на координатну вісь? Який знак має проекція вектора переміщення на координатну вісь якщо вона зменшилася?		
12. Якщо вектор переміщення паралельний осі X, то чому рівний модуль проекції вектора на цю вісь? Чому рівний модуль проекції цього ж вектора на вісь Y?		
13. Якщо значення пройденого шляху велике, то чи може модуль переміщення бути малим?		
14. Чому в механіці більш важливим є вектор переміщення тіла, ніж пройдений ним шлях?		
15. З початкової точки з координатами $x_0 = -3$ м і $y_0 = 1$м тіло пройшло деякий шлях, проекція вектора переміщення на вісь X виявилася рівною 5,2 м, а на вісь Y – 3м. Знайдіть координати кінцевого положення тіла. Чому рівний модуль переміщення?		
16. Турист пройшов 5 км в південному напрямку, а потім ще 12 км в східному напрямку. Чому рівний модуль переміщення?		

Залишкові знання з інформатики

Метод координат і вектори в шкільному курсі	Відповідь	Кількість

інформатики		балів
1. Як інакше називають в інформатиці одновимірний масив елементів?		
2. Як інакше називають в інформатиці двовимірний масив елементів?		
3. Яка структура даних використовується в мовах програмування для опису точок, що задані своїми координатами у просторі?		
4. Чим відрізняються системи координат екрана монітора і декартова система координат на площині з шкільного курсу математики?		
5. Нехай точка з координатами (320,240) – початок відліку нової декартової системи координат, точка $M(x;y)$ задана своїми координатами у цій системі. Які координати має точка $M(x;y)$ у системі координат екрана?		
6. Нехай точка з координатами (320,240) – початок відліку нової декартової системи координат, точка $M(x;y)$ задана своїми координатами в системі координат екрана. Які координати має точка $M(x;y)$ у новій системі координат?		
7. Нехай точка з координатами (320,240) – початок відліку нової декартової системи координат, точка $M(x;y)$ задана своїми координатами в системі координат екрана. Які координати мають точки, симетричні точці $M(x;y)$ відносно осі OX та осі OY у новій системі координат?		
8. Нехай точка з координатами (320,240) – початок відліку нової декартової системи координат, точка $M(x;y)$ задана своїми координатами в системі координат екрана. Які координати мають точки, симетричні точці $M(x;y)$ відносно осі OX та осі OY у системі координат екрана?		
9. Як в Excel обчислити суму 2-х векторів?		
10. Як в Excel обчислити суму масиву чисел?		
11. Як в Excel обчислити середнє значення масиву чисел?		
12. У чому відмінність векторної графіки (vector graphics) від растрової графіки?		

13. У чому основні переваги векторної графіки?		
14. Як в Excel розв'язати нелінійне рівняння $f(x)=0$?		
15. Як в Excel побудувати графік функції $y=f(x)$ на $[a,b]$?		
16. Чи можете Ви в Excel розв'язати систему лінійних рівнянь?		

Залишкові знання з математики

Метод координат і вектори в ШКМ	Відповідь	Кількість балів
1. Дано точку $M(x_0;y_0)$, яка є серединою відрізка з кінцями у точках $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$. Знайдіть координати середини відрізка.		
2. Чому дорівнює відстань між точками $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$?		
3. Запишіть рівняння кола радіуса R із центром у точці $A(a;b)$.		
4. Будь-яка ______ в декартових координатах xy має рівняння $ax+by+c=0$, де a, b і c деякі числа, причому хоча б одне з чисел a і b відмінне від нуля.		
5. Опишіть, як змінюється графік лінійної функції $y=kx+b$: 1) при зміні значення b і при постійному k; 2) при зміні значення k і при постійному b.		
6. Дано чотири точки A(-9; 2), B(1; 6), C(7; 3) і D(-3;-1). З'ясуйте, чи буде чотирикутник ABCD паралелограмом.		
7. Дано дві точки A і B на площині. Опишіть геометричне місце точок M, для яких виконується рівність AM=2BM.		
8. Дано точки A(-5; 3) і B(5;-7). Як знайти відстань від початку координат до середини відрізка AB.		
9. Дані точки A(3; 5), B(-6;-2) і C(0;-6). З'ясувати, чи буде трикутник ABC рівнобедрений.		
10. З'ясувати, чи лежать точки A(-1;-2), B(2;-1) і C(8; 1) на одній прямій. Якщо так, то як з'ясувати, яка з них лежить між двома іншими?		

11. Дана точка M(2; 3). Вкажіть координати точки, яка симетрична точці M відносно: а) осі Ox; б) осі Oy; в) початку координат; г) точки K(3; 2); д) бісектриси I і III координатних кутів; е) бісектриси II і IV координатних кутів.		
12. Опишіть спосіб знаходження координат вершин трикутника, сторони якого лежать на прямих $2x+y-6=0$, $x-y+4=0$ і $y+1=0$.		
13. Як знайти відстань між паралельними прямими $y=-3x+5$ і $y=-3x-4$.		
14. Складіть рівняння кола з центром у точці M(3; 2), якщо пряма $y=2x+6$ є дотичною до цього кола.		
15. Яку лінію описує середина відрізка між двома пішоходами, що рівномірно йдуть по прямих дорогах.		
16. Як за допомогою скалярного добутку векторів довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці?		

Завдання для проведення діагностичної контрольної роботи

Варіант І

№ 1. Вкажіть паралельне перенесення, за допомогою якого з графіка функції $y=x^2-6x-7$, можна отримати графік функції $y=x^2-6x-16$.

№ 2. Дано вершини трикутника A(1; 1), B(4; 1), C(4; 5). Знайти косинус кута A.

№ 3. З'ясувати, при яких значеннях коефіцієнта p геометричне місце точок (множина точок площини xOy) $x^2+y^2+px+2010=0$ має спільні точки з віссю Oy.

№ 4. Запишіть рівняння прямої l_1, яка симетрична прямій l_0: $x+y=1$ відносно початку координат O(0; 0).

№ 5. (Конкурсна) Нехай в координатній площині xOy задано три точки A, B і C своїми координатами, які не лежать на одній прямій. Складіть алгоритм, який приймає координати довільної точки D(x; y), що лежать у площині трикутника, а при виході видає відповідь “ТАК”, якщо точка D належить межі або лежить усередині трикутника, і видає відповідь “НІ” у протилежному випадку.

Варіант ІІ

№ 1. Вкажіть паралельне перенесення, за допомогою якого з графіка функції $y=x^2+6x-16$, можна отримати графік функції $y=x^2-6x-7$.

№ 2. Дано вершини трикутника A (1; 1), B(4; 1), C (4; 5). Знайти косинус кута B.

№ 3. З'ясувати, при яких значеннях коефіцієнта p геометричне місце точок (множина точок площини xOy) $x^2+y^2+px+2010=0$ має спільні точки з віссю Ox.

№ 4. Запишіть рівняння прямої l_1 симетричної прямої l_0: $x+y=1$ відносно осі Oy.

№ 5. (Конкурсна) Нехай в координатній площині xOy задано три точки A, B і C своїми координатами, які не лежать на одній прямій. Складіть алгоритм, який приймає координати довільної точки D(x; y), що лежать у площині трикутника, а при виході видає відповідь “ТАК”, якщо точка D лежить на межі або усередині трикутника, і видає відповідь “НІ” у протилежному випадку.

ВИВЧЕННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ У КУРСІ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Чепорнюк І.Д.

старший викладач

Київська академія водного транспорту

імені гетьмана П.Конашевича-Сагайдачного

Обгрунтовано доцільність вивчення елементів теорії інформації в курсі теорії ймовірностей та математичної статистики студентами спеціальності „Програмування електронно-обчислювальної техніки та автоматизованих систем”, досліджено місце, зміст та методичні особливості вивчення основних понять теорії інформації.

Обоснована целесообразность изучения элементов теории информации в курсе теории вероятностей и математической статистики студентами специальности «Программирование электронно-вычислительной техники и автоматизированных систем», исследованы место, содержание иметодическите особенности изучения основных понятий теории информации.

The necessity of study of information theory in the course of probability theory and mathematical statistics students specializing in programming electronic computers and computer systems, space research, content and methodological features of the study of basic concepts of information theory.

Вступ

Теорія інформації – це наука, що вивчає кількісні закономірності, пов’язані з отриманням, передаванням, обробкою та зберіганням інформації. Ця теорія виникла з практичних задач теорії зв’язку і на даний час є необхідним математичним апаратом для вивчення всеможливих процесів керування.

Оскільки процесам керування інформації притаманні властивості випадковості, то при вивченні цих процесів широко використовуються ймовірнісні методи, причому не лише класичні, а й виникає потреба у створенні нових. Отже, теорія інформації може розглядатись з одного боку як окрема прикладна наука, яка використовує ймовірнісні методи, а з іншого – як розділ теорій ймовірностей.

На нашу думку, при навчанні курсу «Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси» студентів спеціальності „Програмування електронно-обчислювальної техніки та автоматизованих систем” (ПЗАС) доцільним є ознайомлення студентів з основними поняттями теорії інформації, що сприятиме формуванню математичної та інформаційної культури, підвищуватиме мотивацію навчання, створить відповідну теоретичну базу для вивчення ряду професійно-орієнтованих дисциплін.

Курс «Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси» є фундаментальним курсом при підготовці студентів освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр” спеціальності ПЗАС. Він включає наступні розділи: випадкові події, ймовірність випадкової події; випадкові величини; основні закони розподілу; граничні теореми; елементи математичної статистики; елементи дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізу; елементи теорії випадкових процесів.

1. Вивчення елементів теорії інформації (ймовірнісний підхід)

Однією з основних задач теорії інформації є відшукання найбільш економних методів кодування, що дозволяють передати задану інформацію за допомогою мінімальної кількості символів. Інша типова задача має наступне формулювання: в наявності є джерело інформації (передавач), який безперервно виробляє інформацію, і канал зв’язку, по якому ця інформація передається в іншу інстанцію (приймач). Якою має бути пропускна здатність каналу зв’язку, щоб канал „справлявся” зі своєю задачею?

Ці задачі можуть бути використані як проблемні питання для обґрунтування необхідності подальшого розгляду нових імовірнісних категорій, або як ілюстрація застосування імовірнісних методів до прикладних задач.

Введення елементів теорії інформації у курсі теорії ймовірностей можна здійснити на основі розкриття наступних питань:

1. Основні задачі теорії інформації.
2. Поняття ентропії та її властивості.
3. Ентропія складної системи. Теорема додавання ентропій.
4. Умовна ентропія.
5. Ентропія і інформація.
6. Задачі кодування повідомлень. Код Шеннона-Фено.

Щоб бути готовими до сприйняття нового матеріалу у студентів мають бути вже сформовані наступні поняття: ймовірність випадкової події, теорема множення ймовірностей незалежних подій, випадкові величини (неперервні, дискретні), числові характеристики випадкових величин, зокрема, математичне сподівання, двовимірні випадкові величини, умовні ймовірності.

Вивчення елементів теорії інформації можна розпочати з постановки задачі кодування повідомлень, реалізовуючи проблемний підхід у навчанні цього розділу. При цьому ввести поняття коду та кодування, елементарних символів, системи Х, яка кодується (наприклад букви алфавіту), системи У, за допомогою якої кодується (розглянути введені поняття на прикладі азбуки Морзе). Міркуючи логічно студенти самостійно можуть зробити висновок щодо співвідношення кількості можливих станів системи Х та У.

З циклу професійно-орієнтованих та математичних дисциплін, що вивчались раніше, студенти вже ознайомлені з різними формами передавання сигналів, з різними системами числення, зокрема, двійковою та десятковою, вміють переводити числа з однієї системи числення в іншу.

На цьому етапі необхідно запропонувати студентам наступну задачу: закодувати двійковим кодом літери алфавіту, так щоб кожній літері відповідала певна комбінація елементарних символів 0 та 1 і щоб середнє число цих символів на літеру тексту було мінімальним. І поставити додатково наступне завдання: після побудови коду дослідити чи є запропонований код дійсно оптимальним?

Для першого завдання студентам потрібні лише логічні міркування та знання двійкової системи числення.

Усім літерам алфавіту пропонується приписати номери від 0 до 31 (для російського алфавіту), плюс проміжок між словами „-” під номером 32. Далі перевести нумерацію з десяткової системи числення у двійкову.

В такому коді на зображення кожної букви відводиться рівно 5 символів.

Поставити проблемне запитання: чи не існує іншого коду, і чи є запропонований код оптимальним? Також для наштовхування на правильну відповідь запитати чи всі літери однаково часто зустрічаються у словах. Відповідь на дане питання має дати змогу студентам сформулювати гіпотезу, що можливо існує інший більш оптимальний код, який враховує частоти появ тих чи інших літер, і для літер, що зустрічаються частіше, можна було б знайти код, що витрачає менше число елементарних символів, а для літер, що зустрічаються рідше – більше число символів коду. Після чого запропонувати студентам таблицю частот літер.

Очевидно такий код буде економнішим, але щоб це обґрунтувати необхідно володіти таким поняття як інформація.

Введення поняття інформації базується на понятті ентропії як міри невизначеності стану деякої фізичної системи.

Розглянемо деяку систему X, яка може приймати скінченну множину станів: $x_1, x_2, ..., x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n$, де $p_i = P(X \sim x_i)$ - ймовірність того, що система X прийме стан x_i, X~x_i - подія {система знаходиться в стані x_i}. Очевидно $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Запишемо ці данні у вигляді таблиці :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Такий запис зрозумілий і вже знайомий студентам, оскільки є аналогічним до зображення ряду розподілу дискретної випадкової величини X. Відмінним є лише те, що для визначеності ступеня невизначеності системи зовсім не важливо самі значення, важлива лише їх кількість.

Ентропією системи називається сума добутків ймовірностей різних станів системи на логарифми цих ймовірностей, взята з протилежним знаком:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

Логарифм у формулі можна брати за довільною основою a >1.Якщо за основу обрано число 10, то говорять про «десяткові одиниці» ентропії. На практиці, як правило, використовують логарифми за основою 2 тоді вимірюється ентропія в «двійкових одиницях».

Вибір саме логарифмічної функції можна пояснити наступними міркуваннями. Розглянемо випробування, яке має k рівноможливих результатів. Зрозуміло, що коли $k = 1$, результат випробувань не є випадковим і жодної невизначеності немає. Зі збільшенням k невизначеність зростає. Отже, числова характеристика невизначеності $f(k)$ має бути $f(1) = 0$ 0 і зростати зі збільшенням k. Розглянемо два незалежні випробування α і β. Нехай випробування α має *m*, а випробування β — *n* результатів. Добуток подій αβ матиме *mn* результатів. Невизначеність випробування αβ буде більшою і від α, і від β. Природно припустити, що ступінь невизначеності випробування αβ дорівнює сумі невизначеностей, які характеризують випробування α і β. Звідси дістаємо таку умову: $f(mn) = f(m) + f(n)$. Найпростішою функцією, що має вказану властивість є логарифмічна функція.

Приклад. Визначити ентропію фізичної системи, що складається з двох стрільців, які стріляють по мішені. В результаті змагання система може опинитись в одному з двох можливих станів:

1. обоє стрільців влучили;
2. перший влучив, другий не влучив;
3. другий влучив, перший не влучив;
4. обидва не влучили.

Ймовірності цих станів відповідно дорівнюють 0,2; 0,3; 0,4; та 0,1.

Розв'язання:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

За формулою ентропії маємо:

$$H(X) = -p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - p_3 \log p_3 - p_4 \log p_4$$

$$H(X) = -0{,}2\log 0{,}2 - 0{,}3\log 0{,}3 - 0{,}4\log 0{,}4 - 0{,}1\log 0{,}1$$

$$H(X) = 0{,}4644 + 0{,}5211 + 0{,}5288 + 0{,}322 \approx 1{,}85 \text{(дв. од.)}$$

Після введення означення необхідно обґрунтувати наступні властивості ентропії:

- ентропія обертається в нуль, коли один зі станів системи достовірний, а інші – неможливі;
- при заданій кількості станів ентропія обертається в максимум, якщо ці стани рівноймовірні;
- при збільшенні кількості станів значення ентропії зростає;
- ентропія також володіє властивістю адитивності, тобто якщо декілька незалежних систем об'єднати в одну, їх ентропії додаються.

Ознайомившись з поняттям ентропії можна ввести поняття інформації та її кількості.

Перед введенням поняття «кількості інформації» студенти вже ознайомлені з поняття ентропії як міри невизначеності стану деякої фізичної системи. Очевидним є припущення, що кількість інформації вимірюється зменшенням ентропії тієї системи, для уточнення стану якої призначені відомості. Оскільки, при отриманні відомостей невизначеність системи може бути зменшена, й чим більший об'єм отриманих відомостей, чим вони є змістовнішими, тим більше інформації, тим менша невизначеність системи.

Розглянемо систему X, до отримання відомостей про яку ентропія системи становила $H(X)$. Після отримання відомостей стан системи повністю визначився, тобто ентропія стала рівна нулю. Нехай I_x - інформація, що отримується в результаті з'ясування станів системи X. Вона дорівнює зменшенню ентропії, тобто *кількість інформації, яку ми набуваємо при повному з'ясуванні стану деякої фізичної системи, дорівнює ентропії цієї системи.*

$$I_x = H(X)$$

$$I_x = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

Інформація I_x є усередненим за всіма станами системи логарифму ймовірностей стану з протилежним знаком.

Кожен доданок $-\log p_i$ розглядається як частинна інформація, що отримується від окремого повідомлення, яке полягає у тому, що система X знаходиться у стані x_i. Позначимо таку інформацію I_{x_i}:

$$I_{x_i} = -\log p_i$$

Тоді інформація I_x подається як середня (або повна) інформація, що отримується від всіх можливих окремих повідомлень з врахуванням їх ймовірностей.

Колмогоров А.Н. розглядав три підходи до введення поняття інформації: комбінаторний; ймовірнісний; алгоритмічний.

Комбінаторний підхід має певну логічну незалежність від будь-яких ймовірнісних припущень, проте надання змінним характеру «випадкових змінних», що володіють певним розподілом ймовірностей, надає можливість отримати більш багатшу систему понять та співвідношень. Тому при викладенні елементів теорії інформації поняття «кількості інформації» краще вводити, дотримуючись ймовірнісного підходу.

Проте у ймовірнісному підході має місце один парадокс – при комбінаторному підході величина I_x завжди невід'ємна, що є природним при звичайному уявленні про «кількість інформації», при ймовірнісному підході ця величина може бути і від'ємна. Справжньою мірою «кількості інформації» є усереднена величина I_x.

Приклад. Визначити частинну інформацію, що міститься у повідомленні особи А, яку вперше зустріли: «сьогодні мій день народження».

Розв'язання. Всі дні у році можуть бути з однаковими ймовірностями днями народження особи А. Ймовірність отриманого повідомлення $p = \frac{1}{365}$.

Частинна інформація від даного повідомлення $i = -\log \frac{1}{365} \approx 8{,}51$

Оскільки на практиці часто доводиться визначати ентропію для складної системи , що отримана шляхом об'єднання двох або більше простих систем, то наступною темою розгляду понять теорії інформації є «Ентропія складної системи. Умовна ентропія».

Зображення об'єднання двох систем з їх ймовірностями перебування в певному стані є аналогічними до двовимірних випадкових величин, що вивчались студентами в основному курсі теорії ймовірностей. Визначення ентропії для таких систем має певну аналогію з обчисленням числових характеристик умовних законів розподілу.

2. Альтернативні підходи до визначення кількості інформації

Ймовірнісна (статистична) теорія інформації пов'язує поняття інформації зі зниженням невизначеності (ентропії) стану об'єкта. Підходи й математичний апарат для кількісного визначення інформації та ентропії, що їх розробили К. Шенон та Н. Вінер, виявилися корисними в технічних застосуваннях (теорії зв'язку) — оптимізації кодування, передавання, зберігання інформації тощо. Їх праці з теорії інформації сприяли розумінню того, що не існує абсолютної інформації про об'єкт, визначення інформації залежить від вибраної моделі об'єкта. Оскільки залежно від мети дослідження вибирають різні моделі з різним описом станів об'єкта, то й з'ясування інформації про об'єкт залежить від мети та завдань дослідника. Адже в одних і тих самих даних міститься різна кількість інформації для різних завдань управління. Однак статистична теорія інформації не набула поширення для задач обробки інформації, призначеної для управління економічними об'єктами. Це пояснюється тим, що її підходи не враховують специфіки економічної інформації (зокрема, відкидаються змістовні взаємозв'язки, ігнорується зміст та корисність інформації для досягнення мети — цінність, доцільність). Наприклад, кількість інформації на символ є лише усередненою мірою невизначеності появи цього символа. Тому загальна кількість інформації, що міститься в деякому повідомленні ($I = -\Sigma p_i \log p_i$), ніяк не пов'язується зі змістовністю і корисністю цієї інформації для одержувача. Інформативність повідомлень для одержувача залежить від його сфери інтересів, роду занять, мети дослідження тощо. Отже, необхідно враховувати різні аспекти оцінки кількості інформації: не лише за формально-структурними ознаками, а й за змістом та практичною цінністю для одержувача.

Однією з найбільш важливих властивостей інформації є її корисність. Але бути корисним може тільки те, що має сенс для даної системи. Реальні (зокрема, економічні) системи перебувають у процесі постійного перетворення, причому будь-яке елементарне перетворення в системі є подією. Кожна подія супроводжується повідомленням, яке є інформаційним еквівалентом події. З огляду на сказане інформація — це повідомлення, яке має сенс для даної системи. Але значення будуть мати тільки ті повідомлення, які обмежують різноманітність поводження досліджуваної системи в напрямку її пристосування до середовища.

Наведемо деякі інші міркування та підходи до визначення кількості інформації.

Семантичний підхід. Один із методів обчислення кількості семантичної інформації полягає в тому, щоб визначати її через так звану логічну імовірність, що являє собою ступінь підтвердження тієї чи іншої гіпотези. При цьому кількість семантичної інформації, що міститься в повідомленні, зростає зі зменшенням ступеня підтвердження гіпотези. Отже, якщо логічна ймовірність дорівнює одиниці, тобто якщо вся гіпотеза побудована на відомих даних та цілком підтверджується повідомленням, то таке повідомлення не приносить адресатові нічого нового і семантична інформація дорівнює нулю. (Наприклад, повідомлення «Дніпро впадає в Чорне море».) І навпаки, зі зменшенням ступеня підтвердження гіпотези (чи, інакше кажучи, апріорного знання) кількість семантичної інформації, що її доставляє повідомлення, зростає.

З описаним підходом до визначення інформаційної змістовності повідомлень стикається запропонована Ю. Шрейдером ідея, що ґрунтується на врахуванні «запису знань» (тезауруса) одержувача. Тезаурусом (грец. «скарб») називають словник, в якому наведено не тільки значення окремих слів, а й змістовні зв'язки між ними (наприклад, тлумачний словник Даля). У розглядуваному контексті під тезаурусом розуміють деякий узагальнений довідник, що визначає рівень знань одержувача про повідомлення. При цьому повідомлення, що містять нову для одержувача інформацію, змінюють, збагачують його тезаурус. Якщо повідомлення не вносить нічого нового в тезаурус одержувача, то природно вважати, що змістовна семантична інформація дорівнює нулю. Якщо одне з двох повідомлень змінює тезаурус незначно, а друге вносить до нього істотні зміни, то природно вважати, що друге повідомлення є змістовнішим, несе в собі значно більший обсяг семантичної інформації. При цьому під зміною тезауруса слід розуміти не тільки появу нових понять, а й встановлення нових зв'язків між ними, ліквідацію застарілих понять чи зв'язків тощо.

Прагматичний підхід. Визначаючи інформацію, ми зазначали, що однією з властивостей інформації є використання її у процесах управління. А коли інформація використовується для управління, то її, природно, належить оцінювати з позицій корисності, цінності, доцільності для досягнення поставленої мети управління. Тому кожне одержуване ланками управління повідомлення важливо оцінювати не з погляду пізнавальних характеристик, а з прагматичного, тобто з боку корисності чи цінності для виконання функцій управління.

Виходячи з таких міркувань, А. Харкевич запропонував міру цінності інформації Іц визначати як зміну ймовірності досягнення мети в разі отримання цієї інформації:

$$I_{ц} = \log p_1 - \log p_0 = \log \frac{p_1}{p_0},$$

де p_0 — початкова (до отримання відомостей) імовірність досягнення мети;

p_1 — імовірність досягнення мети після отримання інформації.

При цьому можливі три різні випадки:

1. Отримана інформація не змінює ймовірності, тобто $p_1 = p_0 \Rightarrow$ Iц = 0. Таку інформацію називають порожньою.
2. Якщо імовірність досягнення мети збільшується: $p_1 > p_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Iц > 0, то прагматична інформація зросла.

3. Якщо ймовірність зменшилася: $p_1 < p_0 \;\Rightarrow\; I\text{ц} < 0$, це означає, що отримана інформація є негативною, тобто дезінформацією.

Зауважимо, що прагматичні та семантичні оцінки важко розмежувати, а в деяких випадках вони збігаються.

Висновки

Вивчення елементів теорії інформації в курсі «Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси» студентів спеціальності „Програмування електронно-обчислювальної техніки та автоматизованих систем" є природним і доцільним, це дозволить:

- підвищити рівень математичної та інформаційної культури студентів;
- покращити мотивацію навчання;
- активізувати пізнавальну діяльність студентів;
- реалізувати міжпредметні зв'язки комп'ютерно-орієнтовних та математичних дисциплін;
- розв'язати ряд прикладних та професійно-орієнтованих задач;
- урізноманітнити форми проведення занять (можна ввести ряд лабораторних робіт з написанням програми й математичним обґрунтуванням);
- ефективніше організувати самостійну роботу студентів.

Список використаної літератури

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности. — М.: Физматгиз, 1961.
2. Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация. — М.: Гостехиздат, 1960.
3. Хэмминг Р.В. Теория кодирования и теория информации. — М.: Радио и связь, 1983.
4. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
5. Берлекэмп Э. Алгебраическая теория кодирования. М.: Мир, 1971.
6. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. — М.: Физ.-мат.лит., 1980.
7. Галлагер Р. Теория информации и надежная связь. — М.: Советское радио, 1974.
8. Гоппа В.Д. Введение в алгебраическую теорию информации. — М.: Наука, 1995.
9. Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987.

ПСИХОЛОГО-ДИДАКТИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ФОРМУВАННЯ І РОЗВИТКУ В СТАРШОКЛАСНИКІВ ГРАФІЧНИХ ВМІНЬ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Швець Л.В.,
аспірант,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

У статті розкрито психічні й фізіологічні особливості розвитку учнів віком 16 – 17 років, теорії научіння, на основі яких будуються технології розвитку вмінь старшокласників будувати зображення просторових фігур, а також, особливості сприйняття учнями просторових об'єктів та їх зображень.

В статье раскрываются психические и физиологические особенности развития учеников 16 – 17 лет, теории научения, на основе которых создаются технологии развития умений старшеклассников строить пространственные фигуры, а также, особенности восприятия учениками пространственных объектов и их изображений.

Psychological and physiological features of the development of schoolchildren in the age of 16-17 years, theories of teaching, on the base of which technologies of the development schoolchildren skills to form images of spatial figures, also features of perception of spatial figures and their depiction are opened.

Розвиток вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації відбувається під час вивчення шкільного курсу стереометрії в 10 – 11 класі. Такий розвиток потребує врахування певних психолого-педагогічних передумов, зокрема: особливостей психічного й фізичного розвитку учнів віком від 16 до 17 років; теорій научіння та відповідних їм моделей навчання; особливостей формування в учнів поняття про просторові об'єкти та вміння їх зображати.

У різних країнах тривалість підліткового віку коливається в межах від 14 до 17 років, залежно від соціального становища молодої людини і тривалості її освіти. Така невизначеність пов'язана з встановленням «своїх» меж, а саме, початок підліткового віку пов'язують з появою перших статевих ознак, а закінчення – з входженням молодої людини в світ дорослих. Однак загальноприйнятих критеріїв досягнення дорослого статусу не існує.

Питання виокремлення юнацького віку постало в зв'язку з ускладненням та тривалістю періоду підготовки до дорослого життя. З точки зору психології, юність завершує самовизначеність індивіда та його інтеграцію у спільноту дорослих людей. В цей період особистість набуває самовизначення за Д.Б.Ельконіним, життєвого плану за І.С.Коном, інтелектуального дозрівання за Ж.Піаже, Г.С.Костюком, пошук сенсу життя за В.Франклом, К.Обуховським, самореалізації та індивідуального розвитку за А.Маслоу, прагнення до успіху в діяльності за А.В.Мудриком тощо. Працюючи над проблемою вікової періодизації психічного розвитку людини Л.С.Виготський виділяє пубертатний (ранній юнацький) вік від 14 до 18 років, з кризою 17 років. Переважна більшість психологів схильні вважати початком юності 16 – 17 років, кінцем цього періоду 17 – 25 років.

Вважатимемо, що учні віком від 16 до 17 років відносяться до періоду ранньої юності. Розглянемо детальніше психологічні й фізіологічні особливості розвитку індивіда в цей період.

Ранній юнацький вік характеризується якісними змінами всіх сторін психічної діяльності, що є основою становлення особистості, зокрема, пізнавальної сфери на основі розвитку вищих психічних функцій. Порівняно з підлітковим періодом у юнацькому віці помітний значний підйом інтересу до навчання, оскільки учіння набуває життєвого змісту, пов'язаного з майбутнім. Складний навчальний матеріал вимагає від старшокласників досконалішої репродуктивної уяви, але, водночас, у них розвивається продуктивна уява, що виявляється у різноманітних видах творчої діяльності. В ці роки відбувається й удосконалення пам'яті, за рахунок збільшення її об'єму та зміною способів запам'ятовування. Поряд з мимовільним запам'ятовуванням у старшокласників спостерігається зростання довільного та продуктивного логічного запам'ятовування. Відбувається спеціалізація пам'яті, яка пов'язана з провідними інтересами старшокласників та їх подальшим вибором майбутньої професії.

Формальне мислення призводить до появи у суб'єкта пізнання здатності до широких узагальнень, формування гіпотез та їх логічного обґрунтування й доведень. У зв'язку з цим у старшокласників удосконалюється процес оволодіння складними інтелектуальними операціями аналізу й синтезу, теоретичного узагальнення й абстрагування, аргументування і доведення. Мислення стає дедуктивно-гіпотетичним завдяки перетворенню конкретних мисленнєвих операцій на формальні, які включаються в єдину цілісну систему [1].

У період юнацького віку відбувається важливий момент переоцінки учнем його ролі в навчальному процесі. Якщо підлітковий вік є початком внутрішнього переходу учня від об'єкта навчання, яким він був і в молодшому шкільному віці, до суб'єкта цього процесу, то в юнацькому віці учень стає дійсно суб'єктом своєї діяльності під час навчально-виховного процесу. Цей перехід якісно змінює суть і цілі навчання учня.

Щодо фізичного розвитку особистості в період ранньої юності, то слід зазначити, що темп росту поступово уповільнюється й стабілізується, завершується формування тканин органів й організму в цілому, зокрема, завершується дозрівання кори головного мозку, проходять процеси внутрішньоклітинного ускладнення та розвитку відповідних функцій, встановлюються характерні для дорослих корково-підкіркові взаємовідношення, складаються основні властивості нервових процесів. Набуття знань, отримання нової інформації, збагачення асоціаціями призводить до посиленого розвитку зв'язків між окремими нервовими клітинами та відділами головного мозку. Завдяки пластичності мозку в юнацькому віці нервові функції розвиваються і ускладнюються під впливом оточуючого середовища, зокрема, під час навчання. Завершується формування механізмів довільної уваги й вибіркового сприйняття за рахунок дозрівання лобних областей. Вищеназвані фізичні зміни створюють в юнаків широкі можливості для навчання та розвитку розумової діяльності [1].

Розвиток вмінь учнів будувати зображення просторових фігур відбувається в ході навчально-пізнавальної діяльності. Сам механізм формування таких вмінь, з різних точок зору пояснюють теорії научіння.

Беручи за основу поняття асоціації, що є зв’язком між двома чи більшою кількістю явищ (відчуттями, рухами, уявленнями, ідеями), першою була сформована ***асоціативна теорія научіння***. Сутність якої полягає в тому, що будь-яке пізнання починається з відчуття і зводиться до комбінації відчуттів, сприймання утворюється зі з’єднань і злиття відчуттів, через це зі сприйняттів утворюються уявлення, а з останніх – поняття.

Спираючись на вчення І.П.Павлова, про умовні й безумовні рефлекси, психологи та фізіологи розробили різні варіанти ***умовно-рефлекторної теорії научіння***. Суть якої в тому, що індивід засвоює суттєві властивості й явища, корисні дії та форми поведінки, які спираються на ці властивості. Головною ідеєю моделі навчання, яка базується на такій концепції, є виявлення учнями властивостей і законів реальності на основі власного досвіду, досліджень, спроб і помилок, що свідчить про важливість пізнавальної діяльності учнів, зв’язку навчання з потребами учнів, активізації їх пізнавальної, дослідницької і практичної діяльності.

Враховуючи нові вимоги до навчання, з’явилася ***знакова концепція научіння***, основою якої є змістові зв’язки, тобто, знакові, семіотичні зв’язки. Сутність такого научіння в тому, що відбувається формування в учнів понять та їх систем, відображення істотних відношень реальності за допомогою виявлення та використання цих відношень, відображення їх у поняттях і закріплення в словах через утворення знакових відношень між поняттями та відповідними термінами. Введення в процес навчання слова поряд із спостереженням і сприйняттям є перевагою знакової концепції научіння [4].

Характерним для розглянутих трьох концепцій є відображально-пізнавальний спосіб психічної діяльності. Поряд з ними інтенсивно розроблялась ***операціональна концепція научіння***, основою якої є орієнтовно-операціональна структура психічної діяльності індивіда, що уможливлює розв’язання проблеми зв’язку знань і дій. Запропонована П.Я.Гальперіним і розвинута Н.Ф.Тализіною та їхніми учнями теорія поетапного формування розумових дій є варіантом операціональної концепції. Суть теорії – управління психічною діяльністю учня на основі навчання розумових дій і пізнавальних структур.

Для повноцінного формування будь-якого нового знання і вміння П.Я.Гальперін пропонує таку послідовність етапів: створення мотивації; роз’яснення або виділення схеми орієнтовної основи дій; формування дій в матеріальній або матеріалізованій формі; мовлення без опори на матеріально-матеріалізовані засоби; формування дії у внутрішній мові (подумки); перехід дії у внутрішню мову, а внутрішньої мови – у думку [4, с. 20].

Реформування освітньої системи, а саме, підвищення інтелектуального потенціалу держави й розвиток творчої особистості, здійснюється розробленими психологічними теоріями научіння, відповідними дидактичними та психологічними принципами і технологіями навчання, розробками методичних систем. Потреби науково-технічного прогресу, гуманізація та демократизація соціуму, економічні кризи спонукали до повороту освіти в сторону особистості. Поряд з ***особистісно-орієнтовним навчанням*** важливе місце посідає ***диференційоване та проблемно-пошукове навчання***.

У навчанні математики формування понять відбувається в процесі ***аналітико-синтетичної діяльності учня***. За допомогою аналізу учень вичленовує окремі спільні властивості предметів, а за допомогою синтезу об’єднує предмети за спільними суттєвими властивостями. Структура пізнавальної діяльності засвоєння математичних понять містить як загальні, так і специфічні розумові дії. Загальні дії установлюють необхідні і достатні властивості понять у конкретних об'єктів і забезпечують формування узагальненого поняття та системи понять у структурі предмета. Специфічні розумові дії здійснюють перехід від факту належності об'єкта до певного поняття, до системи властивостей, які притаманні даному об'єкту.

Суттєвою передумовою розвитку плідної ***уяви*** є розширення і збагачення досвіду учня. Л.М.Фрідман зазначає, що дитяча уява спочатку формується завдяки грі, а також під час ліплення, малювання тощо. Побудова системи знань будь-якого наукового предмету передбачає розчленування того, що сприймається нероздільно, але істотно між собою непов'язаного, виділення однорідних властивостей, істотно між собою пов'язаних. Це призводить до формування в учнів ***мисленнєвої діяльності***, властивої науковому мисленню [5].

Особливістю ***просторового мислення*** є використання певної системи орієнтації в просторі. Серед можливих систем найбільш природною вважається система орієнтації за допомогою тіла, що лежить в основі практичної орієнтації серед предметів і явищ. Дитина сприймає предмети в просторі з позиції вертикального положення власного тіла і саме ця позиція є точкою відліку для створення різних просторових образів. Під час переходу до геометричного простору учні зазнають труднощів і виникає потреба відійти від звичної схеми тіла до абстракції. Визначаючи просторове розміщення геометричних об'єктів за точку відліку приймається не спостерігач, а будь-який, наперед обраний елемент, по відношенню до якого в просторі розміщуються всі інші елементи. Тому перехід від чіткої системи відліку до заданої чи довільно вибраної істотно ускладнює формування просторових образів у школярів.

На думку І.С.Якиманської, змістом просторового мислення є оперування просторовими образами в наявному чи уявному просторі за допомогою різних графічних зображень через їх перекодування. Просторові властивості і відношення невід'ємні від конкретних предметів – їх носіїв. Таке відображення властиве саме геометричним об'єктам, що виражають своєрідну абстракцію і слугують основним матеріалом на основі якого створюються просторові образи і відбувається оперування ними [6].

У своїх працях Д.Н.Богоявленський та Н.А.Менчинська зазначають, що ***наочність*** сприяє утворенню зрозумілих і точних образів сприйняття й уявлення. Саме вона полегшує учням перехід від конкретних предметів до абстрактних понять. Для ефективності використання наочності важливим є врахування функцій, які вона повинна виконувати: розуміння нових понять; розв'язування задач на обчислення; розв'язування задач на побудову; проведення практичних робіт на місцевості. Важливо, щоб учні самостійно осмислювали доцільність наочності на кожному етапі розумової діяльності, це сприятиме усвідомленості сприйняття, підвищенню пізнавального інтересу. Варто зазначити, що використання наочності не повинно носити розважальний характер, коли учні не осмислюють і не створюють уявний образ самостійно, а використовують нав'язану готову модель. Одноманітне, обмежене використання наочності гальмує виділення й узагальнення суттєвих властивостей предметів, фіксує увагу учнів на випадкових, несуттєвих властивостях. Тому доречно під час вивчення початкових геометричних понять у систематичному курсі геометрії використовувати рухомі моделі.

Я.Й.Груденов [2] відмічає, що на перших уроках стереометрії в учнів виникає проблема зі сприйняттям просторових зображень через погано розвинену просторову уяву, і задля полегшення навчання слід застосовувати методику використання ***моделей***. Суть методики в наступному: кожен учень повинен мати модель, якою він оперує під час розв'язування задач чи доведення теорем; учитель вчить працювати з моделлю, демонструючи доцільність її використання; задля швидшого розвитку просторової уяви та уявлення просторової фігури за рисунком учні розв'язують ряд задач використовуючи як рисунок, так і модель; пояснення розв'язання до задачі з поетапними коментарями на моделі формує в учнів значимість моделі не як іграшки, а як необхідного робочого інструменту. Психолог Б.Г.Ананьєв вважає, що взаємозв'язок мікрорухів руки та ока, який здійснюється під час самостійної роботи кожного учня з моделями, дуже важливий для формування просторових уявлень.

Проблема сприйняття зображення об'ємних фігур знайшла своє відображення в дослідженнях Г.І.Лернер. В них автор показує, що сприйняття таких зображень може бути усвідомлене лише, якщо його розглядати як цілеспрямовану перцептивну діяльність.

Психологічні дослідження І.С.Якиманської та її співавторів показали, що дошкільнята та діти молодшого шкільного віку легко засвоюють спосіб утворення рисунка в трьох площинах методом проекції. Вони, ніби подумки, повертають до себе предмети з різних боків, обираючи за базову ту грань рисунка, що більш вдало передає конструкцію предмета. На їхню думку, саме такий вік є найбільш сензитивним для засвоєння методу проекціювання (центрального, паралельного, ортогонального), для формування проективних уявлень. Також дослідження показали, що на початок вивчення курсу геометрії, в учнів краще розвинуті просторові (тривимірні) уявлення чим площинні (двовимірні). Однак, за рахунок вивчення окремо курсу планіметрії, вони втрачають набуті раніше вміння оперувати просторовими зображеннями.

Поділ курсу геометрії на планіметрію та стереометрію з фактично поодинокими вкрапленнями просторових зображень на площині приводить до гальмування просторової уяви та її спотворення. Дослідження Р.Сперрі та його послідовників показали, що причиною такого уповільнення є функціональна відмінність півкуль головного мозку у сприйнятті образів реального світу та формуванні мислення. Було доведено: ліва півкуля головного мозку сприймає будь-який матеріал так, що створюється однозначний контекст, який розуміється всіма однаково і необхідний для успішного спілкування між людьми; права півкуля забезпечує сприйняття багатогранної реальності, орієнтування в багатовимірному просторі, зокрема, в реальному тривимірному. Тому розвиток абстрактно-логічного пізнання без просторово-образного мислення стримує інтелектуальне та творче становлення особистості.

Під час оперування просторовими образами в процесі переходу від площини до простору і навпаки здійснюється процес проекціювання. Учні оволодівають цим поняттям спочатку тільки емпірично, інтуїтивно, а вже пізніше наповнюють свої знання науковим змістом. Запізнє теоретичне обґрунтування процесу проекціювання гальмує проекційні уявлення учнів. Вони не розуміють, що будь-яка плоска фігура є своєрідною проекцією просторової фігури. До того ж постійне оперування площинними зображеннями призводить до жорсткого закріплення фіксованої позиції спостерігання.

Динаміз сприйняття методу проекцій, властивий дітям 13 – 14 років, істотно затримується під час навчання, в наслідок використання учнями готових геометричних рисунків, які до того ж є, як правило, зображення двовимірні та відображають лише фронтальне положення на площині. Знайомлячись з окремими видами зображень, учні, як правило, запам'ятовують особливості даного виду зображень і не порівнюють їх з іншими. Саме це є причиною ускладнення оволодіння учнями таких предметів як креслення та стереометрія, де відбувається перехід від двовимірних до тривимірних зображень. [6].

Не менш важливим є врахування негативного впливу попереднього досвіду школярів, набутого при засвоєнні математичних знань на попередніх етапах навчання. Так, зокрема, вивчаючи многокутники в курсі планіметрії, в учнів чітко формуються правила їх зображення, що робить обмеженим бачення цих же фігур у просторі під час зображення їх на площині. Психологи відзначають, що причиною виникнення таких помилок є пригнічення більш слабких асоціацій сильними та звичними асоціаціями. І як наслідок, відбувається необґрунтоване перенесення вивчених раніше правил, закономірностей у нові умови, неправомірне використання аналогій, «доуявлення» в рисунках тих образів і властивостей, яких він не має [4].

Висвітлення психолого-методичних передумов формування і розвитку вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації, приводить до певних висновків. Так, аналіз вікової періодизації розвитку індивіда показує, що старшокласники (учні віком від 16 до 17 років) відносяться до періоду ранньої юності. Аналіз психічних та фізичних особливостей розвитку юнаків показує, що у них в процесі сповільнення й завершення процесів формування кори головного мозку та організму, в цілому, відбувається вдосконалення розумових дій, які через аналітико-синтетичну діяльність формують науковий світогляд.

Окремо кожна з теорій научіння не в змозі пояснити всі тонкощі розвитку вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації в силу складності й багатогранності начального процесу. Саме, доречне використання кожної з них на певному етапі формування понять та вмінь дозволяє створити ефективну технологію виконання таких побудов. Зокрема, на асоціативну теорію доцільно спиратися під час формування нових уявлень і понять (зображення плоских многокутників в просторі, многогранників, тіл обертання тощо); умовно-рефлекторну концепцію варто застосовувати в процесі багаторазових побудов просторових зображень, розв'язування задач для вдосконалення вмінь і навичок; знакову концепцію научіння слід використовувати під час побудови складних зображень за допомогою простіших; операціональну концепцію доцільно застосовувати для формування правил-орієнтирів основних побудов (трикутників, чотирикутників, кола та їх комбінацій тощо).

Дослідження психологів та методистів, присвячені розвитку вмінь учнів виконувати зображення просторових фігур, показали відсутність певної технології, за допомогою якої відбувалося б навчання учнів виконувати такі побудови. Проте, їх аналіз дозволяє зрозуміти специфіку процесу формування в учнів просторового мислення і, як наслідок, просторової уяви, яка, власне, є основою діяльності стосовно побудови зображень просторових фігур та їх комбінацій.

Таким чином, аналіз психолого-дидактичних основ формування в учнів графічних вмінь під час вивчення стереометрії вказує на те, що існують всі передумови для формування та розвитку вмінь старшокласників зображати стереометричні фігури та їх комбінації.

Список використаної літератури

1. Вікова та педагогічна психологія: Навч. посіб./ О.В.Скрипченко, Л.В.Долинська, З.В.Огороднійчук та ін. 2-ге вид. – К.: Каравела, 2007. – 344 с.

2. Груденов Я.И. Психолого-педагогические основы методики обучения математике. – М.: Педагогика, 1987. – 160 с.: ил.

3. Кон И.С. Психология юношеского возраста. – М.: Просвещение, 1979. – 176 с.

4. Слєпкань Зінаїда. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.

5. Фридман Л.М., Кулагина И.Ю. Психологический справочник учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 288 с.: ил. – (Психол. наука – школе).

6. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. – Науч.-исслед. ин-т общей и пед. психологии Акад. пед. наук СССР. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.

РІЗНІ АСПЕКТИ ТЛУМАЧЕННЯ ПОНЯТТЯ «ЯКІСТЬ ОСВІТИ»

Школьний О.В.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Поняття «якість освіти» може сприйматися з різних позицій, в залежності від специфіки ситуації, в якій воно розглядається. У роботі вивчаються особливості тлумачення цього поняття у різних сферах освітньої діяльності.

Понятие «качество образования» может восприниматься с различных позиций, в зависимости от ситуации, в которой оно рассматривается. В работе изучаются особенности толкования этого понятия в различных сферах образовательной деятельности.

The notion «education quality» can be interpreted from different positions, depending on the specific situation in which it considered. In this paper we study the interpretation features of this notion in different fields of educational activities.

Вступ. Сучасний освітній процес є багатогранним і складним явищем. Тому, коли постає проблема його характеристики, часто виникають певні труднощі, пов'язані з відмінностями у тлумаченнях різних аспектів розуміння суті освітнього процесу. Особливо яскраво це проявляється у випадку, коли мова йде про характеристику *якості освіти*, зокрема про методи встановлення наявності, оцінки та вимірювання цієї якості.

На сьогодні проблеми оцінювання якості освіти (у тому числі – математичної) в Україні є надзвичайно актуальними. Про це промовисто свідчить, зокрема, створення в структурі МОН України Українського центру оцінювання якості освіти (далі – УЦОЯО). Однак, слід зауважити, що здебільшого працівники цього центру займаються оцінюванням лише одного з багатьох аспектів поняття «якість освіти», а саме – оцінюванням *якості учнівських результатів* освітньої діяльності з різних дисциплін. Тому назва центру, на мою думку, потребує уточнення.

Дійсно, останнім часом доволі часто виникає плутанина, пов'язана з формальним перенесенням і ототожненням оцінки якості учнівських результатів з одного боку та оцінки якості організації навчального процесу в окремих школах чи регіонах, оцінки якості кваліфікації вчителів-предметників, оцінки якості наявних програм та підручників тощо – з іншого боку. Основною причиною цієї плутанини, на моє переконання, є повне або часткове нерозуміння принципових відмінностей у тлумаченні різних аспектів поняття «якість освіти» як у теоретичній площині, так і в площині її оцінки та методів вимірювання.

Зрозуміло, що різні грані поняття «якість освіти» між собою пов'язані чи то безпосередньо, чи то опосередковано. Наприклад, практично немає сумнівів у тому, що за наявності якісних програм і підручників, кваліфікованих учителів та чудовій організації навчального процесу в закладі освіти навчальні результати учнів повинні також бути високої якості. Однак, на жаль, так буває далеко не завжди, оскільки на вихідні учнівські результати, які найпростіше виміряти (наприклад, за допомогою тестів ЗНО, упроваджених нині в нашій державі) часто впливають, зокрема, психологічні фактори чи форс-мажорні оставини.

Ці фактори та обставини іноді можуть суттєво спотворити результати перевірки якості набутих учнями знань і зробити результати того самого ЗНО не повністю адекватними як до реальних знань конкретного учня, так і до якості умов навчання, в яких перебував цей учень. Іншими словами, результати вимірювання якості результатів освітньої діяльності хоч і певним чином корелюють із якістю викладання предмету та організації навчального процесу, але ця залежність не є жорсткою і визначальною. До речі, на цьому постійно наголошують та акцентують увагу працівники УЦОЯО у своїх інформаційних матеріалах, але, на жаль, доволі часто подібні заклики та акценти залишаються без належної уваги не лише працівників мас-медіа, а й керівників освітніх структур у різних регіонах країни.

Ця стаття є першою із серії статей, які я планую присвятити висвітленню проблем чіткого розмежування в тлумаченні різних аспектів поняття «якість освіти». При цьому особливий акцент буде зроблено на проблемах саме математичної освіти в Україні. До кожного з цих аспектів будуть наведені як теоретико-методологічні міркування, так і практичні підходи, що стосуються оцінки та вимірювання відповідної грані якості математичної освіти. Однак, перш ніж розглядати специфічні предметні особливості якості освіти, що стосуються математики, на мю думку, слід зупинитися на загальних підходах до розгляду поняття «якість освіти».

Слід зауважити, що якість освіти в усій її багатогранності можна розглядати у двох площинах: *теоретико–методологічній* та *практичній*. У першому випадку дослідники ведуть пошук концептуальних засад визначення й оцінювання якості освіти як категорії, що визначає досконаліcть функціонування освітніх систем. Що таке якість в освіті та які показники дають змогу її оцінити? Як це можна зробити та які засоби, методи доцільно обрати? Що треба зробити, щоб одержані результати можна було порівняти і на їх підставі зробити об’єктивні висновки? Це той далеко неповний перелік основних запитань, який окреслює теоретичні основи дослідження цього феномену.

У практичній площині стоять прагматичніші цілі: як здійснити моніторинг якості освіти та в який спосіб можна на неї впливати й управляти процесом її поліпшення? Звичайно, педагогів більше приваблює другий аспект проблеми, оскільки він конкретніший щодо їх діяльності. Проте, не з’ясувавши теоретико-методологічних засад, не зрозумівши, що саме покладено в основу вимірювання та які методи вимірювання існують взагалі, оцінювати якість освіти неможливо, оскільки в такому разі не можна зробити об’єктивних і адекватних висновків.

Якість як філософська та виробнича категорія.

Перш ніж аналізувати тлумачення різних аспектів та граней поняття «якість освіти», варто чітко зрозуміти та визначити саме це поняття. Його розгляд можна розпочати з етимології слова *«якість»* (лат. qualities), що є похідним від слів «який», «які властивості має». У тлумачному словнику української мови [12] поняття «якість» трактується як «наявність істотних ознак, властивостей, що відрізняють один предмет чи явище від інших; та чи інша властивість, вартість, міра придатності».

Інтерпретація загального поняття «якість» є складною з огляду на багатозначність та міждисциплінарність. Вона розглядається як категорія *філософська та економічна (виробнича).*

Згідно філософського підходу (див., наприклад, [5], [14]), *якість – це об'єктивна, істотна, невідкремлювана від буття внутрішня визначеність, цілісність явищ та предметів, завдяки якій вони є саме цими, а не іншими об'єктами*. Завдяки якості кожен об'єкт існує та осмислюється як дещо особливе, відокремлене від інших об'єктів. Якість об'єкта проявляється у сукупності його властивостей. Цілісність властивостей і є якістю, а властивість – це певний бік якості об'єкта.

Категорія «властивість» характеризує буття речей у єдності їх внутрішніх та зовнішніх відмінностей. «Річ через властивості, які складають якість, співвідносяться з іншими речами буття, діє на них, і одночасно сама відчуває їх дію та підлягає зміні». Наявність у речі різноманітних властивостей складає об'єктивну основу існування численних видів стосунків у загальному зв'язку та взаємодії. Речі неможливо уявити у вигляді чистого субстрату, простої сукупності властивостей або якоїсь чистої субстанції без відносин до інших речей.

Взаємовідносини категорії тріади *річ – властивість – відносини* характеризуються взаємозв'язком, взаємоперехідністю, взаємопроникненням і єдністю, та відображають світ з боку структури і дають змогу зрозуміти його не як просту сукупність відокремлених речей, а таким, у якому усі фрагменти знаходяться в загальному зв'язку та взаємодії. У філософії категорія «якість» не має оціночного характеру, хоча, розуміючи властивості речі через відносини до інших речей, ми співвідносимо і таким чином порівнюємо, що дає можливість ранжувати речі за властивостями.

Загальне поняття «якість» виводиться з філософії, де впроваджене Платоном, і визначене як *ступінь досконалості речей*. Якість у розумінні Аристотеля – *це сутність речей, тобто предикат, який самостійно, без речі, не існує і відповідає на запитання: який? яка? яке?*

За доби Середньовіччя *якість* речей уявляється як їх *одвічно незмінна форма*. У Новий час, *якість – це* вже *властивість речі*, а Дж. Локк вважає *її силою, яка активізує розум і народжує конструктивні ідеї*.

Глибше тлумачення категорії «якість» запропонував Г. Гегель, а саме – як *тотожну буттю визначеність*, тобто *якість є невіддільною від предмета, втрачаючи якість, предмет перестає існувати*. Філософ виходить на новий рівень аналізу якості, він пропонує вимірювати ступінь прояву та виразності якості. Це дало змогу сформулювати знаменитий *закон переходу кількості в якість*.

За змістом загальне поняття «якість» історично еволюціонувало і збагачувалася. В сучасному філософському розумінні *якість системи – це визначеність, притаманна її реальному існуванню за тих чи інших умов, що характеризується зв'язками з навколишнім середовищем на певному етапі розвитку*. Таке тлумачення обґрунтовує важливість узгоджувати внутрішню структуру системи освіти і концептуальні засади її діяльності із зовнішніми соціальними чинниками.

Таким чином, *у філософському трактуванні* загальне поняття «якість» може бути визначене як:

- властивість, риса;
- риса чи сукупність рис, що відрізняють один предмет від інших;
- риса чи сукупність рис, що визначають стосунки, відносини, зв'язки даного явища з середовищем, визначають його структуру;
- ступінь досконалості.

Однак, постає питання: навіщо філософам усіх часів і народів треба було визначати поняття якості? Річ у тім, що категорія якості відображає важливу сторону об'єктивної дійсності об'єкта – його визначеність. Одночасно з цим філософи розуміли, що саме якість є основою для удосконалювання продукції, а отже, і для розвитку матеріальної культури.

Проте в наш час виявилося, що для практичної діяльності лише філософських сентенцій явно недостатньо, для ефективної спільної діяльності людей термінологію, пов'язану з визначенням поняття «якість», варто стандартизувати. Використання терміну «якість» з філософської сентенції перейшло в лексикон суто прикладної діяльності – виробництва. Однак, при цьому зберігається і філософський зміст: якість є основою для подальшого вдосконалювання продукції.

Таким чином, згідно другого, *виробничого підходу* до трактування якості, йдеться про якість продукції, яка детермінується його споживчою вартістю через фізичні властивості. Економічне тлумачення якості знаходимо у працях Е. Демінга, Дж. Джбана, Ф. Кросбі, К.Ісикави та ін.

Якщо розглядати навчальний заклад як організацію, що надає споживачам освітні послуги, то саме з «виробничих» позицій природно аналізувати якість освітніх послуг та підвищення якості освіти.

Міжнародною організацією стандартизації (ISO) прийняте таке означення якості (див., наприклад, [3]): *якість – це сукупність характеристик об'єкта, що описують його здатність задовольняти встановлені та передбачувані потреби*. Таким чином, з позицій виробничого підходу, *якість розглядається не лише як результат діяльності, а і як можливості його досягнення у вигляді внутрішнього потенціалу та зовнішніх умов, а також як процес формування певних характеристик*.

Різні тлумачення поняття освіти та її якості.

В досліджуваній проблемі важливим є розуміння також і природи поняття «*освіта».* Ось деякі з поширених тлумачень освіти.

- «*Освіта* - це соціальний інститут, за допомогою якого здійснюється передача культур, спадщини (професійних знань та умінь, моральних цінностей та ін.) від одного покоління до іншого, а також соціалізація індивіда і підготовка його до оволодіння різними соціальними ролями» [15].
- «*Освіта* - не лише спеціалізована діяльність, але й соціальний інститут. І, як кожна соціальна інституція, вона характеризується багатовимірністю: економічно-фінансовою, політичною, світоглядною» [7].

- *Освіта* - це комплексне педагогічне явище, «яке інтегрує в собі навчання, виховання і цілеспрямований розвиток людини як особистості» [13], що «має безліч характеристик, одночасно включаючи: принципи (концепції, парадигми, моделі та ін.); засоби (величезна мережа закладів); методи (найрізноманітніші операційні дії для досягнення максимального результату мінімальними зусиллями); процес (реальний перебіг отримання сутнісної частини освіти, організація якого повинна враховувати нововідкриті закони діяльності людського мозку сучасні характеристики того емоційно-інформаційного поля, в якому зростають підростаючі покоління); результати - усе те, що необхідно засвоїти, виходячи зі стін навчального закладу, і використовувати в практичній діяльності» [8].
- *«Освіта* – це суспільний процес (діяльність, інституція) розвитку і саморозвитку особистості, пов'язаний з оволодінням соціально значущим досвідом, втіленим у знаннях, вміннях, навичках творчої діяльності, чуттєво-ціннісних формах духовно-практичного освоєння світу» [10]. У філософському вимірі *«освіта* є процесом суб’єкт-суб’єктної взаємодії учителя (педагога) і учня (студента), спрямованої на передачу (засвоєння) знань, формування вмінь і навичок, виховання культури мислення і почуття, здатності до самонавчання і самостійної життєтворчої діяльності» [1].
- *«Освіта* – відкрита, нелінійна й динамічна соціокультурна система, що постійно розвивається. Кожна історична епоха, кожен етап людської цивілізації відбивається в освіті, немов у гігантському дзеркалі» [4]; є «полем, де перетинаються педагогіка, етика і політика, взаємодіють різні соціальні інститути у здійсненні освітнього процесу, виявляється внутрішня єдність індивіда і суспільства» [11]; «не лише індивідуальна, суспільна, але й всезагальна онтологічна форма розвитку, така сама фундаментальна форма існування буття, як простір, час, рух» [9].

Подані вище тлумачення дають змогу виділити *кілька основних аспектів (контекстів) «прикладання» загального поняття якості до освіти:*

(1) якість освіти як соціального інституту;
(2) якість освіти як педагогічного явища;
(3) якість освіти як суспільного процесу;
(4) якість освіти як процесу суб’єкт-суб’єктної взаємодії;
(5) якість освіти як загальноцивілізаційного феномену;
(6) якість освіти як соціокультурної системи;
(7) якість освіти як єдності соціального, культурного, економічного та наукового середовища.

Зрозуміло, що за бажання можна відшукати й інші точки «прикладання».

Освіта доволі часто пов’язувалася з якістю, обґрунтуванню механізмів впливу на яку (з метою її підвищення) присвячували свої трактати філософи і педагоги різних часів і народів світу. Платон, наприклад, відносив цю функцію виключно до пріоритетів держави. Аристотель однозначно пов'язував її зі стійкістю засвоєння знань та логікою мислення. Середньовічна філософсько-педагогічна традиція якість освіти пов'язувала з ефективністю засвоєння біблейського знання. Відродження і Новий Час «повернули» її до людини, духовного світу, її працездатності за допомогою техніки й загального уміння «жити суспільними чином» тощо.

То що ж таке якість освіти? Оскільки якість освіти є категорією, яка за своєю сутністю відображає різні аспекти освітнього процесу – філософські, соціальні, педагогічні, політичні, демографічні, економічні та ін., тому, попри всі намагання і спроби, прийти до єдиного визначення, мабуть, не вдасться.

Дійсно, якості освіти можуть приписувати різні, часто взаємосуперечливі, значення:

- батьки, наприклад, можуть співвідносити якість освіти з розвитком індивідуальності їх дітей;
- якість для вчителів може означати наявність якісного учбового плану, забезпеченого учбовими матеріалами;
- для учнів якість освіти часто пов'язується з внутрішньошкільним психологічним кліматом та комфортом;
- для бізнесу і промисловості якість освіти співвідноситься з життєвою позицією, уміннями і навичками, знаннями випускників;
- для суспільства якість освіти пов'язана з тими ціннісними орієнтаціями і цінностями тих, що навчаються, хто знайде своє вираження, наприклад, в цивільній позиції, в технократичній або гуманістичній спрямованості їх професійної діяльності.

Сучасна філософія подає *якість освіти як багатогранну модель соціальних норм і вимог до особистості, освітнього середовища, в якому відбувається її розвиток та системи освіти, яка реалізує її на певних етапах навчання людини*.

Якість освіти відображає те, що відрізняє освіту від інших соціальних явищ. Зокрема, це показник розвитку суспільства в певному часовому вимірі, і тому він має розглядатися в динаміці його змін стосовно чинників, які визначають його природу.

Якість освіти не може бути предметом міждержавних змагань (конкуренції) чи політичним аргументом у оцінці розвитку держави на конкретному етапі її становлення, це – суспільна характеристика. В сучасній Європі вона сприймається як об'єкт суспільного єднання і консолідації різних національних освітніх систем. Так, в угоді ЄС (стаття 149) зазначається, що *європейська спільнота сприятиме розвитку якісної освіти шляхом заохочення співпраці між країнами-членами ЄС, і, якщо необхідно, підтримки і доповнення їх дій, поважаючи одночасно відповідальність країн-членів за зміст навчання й організацію освітніх систем, їхню культурну та мовну різноманітність*.

У широкому сенсі *якість освіти розуміють як збалансовану відповідність процесу, результату і самої освітньої системи цілям, потребам і соціальним нормам (стандартам) освіти*. Якщо за основу означення взяти вимоги міжнародного стандарту якості, що регламентує поняття якості продукції і послуг, то його можна інтерпретувати як *сукупність* *властивостей і характеристик освітнього процесу або його результату, які надають їм здатність задовольняти освітні потреби всіх суб'єктів навчально-виховного процесу – учнів і студентів, їхніх батьків, викладачів, роботодавців, управлінців тощо, тобто державу і суспільство загалом*. [2]

Якість освіти вивчається як комплексне поняття в межах *квалітології* – триєдиної науки, що охоплює:

- теорію якості (Quality System),
- теорію оцінки якості (кваліметрію — Assessment, Evaluation),
- теорію управління якістю (Management and Monitoring of Quality).

Кожна з цих трьох складових має певний набір критеріїв і показників якості освіти, які дають змогу різнобічно оцінити будь-яку систему освіти за зовнішніми та внутрішніми її параметрами.

Розрізняють два основні підходи щодо визначення сутності якості освіти:

1) у межах першого підходу – *нормованого* – сутність якості освіти розглядається з позиції задоволення потреб та досягнення певних норм, стандартів, цілей (особистості, суспільства, держави), що нормативно затверджені відповідними документами (М.Поташник, В.Нуждін, В.Панасюк, К.Ісікава, В.Кальней, С.Шишов, Н.Селезньова та інші);
2) другий підхід – *управлінський* – подає цю категорію з позицій сучасної теорії й практики управління якістю, у тому числі й державою (В.Качалов, Т.Лукіна та ін.).

Зовнішні та внутрішні показники якості освіти, її складові.

Особистісне спрямування освіти зумовлює необхідність інтегровано оцінювати якість освіти в єдності індивідуальних характеристик особистості, педагогічних показників організації освітнього середовища і соціальних параметрів функціонування освітніх систем. Тому доцільно розрізняти *внутрішні* і *зовнішні чинники* (показники) *якості освіти*, які характеризують освітній процес, його результат і систему освіти загалом.

Зокрема, до *внутрішніх характеристик якості освіти* можна віднести:

а) якість освітнього середовища («технологічність» управління освітнім процесом, ефективність науково-методичної роботи, ресурсне забезпечення навчального процесу, кадровий потенціал школи тощо);

б) якість реалізації освітнього процесу (науковість і доступність змісту освіти, педагогічна майстерність учителя, ефективність засобів навчання, зокрема якість підручників, задоволення різноманітних освітніх потреб тощо);

в) якість результатів освітнього процесу (рівень навчальних досягнень учнів, розвиток їх мислення, ступінь соціальної адаптації, культури і вихованості учнів тощо.

Зовнішні показники якості освіти характеризують її як соціальну інституцію, що відображає ефективність функціонування освітньої системи, її вплив на людину і суспільні процеси, задоволення потреб особистості і держави загалом. Зокрема, це такі показники:

- доступність до якісної освіти усіх громадян незалежно від їх соціального і майнового статусу чи інших обмежень;
- відповідність освіти певним стандартам;
- задоволення освітніх потреб;
- наступність у здобутті вищої освіти;
- відкриття перспектив професійного зростання і соціального статусу тощо.

Таким чином, для підвищення якості освіти необхідна цілеспрямована робота щодо вдосконалення як внутрішніх, так і зовнішніх її показників.

Поняття «якість освіти», як і будь-яке інше поняття або явище, *має свої складові*. Необхідно зазначити, що, залежно від визначення поняття «якість освіти», кожен окремий дослідник пропонує власну систему (перелік) складових, за якими можна виміряти цю якість.

Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Російський вчений В.Г.Казаков [6] розкриває поняття якості освіти та його складових, до яких відносить наступні:

- освітні стандарти;
- професіоналізм;
- сучасні технічні засоби навчання;
- сучасні педагогічні технології;
- навчально-виробнича база;
- світній менеджмент та маркетинг;
- соціальне партнерство;
- багатоканальне фінансування.

На його думку, якість освіти особистості залежить від якості освітнього стандарту, основним показником якого є зміст навчального матеріалу та сутність освітнього процесу. Освітній стандарт покликаний підняти якість освіти та забезпечити конвертування освіти в країні та за її межами для участі країни у міжнародному ринку праці.

Приклад 2. Продовжуючи думку російських експертів, українські дослідники [16] зазначають, що основними складовими, які забезпечують якість освіти, є:

1) професійна підготовка викладачів, їх особистісні якості (порядність, відповідальність, принциповість, толерантність тощо);
2) навчально – методичне забезпечення навчального процесу;
3) наявність системи контролю й оцінки викладання, рівня знань учнів та студентів, адекватної сучасним вимогам;
4) застосування у навчально – виховному процесі сучасних освітніх технологій;
5) залученість викладачів і студентів до науково – дослідницької діяльності;

6) відповідність програм навчальних дисциплін сучасним вимогам;
7) контракти з провідними закордонними фахівцями;
8) належне матеріально – технічне забезпечення навчального процесу;
9) використання матеріалів соціологічних та інших досліджень;
10) стимулювання самостійної роботи студентів.

Приклад 3. Теоретичне обґрунтування проблеми управління якістю освіти дає підстави для уточнення і розширення складових та виділення основних критеріїв та показників якості шкільної освіти. Зокрема, критерії складають такі блоки: інформаційне забезпечення і міжнародне співробітництво, матеріально-технічне забезпечення, педагогічні кадри, керівні кадри, навчально-виховний процес, підготовка дошкільників до навчання в школі, науково-методична робота.

Наведемо основні показники якості освіти для кожного з цих блоків ([16]).

Перший блок. *Підготовка дітей дошкільного віку до навчання в школі*. Показники:

- наступність та перспективність у роботі між дошкільною та початковою ланками;
- освітній рівень вихователів старших груп;
- аналіз звукомови дітей п’ятирічного віку;
- система роботи ДНЗ та ЗНЗ та їх спільні заходи;
- робота ДНЗ з батьками щодо підготовки дітей до школи.

Другий блок. *Навчальний процес*. Показники:

- спеціалізація загальноосвітніх навчальних закладів району;
- вплив стану здоров'я учнів на якість знань;
- ефективність використання варіативної складової навчальних планів;
- наступність у навчанні учнів 1-х, 5-х, 10-х класів;
- система вибору профільного навчання;
- забезпечення умов самоосвітнього процесу (бібліотечно-інформаційні ресурси).

Третій блок. *Навчально-виховний процес.* Показники:

- робота учнівського самоврядування та її вплив на якість освіти;
- робота класних керівників по формуванню толерантних відносин у класних колективах, залучення до цього батьків;
- захист прав учнів;
- співпраця з громадськими організаціями, благодійними фондами, піклувальними радами щодо поглиблення знань, розширення світогляду школярів;
- екологічне виховання в навчальних закладах як засіб формування екологічної культури школярів;
- організація занять із дітьми, віднесеними до спеціальної медичної групи, як спосіб реабілітації здоров'я школярів;
- роль позашкільного навчального закладу в розвитку здібностей дитини та поглибленні знань з основ наук.

Четвертий блок. *Науково-методична робота.* Показники:

- система роботи з обдарованими учнями (пошуково-дослідницька діяльність учнів, участь школярів в олімпіадах, МАН);
- дослідницька діяльність учителів та учнів (авторські програми, статті, методичні розробки; використання творчого потенціалу вчителів-науковців у розвитку ЗНЗ та освіти району);
- робота з громадськістю (співпраця з науковими установами, ВНЗ).

П'ятий блок. *Педагогічні кадри.* Показники:

- орієнтація учнівської молоді на педагогічну професію;
- залучення студентів ВНЗ до роботи в навчальних закладах;
- зв'язок РУО та керівників навчальних закладів з педагогічними вишами;
- кількісна та якісна характеристика педагогічних кадрів;
- вивчення результатів соціальної підтримки вчителів;
- здійснення морального стимулювання педагогічних працівників.

Шостий блок. *Керівні кадри.* Показники:

- кількісна та якісна характеристика керівних кадрів;
- ефективність роботи районної «Школи резерву заступників директорів ЗНЗ».

Сьомий блок. *Інформаційне забезпечення та міжнародне співробітництво.* Показники:

- забезпечення комп'ютерною технікою та її використання під час навчального процесу і в позаурочний час;
- наявність доступу до мережі Інтернет в закладах освіти та його використання в навчально-виховному процесі;
- впровадження новітніх Інтернет-технологій у навчально-виховному процесі, використання мультимедійних комплексів для навчання;
- рівень володіння комп'ютерною технікою адміністрацією навчальних закладів та районними управліннями освіти, використання комп'ютерів у роботі;
- формування іміджу навчального закладу через засоби масової інформації.

Восьмий блок. *Матеріально-технічне забезпечення.* Показники:

- дотримання санітарно-гігієнічного режиму в навчальному закладі;
- стан меблів;
- стан території.

<u>Приклад 4.</u> Особливу роль у формуванні якості освіти зарубіжні та вітчизняні освітяни відводять професіоналізму педагогічних кадрів, їхній професійній підготовці. Сьогодні вчитель і викладач не лише носій знань, він має виконувати місію духовного поводиря дитини, має стати для неї водночас джерелом авторитетної інформації, майстром навчання способам оволодіння різнопредметною діяльністю, бути організатором пізнавального діалогу дитини з навколишнім світом, людьми, самим собою, особистим психологом і психотерапевтом, соціальним працівником і наставником.

Вкажемо на основні критерії, яким має відповідати педагог. Їх сформулював основоположник гуманістичної психології К.Роджерс, виступаючи перед американськими вчителями. Критерії мають характер запитань, які передбачають позитивні відповіді педагога в тому випадку, якщо він готовий до виконання умов неформального партнерства з учнями в освітньому закладі. Наведемо ці запитання [6].

1. Чи вмію я входити у внутрішній світ людини, яка навчається і дорослішає? Чи зміг би я поставитися до цього світу без забобонів, без упереджених оцінок, чи зміг би я на рівні особистісного ставлення емоційно відгукнутися на цей світ?
2. Чи вмію я дозволити самому собі бути особистістю і будувати відкриті, емоційно насичені, нерольові відносини з моїми учнями: відносини, у яких всі учасники навчаються? Чи вистачить у мене мужності розділити зі своїми учнями цю інтенсивність наших взаємовідносин?
3. Чи зумію я відкрити інтереси в моєму класі і чи зможу дозволити йому чи їй йти за цими індивідуальними інтересами?
4. Чи зможу я допомогти моїм учням зберегти живий інтерес, цікавість самих до себе, до світу, який їх оточує, зберегти і підтримувати найцінніше, чим володіє людина?
5. Чи в достатній мірі я сам є творчою людиною, яка може звести дітей з людьми та їх внутрішнім світом, з книгами, з усіма різновидностями джерел знань, із тим, що дійсно стимулює цікавість та підтримує інтерес?
6. Чи зміг би я прийняти і підтримати тільки но народжувані і в перший момент недосконалі ідеї і творчі замисли моїх учнів, цих посланців майбутніх творчих форм навчання та активності? Чи зміг би я прийняти тих творчих дітей, які так часто виглядають неспокійними і не відповідають прийнятим стандартам у поведінці?
7. Чи зміг би я допомогти дитині виростати цілісною людиною, почуття якої породжують ідеї, а ідеї – почуття?

Зрозуміло, що перелік підходів до визначення складових якісної освіти можна продовжити. Однак, і наведені приклади яскраво свідчать, що єдиного підходу щодо загального тлумачення як самого поняття загального поняття якості освіти, так і її складових, досі не сформовано.

Висновки. Наведений у цій статті огляд показує лише основні, так би мовити, «класичні», підходи до вивчення якості освіти, а також дозволяє розібратися в існуючих на сьогодні аспектах тлумачення цього поняття і уникнути термінологічної та сутнісної плутанини, про яку йшлося у вступі. Напрацьований у цьому напрямку досвід дозволяє в подальшому розглянути специфічні особливості у підходах до тлумачення відповідних аспектів якості *математичної* освіти, зокрема, розглянути підходи до оцінювання та вимірювання якості математичної освіти у кожному з цих аспектів. Саме цим проблемам і будуть присвячені наступні статті цієї серії.

Список використаної літератури

1. *Андрущенко Т.В.* Соціокультурний вимір освіти. // Вища освіта України.– 2004.– №4 (14), додаток. – С. 47- 48.
2. *Вікторов В.Г.* Регулювання якості освіти як філософсько освітянська проблема: Автореф. дис. д-ра філософ. наук: 09.00.10 / Ін-т вищ. освіти АПН України. – К., 2006.– 30с.
3. ДСТУ ISO 9000 – 2001. Системи управління якістю. Основні положення та словник. Чинний від 10.01.2001р.
4. *Євтодюк А.В.* Болонський атрактор сучасної освіти // Вища освіта України.– 2005, №3, додаток. – С. 47-51.
5. Історія філософії: Підручник для вищої школи / За ред. В.Кременя.– Харків: Прапор, 2003.– 768с.
6. *Казаков В.Г.* Качество образования. Слагаемые качества образования: Методическое обеспечение государственного стандарта начального профессионального образования.– Оренбург, 2001. – 38 с.
7. *Конох М.С.* Проблеми освіти в контексті соціально-філософського аналізу: Автореф. дис. д-ра філософ. наук: 09.00.03 / Київ. нац. ун-т ім. Т.Шевченка. - К., 2003. - 40 с.
8. *Панченко Л. М., Гальпєріна В.О.* Проблема управління якістю освіти (соціально-філософський аналіз) // Вища освіта України - Додаток 3 (т. 3) - 2006.– С. 200-206.
9. *Пищулин Н.П.* Образование как философская проблема // Философские науки.- №1.– 2005.– С. 7-27.
10. *Плаксий С.И.* Высшее образование: желаемое и действительное. – М.: Изд-во Национального ин-та бизнеса, 2008. – 776 с.
11. *Степаненко І.* Життєва компетентність як стратегічний обрій освітнього поля у синергетичній перспективі // Вища освіта України.– 2003, №4, додаток. – С. 7-14.
12. Тлумачний словник української мови / За ред. проф. В.С. Калашника. - Вид. 2-е. – Харків: Прапор, 2004. – 992 с.
13. *Тюмасева З.И., Богданов Е.Н., Щербак Н.П.* Словарь-справочник современного общего образования: акмеологические, валеологические и экологические тайны. - СПб.: Питер, 2004. - 464 с.
14. Філософія: Підручник для вищої школи / За ред. В.Г.Кременя, М.І.Горлача.– Харків: Прапор, 2004.– 736с.
15. *Хоруженко К.М.* Культурология. Энциклопедический словарь.– Ростов-на-Дону: Изд-во «Феникс», 1997.– 640 с.
16. Якісна освіта XXI століття: проблеми і пошуки: зб. матеріалів Всеукр. науково-метод. конф., 14 березня 2009 р.:[у 2 т.] / Донецький національний ун-т. Математичний факультет. Консорціум "Університет-школа" / Наталія Миколаївна Лосєва (заг.ред.) — Донецьк : [Вид-во ДонНУ], 2009.

Правила оформлення та подання авторських оригіналів статей у

збірник наукових праць

"Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 3.

Фізика і математика у вищій і середній школі"

1. До друку приймаються неопубліковані раніше матеріали, які відповідають тематиці збірника науковий праць та задовольняють **вимогам ВАК України** (Постанова президії ВАК України від 15.01.2003 р. № 7-05/1. Бюлетень № 1, 2003, с. 2: „Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України”).

2. Авторський оригінал подається в одному примірнику (на білому папері формату А4 з одного боку аркуша) разом із *електронним варіантом статті* (назва файлу — прізвище автора) та *рецензією* (для кандидатів та докторів наук — доктора наук з відповідної спеціальності, для студентів, аспірантів, здобувачів – – кандидата або доктора наук з відповідної спеціальності). Оригінал має бути представлений українською мовою. Паперовий варіант, підписаний автором, ідентичний електронному варіанту. Відповідальність за точність цитат, прізвищ, даних несе автор.

3. Відомості про автора (-ів) подаються на окремому аркуші: прізвище, ім’я, по батькові, вчений ступінь та звання, місце роботи, посада, місто, телефон, e-mail.

4. **Послідовність розміщення матеріалу статті:**

НАЗВА СТАТТІ

Прізвище та ініціали автора,
науковий ступінь, наукове звання,
місце роботи, посада

Анотація українською мовою (не більше 75 слів).
Анотація російською мовою.
Анотація англійською мовою.

Текст статті.

Список використаної літератури

згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1:2006.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 8—10 с., враховуючи таблиці, ілюстрації, список використаної літератури. Статті, більші за обсягом, можуть бути прийняті до розгляду на підставі рішення редколегії.

5. Вимоги до оформлення:

● Текст має бути набраний у текстовому редакторі Microsoft Word (версії 97, 2000, 2003). Шрифт — Times New Roman, кегль — 12. Поля — 20 мм. Міжрядковий інтервал — полуторний. Абзац — 15 мм.

● Не використовувати примусовий та ручний перенос слів. Автоматично встановлювати заборону висячих рядків. Не встановлювати відступ (абзац) першого рядка табуляцією або декількома проміжками. Заголовки відокремлювати від тексту зверху і знизу одним пустим рядком. Слова мають бути розділені одним проміжком. Посилання на використану літературу в тексті позначаються цифрою у квадратних дужках.

● Таблиці слід представляти безпосередньо в тексті. Вони мають бути пронумеровані арабськими цифрами і мати заголовки українською мовою. Примітки та виноски до таблиць повинні бути надруковані безпосередньо під відповідною таблицею.

● Ілюстративний матеріал слід вміщувати в текст, а також подавати окремим файлом в растровому форматі JPEG з розподільною здатністю не менше ніж 300 dpi.

● Таблиці, ілюстрації не повинні виходити на поля. Підписи до них повинні мати одні й ті самі стилі оформлення, як у всій статті.

Вимоги ВАК України до оформлення наукової статті на здобуття вченого ступеня

Згідно з постановою № 7-05/1 ВАК України від 15.01.2003 р. (див. "Бюлетень ВАК України" № 1/2003) до друку приймаються лише ті наукові статті (науковою вважається стаття, яка містить результат теоретичного або експериментального дослідження і призначена для наукового видання), які мають такі необхідні елементи:

1. Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми, на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття.

3. Формулювання мети статті (постановка завдання).

4. Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів.

5. Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі.

До уваги авторів

- Паперовий варіант статті подається технічному редактору збірника Дерев'янко Ользі (кафедра загальної фізики НПУ імені М.П.Драгоманова). Електронний варіант статті подається або особисто, або може бути надісланий електронною поштою на адресу chasopys3@ukr.net. *Лише електронні варіанти статей без паперового оригіналу не розглядатимуться!*
- Авторський оригінал повинен бути завершеним твором і не може доопрацьовуватись автором після прийняття редакцією.
- Статті, що не відповідають викладеним вимогам, редакцією не приймаються. Оригінали, не прийняті до опублікування, авторам не повертаються.
- Редакція має право робити редакційні правки, які не впливають на зміст тексту.
- За необхідності автор може бути запрошений в редакцію для ознайомлення з коректурою або йому з цією метою електронною поштою відправляється стаття.
- Гонорар за публікації не виплачується.
- Вартість публікації визначається в залежності від умов фінансування видання збірника і на 2010 рік встановлюється у розмірі 20 грн. за сторінку.

Наукове видання

НАУКОВИЙ ЧАСОПИС
НПУ імені М.П.ДРАГОМАНОВА

Серія 3. Фізика і математика у вищий і середній школі.

Випуск 5

Друкується в авторській редакції з оригінал-макетів авторів.

Редколегія не завжди поділяє погляди авторів статей.

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей.

Матеріали подано мовою оригіналу.