УДК 378:53

Воробйова А. І.
Чорноморський державний університет імені Петра Могили,
Майборода О. В.
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова,
Майборода В. А.
Миколаївський муніципальний колегіум імені В. Д. Чайки

ЕВРИСТИЧНА СКЛАДОВА КУРСУ ВИЩА МАТЕМАТИКА ПРИ РОБОТІ З ОБДАРОВАНОЮ МОЛОДДЮ

У статті розглянуті питання пов'язані з необхідністю застосовувати засвоєні прийоми і методи елементарної математики при вивченні елементів вищої математики. Автори зупиняються на евристичному методі, як одному з основних при формуванні компетентності майбутніх математиків.

Ключові слова: *математична грамотність, компетентність, евристичні ситуації, евристичні методи, обдаровані учні.*

Серед багатьох викладачів вищої математики і вчителів старших класів ЗОШ протягом багатьох поколінь укорінився міф, що вища математика не має тієї привабливості і можливостей, які дозволяють активно розвивати нестандартне мислення студента і учня. Це на противагу "благодатному" матеріалові елементарної математики, на якому тільки і можливо застосувати весь арсенал розвиваючих методів. Зразу ж зауважимо: цей міф розділяють не всі.

В рамках даної статті, вважаючи, що пріоритетним напрямком удосконалення математичної освіти є забезпечення математичної грамотності високого рівня компетентності [2, с. 2] на всіх етапах вивчення математики зупинимось на евристичному методі, при вивченні елементів вищої математики.

Існує декілька причин, що роблять зазначений міф живучим. Ми виділяємо дві, на наш погляд, основні причини:

1. Нехтування здобутками, які вже отримані при вивчені основ елементарної математики.

Це, очевидно, зумовлено не глибоким розумінням ідей вищої математики і штучним протиставленням різних розділів, але однієї цілісної і багатогранної математичної науки.

2. Традиційно формалізований стандарт програмного викладу тем вищої математики.

Зазначимо, що інші концепції пропонувались не раз, а на недолік існуючої традиції вказувало багато математиків, наприклад [1, с. 21-39].

На сьогоднішній день існують різні означення і розуміння евристичного методу, евристичної ситуації, евристичної задачі [3; 7; 8].

Під евристичним методом навчання ми будемо розуміти такий, що створює евристичну ситуацію. Евристична ситуація полягає в формулюванні математичної проблеми (задачі) алгоритм розв'язку якої є не відомим і не очевидним. Більше того, він може містити такі кроки, для реалізації яких треба встановити нові, до цього не існуючі зв'язки між відомими учневі фактами.

Виходом із положення є креативна робота учня, в результаті якої він, використовуючи максимально можливий запас знань із різних розділів математики, пропонує напрямки! (або напрямок) вирішення проблеми (задачі). При цьому він повинен вказати конкретні, логічно вмотивовані етапи розв'язку, вказати на необхідність проміжних теорем, що треба довести, якщо така потреба існує. Доводить розв'язок до відповіді. Отриманий результат аналізує і пропонує узагальнення задачі, або формулює аналогічну.

Якщо в результаті роботи над задачею були “бачення” інших способів розв’язку, то вони повинні бути дослідженими, та обов’язково порівняними із застосованим.

Цей процес відбувається під контролем викладача чи вчителя, який спочатку сам пропонує різні ідеї, з часом вимагаючи це від учнів. Потім правильно ставить проблемні запитання [5, с. 268-274], спонукаючи учнів до пропозиції і вибору методів розв’язку, та аналізу їх ефективності і оптимальності.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад № 1. Монотонність.

Розв’язати рівняння $x^{x^4} = 4, \quad x > 0$.

Розв’язання.

$x = \sqrt{2}$ – очевидний корінь рівняння. Питання зводиться до дослідження функції $f(x) = x^{x^4}$ на монотонність.

Формально використання похідної не є обов’язковим:

При $x > 1$ із властивостей показникової функції: $y \uparrow$, тому коренів більших за 1, крім $\sqrt{2}$ не існує.

Нехай $x \in (0;1)$: $x^{x^4} < 1$, $x^4 \ln x < 0$ очевидно .

Цим доведено, що корінь один: $x = \sqrt{2}$.

Приклад № 2. Монотонність.

Дано рівняння

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_{n-1} x - a_n = 0;$$

$$a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \ldots, a_n \geq 0.$$

Доведіть, що рівняння не може мати двох додатних коренів.

Розв’язання.

Записавши рівняння у рівносильному вигляді:

$1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ для $x > 0$.

і розглянувши функцію $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$, $x > 0$ легко знаходимо, що $f'(x) < 0$, $\forall x > 0$, тому $f(x) \downarrow$, $\forall x > 0$, а тому рівняння $f(x) = 1$ не може мати двох різних додатних коренів.

Приклад № 3. Оцінки, нерівності, вектори.

Розв’язати рівняння $2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

Розв’язання. Скористаємось векторною нерівністю $\bar{a} \cdot \bar{b} \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$;

$\bar{a} = \overline{(2; x)}$, $\bar{b} = \overline{(\sqrt{x-1}; 5)}$;

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2\sqrt{x-1} + 5x \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}$, а тому рівність можлива лише коли $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні.

Отже $\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x}$. Звідки легко знаходимо $x = 5$.

Приклад № 4. Множники Лагранжа, різноманітні підходи.

Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $x + y$, якщо $x^2 + 4x + y^2 + 3 = 0$.

А) *Розв’язання.* Перепишемо задану в умові задачі рівність у вигляді $(x+2)^2 + y^2 = 1$. Очевидно, що $|x+2| \le 1$ і $|y| \le 1$. Отже можна покласти, що $x+2=\sin\varphi$, $y=\cos\varphi$, $\varphi \in [0;2\pi)$.

Тоді $x+y=\sin\varphi+\cos\varphi-2=\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})-2$.

Таким чином, $-\sqrt{2}-2 \le x+y \le \sqrt{2}-2$.

Відповідь: $\sqrt{2}-2$ – найбільше значення, $-\sqrt{2}-2$ – найменше значення.

Б) Очевидно, що даний приклад можна було розв'язати методом множників Лагранжа (пропонуємо вам зробити це самостійно).

Приклад № 5. Ізоморфна задача. Вектори.

Серед всіх розв'язків системи

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ t^2+z^2=9 \\ xt+yz \ge 6 \end{cases}.$$

Знайдіть такі, при кожному з яких вираз $x+z$ приймає найбільше значення.

Завдання. Підберіть відповідний ізоморфізм і перекладіть задачу на мову векторів. Розв'яжіть отриману задачу.

Розв'язання. Якщо рівняння містить дві змінні, то множину його розв'язків можливо уявляти, як множину впорядкованих пар. Розглянемо множину R^2 і задамо на ній дві функції: f і g так, що:

$f: R^2 \to R$ за законом $(a;b) \xrightarrow{f} a^2+b^2$,

$g: R^2 \times R^2 \to R$ за законом $((a;b);(c;d)) \xrightarrow{g} ac+bd$.

Позначимо V_2 множину векторів площини (вектор розуміємо, як клас спів напрямлених відрізів, що мають однакові довжини). В цьому просторі введемо ортонормований базис $\{\bar{i},\bar{j}\}$. Для елементів множини V_2 визначимо, за звичайними правилами, квадрат довжини вектора і скалярний добуток двох векторів.

Задамо відображення h множини R^2 в множину V_2, поставивши у відповідність кожній парі (a,b) вектор $\bar{n}$, який має в базисі $\{\bar{i},\bar{j}\}$ координати (a,b). Отримаємо бієкцію. При цьому відображення функції f буде відповідати функція $f'-$ квадрат довжини вектора, а функції g – функція $g'-$ скалярний добуток двох векторів. Іншими словами, $h-$ ізоморфізм.

Введемо вектори $\bar{m}(x;y)$ і $\bar{n}(t;z)$. Перше рівняння перетворюється в рівність $|\bar{m}|^2=4$, або $|\bar{m}|=2$, друге рівняння – в рівність $|\bar{n}|=3$, нерівність – в нерівність $\bar{m}\cdot\bar{n} \ge 6$. Завдання в задачі залишається тим самим.

Така інтерпретація дозволяє останню нерівність перетворити в рівняння.

Дійсно, $\bar{m}\cdot\bar{n}=|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cdot\cos\angle(\bar{m};\bar{n}) \le |\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cdot 1=2\cdot 3=6$

Маємо з одного боку $\bar{m}\cdot\bar{n} \le 6$, а з іншого $\bar{m}\cdot\bar{n} \ge 6$. Отже $\bar{m}\cdot\bar{n}=6$ і $\bar{m}\cdot\bar{n}=|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|$. Остання рівність можлива тільки, якщо кут між векторами дорівнює нулю, тобто вектори $\bar{m}$ і $\bar{n}$ співнаправлені : знайдеться таке дотане k, що $\bar{m}=k\cdot\bar{n}$. Переходячи, до довжин, в останній рівності, отримаємо: $|\bar{m}|=k\cdot|\bar{n}|$, звідки $k=\frac{|\bar{m}|}{|\bar{n}|}=\frac{2}{3}$.

Перейдемо в рівності $\bar{m}=\frac{2}{3}\bar{n}$ до координат: $x=\frac{2}{3}t$, $y=\frac{2}{3}z$. Складаємо необхідну суму

$x+z=\frac{2}{3}t+z$.

Введемо допоміжний вектор $\bar{s}\left(\frac{2}{3};1\right)$. Останню рівність можна записати так: $x+z=\bar{s}\cdot\bar{n}$. Так як $\bar{s}\cdot\bar{n}=\left|\bar{s}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|\cdot\cos\angle(\bar{s};\bar{n})$, то найбільше значення суми буде при $\cos\angle(\bar{s};\bar{n})=1$ тобто вектори $\bar{s}$ і $\bar{n}$ співнаправлені.

Отже, знайдеться додатне число q таке, що $\bar{n}=q\cdot\bar{s}$, звідки $q=\frac{\left|\bar{n}\right|}{\left|\bar{s}\right|}=\frac{3}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1}}=\frac{9}{\sqrt{13}}$.

Тому $\bar{n}=\frac{9}{\sqrt{13}}\bar{s}$ і переходячи до координат, отримаємо: $t=\frac{9}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{3},\quad t=\frac{6}{\sqrt{13}}$; $z=\frac{9}{\sqrt{13}}\cdot 1,\quad z=\frac{9}{\sqrt{13}}$.

Враховуючи $x=\frac{2}{3}t$, $y=\frac{2}{3}z$, знаходимо: $x=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}},\quad x=\frac{4}{\sqrt{13}}$; $y=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{\sqrt{13}},\quad y=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

Відповідь: $x=\frac{4}{\sqrt{13}}$, $y=\frac{6}{\sqrt{13}}$, $t=\frac{6}{\sqrt{13}}$, $z=\frac{9}{\sqrt{13}}$.

Приклад № 6. Множники Лагранжа, геометрична інтерпретація.

Визначте найменше дійсне число M таке, що нерівність $\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right|\le M(a^2+b^2+c^2)$ виконується для будь-яких дійсних чисел a,b,c.

Розв'язання.

А) метод множників Лагранжа.

Можна вважати, що $a\ge b\ge c$ і знаходити найбільше значення виразу $(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)$ за умови $a^2+b^2+c^2=1$. Або ж після очевидної заміни змінних, – найбільше значення функції $f(x,y,z)=xyz(x+y)$ на компактній множині $M=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2+(x+y)^2=3,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$. Найбільше значення функції f на множині M існує (за теоремою Вейєрштрасса) і, очевидно, є числом додатним, а тому треба дослідити на звичайний екстремум функцію Лагранжа $f(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2+(x+y)^2-3)$ в області $\left\{(x,y,z)\middle| x>0, y>0, z>0\right\}$. Одержимо систему

$$\begin{cases} yz(2x+y)=2\lambda(2x+y)\\ xz(2y+x)=2\lambda(2y+x)\\ xy(x+y)=2\lambda z \end{cases}.$$

Звідки $x=y,\ z=2x^2,\ x=y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Подальше є зрозумілим.

Надалі, розглянемо й цілком прозорий “геометричний” підхід до цієї задачі, який вимагає тільки навичок просторового уявлення та володіння початковими відомостями з аналітичної геометрії.

Б) Геометричний спосіб.

У координатному декартовому просторі $Oabc$ розглянемо площини

$$\alpha: a-b=0,\qquad \beta: b-c=0,$$

$$\gamma: c-a=0,\qquad \delta: a+b+c=0.$$

Потрібно знайти найбільше значення виразу $\left|(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)\right|$ на сферичному двокутнику $\Omega=\left\{(a,b,c)\;\middle|\;a^2+b^2+c^2=1,\;a\ge b\ge c\right\}$. Така задача еквівалентна знаходженню найбільшого значення добутку $\rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta)$ для $M\in\Omega$ (тут через ρ позначається відстань від точки M до відповідної площини). Легко обґрунтувати (зробіть це самостійно!), що найбільше значення досягається на бісекторі двогранного кута $\left\{(a,b,c)\;\middle|\;a\ge b\ge c\right\}$ і при цьому $\rho(M;\alpha)=\rho(M;\beta)=\frac{1}{2}\rho(M;l)$ (тоді тут $\rho(M;l)=\rho(M;\gamma)$ – відстань від точки M до прямої $l:a=b=c$). Далі, враховуючи, що $\left(\rho(M;\delta)\right)^2+\left(\rho(M;l)\right)^2=1$, маємо

$$\left(\rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta)\right)^2=$$

$$=\left(\rho(M;\delta)\right)^2\cdot\frac{1}{4}\left(\rho(M;l)\right)^2\cdot\frac{1}{4}\left(\rho(M;l)\right)^2\cdot\left(\rho(M;l)\right)^2=$$

$$=\frac{27}{16}\left(\rho(M;\delta)\right)^2\cdot\left(\frac{\rho(M;l)}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{\rho(M;l)}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{\rho(M;l)}{\sqrt{3}}\right)^2\le$$

$$\le\frac{27}{16}\cdot\left(\frac{\left(\rho(M;\delta)\right)^2+\left(\rho(M;l)\right)^2}{4}\right)^4=\frac{27}{4^6}.$$

Таким чином, для $M\in\Omega$ $\rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta)\le\frac{3\sqrt{3}}{64}$, причому, зрозуміло, таке значення досягається (нескладно визначити $a=\frac{2\sqrt{2}+6}{4\sqrt{6}},b=\frac{1}{2\sqrt{3}},c=\frac{2\sqrt{2}-6}{4\sqrt{6}}$). Отже, найбільшим значенням виразу $\left|(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)\right|$ на множині Ω є (згадайте формулу для відстані від точки до площини) $\frac{3\sqrt{3}}{64}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Відповідь: $\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Ми привели декілька прикладів, залишивши без деталізації методику пошуку їх розв’язку, наведену вище в загальному вигляді, залишаючи її вибір за кожним хто побажає скористатись нею. Цими прикладами було вказано на можливість використання евристичного методу в поєднанні різноманітних розділів математики: аналізу, геометрії, алгебри. В подальшому продовжимо говорити про можливість поєднувати і інші розділи математики та розглядати їх, як альтернативні при розв’язуванні творчих задач.

Такий підхід вчить сприймати математику в цілісності всіх її розділів і загальних методів науково-дослідницької роботи. Дивитись на проблему всебічно і з широкого спектру методів вибирати оптимальний та обґрунтовувати цей факт.

Рівень компетентності і професіоналізму на нашу думку, тим вищий, чим глибші знання у вузькій області діяльності, але одночасно ширша сфера, що охоплює цю область. Чим вища міра невизначеності ситуації в якій особистість може діяти усвідомлено і творчо. При цьому використовує максимально можливе різноманіття пошуково-інтуїтивних методів та вміє виділяти самий оптимальний із них.

Таким чином вища математика, як частина математичної науки не тільки не виключає нестандартних підходів, але і дає новий матеріал, а значить і можливості для їх використання.

Якісна підготовка до занять, самоосвіта кожного з учасників навчального процесу, взаємна співпраця викладачів, вчителів і учнів повинні ліквідувати вказані недоліки і створити нові форми і методологічні прийоми при вивчені вищої математики.

Використана література:

1. *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов / В. И. Арнольд // Серия “Современная математика для студентов”. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 96 с.
2. *Бродський Я.* Компетентнісний підхід у навчанні математики / Я. Бродський, С. Великодний, О. Павлов // Математика в школі. – К. : Педагогічна преса, 2011. – 48 с.
3. *Курдин Д.* Использование эвристического метода при формировании представлений о математических закономірностях / Д. Кудрин. – Режим доступу : http://www.edit.muh.ru/content/mag/trudy/11_2010/04.pdf
4. *Лейфура В.* XLVII Міжнародна математична олімпіада / В. Лейфура, О. Литвиненко, І. Мітельман // Математика в школі. – К. : Педагогічна преса, 2007. – 58 с.
5. *Пойа Д.* Математическое открытие / Д. Пойа. – М. : Наука, 1976. – 448 с.
6. *Третяк Н.* Тригонометричні підстановки під час розв’язування алгебраїчних задач / Н. Третяк // Математика в школі. – К. : Педагогічна преса, 2011. – 48 с.
7. *Хуторской А.* Дидактическая эвристика: Теория и технология креативного обучения / А. В. Хуторской. – М. : Изд-во МГУ, 2003.
8. *Хуторской А.* Эвристическое обучение: Теория, методология, практика / А. В. Хуторской. – М. : Международная педагогическая академия, 1998.

Воробйова А. И., Майборода А. В., Майборода В. А. Эвристическая составляющая курса высшей математики во время работы с одаренной молодежью.

В статье рассмотрены вопросы, связанные с необходимостью применять усвоенные приемы и методы элементарной математики во время изучения элементов высшей математики. Авторы обращают внимание на эвристический метод, как один из основных при формировании компетентности будущих математиков.

Ключевые слова*: математическая грамотность, компетентность, эвристические ситуации, эвристические методы, одаренные ученики.*

Vorobyova A. I., Mayboroda A. V., Mayboroda V. A. The heuristic methods in the course of high mathematics during the working with talented youth.

The topic connected with the necessity of using the assimilated ways and methods of elementary mathematics during the study of high mathematics elements have examined. The authors pay attention to the heuristic method as the main one in the forming of competence of future mathematicians.

Keywords*: mathematics competence, heuristic situations, heuristic methods, talented students.*

УДК 378.14

Веліховська А. Б.
Миколаївський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

ВИКОРИСТАННЯ ПЕДАГОГІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ СОЦІАЛЬНИХ СЕРВІСІВ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ РІВНЯ ПРОФЕСІЙНОЇ МАЙСТЕРНОСТІ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

У статті розглянуто педагогічний потенціал соціальних сервісів і шляхи забезпечення нового рівня професійного зростання вчителів математики в професійних інтернет-спільнотах.

Ключові слова*: педагогічний потенціал, соціальний сервіс, професійна діяльність учителів математики.*

Інтенсивний розвиток інформаційних технологій змінює сучасний світ, виникають нові форми спілкування людей. Інтернет став невід'ємною частиною нашого життя. Ми