МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА

Наталія ВЕРПАТОВА

ЗМІСТОВНА АКСІОМАТИЧНА ТЕОРІЯ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

(ДИДАКТИЧНІ МАТЕРІАЛИ
ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ)

КИЇВ – 2023

УДК 510.82:511 (075.8)

Наталія ВЕРПАТОВА. Змістовна аксіоматична теорія натуральних чисел (дидактичні матеріали для самостійної роботи студентів). К.: УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. 52 с.

Рецензенти:
Анатолій ПЕТРАВЧУК, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри і комп'ютерної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
Катерина БОЖОНОК, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Українського державного університету імені Михайла Драгоманова.

Рекомендовано Вченою радою
Українського державного університету імені Михайла Драгоманова
(*протокол* № 4 *від* 30 *листопада* 2023 *року*)

Посібник є першою частиною дидактичних матеріалів з курсу «Числові системи та системи числення». В ньому представлено перелік основних понять алгебри, які використовує даний курс та описано процес побудови півкільця натуральних чисел. Особливу увагу приділено обґрунтуванню принципу математичної індукції та його різних форм, на який спирається відомий метод доведення математичних тверджень. Теоретичний матеріал супроводжується прикладами розв'язування задач. В посібнику наведено план практичних занять, завдання для контрольної роботи та перевірки знань.

Навчальний посібник розрахований на студентів закладів вищої освіти, які навчаються за спеціальністю «Математика», викладачів, вчителів закладів загальної середньої освіти з поглибленим вивченням математики.

ВСТУП

Курс “Числові системи та системи числення” має безпосереднє відношення до питань обґрунтування математики і тому відіграє особливу роль у процесі становлення викладача середньої школи. У цьому курсі розглядаються теоретичні питання, пов’язані з побудовою основних числових систем.

Основними числовими системами математики є:

1) множина **N** натуральних чисел;
2) множина **Z** цілих чисел;
3) множина **Q** раціональних чисел;
4) множина **R** дійсних чисел;
5) множина **C** комплексних чисел.

Число – основне поняття математики, яке склалося в ході тривалого історичного розвитку. Поняття натурального числа виникло ще в доісторичні часи і було викликане потребою лічби предметів. Введення дробових чисел пов’язане з потребою проводити вимірювання. Подальші розширення поняття числа обумовлені вже не безпосередніми потребами лічби та вимірювання, а є наслідком розвитку математики. Введення від’ємних, ірраціональних та уявних чисел було викликане розвитком алгебри як науки, що дає загальні способи розв’язування арифметичних задач.

І лише в ХІХ ст. вченими усвідомлюється задача обґрунтування основ математики та побудови єдиної теорії числа. В цей час потужно розвивається аксіоматичний метод в математиці та постає проблема критичного перегляду основ математичного аналізу – теорії границь. Математиків перестали задовольняти доведення, які ґрунтуються на наочності або геометричному уявленні. Не було повної ясності в питанні, як вводити арифметичні операції над числами. Натуральне число нерідко мислилось як сукупність одиниць, дріб – як відношення величин, дійсне число – як довжина відрізка, комплексне число – як точка площини. Виникало питання про подальший розвиток поняття числа: чи не можна ввести нові числа, пов’язані, наприклад, з точками простору?

Тому, мета курсу “Числові системи та системи числення” – виділити ті найпростіші властивості чисел, з яких можна строго вивести все те, що нам відомо про числа; побудувати єдину теорію числа шляхом послідовного розширення однієї числової системи до іншої; показати обмеженість такого процесу розширень.

В посібнику наведені теоретичні положення, рекомендації та приклади розв’язування задач. Також тут подані завдання до практичних занять та контрольних робіт з курсу, перелік питань для підготовки до заліку (екзамену).

Посібник призначений для самостійної роботи студентів математичних спеціальностей.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ЩО ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В КУРСІ "ЧИСЛОВІ СИСТЕМИ"

Означення. Нехай A і B – дві множини довільної природи, скінченні або нескінченні. Множину всіх впорядкованих пар (a, b), де $a \in A$, $b \in B$, називають *прямим* (або *декартовим*) *добутком* множин A і B, позначають $A \times B$:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Це означення можна узагальнити на випадок n множин.

Означення. Нехай маємо n множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Множину всіх впорядкованих наборів $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ називають *прямим* (*декартовим*) *добутком* множин A_i.

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \}.$$

Означення. Відношенням рангу n або n-*арним відношенням*, визначеним у множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$, називається кожна непорожня підмножина прямого добутку $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то кажуть, що n-арне відношення визначене у множині A.

Відношення рангів 1, 2, 3 називають відповідно *унарним*, *бінарним*, *тернарним* відношенням.

Розглянемо бінарне відношення ρ, визначене в множинах A і B, тобто

$$\rho \subseteq \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Те, що елементи a і b перебувають у відношенні ρ, записують так:

$$(a, b) \in \rho \quad \text{або} \quad a \,\rho\, b.$$

Сукупність усіх перших компонент пар, що утворюють бінарне відношення ρ, називається *областю визначення* відношення ρ і позначається $D(\rho)$, тобто

$$D(\rho) = \{ a \mid (a, b) \in \rho \}.$$

Тоді *множиною значень* відношення ρ називають сукупність

$$R(\rho) = \{ b \mid (a, b) \in \rho \}.$$

Зрозуміло, що $D(\rho) \subseteq A$, $R(\rho) \subseteq B$.

***Властивості відношень*:**

Бінарне відношення ρ, визначене в множині A, є

1) *рефлексивним*, якщо $\forall\, a \in A \quad a \,\rho\, a$, тобто $(a, a) \in \rho$;

2) *антирефлексивним*, якщо $\forall\, a \in A \quad a \,\overline{\rho}\, a$, тобто $(a, a) \notin \rho$;

3) *симетричним*, якщо $\forall\, a, b \in A \quad a \,\rho\, b \;\Rightarrow\; b \,\rho\, a$, тобто

$$(a, b) \in \rho \;\Rightarrow\; (b, a) \in \rho;$$

4) *асиметричним*, якщо $\forall\, a, b \in A \quad a \,\rho\, b \;\Rightarrow\; b \,\overline{\rho}\, a$, тобто

$$(a, b) \in \rho \;\Rightarrow\; (b, a) \notin \rho;$$

5) *антисиметричним*, якщо $\forall\ a, b \in A \quad (\ a\,\rho\, b \quad \text{і} \quad b\,\rho\, a\ ) \ \Rightarrow\ a = b$, тобто

$$\begin{cases} (a,b) \in \rho \\ (b,a) \in \rho \end{cases} \Rightarrow \quad a = b;$$

6) *транзитивним*, якщо $\forall\ a, b, c \in A \quad (\ a\,\rho\, b \quad \text{і} \quad b\,\rho\, c\ ) \ \Rightarrow\ a\,\rho\, c$, тобто

$$\begin{cases} (a,b) \in \rho \\ (b,c) \in \rho \end{cases} \Rightarrow \quad (a,c) \in \rho;$$

7) *зв'язним*, якщо $\forall\ a, b \in A \quad a \neq b \ \Rightarrow\ (\ a\,\rho\, b$ або $b\,\rho\, a\ )$, тобто

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} (a,b) \in \rho, \\ (b,a) \in \rho. \end{array}\right.$$

Означення. Бінарне відношення ρ, визначене на множині A, називають *відношенням еквівалентності*, якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Означення. Сукупність S підмножин X_i даної множини M називається *розбиттям* множини M, якщо

1) $\forall\ X_i \in \mathrm{S} \qquad X_i \neq \varnothing$,
2) $\forall\ X_i, X_j \in \mathrm{S} \qquad X_i \neq X_j \ \Rightarrow\ X_i \cap X_j = \varnothing$,
3) $\bigcup\limits_i X_i = M$.

Наприклад, множину цілих чисел $\mathbf{Z}$ можна розбити на два класи X_1 та X_2, де X_1 – множина парних цілих чисел, X_2 – множина непарних цілих чисел:

$$\mathbf{Z} = \{2k\} \cup \{2k+1\}.$$

Означення. Нехай ρ – відношення еквівалентності на множині A і $a \in A$. Тоді множину елементів з A, які перебувають у відношенні ρ з елементом a, називають *класом еквівалентності* (або суміжним класом множини A за еквівалентністю ρ) з представником a:

$$a/\rho = \{\ x \mid\ x\,\rho\, a\ \}.$$

Наприклад, ρ – відношення конгруентності за модулем 3 на множині $\mathbf{Z}$. Воно є відношенням еквівалентності. Тоді клас еквівалентності з представником 2 складають всі числа, конгруентні числу 2 за модулем 3, тобто числа, що мають вигляд $3k+2$, де $k \in \mathbf{Z}$:

$$2/\rho = \{\ x \mid\ x \equiv 2 \pmod 3\} = \{\ 2 + 3k \mid\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Означення. Множину всіх суміжних класів множини A за відношенням еквівалентності ρ називають *фактор-множиною* множини A за еквівалентністю ρ і позначають A/ρ.

Теорема. *Кожне розбиття* S *множини* A *визначає відповідне йому єдине відношення еквівалентності* ρ, *класи еквівалентності якого збігаються з підмножинами розбиття.*

І навпаки, кожному відношенню еквівалентності ρ *на* A *відповідає і притому тільки одне розбиття* S *множини* A.

Означення. Бінарне відношення ρ, визначене на множині A, називається *відношенням порядку*, якщо воно антисиметричне і транзитивне. При цьому *відношенням строгого порядку*, якщо воно антирефлексивне, і *нестрогого порядку*, якщо воно рефлексивне.

Якщо в множині A визначене відношення порядку, то A називають *упорядкованою множиною*.

Якщо відношення порядку зв'язне, то впорядковану ним множину називають *лінійно впорядкованою*, а якщо незв'язне, – то *частково впорядкованою*.

Лінійно упорядкована множина називається *цілком упорядкованою*, якщо кожна непорожня її підмножина має найменший (перший) елемент.

Означення. Бінарне відношення ρ, визначене в множинах A і B, називається *функціональним*, якщо

$$\forall\ a \in A \quad \exists!\ b \in B: \qquad (a, b) \in \rho .$$

Отже, бінарне функціональне відношення має такі властивості:

1) воно всюди визначене на множині A, тобто $D(\rho) = A$;

2) друга компонента пари (a, b) визначається однозначно.

Синонімами функціонального відношення вважаємо терміни: функція, відображення. В алгебрі замість слова “функція” вживають слово “операція”.

Якщо $A = B$, то бінарне функціональне відношення ρ, визначене на множині A, називається *унарною алгебраїчною операцією*.

Означення. Тернарне відношення ρ, визначене в множинах A, B, C називають *функціональним*, якщо

$$\forall\ a \in A \ \text{ і } \ \forall\ b \in B \quad \exists!\ c \in C: \quad (a, b, c) \in \rho .$$

Якщо $A = B = C$, то тернарне функціональне відношення ρ, визначене на множині A, називається *бінарною алгебраїчною операцією***.**

Наприклад, операція додавання на множині $\mathbf{N}$ є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки

$$\forall\ a, b \in \mathbf{N} \quad \exists!\ c \in \mathbf{N}: \ \ a + b = c \text{ , тобто } (a, b, c) \in \rho ;$$

а операція віднімання на множині $\mathbf{N}$ є бінарною операцією, але не алгебраїчною, бо $\forall\ a, b \in \mathbf{N}$ різниця $a - b = c$ визначається, але не завжди c є натуральним числом.

Означення. Нехай A – непорожня множина, $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ – множина визначених на A операцій, $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$ – множина визначених в A відношень, $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ – множина таких елементів із A, які мають певні специфічні відносно операцій і відношень властивості, що відрізняють їх від інших елементів цієї множини. Тоді впорядковану четвірку

$$(A, \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}, \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}, \{a_1, a_2, \ldots, a_s\})$$

називають *алгебраїчною системою*, або алгебраїчною структурою.

Алгебраїчна система на множині A повністю визначається набором операцій, відношень, елементів, виділених з A. На тій самій множині A, яку називають *носієм* алгебраїчної системи, можна побудувати багато різних алгебраїчних систем.

Наприклад, (**N**, + , 1), (**N**, + , $\cdot$, 1), (**N**, +, < , 1).

Якщо множина $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\} = \varnothing$, то алгебраїчну систему $(A, \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}, \{a_1, a_2, \ldots, a_s\})$ називають *алгеброю*.

Означення. Дві алгебраїчні системи

$$(A, \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}, \{\omega_1, \omega_2, \ldots,\omega_r\}, \{a_1, a_2, \ldots,a_s\}),$$

$$(B, \{\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_m\}, \{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n\}, \{b_1, b_2, \ldots, b_t\})$$

називаються *однотипними***,** якщо

1) $k = m,\ r = n,\ s = t$;

2) відповідні операції α_i і β_i мають однакову арність (однакову кількість аргументів) для всіх $i = 1, \ldots, k$;

3) відповідні відношення ω_j і δ_j мають однакову арність для всіх $j = 1, \ldots, r$.

Означення. Дві однотипні алгебраїчні системи

$$(A, \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}, \{\omega_1, \omega_2, \ldots,\omega_r\}, \{a_1, a_2, \ldots,a_s\}),$$

$$(B, \{\beta_1, \beta_2,\ldots,\beta_k\}, \{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_r\}, \{b_1, b_2, \ldots, b_s\})$$

називаються *ізоморфними*, якщо існує таке взаємно однозначне відображення f множини A на множину B, при якому виконуються умови:

1) $\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_p \in A$
$f\alpha_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \beta_i(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p))$,
$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_p) \in B$,
для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$;

2) $\forall\ x_1, x_2, \ldots, x_t \in A$
$(x_1, x_2, \ldots, x_t) \in \omega_i \Leftrightarrow (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_t)) \in \delta_i$
для всіх $i = 1, 2, \ldots, r$;

3) $f(a_i) = b_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, s$.

Наприклад, алгебраїчні системи $(\mathbf{R}, +, <, 0)$ і $(\mathbf{R}_{+}, \cdot, <, 1)$ ізоморфні, якщо за відображення f взяти $f(x) = 2^x\ \ \forall\, x \in \mathbf{R}$.

Означення. Нехай $(A,\ \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\},\ \{a_1, a_2, ..., a_s\})$ і $(B, \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k\}, \{b_1, b_2, ..., b_s\})$ дві однотипні алгебри. Тоді алгебру A називають *розширенням* алгебри B, якщо виконуються умови:

1) $B \subseteq A$;

2) $a_i = b_i\,,\quad i = 1, 2, ..., s$;

3) $\forall\, y_1, y_2, \ldots, y_t \in B \quad \beta_j\,(y_1, y_2, \ldots, y_t) = \alpha_j\,(y_1, y_2, \ldots, y_t)$ для всіх $j = 1, 2, ..., k$.

Як правило, операції в алгебрі і в її розширенні позначають однаковими символами. Тоді умову 3) можна сформулювати так:

3′) множина B замкнена відносно всіх операцій $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Наприклад, поле раціональних чисел $(\mathbf{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ є розширенням кільця цілих чисел $(\mathbf{Z}, +, \cdot, 0, 1)$; кільце многочленів $(\mathbf{Z}[x], +, \cdot, 0, 1)$ є розширенням кільця цілих чисел $(\mathbf{Z}, +, \cdot, 0, 1)$.

Читачеві відомі вже такі алгебри: група, кільце, поле. Означимо ще деякі з них.

Означення. Алгебру $(G, *)$ називають *півгрупою*, якщо бінарна операція “$*$“ на G алгебраїчна і асоціативна.

Півгрупу $(G, *)$ називають *комутативною*, якщо операція “$*$“ комутативна.

Півгрупу $(G, *)$ називають *півгрупою із скороченням*, якщо в ній виконується твердження:

$$\forall\, a, b, c \in G \quad a * c = b * c \;\Rightarrow\; a = b,$$
$$c * a = c * b \;\Rightarrow\; a = b.$$

Означення. Алгебру $(K, +, \cdot)$ називають *півкільцем*, якщо

1) $(K, +)$ – комутативна півгрупа із скороченням;

2) $(K, \cdot)$ – півгрупа;

3) операції “+“ і “ · “ пов’язані законом дистрибутивності.

Наприклад, $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ є півкільцем.

Означення. Алгебру $(T, +, \cdot, \theta)$ називають *тілом*, якщо

1) $(T, +)$ – комутативна група;

2) $T \setminus \{\theta\} \neq \varnothing$ і $(T \setminus \{\theta\}, \cdot)$ – група;

3) операції “+” і “ · ” пов’язані законом дистрибутивності.

Отже, в тілі виконуються всі аксіоми поля, крім комутативності множення.

Наприклад, множина $\mathcal{M}_n$ всіх невироджених матриць n-го порядку з дійсними елементами відносно операцій додавання і множення утворює тіло (але не поле).

Важливим прикладом тіла є **тіло кватерніонів**.

Розглянемо множину всіх квадратних матриць другого порядку з комплексними коефіцієнтами виду:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| \quad \alpha, \beta \in C \right\},$$

де $\overline{\alpha}$ є комплексне число, спряжене до α, $\overline{\beta}$ – комплексне число, спряжене до β.

Множина M відносно операцій додавання і множення утворює тіло. Пропонуємо перевірити це самостійно.

Будь-яку алгебру, ізоморфну алгебрі $(M, +, \cdot)$, називають ***алгеброю кватерніонів***, а її елементи – ***кватерніонами.***

Позначимо $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, тоді кожен кватерніон $\boldsymbol{q}$ можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} =$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= a \cdot e + b \cdot i_0 + c \cdot j_0 + d \cdot k_0 .$$

Елемент $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в алгебрі M є одиничним елементом. Неважко перевірити, що поле дійсних чисел **R** і множина

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \ \forall\, a \in \mathbf{R} \right\}$$

всіх діагональних квадратних матриць над **R** ізоморфні. Тому при розгляді алгебри кватерніонів як абстрактної алгебри ототожнюємо вирази $a \cdot e$ і a і записуємо довільний кватерніон $\boldsymbol{q}$ у вигляді

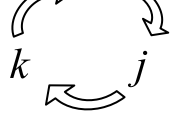
$$\boldsymbol{q} = a + bi + cj + dk ,$$

де

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k .$$

Правило множення уявних одиниць i, j, k можна сформулювати так: добуток двох різних уявних одиниць дорівнює третій з них із знаком "+", якщо від першого множника до другого рухатимемось за годинниковою стрілкою, і із знаком "–", якщо цей рух буде проти руху годинникової стрілки.



Виконуючи множення кватерніонів треба пам'ятати, що ця операція некомутативна.

Приклад 1. *Знайти суму, різницю та добуток кватерніонів*

$$\boldsymbol{q_1} = 2 + 3i - 4j + 5k,$$
$$\boldsymbol{q_2} = 1 - 5i + 2k.$$

$\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{q_2} = 3 - 2i - 4j + 7k,$

$\boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{q_2} = 1 + 8i - 4j + 3k,$

$\boldsymbol{q_1} \cdot \boldsymbol{q_2} = (2 + 3i - 4j + 5k) \cdot (1 - 5i + 2k) =$

$= 2 + 3i - 4j + 5k - 10i - 15i^2 + 20ji - 25ki + 4k + 6ik - 8jk + 10k^2 =$

$= 2 + 3i - 4j + 5k - 10i + 15 - 20k - 25j + 4k - 6j - 8i - 10 =$

$= 7 - 15i - 35j - 11k.$

$\boldsymbol{q_2} \cdot \boldsymbol{q_1} = (1 - 5i + 2k) \cdot (2 + 3i - 4j + 5k) =$

$= 2 - 10i + 4k + 3i - 15i^2 + 6ki - 4j + 20ij - 8kj + 5k - 25ik + 10k^2 =$

$= 2 - 10i + 4k + 3i + 15 + 6j - 4j + 20k + 8i + 5k + 25j - 10 =$

$= 7 + i + 27j + 29k.$

Кожен кватерніон $\boldsymbol{q}$ також можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{q} = a + \boldsymbol{V},$$

де $\boldsymbol{V} = bi + cj + dk$.

Число a називають *скалярною частиною* кватерніона $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{V}$ – *векторною частиною.*

Якщо $a = 0$, то $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}$ – вектор.

Знайдемо добуток двох суто векторних кватерніонів:

$$\boldsymbol{V_1} \cdot \boldsymbol{V_2} = (b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (b_2 i + c_2 j + d_2 k) =$$
$$= b_1b_2i^2 + c_1b_2ji + d_1b_2ki + b_1c_2ij + c_1c_2j^2 + d_1c_2kj + b_1d_2ik + c_1d_2jk + d_1d_2k^2 =$$
$$= -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) - c_1b_2k + d_1b_2j + b_1c_2k - d_1c_2i - b_1d_2j + c_1d_2i =$$
$$= -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k =$$
$$= -(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot k.$$

Тобто в результаті отримали, що

$$\boldsymbol{V}_1 \cdot \boldsymbol{V}_2 = -(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2) + [\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2],$$

де $(\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2)$ – скалярний добуток векторів $\boldsymbol{V}_1$ і $\boldsymbol{V}_2$, $[\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2]$ – векторний добуток цих векторів.

Спряженим до кватерніона $\boldsymbol{q} = a + \boldsymbol{V}$ будемо називати кватерніон

$$\overline{q} = a - \boldsymbol{V}.$$

Тоді

$$\boldsymbol{q} \cdot \overline{q} = (a + \boldsymbol{V}) \cdot (a - \boldsymbol{V}) = a^2 - \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{V} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

тобто добуток двох спряжених кватерніонів є дійсним числом, яке називають *нормою кватерніона* $\boldsymbol{q}$ і позначають $Nr(q)$:

$$Nr(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Розглянемо добуток $\boldsymbol{q} \cdot \dfrac{\overline{q}}{Nr(q)} = 1$, тобто

$$q^{-1} = \frac{1}{Nr(q)} \cdot \overline{q} \; .$$

Введемо операцію ділення кватерніонів. Оскільки множення кватерніонів некомутативне, то доводиться говорити про ліву і праву частки.

Означення. *Лівою часткою* від ділення α на β називають такий елемент x, для якого $x \cdot \beta = \alpha$.

Домноживши цю рівність на β^{-1} справа, одержимо, що

$$x = \alpha \cdot \beta^{-1}.$$

Правою часткою від ділення α на β називають такий елемент y, для якого $\beta \cdot y = \alpha$.

Тоді домноживши цю рівність на β^{-1} зліва, одержимо

$$y = \beta^{-1} \cdot \alpha .$$

Отже, щоб знайти ліву (праву) частку від ділення кватерніона α на кватерніон β, треба знайти обернений до β кватерніон β^{-1} і помножити його зліва (справа) на α.

Приклад 2. *Знайти обернений до кватерніона*

$$\boldsymbol{q} = 2 + 3i - 4j + 5k.$$

$Nr(q) = 2^2 + 3^2 + (-4)^2 + 5^2 = 54$,

спряженим до кватерніона $\boldsymbol{q}$ є кватерніон $\overline{\boldsymbol{q}} = 2 - 3i + 4j - 5k$, тому

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \frac{1}{54}\left(2 - 3i + 4j - 5k\right).$$

Приклад 3. *Довести, що довільний кватерніон* $\boldsymbol{q}$ *є коренем деякого квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами.*

Порівняємо розв’язання цієї задачі для комплексного числа α та кватерніона $\boldsymbol{q}$:

$\alpha = a + bi$,
$\alpha - a = bi$,
$(\alpha - a)^2 = -b^2$,
$\alpha^2 - 2a\alpha + a^2 = -b^2$,
$\alpha^2 - 2a\alpha + (a^2 + b^2) = 0$,
тобто α є коренем рівняння
$x^2 - 2ax + Nr(\alpha) = 0$.

$\boldsymbol{q} = a + bi + cj + dk$,
$\boldsymbol{q} - a = V$,
$(\boldsymbol{q} - a)^2 = V \cdot V$,
$\boldsymbol{q}^2 - 2a\boldsymbol{q} + a^2 = -(b^2 + c^2 + d^2)$,
$\boldsymbol{q}^2 - 2a\boldsymbol{q} + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 0$,
тобто $\boldsymbol{q}$ є коренем рівняння
$x^2 - 2ax + Nr(\boldsymbol{q}) = 0$.

Вище ми ввели часткову операцію ділення. Аналогічно можна ввести часткову операцію віднімання.

Означення. Нехай $(G, +)$ – комутативна півгрупа із скороченням, $a, b \in G$. Тоді елемент $x \in G$ називають *різницею* елементів a і b (і позначають $a - b = x$), якщо $x + b = a$.

Зауваження. У записі $a - b$ знак "–" не є символом (знаком) для позначення протилежного елемента (у півгрупі взагалі кажучи немає протилежних елементів), а просто позначає різницю. Тобто в півгрупі

$$a - b \neq a + (-b)\,.$$

Тому в задачах такого типу доцільно всі різниці позначити якимись буквами і перейти до розгляду сум елементів.

Приклад 4. *Довести, що в довільному півкільці справджується співвідношення (при умові, що відповідні різниці існують):*

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)\,.$$

Доведення. Введемо позначення $a - b = x$, $c - d = y$.

Тоді

$$x + b = a, \quad y + d = c.$$

Додамо почленно ці рівності:

$$(x + b) + (y + d) = a + c\,.$$

Оскільки в півкільці виконується асоціативний і комутативний закони для додавання, то

$$x + (\,b + y\,) + d = a + c\,,$$
$$x + (y + b) + d = a + c\,,$$
$$(x + y) + (b + d) = a + c\,.$$

За означенням різниці, елемент $x + y$ є різницею елементів $(a + c)$ і $(b + d)$, тобто

$$x + y = (a + c) - (b + d)\,,$$

що і треба було довести.

АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД У МАТЕМАТИЦІ

Аксіоматичний метод – спосіб побудови наукової теорії, при якому в основу теорії покладають деякі вихідні положення, які називають *аксіомами* теорії, а всі решта висловлень теорії одержують як логічні наслідки аксіом.

Першим кроком в побудові аксіоматичної теорії є складання переліку основних об'єктів даної теорії та вибір символів для їх позначення, тобто формування *мови* L. Такими символами можуть бути знаки або слова, а самі вони називаються *первинними символами* або *термінами.*

Другим кроком в побудові аксіоматичної теорії є складання переліку основних властивостей відібраних об'єктів – висловлювань про основні об'єкти і запис їх за допомогою первинних символів. Ці властивості називаються *аксіомами*[1].

Після цього, керуючись принципами прийнятої системи логіки, виводять із аксіом теореми і визначають на основі первинних термінів інші вживані в теорії терміни.

Під *доведенням* (формальним) висловлювання F розуміють скінченну послідовність висловлювань:

$$F_1, F_2, \ldots, F_k, \qquad (k \geq 1),$$

для яких виконуються умови:

1) кожне висловлювання F_i цієї послідовності є або аксіомою, або може бути виведене шляхом застосування логічних правил виведення з попередніх висловлювань цієї послідовності;

2) $F_k = F$.

Висловлювання F, для якого існує доведення, називають *теоремою*[2].

Аксіоматичною теорією T називається пара (L, $\mathcal{A}$), де $\mathcal{A}$ – множина аксіом цього розділу математики.

Якщо в аксіоматичну теорію в явному вигляді не включають правил логічного доведення, а вважають їх відомими на інтуїтивному рівні, то кажуть, що цю теорію побудовано за *неформальним* (або *змістовним*) аксіоматичним методом. Саму теорію в цьому разі називають *змістовною аксіоматичною теорією*.

Прикладом неформальної аксіоматичної теорії є класична теорія груп.

Якщо система логічних правил виведення в явному вигляді включається до теорії, то таку теорію називають *формальною аксіоматичною теорією*.

Прикладом формальної аксіоматичної теорії є числення висловлень.

---

[1]аксіома (грец. $`\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ – прийняття положення)

[2]теорема (грец. $\vartheta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha$ – розглядаю, досліджую)

Інтерпретація і модель аксіоматичної теорії

Нехай дано дві аксіоматичні теорії T_1 і T_2. Якщо кожному первинному терміну теорії T_1 можна співставити який-небудь об’єкт теорії T_2 так, що:

1) кожному висловленню F про об’єкти теорії T_1 відповідає деяке висловлення F^* теорії T_2 про її об’єкти;

2) протилежним висловленням теорії T_1 – протилежні висловлення з T_2, то таке відображення називають *інтерпретацією*[1] теорії T_1 в теорії T_2, а теорію T_2 при цьому називають ***моделлю*** теорії T_1.

Якщо висловлення F^* істинне, то кажуть, що висловлення F *істинне при даній інтерпретації*.

Якщо всі аксіоми теорії T_1 істинні в даній інтерпретації, то ця інтерпретація називається *правильною*.

Властивості аксіоматичних теорій

1. Аксіоматична теорія T називається *несуперечливою*, якщо хоча б одне з будь-яких її висловлень ω або $\overline{\omega}$ не є теоремою.

Якщо в теорії T знайдеться хоча б одне таке висловлення ω, що ω і $\overline{\omega}$ – одночасно є теоремами (твердженнями, для яких існує доведення), то теорію T називають *суперечливою*.

Суперечливу теорію немає сенсу розглядати.

Несуперечливість аксіоматичних теорій можна доводити двома способами:

1) за допомогою побудови моделей, тобто правильних інтерпретацій;

2) застосуванням прямих або абсолютних доведень, що в неформальних аксіоматичних теоріях неможливо, оскільки немає точного поняття доведення.

В першому випадку встановлюють відносну несуперечливість: зводять несуперечливість теорії T до несуперечливості її моделі T'. Теорія T буде несуперечливою, якщо несуперечлива хоча б одна її модель T'.

На жаль, за допомогою цих методів не вдається довести несуперечливість арифметики натуральних чисел, і її надійність забезпечується багатовіковою практикою людства.

2. Аксіоматична теорія T називається *повною*, якщо для будь-якого висловлення ω цієї теорії хоча б одне з висловлень ω або $\overline{\omega}$ є теоремою.

У противному разі теорію T називають *неповною*.

Строге доведення неповноти можна дати лише для формальних аксіоматичних теорій.

Формальна аксіоматична теорія натуральних чисел є неповною.

---

[1] інтерпретація (лат. interpretatio – роз’яснення)

3. Аксіоматична теорія T називається *категоричною*, якщо будь-які дві її моделі ізоморфні.

Змістовні аксіоматичні теорії усіх числових систем категоричні. Прикладом некатегоричної теорії є теорія груп, загальна теорія кілець і полів.

4. Нехай $\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, \ldots, A_k \}$ – система аксіом аксіоматичної теорії T. Аксіома $A_i \in \mathcal{A}$ називається *незалежною* від решти аксіом системи $\mathcal{A}$, якщо її не можна з них вивести засобами теорії T. Якщо кожна аксіома з $\mathcal{A}$ не залежить від решти аксіом цієї системи, то $\mathcal{A}$ називають *незалежною системою аксіом*.

Для доведення незалежності системи аксіом $\mathcal{A}$ можна користуватися методом моделей, а саме: щоб довести, наприклад, що аксіома A_1 не залежить від решти аксіом з $\mathcal{A}$, досить побудувати таку модель T', в якій усі аксіоми з $\mathcal{A} \setminus \{A_1\}$ виконуються, тобто є істиними висловленнями, а A_1 не виконується.

ЗМІСТОВНА АКСІОМАТИЧНА ТЕОРІЯ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Два підходи до питання обґрунтування арифметики натуральних чисел

Натуральні числа використовують для двох головних цілей – для *лічби* і для *впорядкування.*

Найпростішими конкретними представниками цих чисел можна вважати ряди рисочок

$$|,\ ||,\ |||,\ ||||,\ \ldots$$

Перелічуючи (скінчену) множину об’єктів, ми кожному об’єкту ставимо у відповідність деяку рисочку, тобто встановлюємо взаємно однозначну відповідність між даною множиною і множиною рисочок. Впорядковуючи множину, ми нумеруємо всі її елементи у відповідності з послідовністю рисочок як перший, другий, третій і т.д. Основні властивості натуральних чисел можуть бути описані і вивчені з будь-якої з цих двох точок зору.

Причому перша приводить до теорії *кардинальних* чисел в теорії множин (Г. Кантор), згідно якої *натуральне число – це клас рівнопотужних множин*, друга – до теорії *порядкових* чисел (Дж. Пеано). Ми розглянемо другий підхід.

Будемо розглядати натуральні числа як об’єкти, які можна порівнювати за допомогою деякого відношення порядку “ $<$ ”. Будемо говорити, що a *передує* b, або b *слідує за* a, якщо $a < b$. Але розглянемо більш просте відношення – відношення “a *безпосередньо передує* b”, або “b *безпосередньо слідує за* a”. В нашій інтерпретації рисочками це означає, що b можна отримати з a шляхом приєднання однієї рисочки. Будемо говорити при цьому “b *слідує за* a” і записувати

$$b = a'.$$

Очевидно, що ми задали функцію (операцію), визначену на множині всіх натуральних чисел. Якими ж основними властивостями вона володіє?

Насамперед існує натуральне число, яке позначимо 1, що не слідує ні за яким натуральним числом. По-друге, кожне натуральне число b, відмінне від 1, слідує за єдиним натуральним числом a, тобто якщо $b = a_1'$ і $b = a_2'$, то $a_1 = a_2$; іншими словами, функція безпосереднього слідування “ $'$ ” взаємно однозначна. Нарешті, легко бачити, що застосовуючи функцію “ $'$ ” достатню кількість разів, будь-яке натуральне число можна отримати з 1. В більш точних теоретико-множинних термінах останнє означає, що якщо множина A містить число 1 і разом з кожним x число x', то A містить всі натуральні числа.

Вперше чітко виділив систему основних понять: а саме поняття натурального числа, поняття безпосереднього слідування одного числа за іншим в натуральному ряді, поняття початкового елемента натурального ряду (за який можна прийняти 0 або 1); і сформулював аксіоми, що пов`язують ці поняття італійський математик **Джузеппе Пеано** (1858 – 1932) в 1889 році.

Отже, *первинними термінами* теорії порядкових чисел є:

N – множина натуральних чисел, або *натуральний ряд*;

1 – *одиниця* – елемент множини **N**;

$'$ – *безпосереднє слідування* – унарна операція в **N**.

В систему аксіом натуральних чисел включимо також аксіоми бінарних операцій *додавання* “ + ” і *множення* “ · ” в множині **N**.

Означення. ***Натуральними числами*** називаються елементи будь-якої алгебри (**N**, $'$, $+$, $\cdot$, 1), де **N** – деяка множина, 1 – одиниця – елемент множини **N**, “ $'$ ” – символ унарної операції, “ + ” і “ · ” – символи бінарних операцій над елементами множини **N**, для якої виконуються такі властивості (аксіоми Пеано):

n₁. $1 \in \mathbf{N}$.

n₂. $\forall\, a \in \mathbf{N} \quad \exists!\ a' \in \mathbf{N}$.

n₃. $\forall\, a \in \mathbf{N} \quad a' \neq 1$.

n₄. $\forall\, a, b \in \mathbf{N} \quad a' = b' \Rightarrow a = b$.

n₅. **Аксіома індукції**. Якщо деяка підмножина $M \subset \mathbf{N}$ має властивості: а) $1 \in M$; б) $\forall\, a \quad a \in M \Rightarrow a' \in M$; то $M = \mathbf{N}$.

n₆. $\forall\, a \in \mathbf{N} \quad a + 1 = a'$.

n₇. $\forall\, a, b \in \mathbf{N} \quad a + b' = (a + b)'$.

n₈. $\forall\, a \in \mathbf{N} \quad a \cdot 1 = a$.

n₉. $\forall\, a, b \in \mathbf{N} \quad a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Аксіоми $\mathbf{n_1} - \mathbf{n_5}$ називають *аксіомами Пеано*.

Аксіоми $\mathbf{n_6}$, $\mathbf{n_7}$ – це *рекурсивне означення* операції додавання натуральних чисел. Дійсно, при знаходженні суми $a + c$ двох натуральних чисел у випадку $c = 1$, потрібно просто перейти до наступного до a елемента a'; і якщо вже відома сума $a + b$, то обчислення суми $a + b'$ зводиться до знаходження наступного до результату $a + b$.

Аналогічно, аксіоми $\mathbf{n_8}$, $\mathbf{n_9}$ – це *рекурсивне означення* операції множення натуральних чисел, коли спочатку описується правило множення числа a на 1 і визначається правило знаходження добутку $a \cdot b'$, коли вже відомий результат множення $a \cdot b$.

Приклад 1. *Маємо натуральний ряд*: 1, $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 4$, … *Обчислити*: $2 + 2$, $2 \cdot 2$.

За аксіомами $\mathbf{n_6}$ та $\mathbf{n_7}$, маємо $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = (2')' = 3' = 4$.

За аксіомами $\mathbf{n_8}$ та $\mathbf{n_9}$, $2 \cdot 2 = 2 \cdot 1' = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4$.

Аналогічно, можна означити операцію піднесення натурального числа до натурального степеня:

n_{10}. $\forall\, a \in \mathbf{N} \qquad a^1 = a$.

n_{11}. $\forall\, a, b \in \mathbf{N} \quad a^{b'} = a^b \cdot a$.

Найпростіші наслідки з аксіом $n_1 - n_5$

Теорема 1. *Будь-яке натуральне число* $a \neq 1$ *має попереднє число і притому тільки одне.*

Доведення. Позначимо через M множину, яка містить 1 і всі ті натуральні числа, які мають хоча б одне попереднє. $M \subset \mathbf{N}$.

$1 \in M$.

Нехай $a \in M$. Покажемо, що $a' \in M$.

Розглянемо a', воно має попереднім число a, отже, $a' \in M$.

За аксіомою індукції, $M = \mathbf{N}$.

Однозначність попередніх чисел випливає з аксіоми **n_4.** Теорему доведено.

Наслідок. *Будь-яке натуральне число* a *є або одиницею, або наступним до деякого іншого натурального числа.*

Теорема 2. $\forall\, a, b \in \mathbf{N} \qquad a' \neq b' \;\Rightarrow\; a \neq b$.

Доведення. Припустимо, що $a' \neq b'$, але $a = b$.

Тоді з умови $a = b$, в силу однозначності алгебраїчної операції $'$ (аксіома **n_2**) випливало б, що $a' = b'$, а це суперечить умові теореми.

Теорема 3. $\forall\, a, b \in \mathbf{N} \qquad a \neq b \;\Rightarrow\; a' \neq b'$.

Пропонуємо довести самостійно.

Теорема 4. $\forall\, a \in \mathbf{N} \qquad a' \neq a$.

Пропонуємо довести самостійно.

Основні властивості операції додавання натуральних чисел

Теорема 5. *Операція додавання натуральних чисел є алгебраїчною, тобто для будь-яких натуральних чисел* a, b *сума* $a + b$ *є натуральним числом, що визначається однозначно.*

Доведення. Зафіксуємо натуральне число a і проведемо індукцію по числу b. Позначимо через M множину тих натуральних чисел b, для яких сума $a + b$ є натуральним числом:

$$M = \{\, b \mid b \in \mathbf{N} : \quad a + b \in \mathbf{N} \quad \forall\, a \in \mathbf{N} \,\}.$$

$M \subset \mathbf{N}$.

Покажемо, що $1 \in M$.

$a + 1 =$ (n_5) $= a'$, за аксіомою **n_2** a' є натуральним числом.

Отже, $1 \in M$.

Візьмемо довільне $b \in M$, тобто для нього сума $a + b$ є натуральним числом. Покажемо, що $b' \in M$.

$a + b' = (\mathbf{n_7}) = (a + b)'$. За припущенням індукції $a + b \in \mathbf{N}$, тоді, за аксіомою $\mathbf{n_2}$ $(a + b)' \in \mathbf{N}$, таким чином $a + b'$ є натуральним числом, отже, $b' \in M$.

За аксіомою індукції, $M = \mathbf{N}$.

Однозначність визначення суми натуральних чисел випливає з однозначності операції $'$. Теорему доведено.

Теорема 6. (*Асоціативний закон додавання*).

$$\forall\, a, b, c \in \mathbf{N} \qquad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Доведення. Зафіксуємо натуральні числа a і b і проведемо індукцію по числу c. Позначимо через M множину тих натуральних чисел c, для яких виконується рівність

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{1}$$

при будь-яких $a, b \in \mathbf{N}$:

$$M = \{\, c \mid c \in \mathbf{N} : \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall\, a, b \in \mathbf{N} \,\}.$$

$M \subset \mathbf{N}$.

Покажемо, що $1 \in M$.

$$(a + b) + 1 = (\mathbf{n_6}) = (a + b)' = (\mathbf{n_7}) = a + b' = (\mathbf{n_6}) = a + (b + 1)\,.$$

Отже, $1 \in M$.

Візьмемо довільне $c \in M$, тобто для нього $(a + b) + c = a + (b + c)$. Покажемо, що $c' \in M$.

$$(a + b) + c' = (\mathbf{n_7}) = ((a + b) + c)' = (\text{за припущенням індукції}) =$$
$$= (a + (b + c))' = (\mathbf{n_7}) = a + (b + c)' = (\mathbf{n_7}) = a + (b + c'),$$

отже, $c' \in M$.

За аксіомою індукції, $M = \mathbf{N}$. Теорему доведено.

Теорема 7. (*Комутативний закон додавання*).

$$\forall\, a, b \in \mathbf{N} \qquad a + b = b + a.$$

Доведення. Проведемо індукцію по числу b. Позначимо через M множину тих натуральних чисел b, для яких виконується рівність

$$a + b = b + a \tag{2}$$

при будь-якому $a \in \mathbf{N}$:

$$M = \{\, b \mid b \in \mathbf{N} : \quad a + b = b + a \quad \forall\, a \in \mathbf{N} \,\}.$$

$M \subset \mathbf{N}$.

Покажемо, що $1 \in M$, тобто що $a + 1 = 1 + a$.

Проведемо індукцію по числу a. Позначимо через S множину тих натуральних чисел a, для яких виконується рівність

$$a + 1 = 1 + a: \tag{3}$$

$$S = \{\, a \mid a \in \mathbf{N} : \quad a + 1 = 1 + a \,\}.$$

Оскільки $1 + 1 = 1 + 1$, то $1 \in S$.

Нехай $a \in S$. Покажемо, що $a' \in S$.

$$a' + 1 = (\mathbf{n_6}) = (a + 1) + 1 = \text{(за припущенням індукції)} =$$
$$= (1 + a) + 1 = (\mathbf{T_6}) = 1 + (a + 1) = (\mathbf{n_6}) = 1 + a'.$$

Отже, $a' \in S$.

За аксіомою індукції, $S = \mathbf{N}$, отже $1 \in M$.

Візьмемо довільне $b \in M$, тобто для нього $a + b = b + a$. Покажемо, що $c' \in M$.

$$a + b' = (\mathbf{n_7}) = (a + b)' = \text{(за припущенням індукції)} =$$
$$= (b + a)' = (\mathbf{n_7}) = b + a' = (\mathbf{n_6}) = b + (a + 1) = \text{(за доведеним вище)} =$$
$$= b + (1 + a) = (\mathbf{T_6}) = (b + 1) + a = (\mathbf{n_6}) = b' + a,$$

отже, $b' \in M$.

За аксіомою індукції, $M = \mathbf{N}$. Теорему доведено.

Теорема 8. (*Закон скорочення відносно додавання*).

$$\forall\, a, b, c \in \mathbf{N} \qquad a + c = b + c \;\Rightarrow\; a = b.$$

Пропонуємо довести самостійно.

Основні властивості операції множення натуральних чисел

Теорема 9. *Операція множення натуральних чисел є алгебраїчною, тобто для будь-яких натуральних чисел* a, b *добуток* $a \cdot b$ *є натуральним числом, що визначається однозначно.*

Теорема 10.(*Правий дистрибутивний закон множення відносно додавання*).

$$\forall\, a, b, c \in \mathbf{N} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Теорема 11. (*Лівий дистрибутивний закон множення відносно додавання*). $\forall\, a, b, c \in \mathbf{N} \qquad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$

Для доведення провести індукцію по b.

Теорема 12. (*Комутативний закон множення*).

$$\forall\, a, b \in \mathbf{N} \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

Теорема 13. (*Асоціативний закон множення*).

$$\forall\, a, b, c \in \mathbf{N} \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Для доведення провести індукцію по c.

З теорем 5 –13 випливає, що $(\mathbf{N}, +, \cdot)$ є комутативним півкільцем.

Приклад 2. Довести, що для довільних натуральних чисел a, b, c виконується твердження (*закон монотонності відносно додавання*):

$$a = b \;\Rightarrow\; a + c = b + c. \tag{4}$$

Зафіксуємо натуральні числа a, b і проведемо індукцію по числу c. Позначимо через M множину тих натуральних чисел c, для яких твердження (4) справедливе при будь-яких фіксованих $a, b \in \mathbf{N}$:

$$M = \{\, c \mid c \in \mathbf{N}: \quad (a = b \;\Rightarrow\; a + c = b + c) \quad \forall\, a, b \in \mathbf{N} \,\}.$$

$M \subset \mathbf{N}$.

Покажемо, що $1 \in M$.

$$a = b \;\Rightarrow\; (\text{за однозначністю операції } {}', \text{ аксіома } \mathbf{n_2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; a' = b' \Rightarrow (\mathbf{n_6}) \Rightarrow\; a + 1 = b + 1\,.$$

Отже, $a = b \;\Rightarrow\; a + 1 = b + 1$, тобто $1 \in M$.

Нехай $c \in M$, тобто для нього виконується твердження $a = b \;\Rightarrow\; a + c = b + c$. Покажемо, що $c' \in M$.

$$a = b \;\Rightarrow (\text{за припущенням індукції}) \Rightarrow\; a + c = b + c \;\Rightarrow (\mathbf{n_2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (a + c)' = (b + c)' \Rightarrow (\mathbf{n_7}) \Rightarrow\; a + c' = b + c',$$

отже, $c' \in M$.

За аксіомою індукції, $M = \mathbf{N}$. Властивість (4) доведено.

Приклад 3. Довести, що для довільних натуральних чисел a, b, c виконується твердження (*закон монотонності відносно множення*):

$$a = b \;\Rightarrow\; a \cdot c = b \cdot c.$$

Приклад 4. *Довести властивості операції піднесення до натурального степеня*:

1) $1^a = 1$,
2) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$,
3) $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$,
4) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

Відношення порядку на множині $\mathbf{N}$

Встановимо деякі допоміжні твердження (пропонуємо довести їх самостійно).

Теорема 14. $\forall\, a, b \in \mathbf{N} \quad a + b \neq 1$.

Теорема 15. $\forall\, a, b \in \mathbf{N} \quad a + b \neq b$.

Теорема 16 (***Закон трихотомії для додавання натуральних чисел***). *Для довільних натуральних чисел* a, b *справедливий один і тільки один з трьох випадків:*

1) $a = b$;
2) *існує таке натуральне число* k, *що* $b = a + k$;
3) *існує таке натуральне число* l, *що* $a = b + l$.

Причому числа k, l *визначаються однозначно.*

Означення. Натуральне число a називають *меншим* за натуральне число b (і записують $a < b$), якщо існує таке натуральне число v, що виконується рівність:

$$b = a + v.$$

Число b в цьому випадку називають *більшим* за натуральне число a і записують $b > a$.

Якщо $\overline{a < b}$, то кажуть, що “число a *більше або дорівнює* b” або “число b *менше або дорівнює* a”. Записують $a \geq b$ або $b \leq a$.

Теорема 17 (***Закон трихотомії для відношення*** **“ $<$ ”**). *Для довільних натуральних чисел* a, b *виконується одна і тільки одна з трьох умов:*

$$a = b\,,\quad a < b\,,\quad b < a\,.$$

Доведення випливає з означення відношення «менше» та закону трихотомії для додавання натуральних чисел (теорема 16).

Теорема 18. *Відношення “ $<$ ” в множині натуральних чисел є відношенням строгого лінійного порядку.*

Доведення. З теореми 17 випливає, що відношення «менше» в множині натуральних чисел є зв'язним та антирефлексивним. Покажемо, що воно є транзитивним.

Нехай $\forall\, a, b, c \in \mathbf{N}\quad a < b$ та $b < c$.

Тоді $b = a + v,\ \ c = b + u,$ де $v, u \in \mathbf{N}$. Звідси

$$c = (a + v) + u = a + (v + u) = a + z,$$

$z \in \mathbf{N}$, тому $a < c$. Теорему доведено.

Але існують і інші лінійні впорядкування множини $\mathbf{N}$.

Наприклад,

$$2, 4, 6, \ldots, 1, 3, 5, \ldots \qquad (5)$$

тобто $x \prec y \;\Leftrightarrow\; x$ – парне, y – парне, $x < y$,

або x – непарне, y – непарне, $x < y$,

або x – парне, y – непарне.

$$\ldots, 6, 4, 2, 1, 3, 5, \ldots \qquad (6)$$

тобто $x \prec y \;\Leftrightarrow\; x$ – парне, y – парне, $x > y$,

або x – непарне, y – непарне, $x < y$,

або x – парне, y – непарне.

Спробуємо знайти для відношення «менше» на множині $\mathbf{N}$ характеристику, що визначає це відношення з точністю до ізоморфізму, яка була б чисто внутрішньою, тобто формулювалась в термінах самого відношення «менше», без використання операції додавання.

Означення. Нехай M – непорожня підмножина множини натуральних чисел $\mathbf{N}$. Число $m \in M$ називають *найменшим елементом* або першим елементом множини M, якщо

$$\forall\, x \in M \qquad m \le x,$$

$$(\text{або}\ \ \forall\, x \in M \quad x \ne m \;\Rightarrow\; m < x\,).$$

Теорема 19. *Якщо лінійно впорядкована множина* M *має перший елемент, то він єдиний.*

Доведення. Нехай $\prec$ – відношення порядку на множині M. Припустимо, що в множині M два перших елементи m_1 та m_2, тобто $m_1 \ne m_2$. Множина M лінійно впорядкована, отже в ній виконується властивість зв'язності, і оскільки $m_1 \ne m_2$, то або $m_1 \prec m_2$, або $m_2 \prec m_1$.

Якщо $m_1 \prec m_2$, то m_2 не є першим елементом множини M. Аналогічно, неможливий випадок $m_2 \prec m_1$. Теорему доведено.

Означення. Лінійно упорядкована множина називається *цілком упорядкованою*, якщо кожна непорожня її підмножина має перший елемент.

Множина **N**, упорядкована відношенням (6) не має першого елемента.

Встановимо такі властивості відношення «менше», які будуть пов'язувати його з операцією «безпосереднього слідування» та одиницею. Ці властивості можна розуміти як рекурсивні характеристики відношення “ $<$ ” в множині натуральних чисел.

Теорема 20 (***Рекурсивні характеристики відношення*** **“ $<$ ”** ***в множині натуральних чисел***)**.** *Для довільних натуральних чисел a, b справедливі співвідношення*

1) $\overline{a < 1}$;

2) $a < b' \iff a \le b$.

Доведення. Доведемо твердження 1. Припустимо, що $a < 1$, це означає, існує таке натуральне число v, що виконується рівність: $1 = a + v$, але це суперечить теоремі 14. Отже $\overline{a < 1}$.

Доведемо твердження 2. *Достатність*. Нехай $a \le b$, це означає, що $a < b$ або $a = b$.

Якщо $a < b$, то існує $v \in \mathbf{N}$ таке, що $b = a + v$, звідси

$$b' = (a + v)' = a + v',$$

оскільки $v' \in \mathbf{N}$, то $a < b'$.

Якщо $a = b$, то $b' = a' = a + 1$ і оскільки $1 \in \mathbf{N}$, то знов $a < b'$.

Отже, якщо $a \le b$, то $a < b'$.

Необхідність. Нехай $a < b'$, це означає, існує таке натуральне число u, що виконується рівність: $b' = a + u$. Оскільки $u \in \mathbf{N}$, то за наслідком до теореми 1, $u = 1$ або u є наступним для деякого натурального x.

Якщо $u = 1$, то $b' = a + 1 = a'$, звідси $b = a$.

Якщо $u = x'$, то $b' = a + x' = (a + x)'$, звідси $b = a + x$, тобто $a < b$.

Таким чином, якщо $a < b'$, то $a \le b$.

Теорему доведено.

Наслідок. *Для довільних натуральних чисел a, b справедливі співвідношення*

1) $1 \le a$;

2) $b' \le a \iff b < a$;

3) $b < b'$ *і не існує такого натурального числа c, для якого $b < c < b'$.*

Теорема 21. *Система* $(\mathbf{N}, <)$ *є цілком впорядкованою.*

Доведення. Система $(\mathbf{N}, <)$ натуральних чисел, в якій визначене відношення менше, є лінійно впорядкованою (за теоремою 17). Нехай A – довільна непорожня підмножина множини $\mathbf{N}$. Припустимо, що A не має першого елемента.

Утворимо множину B таких натуральних чисел, які строго менші за будь-який елемент множини A:

$$B = \{ x \mid x \in \mathbf{N} : \quad x < a \quad \forall\, a \in A \}.$$

Тоді $B \subseteq \overline{A} = \mathbf{N} \setminus A$. Дійсно, якщо $x \in B$, але $x \notin \overline{A}$, то $x \in A$ і тоді $x < x$, що неможливо за законом трихотомії.

Доведемо індукцією за x, що $B = \mathbf{N}$.

Покажемо, що $1 \in B$.

За наслідком до теореми 20, $1 \le a \quad \forall\, a \in \mathbf{N}$. Отже $1 \le a \quad \forall\, a \in A$. Якби $1 \in A$, то 1 був би першим елементом в множині A, що неможливо. Отже $1 \notin A$ і $1 < a \quad \forall\, a \in A$. Тобто $1 \in B$.

Нехай $x \in B$, тобто $x < a \quad \forall\, a \in A$. За наслідком до теореми 20, $x' \le a$. Якби при цьому $x' \in A$, то x' був би першим елементом множини A, що неможливо. Отже $x' \notin A$ і $x' < a \quad \forall\, a \in A$. Тобто $x' \in B$.

За аксіомою індукції, $B = \mathbf{N}$.

Тоді $\mathbf{N} \subseteq \overline{A}$, звідки $A = \varnothing$, що суперечить вибору множини A. Теорему доведено.

Теорему 21 частіше формулюють так:

Теорема 21′ (*Принцип найменшого числа*). *В кожній непорожній підмножині* A *множини натуральних чисел є найменше число*, *тобто число*, *яке менше від будь-якого іншого числа множини* A.

Множина **N**, упорядкована відношенням (5) також є лінійно впорядкованою, але в ній є елементи, які не мають безпосередньо попереднього елемента.

В будь-якій цілком впорядкованій множині можна ввести операцію «безпосередньо наступного» для будь-якого елемента цієї множини. Позначивши перший елемент цієї множини через 1 і додавши властивості теореми 20, дістанемо визначення системи натуральних чисел в термінах впорядкувань.

Означення. Нехай $(M, \prec)$ – впорядкована множина. Елемент a називають *безпосередньо попереднім* до елемента b, а елемент b *безпосередньо наступним* за a, якщо $a \prec b$ і не існує елемента $c \in M$, для якого $a \prec c \prec b$.

Означення. Систему $(\mathbf{N}, ', \prec, 1)$ називають системою натуральних чисел, якщо

1) $(\mathbf{N}, \prec)$ – цілком впорядкована множина,

2) для кожного елемента $x \in \mathbf{N}$ існує безпосередньо наступний елемент x';

3) кожний елемент $x \in \mathbf{N}$ $(x \neq 1)$ має безпосередньо попередній елемент.

Означення. Множину натуральних чисел , упорядковану відношенням “ $<$ ” називають *натуральним рядом*:

$$1,\ 1' = 2,\ 2' = 3,\ 3' = 4,\ \ldots$$

Теорема 22 (***Зв`язок між відношенням “ $<$ ” і арифметичними операціями***)**.** *Для довільних* $a, b, c \in \mathbf{N}$ *справедливі твердження:*

1) $a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c$;

2) $a < b \ \Rightarrow \ a \cdot c < b \cdot c$;

3) $a < b \ \Rightarrow \ a^c < b^c$.

Теорема 23 (***Принцип Архімеда***)**.** *Для довільних* $a, b \in \mathbf{N}$ *існує таке натуральне число* n*, що* $na > b$*.*

Доведення. Нехай $a, b \in \mathbf{N}$. За теоремою 17, можливий один з трьох випадків: $a = b$, або $a < b$, або $b < a$.

Якщо $a = b$, то достатньо взяти $n > 1$. Тоді $na > a = b$.

Якщо $b < a$, то візьмемо $n = 1$. Тоді $na = a > b$.

Якщо $a < b$, то потрібно взяти $n > b$. Тоді $na > ba \geq b$. Теорему доведено.

Метод математичної індукції

На аксіому індукції спирається плідний і широко вживаний метод доведення математичних тверджень, який називається *методом математичної індукції.*

Для обгрунтування цього методу наведемо ряд теорем.

Теорема 24 (***Принцип математичної індукції***, ***основна форма***)**.** *Якщо деяке твердження* P*, що залежить від натурального параметра* n*, правильне для числа* 1 *і якщо з припущення, що воно правильне для натурального числа* k*, випливає його правильність і для наступного числа* k'*, то твердження* P *правильне для будь-якого натурального числа* n*.*

Доведення. Нехай для твердження $P(n)$ виконуються умови:

1) $P(1)$ – правильне;

2) $P(k)$ – правильне $\Rightarrow$ $P(k')$ – правильне.

Покажемо, що P правильне для будь-якого натурального n.

Позначимо через M множину тих натуральних чисел, для яких твердження P правильне.

$1 \in M$ за умовою.

Нехай $k \in M$, тоді за умовою теореми, $k' \in M$.

За аксіомою індукції, $M = \mathbf{N}$. Теорему доведено.

Отже, щоб довести справедливість якогось твердження для будь-якого натурального числа n методом математичної індукції потрібно:

1) довести, що це твердження справедливе для $n = 1$;

2) припустивши справедливість даного твердження для $n = k$, довести його справедливість для $n = k' = k + 1$;

3) зробити висновок про справедливість цього твердження для всіх натуральних чисел.

Теорема 25 (***Друга форма принципу математичної індукції***). *Якщо деяке твердження* P, *що залежить від натурального параметра* n, *правильне для числа* 1 *і якщо з припущення, що воно правильне для всіх натуральних чисел, менших ніж* k, *випливає його правильність і для числа* k, *то твердження* P *правильне для будь-якого натурального числа* n.

Доведення. Нехай для твердження $P(n)$ виконуються умови:

1) $P(1)$ – правильне;

2) P правильне для всіх l, $l < k \Rightarrow P(k)$ – правильне.

Припустимо, що твердження P правильне не для всіх натуральних чисел. Нехай M – множина всіх тих натуральних чисел a, для кожного з яких твердження P неправильне. Внаслідок припущення, множина M – непорожня. Отже, за теоремою 21, в ній є найменше число r. Для числа r твердження P неправильне.

А для всіх натуральних чисел l, що задовольняють умову $l < r$, твердження P правильне. Але в такому разі, за умовою теореми, твердження P правильне і для числа r. Отримали суперечність. Отже, припущення, що твердження P правильне не для всіх натуральних чисел, невірне. Теорему доведено.

Інколи твердження, що розглядається не виконується при $n = 1$, але стає справедливим при $n \geq 2$ або взагалі при $n \geq n_0$, де n_0 – деяке натуральне число, відмінне від 1. В цьому випадку для доведення спираються на наступні теореми.

Теорема 26 (***Узагальнення основної форми принципу математичної індукції***). *Якщо деяке твердження* P, *що залежить від натурального параметра* n, *правильне для певного натурального числа* n_0 *і якщо з припущення, що воно правильне для натурального числа* $k \geq n_0$, *випливає його правильність і для числа* k', *то твердження* P *правильне для будь-якого натурального числа* $n \geq n_0$.

Тобто, якщо для твердження $P(n)$ виконуються умови:

1) $P(n_0)$ – правильне;

2) $P(k)$ – правильне $(k \geq n_0) \Rightarrow P(k')$ – правильне,

то $P(n)$ – правильне $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $(n \geq n_0)$.

Доведення. Припустимо, що умови теореми здійснюються, але твердження P правильне не для всіх натуральних чисел $n \geq n_0$. Нехай M – множина всіх тих натуральних чисел $a \geq n_0$, для кожного з яких твердження P неправильне. За припущенням, множина M – непорожня. Отже, за теоремою 21, в ній є найменше число $r \geq n_0$. Для числа r твердження P неправильне. Отже, $r > n_0 \geq 1$, і тому, за теоремою 1, існує натуральне число l, яке безпосередньо передує r, тобто $l' = r$.

Покажемо, що $l \geq n_0$. Якби $l < n_0$, то за наслідком до теореми 20, $l' \leq n_0$, тобто $r \leq n_0$, що не можливо. Отже $l \geq n_0$.

Оскільки $r = l' = l + 1$, то $l < r$, і тому l не належить до множини M, тобто для l твердження P правильне. Але тоді, за умовою теореми, твердження P правильне й для числа $l' = r$. Прийшли до суперечності: для числа r твердження P одночасно і правильне і неправильне. Отже, припущення, що твердження P правильне не для всякого натурального числа $n \geq n_0$, хибне. Теорему доведено.

Теорема 27 (***Узагальнення другої форми принципу математичної індукції***)**.** *Якщо деяке твердження P, що залежить від натурального параметра n, правильне для натурального числа n_0 і якщо з припущення, що воно правильне для всіх натуральних чисел l, які задовольняють умову $n_0 \leq l < k$, випливає його правильність і для числа k, то твердження P правильне для будь-якого натурального числа $n \geq n_0$.*

Тобто, якщо для твердження $P(n)$ виконуються умови:

1) $P(n_0)$ – правильне;

2) P правильне для всіх l, $n_0 \leq l < k \Rightarrow P(k)$ – правильне,

то $P(n)$ – правильне $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $(n \geq n_0)$.

Доведення. Припустимо, що умови теореми здійснюються, але твердження P правильне не для всіх натуральних чисел $n \geq n_0$. Нехай M – множина всіх тих натуральних чисел $a \geq n_0$, для кожного з яких твердження P неправильне. За припущенням, множина M – непорожня. Отже, в ній є найменше число r. Для числа r твердження P неправильне.

А для всіх натуральних чисел l, що задовольняють умову $n_0 \leq l < r$, твердження P правильне. Але в такому разі, за умовою теореми, твердження P правильне і для числа r. Прийшли до суперечності. Отже, припущення, що твердження P правильне не для всіх натуральних чисел $n \geq n_0$, хибне. Теорему доведено.

Приклад 5. *Довести, що для довільного натурального n виконується твердження*

$$1^2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + \ldots + n^2 (n+1)! = (n-1)(n+2)! + 2\,.$$

1) При $n = 1$ твердження має вигляд:

$$1^2 \cdot 2! = 0! + 2\,,$$

і є справедливим.

2) Припустимо, що твердження справедливе при $n = k$, тобто

$$1^2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + ... + k^2(k+1)! = (k-1)(k+2)! + 2 .$$

Покажемо, що воно справедливе при $n = k + 1$:

$$\underbrace{1^2 \cdot 2! + 2^2 \cdot 3! + ... + k^2(k+1)!} + (k+1)^2(k+1+1)! = \text{(\textit{за припущенням індукції})} =$$

$$= (k-1)(k+2)! + 2 + (k+1)^2(k+2)! =$$

$$= (k-1+k^2+2k+1)\cdot(k+2)! + 2 = (k^2+3k)\cdot(k+2)! + 2 =$$

$$= k\cdot(k+2)!\cdot(k+3) + 2 = k\cdot(k+3)! + 2 =$$

$$= \big((k+1)-1\big)\cdot\big((k+1)+2\big)! + 2 ,$$

тобто твердження справедливе при $n = k + 1$.

За теоремою 24, твердження справедливе для всіх $n \in \mathbf{N}$.

Приклад 6. *Довести, що для довільного натурального n виконується твердження*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} .$$

1) При $n = 1$ твердження має вигляд:

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} ,$$

і є справедливим.

2) Припустимо, що твердження справедливе при $n = k$, тобто

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} .$$

Покажемо, що воно справедливе при $n = k + 1$:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{2k}} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} = \text{(\textit{за припущенням індукції})} =$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} \underbrace{- \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)+1} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} ,$$

тобто твердження справедливе при $n = k + 1$.

За теоремою 24, твердження справедливе для всіх $n \in \mathbf{N}$.

Приклад 7. *Довести, що* $\forall\ n \in \mathbf{N}$

$$\left(3^{3n+2} + 2^{4n+1}\right) \vdots 11 .$$

1) При $n = 1$ твердження має вигляд:

$$3^{3+2} + 2^{4+1} = 3^5 + 2^5 = 275 \ \vdots 11 .$$

2) Припустимо, що твердження справедливе при $n = k$, тобто

$$\left(3^{3k+2} + 2^{4k+1}\right) \vdots 11 .$$

Покажемо, що воно справедливе при $n = k + 1$:

$$3^{3(k+1)+2} + 2^{4(k+1)+1} = 3^{3k+2}\cdot 3^3 + 2^{4k+1}\cdot 2^4 = 27\cdot\underbrace{\left(3^{3k+2} + 2^{4k+1}\right)}_{P(k)\ \vdots 11} - \underbrace{11\cdot 2^{4k+1}}_{\vdots 11} ,$$

тобто $P(k+1) \ \vdots 11$.

За теоремою 24, твердження справедливе для всіх $n \in \mathbf{N}$.

Приклад 8. *Довести, що* $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n > 4$ *виконується нерівність*

$$2^n > n^2 .$$

1) При $n = 5$ твердження має вигляд:

$$2^5 > 5^2 ,$$

і є справедливим.

2) Припустимо, що твердження справедливе при $n = k$ ($k > 4$), тобто

$$2^k > k^2 . \tag{7}$$

Покажемо, що воно справедливе при $n = k + 1$, тобто доведемо, що

$$2^{k+1} > (k+1)^2 . \tag{8}$$

Зауважимо, що суттєвим в цій задачі є те, що саме з нерівності (7) потрібно вивести нерівність (8), тому слід чітко дотримуватись цієї логіки.

$$2^k > k^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 \quad \Rightarrow \quad 2^{k+1} > 2k^2 ,$$

Залишається довести, що $2k^2 > (k+1)^2$, це можна зробити двома способами:

а) розглянемо різницю

$$2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - k^2 - 2k - 1 = k^2 - 2k - 1 = (\underbrace{k-1}_{>3})^2 - 2 > 0 ,$$

отже $2k^2 > (k+1)^2$;

б) оцінимо ліву частину нерівності

$$2k^2 = k^2 + k^2 + 2k + 1 - 2k - 1 = (k+1)^2 + k^2 - 2k - 1 =$$

$$= (k+1)^2 + (k-1)^2 - 2 > (k+1)^2 , \quad \text{оскільки} \quad (\underbrace{k-1}_{>3})^2 - 2 > 0 \quad \text{при} \;\; k > 4.$$

Таким чином, $2^{k+1} > (k+1)^2$, тобто твердження справедливе при $n = k + 1$.

За теоремою 26, твердження справедливе для всіх $n \in \mathbf{N}$, $n > 4$.

Характеристика системи аксіом Пеано

Раніше ми відмічали, що аксіоматичну теорію натуральних чисел вважають несуперечливою.

Аксіоматична теорія натуральних чисел є неповною.

Теорема 27. *Аксіоматична теорія натуральних чисел* (*на основі системи аксіом Пеано*) *категорична*.

Покажемо, що *система аксіом Пеано є незалежною*.

Для доведення незалежності аксіоми A_i від решти аксіом даної системи $\mathcal{A}$ треба побудувати модель T, в якій всі аксіоми системи $\mathcal{A}$ виконуються, а аксіома A_i – ні. Дійсно, якби аксіома A_i була вивідною з решти аксіом системи $\mathcal{A}$, то вона також виконувалась би на моделі T.

Незалежність аксіоми $\mathbf{n_1}$. $1 \in \mathbf{N}$.

Розглянемо множину

$$A = \mathbf{N} \setminus \{1\} = \{\, 2, 3, 4, \ldots \},$$

в ній всі аксіоми Пеано виконуються, а аксіома $\mathbf{n_1}$ – не виконується.

Незалежність аксіоми $\mathbf{n_2}$. $\forall\, a \in \mathbf{N} \quad \exists! \quad a' \in \mathbf{N}$.

Розглянемо множину

$$B = \mathbf{N} \cup \left\{ \frac{3}{2} \right\} = \{1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3,\ \ldots \},$$

в якій операцію $'$ визначено так

$$1' = \frac{3}{2},\ \left(\frac{3}{2}\right)' = 2,\ 2' = 3,\ \ldots$$

В множині B всі аксіоми Пеано виконуються, крім аксіоми $\mathbf{n_2}$.

Незалежність аксіоми $\mathbf{n_3}$. $\forall\ a \in \mathbf{N}\quad a' \neq 1$.

Розглянемо множину $C = \{\ 1, 2, 3\ \}$, в якій операцію $'$ визначено так

$$1' = 2,\quad 2' = 3,\quad 3' = 1.$$

В множині C аксіома $\mathbf{n_3}$ не виконується, оскільки в ній всі елементи, включаючи й 1, мають попередній елемент. А всі інші аксіоми Пеано, крім аксіоми $\mathbf{n_3}$**,** виконуються. Дійсно, множина C містить 1, для кожного елемента з C визначено попередній елемент, кожен елемент множини C слідує не більш, ніж за одним елементом цієї множини. Якщо побудувати підмножину M, яка б містила 1 та наступні до всіх своїх елементів, то дістанемо всю множину C .

Покажемо, як в множині C визначаються операції додавання та множення. Відповідно до аксіоми $\mathbf{n_6}$ можемо заповнити перший стовпчик таблиці додавання:

$$1 + 1 = 1' = 2,\qquad 2 + 1 = 2' = 3,\qquad 3 + 1 = 3' = 1.$$

За аксіомою $\mathbf{n_7}$ заповнимо всі інші стовпці таблиці додавання:

$1 + 2 = 1 + 1' = (1 + 1)' = 2' = 3,$

$1 + 3 = 1 + 2' = (1 + 2)' = 3' = 1, \ldots$

тобто починаючи з другого стовпця в кожній комірці таблиці додавання стоїть елемент, наступний до елемента попередньої комірки. Аналогічно, за аксіомами $\mathbf{n_8}$ та $\mathbf{n_9}$ заповнимо таблицю множення в множині C.

+	**1**	**2**	**3**
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

×	**1**	**2**	**3**
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	3

Існування множини C доводить незалежність аксіоми $\mathbf{n_3}$ від решти аксіом Пеано.

Незалежність аксіоми $\mathbf{n_4}$. $\forall\ a, b \in \mathbf{N}\quad a' = b' \Rightarrow a = b$.

Розглянемо множину $D = \{\ 1, 2, 3, 4\ \}$, операцію $'$ визначимо так

$$1' = 2,\quad 2' = 3,\quad 3' = 4,\quad 4' = 2.$$

В множині D аксіома $\mathbf{n_4}$ не виконується, оскільки 2 має два попередніх елементи. А всі інші аксіоми Пеано виконуються.

Самостійно покажіть, як в множині D визначаються операції додавання та множення:

+	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

×	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Існування множини D доводить незалежність аксіоми $\mathbf{n_4}$ від решти аксіом Пеано.

Роль аксіоми індукції у побудові арифметики натуральних чисел

Для доведення незалежності аксіоми $\mathbf{n_5}$ (аксіоми індукції) від решти аксіом Пеано побудуємо декілька моделей, щоб показати, що невиконання аксіоми індукції призводить до втрати багатьох важливих властивостей арифметики натуральних чисел.

Модель N^1. Розглянемо множину

$$N^1 = \left\{ \frac{a+1}{2} \mid a \in \mathbf{N} \right\}.$$

За одиничний елемент візьмемо число $1 = \dfrac{1+1}{2}$.

Операції додавання $\oplus$ та множення $\otimes$ визначимо так: $\forall\ \alpha, \beta \in N^1$

$$\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta,$$

$$\alpha \otimes \beta = \frac{[\,2\alpha \cdot \beta\,]}{2},$$

де $[x]$ – ціла частина числа x. Тобто операція $\oplus$ зводиться до звичайного додавання, для знаходження добутку $\otimes$ потрібно знайти цілу частину від подвоєнного звичайного добутку цих елементів та результат поділити на 2.

Наприклад, $\frac{3}{2} \otimes \frac{3}{2} = \dfrac{\left[2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right]}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Легко бачити, що якщо α або β є цілим числом, то добуток $\alpha \otimes \beta$ зводиться до звичайного добутку.

Покажемо, що аксіома індукції $\mathbf{n_5}$ в множині N^1 не виконується. Дійсно, множина N^1 містить звичайну множину $\mathbf{N}$ натуральних чисел.

Розглянемо множину $M = \mathbf{N} \subset N^1$:

а) $1 \in M$;

б) $\forall\ \alpha \in M \;\Rightarrow\; \alpha \in \mathbf{N} \;\Rightarrow\; \alpha' = \alpha + 1 \in \mathbf{N} \;\Rightarrow\; \alpha' \in M$,

але $M \neq N^1$.

Перевіримо, чи виконуються в множині N^1 решта аксіом натуральних чисел:

n₁. $1 = \frac{1+1}{2} \in N^1$.

n₂, n₆. $\forall\ \alpha \in N^1 \quad \alpha = \frac{a+1}{2}$

$$\alpha' = \alpha + 1 = \frac{a+1}{2} + \frac{1+1}{2} = \frac{a''+1}{2} \in N^1, \text{ оскільки } a'' \in \mathbf{N}.$$

n₃. $\alpha' = \frac{a''+1}{2} \neq \frac{1+1}{2} = 1$, оскільки $a'' \neq 1$ $(a \in \mathbf{N})$.

n₄. $\forall\ \alpha, \beta \in N^1 \quad \alpha = \frac{a+1}{2}, \quad \beta = \frac{b+1}{2}$

$$\alpha' = \beta' \;\Rightarrow\; \frac{a''+1}{2} = \frac{b''+1}{2} \;\Rightarrow\; a'' = b'' \;\Rightarrow\; a' = b' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a = b \;\Rightarrow\; \frac{a+1}{2} = \frac{b+1}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = \beta.$$

n₇. $\forall\ \alpha, \beta \in N^1 \quad \alpha = \frac{a+1}{2}, \quad \beta = \frac{b+1}{2}$

$$\alpha + \beta' = \frac{a+1}{2} + \frac{b''+1}{2} = \frac{a+1+b+1}{2} + \frac{1+1}{2} = (\alpha + \beta)'.$$

n₈. $\forall\ \alpha \in N^1 \qquad \alpha \otimes 1 = \alpha \cdot 1 = \alpha$.

n₉. $\forall\ \alpha, \beta \in N^1 \quad \alpha = \frac{a+1}{2}, \quad \beta = \frac{b+1}{2}$

$$\alpha \otimes \beta' = \frac{a+1}{2} \otimes \frac{b''+1}{2} = \frac{\left[2\frac{(a+1)(b''+1)}{2\cdot 2}\right]}{2} =$$

$$= \frac{\left[\frac{(a+1)(b+1+2)}{2}\right]}{2} = \frac{\left[\frac{(a+1)(b+1)}{2} + (a+1)\right]}{2} =$$

$$= \frac{\left[\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right] + (a+1)}{2} = \frac{\left[2\frac{(a+1)(b+1)}{2\cdot 2}\right]}{2} + \frac{a+1}{2} = \alpha \otimes \beta \oplus \alpha.$$

Існування моделі N^1 доводить незалежність аксіоми **n₅** від решти аксіом Пеано.

Відмітимо, що в множині N^1 не виконуються асоціативний та дистрибутивний закони множення:

$$\left(\frac{3}{2} \otimes \frac{3}{2}\right) \otimes 2 = \frac{\left[2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\right]}{2} \otimes 2 = \frac{4}{2} \otimes 2 = 2 \otimes 2 = 4,$$

але $\frac{3}{2}\otimes\left(\frac{3}{2}\otimes 2\right)=\frac{3}{2}\otimes\frac{\left[2\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\right]}{2}=\frac{3}{2}\otimes 3=\frac{\left[2\cdot\frac{3}{2}\cdot 3\right]}{2}=\frac{9}{2}$.

Аналогічно, $\left(\frac{3}{2}\oplus\frac{3}{2}\right)\otimes\frac{3}{2}=3\otimes\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, але $\frac{3}{2}\otimes\frac{3}{2}\ \oplus\ \frac{3}{2}\otimes\frac{3}{2}=2\oplus 2=4$.

Отже, без аксіоми індукції ці закони довести неможливо.

Модель N^2. Розглянемо множину

$$N^2=\left\{(n,x)\,\middle|\ n\in\mathbf{N},\quad x=0\quad\text{або}\quad x=1\right\}.$$

За одиницю візьмемо пару $(1,\,0)$, а операції визначимо так:

$$(n,x)\oplus(m,y)=\begin{cases}(n+m,x), & \text{якщо } x\cdot y=0,\\ (m,1), & \text{якщо } x\cdot y=1.\end{cases}$$

$$(n,x)\otimes(m,y)=\begin{cases}(n\cdot m,y), & \text{якщо } x=0,\\ (n,1), & \text{якщо } x=1.\end{cases}$$

Аксіома індукції $\mathbf{n_5}$ в множині N^2 не виконується. Для цього розглянемо множину

$$M=\left\{(n,0)\,\middle|\ n\in\mathbf{N}\right\}.$$

$M\subset N^2$,

а) $(1,\,0)\in M$;

б) $\forall\ (n,0)\in M\ \Rightarrow\ (n,0)\oplus(1,0)=(n+1,0)=(n',0)\in M$,

але $M\neq N^2$.

Покажіть, що в множині N^2 виконуються решта аксіом натуральних чисел.

Існування моделі N^2 доводить незалежність аксіоми $\mathbf{n_5}$ від решти аксіом Пеано.

Відмітимо, що в множині N^2 не виконуються комутативні закони додавання та множення, асоціативний закон додавання та дистрибутивний закон множення.

Підтвердіть це прикладами.

Отже, з існування моделей N^1 та N^2 випливає, що відомі властивості арифметичних дій не можуть бути обґрунтованими без аксіоми індукції.

Модель N^3. Розглянемо множину

$$N^3=\left\{(a,b)\,\middle|\ a,b\in\mathbf{N}\right\}.$$

За одиничний елемент візьмемо пару $(1,\,1)$, а операції визначимо так:

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,\,b+d),$$
$$(a,b)\otimes(c,d)=(a\cdot c,\,b\cdot d).$$

Аксіома індукції $\mathbf{n_5}$ в множині N^3 не виконується. Дійсно, розглянемо множину

$$M=\left\{(a,a)\,\middle|\ a\in\mathbf{N}\right\}.$$

$M\subset N^3$,

а) $(1,\,1)\in M$;

б) $\forall\ (a,\,b)\in M \ \Rightarrow\ a=b \ \Rightarrow\ a'=b' \ \Rightarrow\ (a,\,b)'\in M,$

але $M\neq N^3$.

Покажіть, що в множині N^3 виконуються решта аксіом натуральних чисел.

Існування моделі N^3 доводить незалежність аксіоми $\mathbf{n_5}$ від решти аксіом Пеано.

В множині N^3 розглянемо пари $(2,\ 5)$ та $(3,\ 1)$. Очевидно, що $(2,\,5)\neq(3,\,1)$. Спробуємо встановити, яка з них менша.

Але не існує такого $x\in\mathbf{N}$, щоб

$$(3,\,1)+(x,\,y)=(2,\,5),$$

оскільки $3+x\neq 2$.

І не існує такого $y\in\mathbf{N}$, щоб

$$(2,\,5)+(x,\,y)=(3,\,1),$$

оскільки $5+y\neq 1$.

Отже, в моделі N^3 є непорівнянні між собою елементи, тобто теорію нерівностей в арифметиці натуральних чисел не можна обґрунтувати без аксіоми індукції.

Модель $\boldsymbol{N^4}$. Розглянемо множину

$$N^4=\left\{\ \frac{a}{b}\ \middle|\ a,b\in\mathbf{N},\quad a\geq b\ \right\}.$$

За одиничний елемент візьмемо число $1=\dfrac{1}{1}$.

Операції додавання $\oplus$ та множення $\otimes$ визначимо так:

$$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Покажіть, що аксіома індукції $\mathbf{n_5}$ в множині N^4 не виконується, а решта аксіом натуральних чисел виконуються.

Покажіть, що в множині N^4 не існує простих елементів.

Модель $\boldsymbol{N^5}$. Розглянемо множину

$$N^5=\left\{(a,\,b)\ \middle|\ a,b\in\mathbf{N},\quad a\leq b\ \right\}.$$

За одиничний елемент візьмемо пару $(1,\,1)$, а операції визначимо так:

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,\,b+d),$$

$$(a,b)\otimes(c,d)=(a\cdot c,\,b\cdot d).$$

Покажіть, що аксіома індукції $\mathbf{n_5}$ в множині N^5 не виконується.

Покажіть, що в множині N^5 порушується Основна теорема арифметики про однозначність розкладання натуральних чисел на прості множники.

Моделі N^4, N^5 свідчать про те. що теорію подільності натуральних чисел не можна обґрунтувати без аксіоми індукції.

Несуперечливість арифметики

Раніше відмічали, що несуперечливість неформальної (змістовної) аксіоматичної теорії можна встановити, лише вказавши яку-небудь модель з об'єктів теорії, несуперечливість якої вже доведено, але для аксіоматичної теорії натуральних чисел такої моделі немає.

В зв'язку з цим розглядають проблему несуперечливості формальної аксіоматичної теорії натуральних чисел.

В 1931 році К. Гедель[1] довів, що несуперечливість формальної аксіоматичної теорії натуральних чисел не може бути обґрунтована засобами цієї ж теорії. Він довів, що будь-яка формальна аксіоматична теорія, яка включає арифметику натуральних чисел, неповна. Звідси випливає, що формальна арифметика некатегорична. На перший погляд цей результат суперечить теоремі про те, що аксіоматична теорія натуральних чисел категорична. Але формальну і змістовну арифметику неможна ототожнювати. Між ними є принаймні одна суттєва відмінність, яка пов'язана з аксіомою індукції. З кожною формулою формальної арифметики співставляють множину тих натуральних чисел, для яких дана формула істинна. При цьому тлумаченні аксіома індукції в змістовній і формальній арифметиці дозволяє встановити, при виконанні певних умов, що даною властивістю – належністю до деякої множини – володіють всі натуральні числа. В змістовній арифметиці розглядаються будь-які властивості натуральних чисел без яких-небудь обмежень, в формальній – лише властивості, пов'язані з формулами цієї теорії. А це не одне й те саме.

[1]Курт Фрідріх Гедель (1906-1978) – австрійський та американський логік, математик

Практичне заняття 1
ВІДНОШЕННЯ НА МНОЖИНАХ. АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ. ТІЛО КВАТЕРНІОНІВ

Основні поняття. *Відношення на множинах, відношення еквівалентності, класи еквівалентності, відношення порядку, лінійно впорядкована множина, алгебраїчні операції, алгебраїчні системи, алгебри, однотипні алгебраїчні системи, ізоморфізм алгебраїчних систем, розширення алгебри, півгрупа, група, півкільце, кільце, тіло, поле. Кватерніон, скалярна і векторна частини кватерніона, спряжений кватерніон, норма кватерніона, ліва і права частки від ділення.*

Основні формули і теореми. *Властивості класів еквівалентності, теореми, що пов`язують відношення еквівалентності з розбиттям множини. Найпростіші властивості груп, кілець, полів, критерій підполя, властивості ізоморфізму груп. Властивості спряжених кватерніонів, формули додавання, множення та ділення кватерніонів.*

Результати навчання. Студент повинен **знати** зміст основних понять, формул та теорем, **вміти** моделювати та визначати властивості бінарних відношень, будувати класи еквівалентності. З`ясовувати, чи є задана множина півгрупою, півкільцем, тілом. Виконувати алгебраїчні перетвореннння в групах і кільцях. Встановлювати ізоморфну відповідність між групами, кільцями, полями. Виконувати арифметичні дії над кватерніонами.

Теоретична підготовка до практичного заняття:
Лекція 2. **Відношення на множинах. Алгебраїчні структури**

1. Відношення на множинах. Відношення еквівалентності. Відношення порядку. Алгебраїчні операції.
2. Поняття алгебраїчної системи як множини з алгебраїчними операціями і відношеннями. Ізоморфізм алгебраїчних систем. Поняття півгрупи, півкільця, тіла.
3. Тіло кватерніонів.

Література:

[1] — гл. I, § 2 – 3;
[4] — стор. 4 – 14,
[13] — гл. II, § 5 – 6., гл. III, § 10 – 14.

План практичного заняття:

1. Відношення. Бінарні відношення. Способи задання бінарних відношень. Область визначення. Область значень. Обернене відношення

   [1]: № 1.14, 1.27, 1.22

2. Властивості відношень. Відношення еквівалентності. Відношення порядку

   [1]: № 1.11, 1.12, 1.16, 1.52, 1.37, 1.41

3. Функціональні відношення. Алгебраїчні операції

   [1]: № 1.55, 1.74, 1.84

4. Часткові операції

   [1]: № 1.78, 1.118 (д – є), 1.104, 1.88

5. Тіло кватерніонів

   [1]: № 8.70, 8.67

Домашнє завдання:

[1]: № 1.53, 1.24, 1.35, 1.70, 1.54, 1.96, 3.24, 1.132, 8.69

Практичне заняття 2
АКСІОМИ ПЕАНО ТА НАСЛІДКИ З НИХ. ПІВКІЛЬЦЕ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Основні поняття. *Аксіоми Пеано, рекурсивні означення операцій додавання і множення натуральних чисел, натуральний ряд.*

Основні формули і теореми. *Найпростіші наслідки з аксіом Пеано, алгебраїчність операцій додавання і множення натуральних чисел, асоціативний і комутативний закони додавання натуральних чисел, закон скорочення відносно додавання, дистрибутивний, комутативний, асоціативний закони множення натуральних чисел.*

Результати навчання. Студент повинен **знати** зміст основних понять, формул та теорем, **вміти** строго аксіоматично доводити властивості натуральних чисел.

Теоретична підготовка до практичного заняття:
Лекція 3. **Аксіоми Пеано і наслідки з них.**

1. Два підходи до питання побудови системи натуральних чисел.
2. Аксіоматичне означення системи натуральних чисел.
3. Найпростіші наслідки з аксіом Пеано.
4. Властивості операцій додавання і множення натуральних чисел. Півкільце натуральних чисел.

Література:

[1] — гл. 3, § 1;
[4] — стор. 15 – 22,
[13] — гл. IV, § 15.

План практичного заняття:

1. Аксіоми Пеано
[1]: № 3.25

2. Властивості операцій додавання та множення натуральних чисел
[1]: № 3.9, 3.3, 3.22

3. Піднесення до натурального степеня

Задача 1. Довести, що *для довільних натуральних чисел a, b, c виконується рівність*:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}.$$

Домашнє завдання:

[1]: № 3.11, 3.14, 3.4, довести теореми 1 – 15 з лекції.

Практичне заняття 3
ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ НА МНОЖИНІ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Основні поняття. *Відношення „менше” на множині натуральних чисел, найменший елемент, цілком впорядкована множина.*

Основні формули і теореми. *Відсутність нуля в множині натуральних чисел, закон трихотомії для додавання, властивості відношення „менше” на множині натуральних чисел, рекурсивні характеристики відношення „менше”, єдиність найменшого елемента в лінійно впорядкованій множині.*

Результати навчання. Студент повинен **знати** зміст основних понять, формул та теорем, **вміти** строго аксіоматично доводити властивості натуральних чисел.

Теоретична підготовка до практичного заняття:
Лекція 4. **Відношення порядку на множині натуральних чисел.**

1. Закон трихотомії для додавання натуральних чисел.
2. Відношення порядку на множині натуральних чисел, його властивості.
3. Найменший елемент. Принцип найменшого числа в множині натуральних чисел.

Література:

[1] — гл. 3, § 2;
[4] — стор. 15 – 22,
[13] — гл. IV, § 15.

План практичного заняття:

1. Відношення порядку на множині натуральних чисел
   [1]: № 3.10, 3.13, 3.12, 3.1

2. Операція віднімання в множині натуральних чисел
   [1]: № 3.21, 3.27, 3.24

3. Цілком впорядковані множини
   [1]: № 3.34, 3.36, 3.37

Домашнє завдання:

[1]: № 3.15, 3.17, 3.29, 3.20, 3.8

Практичне заняття 4
ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ, ЙОГО РІЗНІ ФОРМИ ТА УЗАГАЛЬНЕННЯ

Основні поняття. *Аксіоми Пеано.*

Основні формули і теореми. *Основна форма принципу математичної індукції, принцип найменшого числа, друга форма принципу математичної індукції.*

Результати навчання. Студент повинен **знати** зміст основних понять, формул та теорем, **вміти** застосовувати різні форми принципу математичної індукції при доведенні математичних тверджень.

Теоретична підготовка до практичного заняття:

Лекція 3. **Аксіоми Пеано і наслідки з них.**

2. Аксіоматичне означення системи натуральних чисел.

Лекція 4. **Відношення порядку на множині натуральних чисел.**

2. Відношення порядку на множині натуральних чисел, його властивості.
3. Найменший елемент. Принцип найменшого числа в множині натуральних чисел.
4. Принцип математичної індукції, його різні форми і узагальнення.

Література:

[4] — стор. 15 – 22,
[13] — гл. IV, § 15.

План практичного заняття:

1. Принцип математичної індукції, його різні форми і узагальнення
   [1]: № 3.45, 3.56, 3.59 (1, 5, 6, 8)

Домашнє завдання:

[1]: № 3.51, 3.56 (15, 16), 3.59

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

1. Довести, що в довільному півкільці справджується співвідношення (при умові, що відповідні різниці існують):

1.1. $(a - b) - (c + d) = (a - c) - (b + d)$.

1.2. $(a + b) - (c - d) = (a - c) + (b + d)$.

1.3. $(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d)$.

1.4. $(a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$.

1.5. $((a + b) - c) - d = ((a + b) - d) - c$.

1.6. $(a - b) - (c + d) = (a - d) - (b + c)$.

1.7. $(a + b) - (c - d) = (a + d) + (b - c)$.

1.8. $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c)$.

1.9. $(a - b) \cdot (c - d) = (ac - ad) + (bd - bc)$.

1.10. $((a + b) - c) - d = (a - d) + (b - c)$.

1.11. $(a - b) - (c - d) = (a - c) + (d - b)$.

1.12. $((a + b) - c) - d = (a - d) - (c - b)$.

1.13. $(a - b) + c = a - (b - c)$.

1.14. $(a - b) + (b - c) = a - c$.

1.15. $(a - (b + c)) - d = (a - b) - (c + d)$.

1.16. $(a + (b - c)) - d = (a + b) - (c + d)$.

2. Знайти ліву частку від ділення кватерніона α на кватерніон β:

2.1. $\alpha = 1 - 2i + 3j - k,\quad \beta = 2 + i - j + 3k.$

2.2. $\alpha = 2 - i + 5j,\quad \beta = 1 + 2i - j + k.$

2.3. $\alpha = 5 - i + 2k,\quad \beta = 3 + 2i + j - k.$

2.4. $\alpha = i + 2j - k,\quad \beta = 4 - i - j + 3k.$

2.5. $\alpha = 2 - 2i + 3j,\quad \beta = 1 + i - 2j + k.$

2.6. $\alpha = 3 - 2i + j - 4k,\quad \beta = 1 - 2j + k.$

2.7. $\alpha = 1 + 3i - 2j + k,\quad \beta = 2 - i + 5k.$

2.8. $\alpha = 2 + 5i - j - 3k,\quad \beta = 1 + i - 2j.$

Знайти праву частку від ділення кватерніона α на кватерніон β:

2.9. $\alpha = 1 - 2i + 3j - k,\quad \beta = 2 + i - j + 3k.$

2.10. $\alpha = 2 - i + 5j,\quad \beta = 1 + 2i - j + k.$

2.11. $\alpha = 5 - i + 2k,\quad \beta = 3 + 2i + j - k.$

2.12. $\alpha = i + 2j - k,\quad \beta = 4 - i - j + 3k.$

2.13. $\alpha = 2 - 2i + 3j,\quad \beta = 1 + i - 2j + k.$

2.14. $\alpha = 3 - 2i + j - 4k,\quad \beta = 1 - 2j + k.$

2.15. $\alpha = 1 + 3i - 2j + k,\quad \beta = 2 - i + 5k.$

2.16. $\alpha = 2 + 5i - j - 3k,\quad \beta = 1 + i - 2j.$

3. За допомогою аксіоми індукції довести, що для довільних натуральних чисел a, b, c виконується твердження:

3.1. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

3.2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$

3.3. Добуток $a \cdot b$ є натуральним числом.

3.4. $a + b \neq 1.$

3.5. $a + c = b + c \quad \Rightarrow \quad a = b.$

3.6. $1^a = 1.$

3.7. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}.$

3.8. $(a^b)^c = a^{b \cdot c}.$

3.9. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c.$

3.10. $a = b \quad \Rightarrow \quad a \cdot c = b \cdot c.$

3.11. $a = b \quad \Rightarrow \quad a^c = b^c.$

3.12. $a \neq b \quad \Rightarrow \quad a + c \neq b + c.$

3.13. $1 \leq a.$

3.14. $a < b \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c.$

3.15. $a < b \quad \Rightarrow \quad a^c < b^c.$

3.16. $1 < a \quad \Rightarrow \quad 1 < a^b.$

4. За допомогою принципу математичної індукції довести, що справджуються рівності:

4.1. а) $2 + 16 + 56 + ... + (3n - 2) \cdot 2^n = 10 + (3n - 5) \cdot 2^{n+1}$.

б) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{17}{5 \cdot 7} + ... + \frac{2n^2 - 1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n^2}{2n+1}$.

4.2. а) $\frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 9} + ... + \frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(6n+1)}{3(2n+3)}$.

б) $5 + 45 + 325 + ... + (4n + 1) \cdot 5^{n-1} = n \cdot 5^n$.

4.3. а) $\frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} \cdot 2 + \frac{4}{5 \cdot 6} \cdot 2^2 + ... + \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{n+3} - \frac{1}{3}$.

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$.

4.4. а) $\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + ... + \frac{n+2}{n(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{n(n+5)}{8(n+1)(n+4)}$.

б) $3 + 20 + 168 + ... + (2n + 1) \cdot 2^{n-1} \cdot n! = 2^n \cdot (n+1)! - 1$.

4.5. а) $\frac{1}{2} \cdot 2! + \frac{2}{2^2} \cdot 3! + \frac{3}{2^3} \cdot 4! + ... + \frac{n}{2^n} \cdot (n+1)! = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$.

б) $(n + 1)(n + 2)...(n + n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$.

4.6. а) $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{6}{5 \cdot 7} + \frac{20}{7 \cdot 9} + ... + \frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{2n+3} - \frac{1}{3}$.

б) $2 + 18 + 60 + ... + n(n + 1)(2n - 1) = \frac{1}{6} n(n + 1)(n + 2)(3n - 1)$.

4.7. а) $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + ... + \frac{2n-1}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$.

б) $4 + 60 + ... + (n + 1)(3n - 1) \cdot 4^{n-1} = n^2 \cdot 4^n$.

4.8. а) $\frac{1 \cdot 8}{4 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 11}{7 \cdot 10} + ... + \frac{n(3n+5)}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{n(n+1)}{3n+4}$.

б) $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + ... + (n+2) \cdot 2^n = (n+1) \cdot 2^{n+1} - 2$.

4.9. а) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + ... + n\,(3n + 1) = n\,(n + 1)^2$.

б) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2(n+2)}$.

4.10. а) $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}\,n\,(2n - 1)\,(2n + 1)$.

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4.11. а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

б) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

4.12. а) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n + 1)\,(2n + 1)$.

4.13. а) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1}\,n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

б) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

4.14. а) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n\,(n + 1) = \frac{1}{3}\,n\,(n + 1)\,(n + 2)$.

4.15. а) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n\,(n + 1)\,(n + 2) =$

$= \frac{1}{4}\,n\,(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3)$.

б) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$

4.16. а) $\frac{1}{a \cdot (a+1)} + \frac{1}{(a+1) \cdot (a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a \cdot (a+n)}$.

б) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \dots + n\sin nx = \frac{(n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x}{4\sin^2 \frac{x}{2}}$.

5. За допомогою принципу математичної індукції довести, що:

5.1. а) $(n^3 + 11n) \vdots 6 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(4^{2n} - 3^{2n} - 7) \vdots 84 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.2. а) $(7^n + 3n - 1) \vdots 9 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n) \vdots 11 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.3. а) $(5^n - 3^n + 2n) \vdots 4 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(2^{5n-1} + 2^{5n-2} + 2^{5n-3} + \ldots + 2^2 + 2 + 1) \vdots 31 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.4. а) $(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}) \vdots 19 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(3^{2n+2} - 8n - 9) \vdots 64 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.5. а) $(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) \vdots 17 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(2^{2n} + 15n - 1) \vdots 9 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.6. а) $(2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14) \vdots 27 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(7^{n+1} + 8^{2n-1}) \vdots 19 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.7. а) $(7^n + 3^{n+1}) \vdots 4 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(n^7 + 6n) \vdots 7 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.8. а) $(7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}) \vdots 17 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(10^n - 9n - 1) \vdots 81 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.9. а) $(6^{n+1} + 7^{2n-1}) \vdots 43 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(3^{2n} - 8n - 1) \vdots 16 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.10. а) $(5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}) \vdots 7 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(a^{2n} - b^{2n}) \vdots (a + b) \quad \forall n \in \mathbf{N}, \ \forall a, b \in \mathbf{Z}, \ a + b \neq 0$.

5.11. а) $(a^{2n-1} + b^{2n-1}) \vdots (a + b) \quad \forall n \in \mathbf{N}, \ \forall a, b \in \mathbf{Z}, \ a + b \neq 0$.

б) $(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) \vdots 8 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.12. а) $n(n-3)(n^2-3n+14) \vdots 24 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(2^{5n+3}+5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.13. а) $(3^{3n+2}+5 \cdot 2^{3n+1}) \vdots 19 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(5^{n+1}-4n-5) \vdots 16 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.14. а) $(2^{n+5} \cdot 3^{4n}+5^{3n+1}) \vdots 37 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(3^{2n}+15) \vdots 12 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.15. а) $(2^{n+2} \cdot 3^n+5n-4) \vdots 25 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(n^4+6n^3+11n^2+6n) \vdots 24 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

5.16. а) $(5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}) \vdots 23 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

б) $(9^{n+1}-8n-9) \vdots 16 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

6. За допомогою принципу математичної індукції довести, що справджуються нерівності:

6.1. а) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n} \quad \forall\, n\in \mathbf{N},\ \ n\geq 2.$

б) $2^n>2n+1 \quad \forall\, n\in \mathbf{N},\ \ n\geq 3.$

6.2. а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24} \quad \forall\, n\in \mathbf{N},\ \ n>1.$

б) $\frac{(2n)!}{(n!)^2}>\frac{4^n}{n+1} \quad \forall\, n\in \mathbf{N},\ \ n>1.$

6.3. а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n \quad \forall\, n\in \mathbf{N},\ \ n\geq 2.$

б) $3^n\geq 2^n+n \quad \forall\, n\in \mathbf{N}.$

6.4. а) $x^n+x^{n-2}+x^{n-4}+\ldots+\frac{1}{x^{n-4}}+\frac{1}{x^{n-2}}+\frac{1}{x^n}\geq n+1 \quad \forall\, n\in \mathbf{N} \quad (x>0).$

б) $4^n>3^n+2^n \quad \forall\, n\in \mathbf{N},\ \ n\geq 2.$

6.5. а) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1 \quad \forall\, n\in \mathbf{N},\ \ n\geq 2.$

б) $2^{n-1}\cdot n!\leq n^n \quad \forall\, n\in \mathbf{N}.$

6.6. а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1 \quad \forall\, n\in \mathbf{N}.$

б) $5^n>7n-3 \quad \forall\, n\in \mathbf{N}.$

6.7. а) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n} \quad \forall\, n\in \mathbf{N}.$

б) $2^n>2n^2-3n+1 \quad \forall\, n\in \mathbf{N},\ \ n\geq 6.$

6.8. а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2} \quad \forall\, n\in \mathbf{N}.$

б) $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n\geq 2.$

6.9. а) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n} \quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$

б) $3^n>5n^2 \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n\geq 4.$

6.10. а) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{2^n+1}<1 \quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$

б) $2^n>n\,(n+4) \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n\geq 6.$

6.11. а) $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}<2 \quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$

б) $\sqrt[n]{n+2}<2 \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n>2.$

6.12. а) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2 \quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$

б) $2^{n-1}>n\,(n+1) \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n\geq 7.$

6.13. а) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{49}+\ldots+\dfrac{1}{(2n+1)^2}<\dfrac{1}{4} \quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$

б) $\sqrt[n]{n!}>\sqrt{n} \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n>2.$

6.14. а) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$

б) $\sqrt[n]{n!}<\dfrac{n+1}{2} \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n>2.$

6.15. а) $(1+a)^n>1+na \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n>1 \quad (a>-1,\quad a\neq 0).$

б) $2^n>n^3 \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n\geq 10.$

6.16. а) $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\leq\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\ n>1 \quad (a_i>0).$

б) $2^n\geq n^2+n+2 \quad \forall\, n\in\mathbf{N},\quad n\geq 5.$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Предмет і мета курсу "Числові системи та системи числення".
2. Поняття n-арного відношення. Приклади.
3. Бінарне відношення, область визначення, множина значень, обернене відношення, способи задання.
4. Властивості бінарних відношень. Відношення еквівалентності, розбиття.
5. Відношення порядку.
6. Функціональне відношення, алгебраїчні операції.
7. Поняття алгебраїчної системи. Алгебри.
8. Ізоморфізм алгебраїчних систем.
9. Розширення алгебраїчних систем.
10. Півгрупа, група.
11. Півкільце, кільце, тіло, поле.
12. Алгебра кватерніонів.
13. Аксіоматичний метод. Змістовні і формальні аксіоматичні теорії.
14. Інтерпретація і модель аксіоматичної теорії.
15. Властивості аксіоматичних теорій.
16. Аксіоматичне означення натуральних чисел.
17. Найпростіші наслідки з аксіом $\mathbf{n_1}$ - $\mathbf{n_5}$. Основна форма принципу математичної індукції.
18. Алгебраїчність операції додавання натуральних чисел.
19. Асоціативний закон додавання натуральних чисел.
20. Комутативний закон додавання натуральних чисел.
21. Закон скорочення для додавання натуральних чисел.
22. Алгебраїчність операції множення натуральних чисел.
23. Дистрибутивний закон (лівий і правий) множення відносно додавання.
24. Комутативний закон множення натуральних чисел.
25. Асоціативний закон множення натуральних чисел.
26. $a + b \neq 1$, $a + b \neq b$ $\forall\, a, b \in \mathbf{N}$.
27. Закон трихотомії для додавання натуральних чисел.
28. Відношення порядку в множині натуральних чисел.
29. Рекурсивні характеристики відношення порядку в множині натуральних чисел. Наслідки з них.
30. Найменший елемент, його єдиність в лінійно впорядкованій множині. Цілком упорядковані множини.
31. Система $(\mathbf{N}, <)$ є цілком впорядкованою. Друга форма принципу математичної індукції.
32. Теорема Архімеда.
33. Категоричність аксіоматичної теорії натуральних чисел.
34. Незалежність аксіом $\mathbf{n_1}$ - $\mathbf{n_4}$ системи аксіом Пеано.
35. Роль аксіоми індукції в обгрунтуванні властивостей арифметичних дій.
36. Роль аксіоми індукції в обгрунтуванні теорії нерівностей.
37. Роль аксіоми індукції в обгрунтуванні теорії подільності натуральних чисел.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вивальнюк Л.М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи. – К.: Вища школа, 1988. – 271 с.
2. Нечаев В.И. Числовые системы. – М.: Просвещение, 1975. – 199 с.
3. Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа. – М.: Наука, 1971. – 440 с.
4. Верпатова Н.Ю. Числові системи (дидактичні матеріали для самостійної роботи студентів заочної форми навчання спеціальності „математика”). – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2000. – 66 с.
5. Гонин Е.Г. Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1959. –232 с.
6. Кужель О.В. Основи арифметики. – К.: Радянська школа, 1965. – 131 с.
7. Ружа Имре. Основания математики. – К.: Вища школа, 1981. – 350 с.
8. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. – 231 с.
9. Успенский В.А. Теорема Геделя о неполноте. Популярные лекции по математике. – М.: Наука, 1982. – 111 с.
10. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1: Арифметика, алгебра и анализ. – М.: Наука, 1987.
11. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. – М.: Наука, 1972. – 591 с.
12. Проскуряков И.В. Числа и многочлены. – М.: Просвещение, 1965. –284 с.
13. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – Ч 1. – К.: Вища школа, 1974. – 464 с.
14. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел. – Ч 2. – К.: Вища школа, 1976. – 384 с.
15. Бородін О.І. Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970. –274 с.

ЗМІСТ

ВИДАВНИЦТВО
УКРАЇНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
імені Михайла Драгоманова

Віддруковано з оригіналів.

Видавництво Українського державного університету
імені Михайла Драгоманова.
01601, м. Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію ДК 7896 від 25.07.2023.
(044) 239-30-26.