Інститут педагогіки Академії педагогічних наук України

На правах рукопису

ШАРАН Олександра Василівна

УДК 511.14(07):371

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ ШКІЛ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник –
ХМАРА Тамара Миколаївна,
кандидат педагогічних наук,
старший науковий співробітник

Київ - 2009

ЗМІСТ

ВСТУП 4

РОЗДІЛ 1. ДОСЛІДЖУВАНА ПРОБЛЕМА В ПЕДАГОГІЧНІЙ ТЕОРІЇ ТА ПРАКТИЦІ 14

1.1. Профільна модель шкільної математичної освіти як важливий компонент особистісно-орієнтованої системи навчання математики 14

1.1.1. Досвід впровадження та функціонування профільної диференціації у сучасній школі 19

1.1.2. Педагогічні умови та методичні вимоги реалізації ідеї особистісно-орієнтованої системи навчання математики в умовах профільної диференціації 28

1.2. Вітчизняний та зарубіжний досвід вивчення комплексних чисел

у середніх закладах освіти 39
1.3. Психолого-педагогічні особливості поглибленого навчання математики старшокласників 56
1.3.1. Психологічні особливості учнів старшої школи 56
1.3.2. Розвиток математичних здібностей і пізнавальних інтересів учнів профільних класів 62
1.3.3. Особливості формування і засвоєння основних понять теорії комплексних чисел 70
Висновки до розділу 1 78
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ВИВЧЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ 81
2.1. Особливості методичної системи вивчення комплексних чисел в умовах профільного навчання 81
2.2. Методика формування основних понять теорії комплексних чисел 85
2.2.1. Особливості вивчення теоретичного матеріалу 85
2.2.2. Формування основних понять теорії комплексних чисел 104
2.2.3. Систематизація і узагальнення набутих знань та вмінь на семінарських заняттях 115
2.3. Використання комплексних чисел при розв’язуванні задач 122
2.3.1. Комплексні корені многочленів вищих степенів 124
2.3.2. Тотожні перетворення тригонометричних виразів 128
2.3.3. Геометричні задачі 131
2.3.4. Перетворення площини 145
2.3.5. Задачі з механіки та електротехніки 155
2.4. Контроль та корекція результатів навчання 167
2.5. Комп’ютерна підтримка курсу за вибором 177
2.6. Організація та результати експериментальної перевірки ефективності запропонованої методики 184
Висновки до розділу 2 196
ВИСНОВКИ 199
ДОДАТКИ 202
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 252

ВСТУП

У Законі України “Про освіту” підкреслюється, що метою освіти є розвиток людини як особистості та найвищої цінності суспільства, розвиток її талантів, розумових і фізичних здібностей, формування громадян, здатних до свідомого суспільного вибору, збагачення на цій основі інтелектуального, творчого, культурного потенціалу народу, забезпечення народного господарства кваліфікованими працівниками, спеціалістами [98, 3].

Становлення наукового світогляду учнів неможливе без ознайомлення із специфікою математичних методів пізнання, формування уявлень про математичне моделювання, розуміння зв’язку математики з дійсністю та іншими науками, використання у навчанні фактів історії науки. Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Формування навичок застосування математики до розв’язування прикладних задач є однією із головних цілей навчання математики [237,42].

Відповідно до результатів соціологічних досліджень переважна більшість учнів старших класів вважають доцільним диференційоване вивчення предметів, тобто старшокласники хочуть вивчати лише основи навчальних предметів, а поглиблено – лише ті предмети, які пов’язані з їх подальшою спеціалізацією, зокрема, математичною. Це співвідноситься з основними положеннями Концепції профільного навчання, розробленої АПН України. Згідно з цією концепцією “ загальною тенденцією розвитку старшої профільної школи є її орієнтація на широку диференціацію, варіативність, багатопрофільність...” [137, 2]. При цьому за рахунок змін у структурі, змісті, формах організації освітнього процесу повніше враховуються інтереси, здібності та нахили учнів, створюються умови для навчання старшокласників відповідно до проектованих професій і намірів щодо продовження освіти.

Проблемі диференціації та індивідуалізації навчання присвячено багато наукових досліджень, в яких можна виділити такі три основні напрями: психологічний, педагогічний та методичний. Зокрема, дослідженню індивідуальних психологічних особливостей учнів присвячені роботи Л. І. Божович [27], П. Я. Гальперіна [54], Л. В. Занкова [99], З. І. Калмикової [111; 112], Г. С. Костюка [139], В. О. Крутецького [142-144], О. М. Леонтьєва [154], Н. О. Менчинської [177-179], В. О. Моляко [189; 190], Н. Ф. Тализіної [287-189], І. С. Якиманської [355-357] та ін. Педагогічний аспект проблеми диференціації та індивідуалізації навчання досліджували: Ю. К. Бабанський [15; 16], В. В. Давидов [75; 76], М. О. Данилов [79], І. Я. Лернер [154-157], М. М. Скаткін [79], І. Е. Унт [296] та ін. Проблемам диференціації навчання математики присвячено роботи Г. П. Бевза [20], В. Г. Болтянського [28], М. І. Бурди [37; 38], Н. Я. Віленкіна [44-46], Г. Д. Глейзера [28], Г. В. Дорофеєва [81; 83; 84], О. С. Дубинчук [342; 343], М. І. Жалдака [89; 90], А. М. Колмогорова [127], Ю. М. Колягіна [128; 129], В. М. Монахова [192], А. Г. Мордковича [193], Є. П. Неліна [197; 198], З. І. Слєпкань [271-275; 342; 343], В. В. Фірсова [81], Т. М. Хмари [312; 313; 344], І. Ф. Шаригіна [335], С. І. Шварцбурда [335-337], В. О. Швеця [340], М. І. Шкіля [342-344] та ін.

Одним з основних факторів, що впливає на розвиток особистості та формування її базової культури виступає зміст освіти. Під змістом освіти розуміють педагогічно пристосовану систему знань, умінь, навичок, досвіду творчої діяльності та емоційно-вольового досвіду, що мають забезпечити формування всебічно розвиненої особистості , підготовленої до збереження і розвитку матеріальної і духовної культури суспільства [72]. Спрямованість вектора шкільної освіти у площину цінностей особистісного розвитку, варіативності й відкритості школи зумовлює принципову необхідність переосмислення всіх факторів, від яких залежить якість навчально-виховного процесу: змісту, методів, форм навчання і виховання, системи контролю й оцінювання, управлінських рішень, взаємовідповідальності учасників навчально-виховного процесу . Особистісний підхід до навчання на практиці реалізується, зокрема, за допомогою спеціальних курсів за вибором. Створюється можливість гнучкої варіативності змісту математичної освіти відповідно до інтересів, нахилів, здібностей учнів та їх орієнтації на майбутню професію.

Впровадження моделі профільного навчання ставить перед освітянами цілу низку проблем, вирішення яких потребує нових теоретичних і прикладних досліджень. Гостро актуальною є проблема добору змісту навчання для курсу математики профільного рівня, курсів за вибором та розробка відповідного методичного забезпечення. Розділ "Комплексні числа" відноситься до тих, які недостатньо досліджені методистами.

Тривалий час тема "Комплексні числа" входила в обов'язкову програму з математики, але пізніше була виключена і рекомендована для вивчення на факультативних заняттях. У зв'язку з цим академік А. М. Колмогоров стурбовано писав у 1967 році, що "…великою жертвою, пов'язаною зі скороченням загальної кількості обов'язкових занять з математики в старших класах, є виключення з обов'язкової програми комплексних чисел" [127, 4]. У зв'язку з появою профільних класів комплексні числа були повернуті в обов'язкову програму з математики у класах з поглибленим вивченням дисциплін природничо-математичного циклу, але у досить незначному обсязі.

Вагомість цього розділу в математичній культурі учнів є незаперечною, оскільки комплексні числа знаходять застосування як всередині самої математики, так і в інших галузях науки і практики. Вивченням розділу "Комплексні числа" завершується одна з основних змістових ліній шкільного курсу математики – розвиток поняття числа. Цілісне завершене уявлення про число є важливим кроком в процесі формування наукового світогляду учнів. На концепції комплексних чисел побудовані цілі наукові теорії. Вони знаходять широкі застосування в електротехніці, гідро- і аеромеханіці, геодезії, картографії, фізиці та ін. Відомий німецький математик і філософ Г. Лейбніц (1646-1716) писав: "Хоч їх і називають уявними, але від цього вони не перестають бути корисними і навіть необхідними для аналітичного вираження реальних величин" [18, 3]. Багато з цих застосувань можна подати учням у вигляді цікавих прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками. Проте прикладний аспект лише іноді зачіпався при вивченні комплексних чисел у школі, в результаті чого в учнів складалося уявлення про формальність їх введення та незастосовність в інших галузях науки.

Навчання математики повинно забезпечити потреби у математичних знаннях для організації спеціальної підготовки та майбутньої професійної діяльності. Тому вивчення даної теми в обсязі, запропонованому чинною програмою [241], буде достатнім в системі особистісно-орієнтованого навчання за умови наявності відповідного курсу за вибором з певною кількістю прикладних задач та задач із мідпредметними і внутріпредметними зв'язками. Розділ "Комплексні числа" доцільно вивчати у тісному взаємозв'язку з різними розділами шкільного курсу, такими як: основна теорема алгебри, розв'язування рівнянь вищих степенів (алгебра); паралельність та перпендикулярність прямих, перетворення площини (геометрія); розрахунок кіл змінного струму (фізика) та ін. "Без цього вони так і залишаться в уяві школярів довільною вигадкою з містичним, нереальним забарвленням" [121, 396].

З психологічного погляду важливим є фактор подолання певного психологічного бар'єру в сприйманні поняття комплексного числа у шкільному віці для тих, хто обере в майбутньому професію математика чи інженера.

Широке коло застосувань комплексних чисел відкриває значні дидактичні можливості для розвитку математичних інтересів учнів. Адже наявність в освітньому арсеналі учнів комплексних чисел збагачує їхні уявлення про методи пізнання, розширює їхні можливості при розв'язуванні задач, посилює прикладну функцію математики.

Серед математиків, які зробили вагомий внесок у розвиток теорії комплексних чисел, були: італійські вчені С. Дель Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, француз О. Коші та ірландський математик У. Гамільтон, німецький вчений К. Гаусс. Теорія комплексних чисел отримала свій подальший розвиток у новій математичній дисципліні – теорії функцій комплексної змінної, основи якої були закладені Л. Ейлером і Ж. Д'Аламбером, а подальший розвиток отримала в роботах О. Коші, Б. Рімана, К. Вейєрштрасса [172, 80].

У XX столітті великий внесок у розвиток теорії функції комплексної змінної і її застосувань зробили багато математиків і механіків. Так, в літакобудуванні і аеромеханіці функціями комплексних змінних успішно користувалися М. Є. Жуковський, С. А. Чаплигін, В. В. Голубєв і М. В. Келдиш. Г. М. Колосов і Н. І. Мусхелішвілі вперше застосували комплексні змінні в теорії пружності для розрахунку різноманітних конструкцій і споруд на міцність. Із застосуванням ге нераторів змінного струму старі методи розрахунку електричного кола стали непридатними. У 1893 році американський вчений Ч. Штейнмец запропонував метод комплексних амплітуд, пов'язаний з використанням комплексних чисел. За стосуваннями методів теорії функцій комплексної змінної до задач гідродинаміки займалися відомі вчені М. О. Лаврентьєв і Л. І. Сєдов, а до проблем теоретичної фізики – М. М. Боголюбов і В. С. Владіміров. Комплексні числа широко застосовуються в сучасних галузях фізики, механіки, технічних дисциплін [172, 81].

На даний час існує кілька вітчизняних підручників, які містять матеріал з розділу "Комплексні числа": [343; 344; 197]. Однак завдань на застосування комплексних чисел недостатньо. Ширший матеріал з цього питання можна зустріти у відповідних зарубіжних підручниках [359-363; 365-370].

Різні аспекти розвитку поняття числа, включаючи комплексні числа, відображено в роботах авторів: О. І. Бородіна [29], М. Б. Гельфанда [56], Г. И.

Глейзера [60], С. Т. Завало [93], Ф. Клейна [120; 121], В. Н. Молодшого [188], Л. С. Понтрягіна [227; 228], Д. П. Селіванова [295] та ін.

Проблема відображення в змісті шкільного курсу застосувань математики, зокрема комплексних чисел, досліджувалась в роботах: М. Б. Балка [17; 18], Я. С. Бродського [32], Ю. А. Дрозда [86], З. Д. Куланіна [146], І. А. Кушніра [149], Е. А. Лаудині [151], Г. К. Марача [165; 166], О. І. Маркушевича [168], Г. Н. Новикова [200], А. А. Полухіна [18], Я. П. Понаріна [224; 225], Н. Г. Потапова [232], З. А. Скопеця [269; 270], О. П. Шарової [334], І. Ф. Шаригіна [335], І. М. Яглома [354] та ін.

Про актуальність обраної теми свідчать і публікації вчителів-дослідників у науково-методичних виданнях та інформаційних збірниках МАН України. Зокрема, це автори: О. І. Буковська [35], А. П. Карп [115], Б. Г. Орач [207], Г. Н. Пивоваров [219].

Проблемі вивчення комплексних чисел в середніх закладах освіти присвячено ряд дисертацій. У роботі В. М. Кухар [148] розглянуто питання розширення поняття числа в середній школі. Л. Ю. Сергієнко [260] розкриває методику вивчення ком плексних чисел і їх застосувань в курсі математики середніх спеціальних навчальних закладів. У дослідженнях наголошується на необхідності введення комплексних чисел як завершальної стадії розвитку поняття числа, а також на практичній значимості комплексних чисел як для успішного оволодіння суміжними дисциплінами, так і для продовження навчання у вищих навчальних закладах.

Проте необхідна кількість годин для вивчення учнями профільних класів доцільного обсягу матеріалу з теми "Комплексні числа" не може бути забезпечена в основному курсі математики. Реалізацію цієї мети ми вбачаємо через введення відповідного курсу за вибором.

Усе сказане вище обумовлює актуальність виконаного дисертаційного дослідження: **"Методика вивчення комплексних чисел у профільних класах загальноосвітніх шкіл"**.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконано відповідно до тематичного плану наукових досліджень лабораторії фізичної та математичної освіти Інституту педагогіки АПН України з теми "Методична система навчання математики у профільній школі" (номер державної реєстрації 0108U001068). Тему дисертаційного дослідження затверджено Вченою радою Інституту педагогіки АПН України (протокол № 9 від 5.12.2002 р.) та узгоджено в бюро Міжвідомчої ради з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні (протокол № 1 від 28.01.2003 р.).

Мета дослідження – розробити методику поглибленого вивчення основ теорії комплексних чисел у процесі навчання математики в умовах профільної диференціації та перевірити її ефективність.

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри і початків аналізу у профільних класах.

Предметом дослідження є методична система поглибленого вивчення комплексних чисел у профільних класах загальноосвітньої школи.

В основу дослідження покладено **гіпотезу**: якщо в процесі вивчення основ теорії комплексних чисел учнями профільних класів ознайомити їх з практичними застосуваннями комплексних чисел та використовувати систему вправ з урахуванням міжпредметних зв'язків, то це сприятиме:

– формуванню позитивної мотивації вивчення математики;

– підвищенню активності навчальної діяльності й інтересу до цього розділу математики;

– підвищенню ефективності навчання старшокласників.

З огляду на предмет, мету і гіпотезу дослідження були визначені такі **завдання дослідження**:

1)проаналізувати психолого-педагогічну і методичну літературу з проблеми дослідження, дослідити стан проблеми в практиці навчання;

2)визначити психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги ефективного вивчення комплексних чисел у профільних класах;

3)розробити систему прикладних задач та задач із міжпредметними та внутріпредметними зв'язками, які розв'язуються за допомогою комплексних чисел;

4)розробити методичну систему вивчення курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування" учнями профільних класів;

5)експериментально перевірити ефективність розробленої методичної системи.

Проблема, мета і завдання дослідження зумовили вибір **методів** дослідження:

- метод теоретичного аналізу психолого-педагогічної, навчальної, методичної літератури, змісту програм і підручників, що містять розділ "Комплексні числа" (1.1 - 1.3 - тут і далі підрозділи дисертації);

- порівняння, конкретизація, систематизація та узагальнення теоретичного і практичного матеріалу - під час обґрунтування основних положень дослідження (1.2, 1.3, 2.1 - 2.3);

- емпіричні методи: педагогічні спостереження, бесіди з учителями, які викладають у профільних класах; бесіди та анкетування учнів і студентів; аналіз результатів самостійних, контрольних робіт; аналіз і узагальнення педагогічного досвіду (2.4 - 2.6);

- експериментальні: констатувальний – для встановлення вихідних даних про розробку і проведення курсу за вибором, пошуковий – для удосконалення розробленого курсу, формувальний – для експериментальної перевірки ефективності розробленого курсу; статистична обробка та аналіз результатів дослідження (2.6).

Методологічну основу дослідження становлять найважливіші положення теорії пізнання і розвитку мислення, діяльнісна концепція навчання, системного, комплексного та особистісно орієнтованого підходу до навчально-виховного процесу (Л. С. Виготський, П. Я. Гальперін, Я. І. Грудьонов, В. В. Давидов, Д. Б. Ельконін, О. Н. Леонтьєв, І. Я. Лернер, С. Л. Рубінштейн та ін.), теорія проблемного і розвивального навчання, диференціації навчання, і, зокрема, профільної, прикладне спрямування (М. І. Бурда, М. І. Жалдак, Л. В. Занков, М. Я. Ігнатенко, З. І. Калмикова , Т. В. Колесник, Т. В. Крилова, М. І. Махмутов, Н. О. Менчинська, З. І. Слєпкань, Л. М. Фрідман, Т. М. Хмара, О. В. Швець, М. І. Шкіль, І. С. Якиманська та ін.); положення методики навчання математики і, зокрема, теорії комплексних чисел (І. К. Андронов, Г. П. Бевз, М. І. Бурда, Н. Я. Віленкін, Г. В. Дорофєєв, О. С. Дубинчук, П. М. Ерднієв, С. Т. Завало, О. І. Маркушевич, Г. О. Михалін, З. І. Слєпкань, З. А. Скопец, В. В. Фірсов, Т. М. Хмара, С. І. Шварцбурд, В. О. Швець, М. І. Шкіль, І. М.

Яглом та ін.); сучасні концепції комп’ютерної підтримки навчального процесу та формування предметних і професійних компетентностей (М. І. Жалдак, В. П. Горох, С. О. Раков, Т. А. Олійник та ін.); сучасні статистичні методи обробки результатів експерименту (П. М. Воловик, М. І. Грабарь, К. О. Краснянська та ін.).

Дослідження ґрунтувалося на основних положеннях Закону України “Про освіту”, Національної доктрини розвитку освіти в Україні у XXI столітті, Концепції математичної освіти 12-річної школи, Концепції профільного навчання в старшій школі.

Наукова новизна полягає у тому, що:

- обґрунтовано доцільність та можливість використання прикладних задач та задач із міжпредметними та внутріпредметними зв’язками під час вивчення елементів теорії комплексних чисел учнями профільних класів;

- вперше розроблено методичну систему навчання основ теорії комплексних чисел із використанням системи прикладних задач та задач із міжпредметними та внутріпредметними зв’язками.

Теоретичне значення дослідження полягає в тому, що розкрито та реалізовано дидактичні можливості розділу математики “Комплексні числа” та розроблено адаптований до пізнавальних можливостей учнів профільних класів зміст даного розділу програми для 12-річної школи.

Практичне значення дослідження полягає в розробці та експериментальній перевірці змісту курсу за вибором та системи прикладних задач і задач із міжпредметними та внутріпредметними зв’язками, які розв’язуються за допомогою комплексних чисел, а також методики їх використання вчителями математики.

Експериментальна база дослідження. Експериментальна робота здійснена у навчальних закладах: Дрогобицькому педагогічному ліцеї (довідка № 154 від 07.05. 08 р.), Дрогобицькій ЗОШ І-ІІІ ступенів №1 імені І. Франка (довідка № 128 від 24.04. 08 р.); Славутицькому ліцеї (довідка № 87 від 19.05.08 р.); Технічному ліцеї НТУУ “КПІ” м. Вишгорода (довідка № 144 від 14.06.08 р.); гімназії ім. Осипа Маковея м. Яворова (довідка № 91а від 25.04.08р.); Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка (довідка № 391 від 05.05.08р.).

Обґрунтованість і вірогідність результатів дослідження забезпечені об’єктивним науковим підходом до аналізу стану досліджуваної проблеми в педагогічній теорії і практиці, методологічною обґрунтованістю вихідних позицій дослідження, застосуванням методів дослідження, що відповідають меті, предмету і завданням, результатами проведеного протягом 2001-2008 рр. педагогічного експерименту, статистичними методами обробки даних, отриманих у результаті дослідження, та впровадженням результатів дослідження в практику роботи вчителів математики.

Особистий внесок здобувача полягає у:

– висуненні ідеї і теоретичному обґрунтуванні доцільності та можливості впровадження курсу за вибором “Комплексні числа та їх застосування” у профільних класах;

– доборі і систематизації змісту теоретичного матеріалу та системи задач для навчально-методичного посібника “Комплексні числа та їх застосування”;

– встановленні методичних вимог до системи задач як засобу реалізації міжпредметних та внутріпредметних зв’язків, розробці такої системи; виявленні ефективних шляхів, методів, організаційних форм проведення курсів за вибором старшокласників.

У роботі, опублікованій у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у розробці методики використання комплексних чисел до розв'язування геометричних задач.

Апробація результатів дисертації. Результати дослідження доповідалися на Міжнародній науково-практичній конференції "Дні науки – 2005" (Дніпропетровськ, 2005), на II Всеукраїнській науково-практичній конференції "Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи" (Полтава, 2005), на 11 Міжнародній науковій конференції імені М. Кравчука (Київ, 2006), II Міжнародній науково-практичній конференції "Перспективні розробки науки і техніки – 2007" (Дніпропетровськ, 2007), на Всеукраїнському методичному семінарі з проблем навчання математики (Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, 2004), на семінарах кафедри математики та методики викладання математики (Дрогобицький державний педагогічний університет імені І. Франка, 2002-2007).

Публікації. Основні положення і результати дисертації відображені в 11 науково-методичних роботах, з них шість [311; 324; 326; 330; 331; 333] – у науково-методичних журналах, чотири [327-329; 332] – у збірниках матеріалів науково-практичних конференцій, одна [325] рекомендована лабораторією математичної та фізичної освіти Інституту педагогіки Академії педагогічних наук України як експериментальний навчально-методичний посібник, який схвалено методичною комісією МОН України, а програму розробленого курсу за вибором включено до Переліку програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для використання у загальноосвітніх навчальних закладах з навчанням українською мовою у 2008/2009 навчальному році [217].

На захист виносяться:

- положення про доцільність та можливість прикладного спрямування вивчення розділу "Комплексні числа"; позитивний вплив такого підходу на пізнавальний інтерес та результати навчання учнів профільних класів;
- методична система вивчення курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування" у профільних класах.

РОЗДІЛ 1
ДОСЛІДЖУВАНА ПРОБЛЕМА В ПЕДАГОГІЧНІЙ ТЕОРІЇ ТА ПРАКТИЦІ

1.1. Профільна модель шкільної математичної освіти як важливий компонент особистісно-орієнтованої системи навчання математики

У контексті суспільно-економічних змін в Україні активно здійснюється реформування загальної середньої і, зокрема, математичної освіти. Домінантним напрямом цього процесу є пошук шляхів і засобів створення умов для розвитку та самореалізації кожного школяра. У "Національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті" та "Концепції математичної освіти 12-річної школи" підкреслюється , що особистісна орієнтація освіти є одним із пріоритетів державної політики в розвитку освіти [196, 4; 136, 12].

Загальноосвітня школа в СРСР була строго централізованою та уніфікованою. Держава керувала всіма процесами у країні і, зокрема, освітою. Такий підхід мав пе вні переваги, адже така система освіти підтримувала необхідний рівень науковотехнічної думки, здійснювала інтелектуальне самозабезпечення держави в умовах її міжнародної ізоляції. Невідповідність між запитом особистості й уніфікованим зміс том освіти в середній школі зумовили: по-перше, зниження пізнавального інтересу значної частини школярів і, як результат, зниження якості освіти в країні; по-друге, варіативність навчання, виникнення різнопрофільних шкіл, ліцеїв, гімназій, посилення уваги до довузівської підготовки майбутніх студентів.

Крім того, внаслідок суспільно-економічних змін та переходу до ринкових відносин у нас намітилося розшарування суспільства, втрата державного престижу соціально значущих професій (учитель, інженер, лікар тощо) і в той же час є усві домлення того, що реальне розв'язання протиріч та труднощів у всіх основних сферах життя (суспільного, економічного, культурного) неможливе без підготовки освічених, відповідальних, ініціативних фахівців.

У зв'язку з цим система середньої і вищої освіти покликана розв'язувати проблему формування мотивів і потреб отримання якісної освіти високого рівня, глибокого внутрішнього усвідомлення її необхідності для успішної професійної діяльності в будь-якій сфері.

У старшій школі принцип особистісно-орієнтованого навчання найповніше реалізує профільна школа. У Концепції профільного навчання в старшій школі відзначається, що "загальною тенденцією розвитку старшої профільної школи є її орієнтація на широку диференціацію, варіативність, багатопрофільність, інтеграцію загальної і допрофесійної освіти" [137, 4]. Саме профільне навчання спрямоване на реальне життєве і професійне самовизначення випускників школи. "Тому профільність навчання у старшій школі – це один із шляхів, які мають забезпечити соціальний захист молодої людини" [242, 6].

Освіта учнів 10-12 класів повинна бути більше орієнтована на індивідуалізацію навчання й соціалізацію школярів, зокрема з урахуванням майбутніх освітніх і професійних траєкторій та реальних потреб ринку праці. Це має проявлятися в інтегрованості освіти в плани життєвої самореалізації учня, у включенні шкільної освіти в схему побудови професійної кар'єри, коли за школою йде продовження освіти у вищому навчальному закладі, середньому професійному навчальному закладі тощо. Навчання значною мірою має враховувати інтереси, нахили, здібності й особистісну мету старшокласників. У результаті орієнтації учня в старших класах на його майбутню професійну освіту і життєві перспективи в цілому підвищується:

–навчальна мотивація (більше учнів дістануть відповідь на питання, навіщо вчити ті чи інші предмети, що будуть відповідати їхнім інтересам, здібностям і планам на майбутнє);

–ефективність навчання (оскільки учень засвоює ті предмети і курси, які йому потрібні, тому результати будуть набагато кращі);

–розвиток здатності до вибору (уже в шкільному віці учнем робиться академічно й життєво важливий, відповідальний вибір);

–розвиток здібностей, задоволення пізнавальних інтересів школярів.

У сучасній науково-методичній літературі профільне навчання розглядається як:

– процес, що спрямований на реальне життєве та професійне самовизначення випускників школи, диференційований за змістом навчання, в якому враховуються в першу чергу основні запити і професійні плани учнів у реальних регіональних умо вах; прогнозований з урахуванням структури ринку праці та зайнятості для молоді;

– принцип, дотримання якого забезпечує поглиблене вивчення окремих дисциплін, програми повної середньої освіти, створює умови для значної диференціації змісту освіти старшокласників, сприяє встановленню рівного доступу до повноцінної якісної освіти та розширює можливості соціалізації учнів;

– форма організації навчального процесу, спрямована на реалізацію особистісної орієнтації навчального процесу;

– засіб диференціації та індивідуалізації навчання, коли за рахунок змін у структурі, змісті й організації освітнього процесу повніше враховуються інтереси, здібності та схильності учнів, створюються умови для освіти старшокласників відповідно до їх професійних інтересів і намірів щодо продовження освіти.

Профільне навчання є одним із видів диференціації. Диференціація в перекладі з французького “differentiation”, з латинського “differentia” означає поділ, розшарування цілого на різноманітні частини, форми, ступені [64]. До цього часу в педагогічній і психологічній літературі не існує єдиного загальноприйнятого визначення поняття “диференціація навчання”.

Так, у працях дидактів Ю. К. Бабанського [16], П. П. Блонського [24], Н. К. Гончарова [65], М. А. Мельникова [176], Н. М. Шахмаєва [336] та ін. диференціація розглядається як особлива форма організації навчання з урахуванням типологічних індивідуально-психологічних особливостей учнів і особливого взаємозв’язку “вчитель-учні”.

М. Н. Скаткін виділяє диференціацію як родове поняття, що включає в себе індивідуалізацію як поняття видове. У цьому випадку навчально-виховний процес, “для якого характерне врахування типових індивідуальних відмінностей учнів, при йнято називати диференційованим, а навчання в умовах такого процесу – диференційованим навчанням” [79, 269].

Г. К. Селевко [259] відзначає, що диференціація навчання – це: 1) форма організації навчального процесу, при якій учитель працює з групою учнів, створеною з урахуванням наявності в них яких-небудь значимих для навчального процесу загальних якостей (гомогенна група); 2) частина загальної дидактичної системи, що забезпечує спеціалізацію навчального процесу для різноманітних груп учнів. За організаційним рівнем гомогенних груп він виділяє диференціацію:

–регіональну – за типом шкіл (спецшколи, гімназії, ліцеї, коледжі, приватні школи, комплекси);

–внутрішкільну (рівні, профілі, відділення, поглиблення, ухили, потоки);

–у паралелі (групи і класи різноманітних рівнів: гімназичні, класи компенсуючого навчання і т. п.);

–міжкласну (факультативні, зведені, різновікові групи);

–внутрікласну, або внутріпредметну (групи в класі).

Внутрікласну диференціацію називають ще “внутрішньою”, на відміну від усіх інших видів “зовнішньої” диференціації.

Г. В. Дорофеєв, Л. В. Кузнєцова, С. Б. Суворова, В. В. Фірсов [81] виділяють диференціацію навчання як необхідну умову гуманізації і демократизації освіти, її переходу на нову культуротворчу основу. Під диференціацією розуміється така сис тема навчання, при якій кожен учень, оволодіваючи деяким мінімумом загальноосвітньої підготовки, що є загальнозначимою і такою, що забезпечує можливість адаптації в змінних життєвих умовах, одержує право та гарантовану можливість приділити переважну увагу тим напрямам, які найбільшою мірою відповідають його нахилам.

У роботах А. А. Бударного [34], В. М. Монахова та інших [192] диференціація визначається як урахування індивідуальних здібностей учнів при груповому навчанні за індивідуальними планами і програмами. Близької позиції дотримується І . С. Якиманська, яка відзначає, що диференційована освіта – це освіта, що передбачає забезпечення різноманітних форм навчання, що дозволяють максимально враховувати індивідуальні особливості учнів, їхні інтереси, нахили, можливості, ціннісні та професійні орієнтації [355].

Досить конкретний підхід до даного поняття знаходимо в П. В. Руднєва, який визначає диференціацію освіти як “розділення змісту загальної освіти за низкою напрямів у середній школі й створення у зв’язку з цим декількох навчальних планів, які відрізняються один від одного значним збільшенням часу на вивчення тієї або іншої групи навчальних предметів, що вважаються провідними або профілюючими” [253, 12].

В. М. Монахов [134; 192] розглядає індивідуалізацію навчання як мету, а диференціацію як засіб досягнення цієї мети.

Аналіз науково-методичної літератури дозволив нам дотримуватися наступного визначення. Під диференціацією навчання ми розуміємо таку організацію процесу навчання, яка враховує, в першу чергу, індивідуальні особливості, основні запити і професійні плани учнів у реальних умовах, цим самим сприяючи розкриттю особистості кожного школяра, його розвитку як індивідуальності, й забезпечує варіативність змісту освіти при оволодінні всіма учнями обов’язковим базовим рівнем підготовки. Індивідуальні особливості учнів включають різні параметри, до яких входять обов’язково інтереси, нахили, здібності, ціннісні орієнтації, досвід особистості. Здійснення диференційованого навчання відбувається через різні форми та методи.

Згідно чинної Концепція математичної освіти 12-річної школи [136] процес навчання старшокласників будується на основі рівневої (внутрішньої) та профільної (зовнішньої) диференціації.

Рівнева диференціація полягає в організації навчального процесу з врахуванням індивідуальних особливостей учнів, коли при навчанні учнів за однією і тією ж програмою в одному і тому ж класному колективі із застосуванням форм та методів навчання, що забезпечують навчальну діяльність кожного учня, відбувається засвоєння навчального матеріалу на певному рівні.

Профільна (зовнішня) диференціація полягає у створенні на основі певних принципів (інтересів, нахилів, здібностей, професійних намірів) відносно стабільних груп, у яких відрізняються зміст освіти і навчальні вимоги, що ставляться до школя рів. Профільна диференціація дає можливість учням здобути освіту за різними профілями, навчальними планами й програмами з метою їхньої професійної орієнтації. Мета профільного навчання з психолого-педагогічного погляду – створення найсприятливіших умов для розвитку інтересів та спеціальних здібностей кожного учня. За цих умов забезпечується засвоєння кожним учнем базового рівня знань з того чи іншого предмета.

Концепцією профільного навчання в старшій школі [137, 8] визначено основні завдання та основні принципи, на яких ґрунтується профільне навчання.

Основними завданнями профільного навчання є:

–створення умов для врахування і розвитку навчально-пізнавальних і професійних інтересів, нахилів, здібностей і потреб учнів старшої школи в процесі їхньої загальноосвітньої підготовки;

–виховання в учнів любові до праці, забезпечення умов для їхнього життєвого і професійного самовизначення, формування готовності до свідомого вибору і оволодіння майбутньою професією;

–формування соціальної, комунікативної, інформаційної, технічної, технологічної компетенцій учнів на допрофільному рівні, спрямування підлітків щодо майбутньої професійної діяльності;

–забезпечення наступно-перспективних зв'язків між загальною середньою і професійною освітою відповідно до обраного профілю.

Профільне навчання ґрунтується на таких принципах:

–фуркації (розподіл учнів за рівнем освітньої підготовки, інтересами, потребами, здібностями, нахилами);

–варіативності й альтернативності (освітніх програм, технологій навчання і навчально-методичного забезпечення);

–наступності та неперервності (між допрофільною підготовкою і профільним навчанням, професійною підготовкою);

–гнучкості (змісту і форм організації профільного навчання, у тому числі дистанційного; забезпечення можливості зміни профілю);

–діагностико-прогностичної реалізованості (виявлення здібностей учнів з метою їх обґрунтованої орієнтації на профіль навчання) [137, 9].

1.1.1. Досвід впровадження та функціонування профільної диференціації у сучасній школі. Ідея профільної диференціації навчання у старшій школі не є новою. Певним чином вона знаходила своє втілення і вдосконалювалася протягом довгого часу. В Україні вже є достатній позитивний досвід впровадження і функціонування профільного навчання.

Елементи диференціації можна знайти у братських школах XVI-XVII століття, які були осередками культурного життя України того часу. За статутом братської школи становище учнів залежало не від матеріального стану батьків, а від їх особис тих успіхів у навчанні. Учні поділялися на три групи: в першій дітей навчали розпізнавати літери й складати їх у слова; у другій – тренували у читанні й заучуванні напам'ять; у третій – привчали розуміти і пояснювати прочитане [85, 95].

У харківському колегіумі з 1765 року були створені класи французької і німецької мов, математики, інженерної справи, артилерії, геодезії, вокалу та інструментальної музики, де вчилися діти всіх верств населення [161]. У колегіумі викладав Г. С. Сковорода (1722-1794), який першим в історії педагогічної думки та освіти висуває ідею про те, що формування людини має бути спорідненим із її природою, природовідповідним. Під природою людини філософ-просвітитель розуміє обдарування, нахили, отримані від народження. Його ідея полягає в тому, щоб батьки та вихователі знали наділені природою особливості дитини і всебічно розвивали їх шляхом навчання [268, 104].

У 1701 році в Москві почала функціонувати школа нового типу – школа математичних та навігаційних наук, яка була першим у світі реальним училищем. Створюються державні загальноосвітні школи: “руські”, де учнів навчали письма й читання, і “цифірні”, де вивчали арифметику з елементами геометрії. “Цифірні” школи мали стати основним типом початкової школи з математичним ухилом [106].

Наступною віхою в запровадженні профільного навчання було створення гімназій різного типу.

У кінці XVIII століття в працях вчених з’являється думка про те, що одним із головних завдань навчання в школі є виявлення у дітей нахилів, інтересів і активне врахування їх у навчанні. Так, у роботі “Про виховання” А. А. Прокопович-Антонський (1763-1848) говорив, що “першим правилом вихователь повинен поставити для себе те, щоб завчасно дослідити здібності вихованця... і згідно з силами та даруваннями молодої людини розміряти труди для нього і старання. Ніхто не народжується в світі, не одержавши до чого-небудь здібності... Внутрішня схильність завжди готова розкритися в нас, потрібно тільки вдало доторкнутися до неї. Взнавши здібності розуму, належить уживати засоби, які сприятимуть розвитку їх і спрямуванню до доброї і рятівної мети” [12, 351].

У праці “Про виховання і повчання дітей” М. І. Новіков (1744-1818) зауважує, що для того, щоб зробити людину щасливою і корисним громадянином, треба “розбудити в ній бажання й нахил до вивчення потрібного їй, якщо вчитель точно знає властиві їй сили і здібності та співвідношення, в якому вони між собою знаходяться. В цьому випадку потрібно тільки часто і довго притримувати в душі її ті предмети, котрі для здібностей її більше від інших мають переваги й котрими найбільш охоче займається вона за природнім спонуканням” [12, 331].

Отже, зміст освіти XVIII століття мав яскраво виражений реальний напрям, а загальна освіта в школі поєднувалася зі спеціальною. Основою для диференціації були не лише потреби суспільства в різних професіях, але й індивідуальні особливості та інтереси школярів.

У першій половині XIX ст. головним напрямом у запровадженні професійного спрямування освіти було створення спеціальних класів і додаткових курсів при гім назіях та повітових училищах. Додаткові курси давали знання, що мали практичну спрямованість, допомагаючи випускникам загальноосвітніх навчальних закладів ле гше включатися в життя та полегшували одержання в майбутньому теоретичної і спеціальної практичної підготовки. В деяких гімназіях дозволялося збільшувати кількість навчальних предметів, коли виявлялися здібні до того чи іншого предмета діти, це було спеціально відзначено в уставі гімназії. Можна вважати, що це було першим прообразом такої форми профільного навчання як факультативні заняття чи вивчення курсу за вибором.

Передові педагоги того часу дбали про специфічні особливості навчання в різному віці, тобто про диференціацію навчання за основними віковими групами. Відомий просвітитель І. Ф. Богданович (1758-1831) у своїх працях дає багато практичних порад щодо виявлення й розвитку нахилів дитини. Особливо необхідним він вважав у старшому шкільному віці розвивати ці нахили: “У сьому віці юнак... виявляє більш свої схильності і відкриває, так би мовити коло тих здібностей, якими природа його обдарувала. А тому уважно примічаючи, до чого має охоту, не тільки додати повинен час для вдосконалення його в улюбленому ним предметі, але і тій науці, вибравши кращих авторів, дозволити займатися читанням так, щоб він прочитане ним детально переказував із додаванням своїх, власних роздумів" [66, 17].

Потрібно відзначити, що саме в XIX столітті були закладені основи педагогічної психології та проголошені тези про виховне і розвивальне навчання. Підтвердження цього можна знайти в роботах багатьох педагогів і просвітителів того часу.

У середині XIX ст. було проведено нову реформу системи середньої освіти. У 1864 році видається новий Статут, яким засновуються семикласні гімназії двох типів: класична і реальна. Метою класичної гімназії була підготовка до вступу в уні верситет і вивчалися тут, в основному, іноземні мови та історія. Метою реальних гімназій була підготовка до практичної діяльності та вступу в спеціалізовані навчальні заклади і вивчалися тут посилено природознавство, математика, фізика і дві нові мови. Фуркація (диференціація) починалася з першого класу.

Пізніше такий розподіл був визнаний помилковим через дуже ранню вікову спеціалізацію. Статут 1871 року залишив у Росії один тип державної середньої школи – класичну гімназію, реальні гімназії були перетворені в реальні училища, де здійсню вався природничо-науковий напрям освіти, тут вивчали математику, фізику, біологію, хімію, креслення, німецьку і французьку мови.

Цікавими були погляди видатного педагога того часу В. Я. Стоюніна (1826-1888). У своїй праці "Думки про наші гімназії" він стверджує, що старших школярів потрібно вчити небагатьом предметам, але як слід: "Обтяжуючи і розважаючи юна цтво безліччю різноманітних предметів, чи можемо ми вимагати від них якого-небудь напряму, коли їм не доводилося переслідувати ніякої думки, не доводилося ні над чим довго і серйозно замислюватися за відсутністю часу" [110, 46].

Услід за першими гімназіями на початку XIX ст. в Росії стали з'являтися і перші ліцеї для особливо обдарованих дітей (в основному дворянського походження). Ліцеїсти вивчали предмети університетської програми, об'єднані в три групи: етико-політичні, словесні і фізико-математичні. Проте, на відміну від університету, поділу на факультети в ліцеї не було.

Проблема фуркації навчання широко дискутувалася на I Всеросійському з'їзді викладачів математики, який проходив з 27 грудня 1911 року по 3 січня 1912 року. З'їзд відкрився доповіддю А. В. Васильєва "Математичне і філософське викладання в середній школі", де разом з іншими проблемами розглядалося питання про необхідність індивідуалізації навчання, особливо важливої в старших класах. Цю думку розвинув А. В. Полторацький: "Доки у нас буде прагнення нівелювати всіх за однією указкою, примушувати працювати за однією програмою, при найкращій програмі можна не досягти великих результатів, але коли випадає більше свободи вибору у викладачів і у вихованців, тим кращі будуть результати" [283, 22].

Проблему наступності середньої і вищої школи зачепив у своїй доповіді К. А. Поссе. Він звернув увагу на те, що багато молодих людей, які вступили на фізико-математичний факультет університету або інші технічні школи, виявляються зовсім не підготовленими до вивчення вищої математики й тому переходять на інші факультети. У зв'язку з цим доповідач запропонував наступне: "Найраціональнішим способом задовольнити вимоги вищої школи, не вступаючи в конфлікт із загальноосвітніми цілями середньої школи, є розділення курсу математики на загальний, обов'язковий для всіх, і спеціальний, обов'язковий для тих, хто бажає вступати на математичне відділення фізико-математичного факультету або у вищу технічну школу" [277].

Наведені матеріали свідчать про широке та ґрунтовне обговорення проблеми фуркації на І-му Всеросійському з'їзді викладачів математики, що знайшло відображення в заключних резолюціях, дві з яких (4 і 5) присвячені фуркації:

– "з'їзд визнає бажаним докладне розроблення питання про таку організацію навчання в школі, яка, зберігаючи загальноосвітній її характер, припускала б спеціалізацію в старших класах, пристосовану до індивідуальних здібностей учнів, котра б задовольняла вимоги вищої школи;

– з'їзд визнає бажаним, щоб найобдарованіші в математичному плані учні могли знайти в навчальному закладі задоволення своїх запитів, а також організоване керування з боку навчального персоналу" [277].

Міністерство народної освіти не могло не відреагувати на такі пропозиції і вже у 1915 році були розв'язані найважливіші проблеми реформи шкільної освіти, у тому числі проблема фуркації. В старших класах передбачалося чотири відділення: новогуманітарне, гуманітарно-класичне, природниче, математичне. Розроблялися проекти навчальних програм для середньої школи, але їм не судилося збутися через революцію, що незабаром почалася.

Отже, у школі дореволюційної Росії проблема профільної диференціації забезпечувалася за допомогою існування різних типів навчальних закладів, які давали середню освіту: гімназії, ліцеї, реальні училища (технічні і комерційні), кадетські корпуси та ін. Кожен тип навчального закладу мав свій навчальний план та свої програми, за допомогою яких і здійснювалась диференціація навчання. На початку XX століття також обговорювалися різні проекти типології навчальних закладів, де намічалося здійснити фуркацію в старших класах середньої школи. Однак жоден із них не було реалізовано.

У перші роки радянської влади важливим кроком у побудові нової системи освіти був проведений у 1918 році І-й Всеросійський з'їзд освіти. У період підготовки з'їзду питання фуркації в старших класах обговорювалося і ввійшло до первинного проекту документів. Передбачалася фуркація за трьома напрямами освіти: гуманітарним, природничо-математичним і технічним з метою задовольнити нахили молоді та полегшити вибір професії. Проте на з'їзді принцип фуркації було піддано різкій критиці, як пережиток старої, царської школи, що вступає в протиріччя з принципом єдності школи.

Разом з тим думки вчених були досить різними. Так А. В. Луначарський, виступаючи на з'їзді, говорив: "...Фуркація, що вводиться, є та м'яка форма напряму діяльності дитячих нахилів, яка дозволить запровадити багатші форми шкільного життя, не розрубуючи різко два періоди – спочатку ніякої спеціалізації, після закінчення навчання відразу вибирай таку, не будучи і підготовлений до неї" [160, 27].

Найхарактернішим видом диференціації для радянської школи 20-х років була професіоналізація школи II ступеня та введення профухилів з метою забезпечення потреб народного господарства в підготовці кваліфікованих робітників масових професій.

З 40-вих до 50-тих років тривав новий етап в історії радянської школи і педагогіки, який був характерний відмовою від надбань школи 20-х років. Постановами ЦК ВКП(б) "Про навчальні програми і режим в початковій і середній школі" (1932 р.), Ради Народних Комісарів СРСР "Про структуру початкової і середньої школи в СРСР" (1934 р.) та іншими, був визначений курс на одноманітність школи, сувору регламентацію всього навчально-виховного процесу.

Наприкінці 50-х років XX століття у працях видатних педагогів почала формуватися концепція розвивального навчання. Психологічний аспект навчання досліджувався з позицій діяльнісного підходу, теорії індивідуальних відмінностей (Б. М. Тепловим), особливостей здібностей особистості учня (В. А. Крутецьким), зв'язку вікового й індивідуального в розвитку здібностей (Н. С. Лейтесом). У цей час диференціація розглядалася також з різних позицій: як принцип навчання (М. А. Даниловим, Б. П. Єсиповим), як одна з дидактичних засад побудови змісту освіти (М. Н. Скаткіним), як форма організації пізнавальної діяльності (І. Т. Огородніковим). Рішучим прихильником ідеї профільної диференціації змісту освіти був Н. К. Гончаров. Він пропонував визначити напрями диференціації, виходячи з двох основних груп наук – про природу і людське суспільство. При цьому зауважувалось, що диференціація (фуркація) використовується як засіб розширення і поглиблення загальної освіти і в жодному разі не порушує системи загальної освіти в цілому [66, 30].

Отже, демократизація життя країни в 50-і роки і вимоги науково-технічного прогресу підготували ґрунт для створення шкіл з поглибленим вивченням окремих предметів.

Вперше класи з поглибленим вивченням математики в колишньому Радянському Союзі виникли в 1959 році як наступники шкіл і класів програмістів-обчислювачів, оскільки перед школою було поставлене завдання підготовки спеціалістів математич них професій з середньою математичною освітою. З часом їх кількість зростала. Такі школи відкривалися для IX-X класів. Кількість учнів у кожному класі не перевищувала 35 чол. Для проведення практичних занять клас, в якому було більше 25 учнів, ділився на 2 групи. Середня загальноосвітня школа з поглибленим вивченням математики забезпечувала учням, які її закінчили, поглиблене оволодіння знаннями і навиками з ма тематики, розвиток теоретичних здібностей відповідно до інтересів і нахилів, сприяла свідомому вибору професії.

Поглибленому вивченню предмета сприяла і така форма позакласного навчання як факультативні заняття за вибором учнів. Наприкінці 50-х років у ряді шкіл були відкриті факультативи. Наявність факультативного курсу в межах загальноосвітньої школи дозволяла, по-перше, створити широкий загальнокультурний, емоційно значущий для учня фон засвоєння різних напрямів програми (стандарту загальної освіти), і по-друге, предметно орієнтувати його в базових видах діяльності, сприяючи визначенню життєвих планів, включаючи і допрофесійну орієнтацію.

Перші школи (класи) з поглибленим вивченням предметів (у тому числі математики) в УРСР були відкриті в 1967-68 навчальному році. Надалі мережа шкіл (класів) з поглибленим вивченням математики постійно розширювалася і вдосконалювалася.

У 60-ті роки була введена диференціація за проектованою професією. Школярі стали здобувати середню освіту в різнотипових середніх навчальних закладах: загальноосвітня школа, середні професійно-технічні училища (СПТУ) і середні спеціальні навчальні заклади.

На початку 60-х років помітно активізується наукова робота з проблем диференціації та індивідуалізації навчання. Про це свідчить велика кількість праць, присвячених цій проблемі. Питання диференціації, розвитку пізнавальної самостійності довгий час залишались предметом дослідження таких вчених як А. А. Бударний [34], М. А. Данилов [79], А. А. Кірсанов [117], І. Я. Лернер [156; 157], А. А. Мартинович [171], М. І. Махмутов [174], П. І. Підкасистий [220], М. Н. Скаткін [79; 264; 265], І. Е. Унт [296], Т. І. Шамова [321].

У 1966 році виходить урядова постанова "Про заходи подальшого поліпшення роботи середньої загальноосвітньої школи", згідно з якою в шкільну практику широ ко впроваджувалися факультативні заняття (7-10 класи) та створювалися школи й класи з поглибленим вивченням предметів (9-10 класи). Метою цих заходів був розвиток різнобічних інтересів і здібностей учнів, їхня професійна орієнтація. Найпоширенішими були факультативи двох типів: як додаткові розділи і питання систематичних курсів основ наук, що вивчаються паралельно із заняттями за основною програмою; спеціальні курси, що розвивають та доповнюють окремі розділи систематичних курсів основ наук.

На початку 80-х років спостерігається послаблення інтересу до проблеми факу льтативних курсів. Це виявлялося в зниженні їхнього якісного рівня, використанні годин, що відводяться на факультативи, не за призначенням. Найбільше виправдали себе факультативи, які поглиблювали програмний матеріал; позапрограмні факуль тативні курси; факультативи, на яких розглядалися, в основному, практичні застосування вивченого матеріалу; факультативи, що мали міжпредметний характер [249].

Наприкінці 1980-х – початку 1990-х років в Україні з'являються нові типи освітніх закладів (гімназії, ліцеї, коледжі), які зосереджують зусилля учнів на поглибленому вивченні окремих предметів, потрібних їм для подальшого навчання у вищих навчальних закладах, розвитку творчих здібностей, відповідно до інтересів і нахилів учнів сприяють свідомому вибору професії.

У прийнятій "Концепції диференційованого навчання в середній загальноосвітній школі" (1990 р.) [130], розробленій колективом співробітників НДІ загальної середньої освіти АПН СРСР, диференціація навчання вже розглядається як визначальний чинник його демократизації і гуманізації. На основі нової типології форм диференціації, що включає внутрішню (рівневу) і зовнішню (профільну), визначені методичні шляхи диференціації навчання при вивченні тих чи інших навчальних дисциплін, принципи відбору змісту освіти та формування навчального плану та ін. Диференціація навчального процесу, що включає профільне навчання старшокласників, курси за вибором та факультативи, вже розглядається як необхідна складова частина нового підходу до конструювання навчального плану.

Питання диференційованого підходу розглядалися багатьма вченими, в основному методистами на матеріалах навчання окремих предметів, зокрема математики: М. І. Бурда [37], Я. І. Грудьонов [71], Г. В. Дідик [80], О. С. Дубинчук [342; 343], М. І. Жалдак [89], Л. В. Жовтан [91], О. А. Іванов [102], В. М. Козира [124], З. І. Слєпкань [342; 343], Т. М. Хмара [313; 344], А. В. Хуторской [314], В. О. Швець [340], М. І. Шкіль [342-344], С. Є. Яценко [358] та ін.

Прийняттям Закону України "Про загальну середню освіту"(1991), "Концепції загальної середньої освіти (12-річна школа)" (2001), "Національної доктрини розвитку освіти України у XXI столітті" (2002), "Концепції профільного навчання в старшій школі" (2003), у яких законодавчо затверджено введення профільного навчання в старшій школі, розпочався новий, сучасний етап у розвитку проблеми профільного навчання.

Останнім часом поряд зі спеціалізованими школами вже існує чимало шкіл з профільними старшими класами, досвід функціонування яких дозволить побудувати методичну систему навчання математики відповідно до завдань реформи шкільної освіти. Так у 2007/2008 навчальному році поглиблене та профільне навчання було впроваджене у 1700 школах, що охопило майже 500 тис. учнів. Окремо математику за профільними програмами вивчали у 700, а фізику – у 34 навчальних закладах. Існує також мережа навчальних закладів із поглибленим вивченням математики та фізики. У 2007/2008 навчальному році функціонувало 1147 навчальних закладів, що складає третину від усіх закладів із поглибленим вивченням, із них 18% розташовані у сільській місцевості.

У наш час методична система навчання математики має бути доповнена якісно новими компонентами, що забезпечували б її гнучкість та максимальну адаптивність до особистості учня.

1.1.2. Педагогічні умови та методичні вимоги реалізації ідеї особистісно-орієнтованої системи навчання математики в умовах профільної диференціації. Згідно з енциклопедичним словником одне із значень слова "профіль" (від французького profil, від італійського profilo – контури) – сукупність основних, типових рис, що характеризують професію, спеціальність, господарство [278, 1074]. Згідно "Концепції профільного навчання в старшій школі" "профіль навчання – це спосіб організації диференційованого навчання, який передбачає поглиблене і професійно зорієнтоване вивчення циклу споріднених предметів" [137, 8]. Виходячи з цього визначення, поняття профільне навчання будемо розглядати як вид диференційованого навчання, який передбачає врахування освітніх потреб, нахилів та здібностей учнів і створення умов для навчання старшокласників відповідно до їхнього професійного самовизначення, що забезпечується за рахунок змін у цілях, змісті та структурі організації навчання [137, 8].

Отже, ідея диференціації та особистісної орієнтації навчання у старшій школі реалізовується через профілізацію навчання, що забезпечує загальноосвітню підготовку учнів та спеціалізовану поглиблену математичну підготовку до майбутньої професійної діяльності.

При організації профільного навчання зовнішня диференціація передбачає наявність стабільних гомогенних груп учнів на основі різних форм розширеного й поглибленого вивчення предметів.

Профільна диференціація може бути як гнучкою (елективною), яка поєднує вільний вибір предметів, факультативів, так і строгою (селективною), коли диференціація навчання досягається через створення класів з поглибленим вивченням предметів чи профільних класів.

У старшій школі основним видом стає профільне навчання – селективний вид зовнішньої диференціації, пов’язаний з організацією на основі певних критеріїв ста більних класів, у яких зміст освіти й вимоги до знань і вмінь учнів відрізняються. Критеріями формування цих класів можуть бути інтереси та нахили учнів, їх здібності, досягнуті ними успіхи, проектована професія. На вибір профілю навчання впливають не тільки перелічені критерії, що характеризують школярів, але й сподівання батьків, соціальні зміни, що відбуваються в суспільстві, особливості регіону.

Іншим, не менш важливим видом профільного навчання є елективні форми диференціації, які передбачають не вибір профілю класу на старшому ступені, а вибір рівня вивчення окремих предметів. Учні, залишаючись у рамках своїх класів, вибирають ряд предметів для вивчення на підвищеному рівні, а інші предмети – на базовому рівні. Це більш гнучка форма зовнішньої диференціації навчання, яка дає змогу учневі поглиблено вивчати не тільки цикли споріднених предметів, але й інші предмети, які їх цікавлять.

Базою профільного навчання у старшій школі є рівнева (внутрішня) диференціація, яка ґрунтується на ідеях особистісно орієнтованого та розвивального навчання.

У “Концепції диференційованого навчання в середній загальноосвітній школі” [134] визначається головна мета диференціації з різних точок зору.

З психолого-педагогічного погляду мета диференціації – індивідуалізація навчання, основана на створенні оптимальних умов для виявлення задатків, розвитку інтересів і здібностей кожного школяра.

Мета індивідуалізації:

–врахування індивідуальних особливостей для кращої реалізації загальних, єдиних для всіх цілей навчання;

–виховання індивідуальності з метою протидії нівеляції особистості.

Найважливішим засобом для досягнення другої мети є надання учням можливості вибору.

Із соціального погляду мета диференціації – цілеспрямована дія на формування творчого, інтелектуального, професійного потенціалу суспільства, що викликається на сучасному етапі прагненням до найповнішого і раціонального використання мо жливостей кожного члена суспільства в його взаєминах із соціумом.

Із дидактичного погляду мета диференціації – розв’язання проблем школи, що назріли, шляхом створення нової методичної системи диференційованого навчання учнів, що базується на принципово іншій мотиваційній основі [259, 4].

Профільна диференціація ґрунтується на добровільному виборі учнями профілю навчання, виходячи з їхніх пізнавальних інтересів, здібностей, досягнутих успіхів навчання й професійних намірів. Процес навчання в групах проходить по-різному: відрізняється зміст освіти, домінуюча роль тих чи інших методів та прийомів навчання, його форм, змінюється стиль взаємодії учнів та вчителів і т. д.

Одним з основних критеріїв профільного навчання є зміст предметів наукових дисциплін, основи яких складають шкільну освіту, тобто “предметний” підхід до диференціації. Виходячи з цього, використовують навчальний план трикомпонент ної структури: базові навчальні предмети, профільні предмети і курси за вибором.

Базові загальноосвітні навчальні предмети становлять інваріантну складову змісту середньої освіти і їх опанування є обов’язковим для отримання загальної середньої освіти згідно Державного загальноосвітнього стандарту [137, 8].

Профільні загальноосвітні навчальні предмети становлять варіативну складову змісту загальної середньої освіти, забезпечують спеціалізовану підготовку до майбутньої професії. Вони є обов’язковими для учнів, які обрали даний профіль навчання [137, 8]. Ці предмети вивчаються поглиблено. Зміст профільних курсів визначається програмами профільної освіти з даного навчального предмету, затвердженого Міністерством освіти і науки. Профільні курси мають забезпечити наступність загальноосвітніх програм та програм професійної освіти. Дальша спеціалізація учнів у рамках вибраного профілю відбувається на основі курсів за вибором.

Курси за вибором – це навчальні курси, зміст яких, як правило, пов’язаний із профілем навчання. Основним їх завданням є поглиблення і розширення змісту профільних предметів та розвиток пізнавальних інтересів учнів [137, 9].

За рахунок комбінацій базових, профільних предметів та курсів за вибором на базі загальноосвітньої школи створюються профілі навчання. Це створює умови для гнучкості системи профільного навчання, спрямованої на розвиток здібностей та інтересів особистості старшокласника [313, 4]. Фактично комбінації профілів і курсів за вибором задають індивідуальні освітні траєкторії. З включенням курсів за вибором у методичну систему її гнучкість та варіативність покращується. Оскільки програми курсів за вибором не є жорсткими, тому вони допускають корекцію. Цим самим вчитель має змогу застосовувати індивідуальний підхід до кожного учня з врахуванням його здібностей, а учасники занять можуть проявляти самостійність у вивченні матеріалу.

Звичайно, модель профільної диференціації є переконливою у своїй ідеї, проте в багатьох випадках реалізується на практиці невідповідно. Як відомо, не кожна школа має змогу організувати профільне навчання. Існує велика кількість шкіл (і в цьому специфіка України) з одним класом універсального профілю, де немає можливості для організації класу фізико-математичного профілю. Адже профілювання передбачає наявність хоча б двох паралельних 10-х класів. І лише тоді забезпечується можливість вибору для учнів між двома напрямами: гуманітарним та природничо-математичним. Гуманітарний напрям передбачає математичну освіту на рівні стандартів, природничо-математичний – на академічному або профільному рівні.

Невиконання цієї умови (в умовах навчання за єдиним універсальним профілем) потребує включення додаткових механізмів побудови особистісно- орієнтованої системи навчання з включенням саме курсів за вибором. Вибравши відповідний додатковий курс, учень дістає змогу підвищити рівень своєї математичної підготовки відповідно з рівня стандартів до профільного.

Вибраний учнем курс не обов'язково повинен бути пов'язаний з відповідним профілем. Головне при цьому – задовольнити пізнавальні інтереси школярів і принципово важливу для розвитку особистості умову реалізації вибору. Наприклад, школяр, що вибрав гуманітарний профіль, виявив цікавість до курсу "Комплексні числа", а школяр, що вибрав фізико-математичний профіль, хоче розширити свої знання в галузі мистецтва, обравши курс "Хореографія", або вивчити курс "Зарубіжна література XX століття".

Іншою функцією курсів за вибором є доповнення програми профільного навчання набором модулів, які поглиблюють відповідні теми, розвивають математичні здібності учнів, що планують у майбутньому обрати професію, безпосередньо пов'язану з математикою.

Отже, можна виділити такі основні дидактичні функції курсів за вибором:

1)поглиблення і розширення змісту профільних предметів або забезпечення профільної прикладної і початкової професійної спеціалізації навчання у вигляді незалежних навчальних модулів (в цьому випадку такий доповнений профільний курс стає певною мірою поглибленим);

2)підвищення рівня математичної підготовки учнів з рівня стандартів до профільного (при цьому розвивається зміст одного з базових курсів - це дозволить школярам, що цікавляться математикою, задовольнити свої пізнавальні потреби та отримати додаткову підготовку);

3)задоволення пізнавальних інтересів старшокласників (ці курси виходять за рамки вибраного учнем профілю, проте становлять певний пізнавальний інтерес для старшокласника).

При цьому кількість курсів за вибором, пропонованих у складі профілю, має перевищувати кількість курсів, які зобов'язаний вибрати учень.

Розглянемо функції курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування" у математичній освіті школярів.

Поняття комплексного числа завершує і збагачує одну зі змістових ліній шкільної математики – ідея розвитку поняття числа. Знання комплексних чисел дозволяє глибше усвідомити такі розділи шкільної програми як розв'язування рівнянь і нерівностей, тригонометричні функції.

Відкриття комплексних чисел не тільки збагатило математику новими числами більш загального вигляду, але і озброїло вчених, після визнання ними останніх, новими, загальнішими методами дослідження. Багато теорем алгебри, які раніше доводилося розбивати на частинні випадки, після введення комплексних чисел набули узагальнення. Новими методами збагатилося розв'язання вже відомих задач, суттєво збагатився і самий їхній зміст, стала бурхливо розвиватися одна з важливих гілок математичного аналізу – теорія функцій комплексної змінної.

Лише за допомогою теорії комплексних чисел можна повністю пояснити багато різноманітних математичних фактів, в першу чергу алгебраїчного характеру, з якими доводиться зустрічатися при вивченні елементарної математики. Апарат комплексних чисел є добрим аналітичним засобом для розв'язування різноманітних геометричних задач. Застосування комплексних чисел дозволяє не тільки простіше і красивіше розв'язувати багато відомих задач, але й дає можливість віднаходити нові факти і робити узагальнення. Ще М. І. Лобачевський у 1876 році особливо підкреслював "високу ефективність використання уявних чисел у тригонометрії" [159, 52].

Комплексні числа служать добрим засобом встановлення міжпредметних зв'язків між різними розділами математики і фізики. Широке використання комплексних чисел в математиці і фізиці, з одного боку, переконує учнів в важливості і корисності цих чисел, з іншого боку, само собою дуже цікаво і важливо, особливо для майбутніх студентів вищих технічних закладів освіти. Тому вивчення комплексних чисел разом з їх застосуваннями до питань геометрії, тригонометрії, фізики підвищить рівень математичної підготовки учнів, збагатить їх новими знаннями, необхідними їм надалі як для успішного вивчення математики та суміжних дисциплін у вищих навчальних закладах, так і для практичної діяльності після закінчення школи.

Відповідно можна визначити основні функції курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування":

– формування математичної культури учнів;
– задоволення пізнавальних інтересів майбутніх математиків-професіоналів;
– збагачення сукупності математичних методів пізнання старшокласників;
– встановлення міжпредметних зв'язків курсу алгебри;
– посилення прикладної спрямованості викладання математики.

З метою формування цілісної картини поняття числа множину дійсних чисел можна розширити введенням уявного числа   ще у 8 класі при розв'язуванні квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом. При цьому важливим є психологічний фактор. Подолання ще у шкільному віці певного бар'єру в сприйманні поняття комплексного числа є важливим як для майбутніх студентів вищих технічних навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації, а тим більше для майбутніх математиків.

Цікавий погляд на це питання знаходимо у педагогічній спадщині В. І. Левицького. У його підручнику "Алгебра для висших кляс шкіл середніх", ч. 1, 2, 1908, 1909 рр., вміло поєднується виклад нового матеріалу на основі вже відомих фактів і часто вказується на можливі узагальнення або розвиток цих понять при подальшому вивченні. Так, у розділі "Корені" зауважується:

"Случаю   не можемо поки що розслідувати; корінь сей не може дати на вислід ані числа додатного ані від'ємного, бо так число додатне, як і від'ємне, піднесене до степени паристої, дає вислід додатний. Сей проблем, як побачимо далі веде до нової категорії чисел, про які обширніше будемо говорити" [125, 51]. Зауваження такого характеру дозволяють учню бачити структуру математики в цілому як єдину взаємообумовлену систему.

Згідно діючої програми [241] вивчення комплексних чисел передбачено у 10 класі фізико-математичного профілю, при цьому на дану тему відводиться близько 6 академічних годин. Тому пропонований курс за вибором "Комплексні числа та їх застосування", який включиться у методичну систему після проходження матеріалу, передбаченого даною програмою, продовжуватиме вивчення основ теорії комплексних чисел та їх практичне використання в науці і техніці.

Для старших класів, які працюють за програмою з математики на рівні стандарту або академічному рівні підготовки, включаючи класи універсального профілю, пропонований курс за вибором виконуватиме функцію підвищення математичної підготовки до профільного рівня або (можливо, і) задоволення пізнавальних інтересів школярів. При цьому роботу потрібно починати з історії розвитку поняття числа від натурального до комплексного з метою показати складність становлення і визнання комплексних чисел. Матеріал із застосуваннями можна вивчати вибірково, незалежно один від одного, залежно від профілю навчання чи наявності певних інтересів. Як показала практика, учні, яких цікавить поглиблене вивчення математики, обирають для вивчення застосування комплексних чисел до теорії многочленів, застосування у тригонометрії та геометрії. Учням фізико-математичного профілю цікаві застосування комплексних чисел до розв'язування фізичних задач та застосування у техніці.

Даний курс за вибором призначений для вивчення в старших класах загальноосвітньої школи . Такий вибір не випадковий. По-перше, вже закладена певна база знань, необхідних для успішного вивчення комплексних чисел. Школярі знайомі з різними видами чисел, правилами виконання можливих операцій над ними, про існування математичних операцій, які не завжди виконуються в певних числових множинах. Задіяно значний обсяг знань з інших предметів, наприклад, з фізики (теми, пов’язані з розглядом дії сил, обчисленням здійсненої роботи вивчаються в основній школі). Розділ геометрії – планіметрія до цього часу також пройдено. По-друге, вікові та індивідуальні особливості старшокласників посилюють успішніше вивчення даного курсу (наявність мислення більш глибокого, повного, різностороннього, абстрактного; можливість самостійно виділяти загальне і часткове тощо). Найдоцільніше вивчати курс за вибором “Комплексні числа та їх застосування” у 10 класі, що дасть ширші можливості протягом двох років для усвідомлення змісту навчального матеріалу в контексті його зв’язків з іншими розділами шкільної програми (див. підрозділи 2.3, 2.6).

Для успішної реалізації ідеї особистісно орієнтованого навчання, тобто впровадження профільного навчання у старшій школі та викладання даного курсу за вибором, необхідне виконання певних умов, основними з яких є педагогічні: наявність навчально-методичного та відповідного кадрового забезпечення профільної школи.

Відповідно актуалізувалась необхідність професійно-педагогічного спрямування викладання математичних курсів у вищих педагогічних навчальних закладах, зокрема теорії функцій комплексної змінної. Це означає, що вчитель повинен бути готовим до викладання курсів за вибором, які поглиблюють, розширюють курс математики профільного рівня.

Для цього необхідний, перш за все, широкий кругозір вчителя математики [186, 12]. Наприклад, при вивченні експоненціальної форми запису комплексного числа, вчитель повинен знати про експоненту більше, ніж про це сказано у посібнику з даного курсу за вибором чи підручнику для загальноосвітньої школи. Зокрема, такі відомості. На множині комплексних чисел експонента є періодичною функцією і може набувати будь-якого комплексного значення, крім нуля, у нескінченній кількості точок. Тригонометричні функції комплексної змінної є необмеженими. Існують різноманітні узагальнення комплексних чисел: гіперкомплексні числа, кватерніони, матриці Келі,ріманові комплексні числа та ін., які мають певні властивості.

Також дуже важливо для майбутніх учителів математики, щоби при вивченні курсу теорії функцій комплексної змінної та відповідних спецкурсів з методики викладання математики окремі питання програми проектувалися на вивчення даного матеріалу у загальноосвітніх школах.

Отже, високий рівень знань у профільних класах може бути досягнутим лише за умови високої кваліфікації вчителів, яка передбачає, зокрема, математичну, а також методичну підготовку для здійснення внутрішньої диференціації навчання, здатність створити у класі атмосферу взаємодопомоги, взаємопідтримки.

Для успішної реалізації ідеї профільного навчання необхідно розробити методичне забезпечення для здійснення процесу навчання математики. Відомо, що великою проблемою для вчителів є відсутність навчально-методичного забезпечення викладання профільних предметів і курсів за вибором. Адже необхідна така методика організації вивчення курсів за вибором, яка сприяла б більш повному прояву здібностей учнів і стимулювала їхній розвиток на основі врахування індивідуальних особливостей учнів з акцентом на організацію самостійної навчальної діяльності.

Згідно “Концепції диференційованого навчання в середній загальноосвітній школі” [134] у навчально-методичному забезпеченні для профільного навчання мають бути реалізовані такі принципи:

–відображення в змісті базового характеру шкільної освіти;

–діяльнісний підхід до способів і форм представлення навчального матеріалу, до дидактичного апарату навчальних посібників, до характеру й змісту методичних та дидактичних посібників, до матеріально-технічного забезпечення навчального процесу;

–рівневий підхід до структури і змісту навчальних, методичних та дидактичних посібників, який може одночасно забезпечувати досягнення рівня обов’язкової підготовки й можливість оволодіння більш високими рівнями засвоєння змісту освіти, що вивчаються;

–варіативний підхід до конструювання навчально-методичних посібників (альтернативні варіанти курсу як для одного профілю, так і для різної спеціалізації).

Так, при доборі змісту рекомендується використовувати модульний принцип побудови змісту освіти – обов’язкове ядро й варіативні частини (модулі у переліку питань та вимог до рівня оволодіння матеріалом).

Згідно з названими принципами нами розроблено і апробовано у загальноосвітніх школах навчально-методичний посібник “Комплексні числа та їх застосування” [325], який складається з програми та тематичного планування курсу за вибором “Комплексні числа та їх застосування”, основної частини, традиційної для цього розділу математики (5 розділів, перший з яких – історичний екскурс у розвиток поняття числа) та частини, присвяченої власне різноманітним застосуванням комплексних чисел у науці й техніці (6 розділів).

Теоретичний навчальний матеріал посібника структуровано за модульним принципом, який є зручним для учнів і вчителів, оскільки це дає змогу конструювати курс за вибором на розсуд учителя, враховуючи інтереси та побажання старшокласників.

Систему навчальних завдань побудовано на основі рівневого підходу. Виділяється 4 рівні складності вправ згідно з чотирма рівнями навчальних досягнень учнів. Велика кількість завдань, які доповнюють існуючі підручники для поглибленого вивчення математики прикладними задачами та задачами з міжпредметними зв’язками, сприятиме організації індивідуальної та групової роботи старшокласників, вибору теми дослідження для роботи в МАН. У завданнях, присвячених застосуванням комплексних чисел, рівнів не виділяється. Це пояснюється тим, що кожне завдання цікаве і не повторює попереднє, хоч можна прослідкувати послідовне їх ускладнення. В даному випадку досягається дидактична мета навчити старшокласників не стільки користуватися певним алгоритмом, скільки, і що є важливіше, сформувати творчий підхід до розв’язування задач на застосування математичних знань у різних галузях науки. Виконання таких завдань повинно розсіяти боязнь учнів перед використанням нестандартних методів.

У посібнику наявний також орієнтовний перелік тем для підготовки учнями рефератів, доповідей, повідомлень, метою яких є залучення учнів до самостійної пошукової роботи.

Учні профільних математичних класів мають порівняно кращу підготовку з інформатики. Саме тому в цих класах ефективно впроваджуються прикладні програмні засоби навчання. Спостереження показують, що, крім індивідуалізації, вони, як правило, підвищують інтерес до навчання та забезпечують більш міцні і глибокі знання. Зокрема, при вивченні курсу за вибором “Комплексні числа та їх використання” доцільно застосовувати систему комп'ютерної алгебри “DERIVE”, систему “GRAN”. При цьому прискорюється висування гіпотез та їх перевірка (див. підрозділ 2.5).

Оскільки контроль успішності при вивченні курсів за вибором є нежорстким, то ефективними на цьому етапі навчального процесу є використання комп’ютерної підтримки у вигляді навчальних програм. У процесі експерименту нами було розроблено навчально-корекційну програму з теми “Комплексні числа”, яка включає контрольні набори завдань різних рівнів та навчальний матеріал курсу за вибором (див. підрозділ 2.5). Ця програма пройшла апробацію в ряді середніх шкіл і показала досить високу ефективність і зацікавленість учнями, студентами та вчителями.

Отже, включення в систему основних педагогічних умов та методичних вимог до реалізації ідеї особистісно орієнтованої системи навчання в умовах профільної диференціації такого додаткового механізму як курси за вибором дозволяє активно застосовувати всі три форми організації навчальної діяльності учнів: фронтальну, групову, індивідуальну. Пропонований зміст курсу за вибором “Комплексні числа та їх застосування” дає цікавий і доступний школяреві матеріал для перших математичних досліджень.

1.2. Вітчизняний та зарубіжний досвід вивчення комплексних чисел у середніх закладах освіти

Як відомо, комплексні числа виникли як чисто формальний математичний результат при розв'язуванні рівнянь вищих степенів. Багато великих математиків XVI століття досліджували питання добування квадратного кореня з від'ємного числа, зокрема, це: Сціпіон дель Ферро (1465-1526), Ніколо Тарталья (бл. 1499-1557), Джироламо Кардано (1501-1576), Рафаеле Бомбеллі (1550-1572) та ін. Вперше про комплексні числа згадав Кардано в 1545 році у своїй роботі "Велике мистецтво або про правила алгебри", хоча і називав їх "суто софістичними величинами". Детальніше вони розглядалися у книзі Бомбеллі "Алгебра", який розглянув правила дій над комплексними числами (в алгебраїчній формі).

Вперше символ для позначення уявної одиниці ввів Леонард Ейлер (1707-1783) у 1777 році (– перша буква латинського слова imaginarius, що означає "уявний", "несправжній"). Заслуга Ейлера в розвитку комплексних чисел не обмежується цим. Він отримав важливі для

розвитку математики формули , , які пов'язують

тригонометричні та показникові функції, а також формулу , названу його іменем. Формула Ейлера дозволила довести періодичність експоненціальної функції на множині , ввести логарифми комплексних чисел.

Більш строге обґрунтування теорії нових чисел, названих уявними, дав німецький математик Карл Гаусс (1777-1855). Після виходу його мемуарів "Теорія біквадратних лишків" у 1831 році геометричне тлумачення комплексних чисел як точок або векторів площини остаточно закріпилося в математиці та дало змогу побороти труднощі з їх розумінням. Гаусс першим термін "уявні числа" замінив терміном "комплексні числа" і записував їх у вигляді . Він також обґрунтував застосування комплексних чисел у математиці.

Надалі багато математиків зробили вагомий внесок у розвиток теорії комплексних чисел, зокрема: голландський вчений А. Жірар (1595-1632), Р. Бомбеллі, швейцарець Л. Ейлер, німецький математик К. Гаусс, французи А. Де Муавр (1667-1754), Ж. Арган (1788-1822) та Ж. Лагранж (1736-1813), датський вчений Вессель (1745-1818), ірландський математик У. Гамільтон (1805-1865) та ін. Теорія комплексних чисел отримала свій подальший розвиток у новій математичній дисципліні – теорії функцій комплексної змінної, основи якої були закладені Л. Ейлером і Ж. Д'Аламбером (1717-1783), а подальший розвиток отримала в роботах О. Коші (1789-1857), Б. Рімана (1826-1856), К. Вейєрштрасса (1815-1897).

У школи комплексні числа прийшли значно пізніше. Потрібно було, щоб пройшло більше трьох століть з часу відкриття та першого знайомства вчених з комплексними числами (XV-XVI ст .) до їх загального визнання (середина XIX ст.) та вивчення студентами університетів, учнями шкіл.

Одним із перших підручників, в яких пропонувалося вивчення комплексних чисел, був підручник німецького вченого А. Г. Кестнера під назвою "Початкові основи математики". За цим підручником в другій половині XVIII століття Кестнер читав популярні лекції з математики для студентів університету в Геттінгені (Німеччина). На той час в університетах вивчали ті відомості, які надалі, біля 30-х років XIX століття, перейшли в школу.

Вивчення комплексних чисел починається у книзі А. Кестнера словами: "Той, хто намагається добути корінь з парним показником з від'ємної величини, вимагає неможливого, оскільки немає ні однієї від'ємної величини, яка була б таким степенем". Ці зауваження є справедливими. Проте далі автор пише: "Такі корені називаються неможливими або уявними" [121, 112]. І вже оперує ними, як звичайними числами. Тобто тут можна побачити відображення точки зору Лейбніца, який уявні числа представляв як щось зовсім безглузде, але, тим не менше, які незрозумілим чином ведуть до правильних результатів.

Інша книга з математики "Досвід цілком послідовної системи математики" берлінського професора Ома вийшла в світ набагато пізніше, в 1828 році; в ній подається виклад комплексних чисел набагато ближче до сучасної точки зору. Професор Ом пише: "Подібно до від'ємних чисел, потрібно і символ приєднати до дійсних чисел як нову річ” [121, 113]. Тобто Ом висуває принцип розширення множини дійсних чисел. Геометрична інтерпретація тоді ще не була відома, оскільки це було напередодні появи роботи Гаусса (1831 р.), в якій було обґрунтовано геометричне тлумачення комплексних чисел.

На той час конкретних навчальних планів і програм не було, тому про обсяг гімназійного курсу математики можна судити лише з підручників, які були тоді найбільш розповсюджені. Аналіз згаданих підручників свідчить про те, що в гімназіях на той час вивчався досить глибокий за змістом курс математики.

У Російській імперії елементи вищої математики в шкільний курс були введені в 1804 році згідно з Гімназичним статутом, в розробці якого брали участь Н. І. Фусс і С. Я. Румовський. Навчання в гімназіях проводилося за такими основними підручниками:

1) “Початкові основи математики” А. Г. Кестнера;

2) “Курс чистої математики” Т. Ф. Осиповського;

3) “Початкові основи чистої математики” Н. І. Фусса [243, 7].

На той час широко відомим також був підручник академіка О. І. Сомова “Початкова алгебра”, друге видання якого було пристосоване до гімназійного курсу. Підручник О. І. Сомова складався з 16 розділів, в яких розкривався зміст звичайного гімназійного курсу алгебри, і 13 додаткових розділів, серед яких і був розділ про комплексні числа. У свій час підручник належав до числа найбільш розповсюджених вітчизняних підручників (7 видань, останнє – в 1901 р.).

Зручним підручником для школи того часу був підручник А. Ф. Малініна і К. П. Буреніна “Керівництво алгебри і зібрання алгебраїчних задач” (1870 р.). Протягом 14 років (1870-1884 р.) цей підручник витримав 7 видань. Автори цієї книги корінь парного степеня з від'ємної кількості називають “уявними виразами виду ”. “Корінь парного степеня з від'ємної кількості є виразом неможливим, тому що яку б кількість (додатню чи від'ємну) ми не піднесли до парного степеня, результат не може бути величиною від'ємною. Такі вирази, як , , ,…, взагалі корені парного степеня з від'ємної кількості називаються виразами уявними”. Далі розглядаються дії з такими виразами: додавання, віднімання, множення (з врахуванням умови), ділення, піднесення до степеня, добування кореня (пункт мав назву “Різні значення одного кореня”) [164, 200-210].

У 90-х роках XIX ст. “Керівництво алгебри” А. Ф. Малініна і К. П. Буреніна було замінено за розпорядженням Вченого комітету “Алгеброю” А. П. Кисельова, яка теж витримала багаточисельні видання і була основним підручником з алгебри довгий час (до середини XX ст.), перше видання якого було в 1888 році. (Див. таблицю А.1 додатку А.).

Цікавим підручником для учнів гімназій та реальних училищ стала книга “Алгебра” Білібіна Н., директора Санкт-Петербурзького Першого реального училища, перше видання якої було удостоєне премії Імператора Петра І. Вона була видана за Бертраном, Бурле та іншими іноз емними авторами. У ній вже використовується термін “комплексні числа”, введення їх відбувається ускладнено, як пари чисел. Крім вищезгаданих основних питань, розділ “Комплексні числа” містив багато цікавих теорем, а також геометричне зображення комплексного числа, “нову форму” комплексного числа (тригонометричну), розв’язування біквадратних і двочленних рівнянь, різні значення [23, 411-436]. Тому пропонувалася дана книга як підручник для старших класів, а не для початкового вивчення алгебри.

Цікаві завдання з розділу “Комплексні числа” містив “Збірник вправ і задач з елементарного курсу алгебри” авторів Д. А. Бем, А. А. Волков, Р. Е. Струве, виданий в Москві у 1915 році. Тут розглядалися дії з комплексними числами в алгебраїчній та тригонометричній формах (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня -го степеня), розв’язування двочленних рівнянь, розглядається питання замкненості множини комплексних чисел та принцип перманентності для цієї числової множини [39, 275-293].

Подібні питання містив підручник “Початки алгебри”, виданий в 1915 році в Петрограді заслуженим професором Університету Святого Володимира Д. А. Граве для гімназій і інших середніх навчальних закладів. Розділ IX цієї книги під назвою “О числах комплексных” містить своєрідне обґрунтування необхідності розширення числової множини: “Останнє узагальнення поняття про число необхідно зробити для того, щоби було можливо добувати корені квадратні з від’ємних чисел” [69, 154-161].

З іноземних підручників були ухвалені в якості посібників для гімназій такі книги: “Алгебра” Ж. Бертрана (перекладена в 1874 р.) і “Початкові основи алгебри” Мейєра і Шоке (перекладена в 1845 р.). Ці книги містили елементи вищої алгебри і призначалися лише для учнів старших класів гімназій. Так, у розділі про комплексні числа посібника Ж. Бертрана [22] широко розглядалися алгебраїчна та тригонометрична форми комплексного числа та дії над ними у різних формах запису, геометричне тлумачення комплексних чисел. Широко відомим на той час був також підручник Бардея під назвою “Збірник задач”, виданий в Лейпциґу в 1907 році. Тут на перший план виступає принцип розширення поняття числа, а потім дається і геометричне тлумачення. В цьому і полягає загальноприйнятий тепер погляд на шкільне вивчення комплексних чисел, хоча в окремих місцях підручника розвиток цього питання залишився на попередніх ступенях.

Таким чином, можна сказати, що до 1917 року у гімназіях і реальних училищах хоч і не існувало стабільних програм і підручників з математики, проте були видані як російські, так і зарубіжні підручники та збірники задач для середніх закладів освіти, які широко висвітлювали викладання матеріалу з розділу “Комплексні числа”. Було напрацьовано багатий досвід викладання основних питань даного розділу з математичного погляду, хоча практичні застосування комплексних чисел у середніх школах не розглядалися.

Після прийнятого Наркомосом України “Положення про єдину трудову школу УРСР” (16 жовтня 1918 р.) для школи другого ступеня складається проект нової необов’язкової програми з математики з 4 фуркаціями (фізико-технічна, біологічна, економічна і філософська групи). Проект плану занять для фізико-технічної групи містив тему “Комплексні числа і дії над векторами”. Планувалося вивчення питання розвитку поняття числа – цілого, раціонального, дійсного, комплексного. В пояснювальній записці даного проекту говориться: “Зовсім недоречно пропонувати для юнаків цього віку одноманітний план занять, що може задовольнити запити од них, але буде насильством над здібностями інших” [10, 8]. Проте ця прогресивна в цілому ідея залишилась нереалізованою.

В перші роки Радянської влади єдиних програм для трудової школи з математики не було, був прийнятий курс на загальну освіту. В 1920-1924 роках Наркомос уже видавав необов’язкові програми, які переоблялися вчителями на місцях. Ці програми, взагалі, були надзвичайно перевантажені, оскільки поряд з новим фактично містили і весь матеріал школи XIX століття. Виникла потреба перебудови системи навчання, найголовніше, планів і програм за предметним типом.

У цей період (1933 р.) у школу передбачалося ввести стабільні підручники зі всіх предметів. Швидке створення нових підручників з математики виявилось неможливим. Тому в середній школі були введені після деякої переробки кращі з тих підручників, які існували раніше. Зокрема, в VI-X класах алгебру вивчали за підручником А. П. Кисельова (частина I для VI-VII класів, частина II – для VIII-X класів) і збірникам задач Н. А. Шапошнікова і Н. К. Вальцева (частини I і II). (Див. таблицю А.1 додатку А.) У навчальних програмах з математики з 1935 по 1940 роки на вив чення теми “Комплексні числа” відводилося 10 годин (вперше про це відзначено в програмі 1938 року). У 1942/43 – 1944/45 навчальних роках на цю тему відводилося 12 годин.

Постановою РНК від 6 жовтня 1943 року в період Великої Вітчизняної війни була відкрита Академія педагогічних наук, яка в “Известиях АПН” (які видавалися з 1945 року) публікує фундаментальні дослідження в галузі методики математики. Зокрема, в 1946 році номер 4 “Известий АПН” містить працю професора І. В. Арнольда “Операторне тлумачення числа в курсі елементарної математики”. А номер 6 “Известий АПН” за цей же 1946 рік містить статтю А. І. Фетісова “Вчення про тригонометричні функції в курсі середньої школи”, в якій тригонометрія будується автором на векторній основі з використанням комплексних чисел [10, 6].

Починаючи з 1946 року, на вивчення комплексних чисел у школі відводиться 16 годин. Матеріал для вивчення доповнюють історичні відомості про розвиток поняття числа, добування квадратного кореня з від’ємного числа. Дійсне число розглядається як окремий випадок комплексного. Додаються дії піднесення до степеня і добування квадратного кореня, перехід від алгебраїчної форми до тригонометричної і навпаки. У цей час 1948-1949 рр. приймаються оновлені “Збірник задач з алгебри” автора П. А. Ларічева, ІІ частина якого містить завдання з основ теорії комплексних чисел.

З грудня 1958 року після прийняття закону про зв’язок школи з життям були створені школи з виробничим навчанням. При цьому на тему “Комплексні числа” у Х класі у міських середніх школах з виробничим навчанням відводиться 12 годин, а у сільських школах з виробничим навчан ням на дану тему відводять 10 годин.

Як один із видів виробничого навчання, були створені школи (класи) з математичною спеціалізацією. Так, в 1962 році було затверджено програму середньої школи з виробничим навчанням, по закінченні якої здобувалася професія – обчислювач-програміст. (Це були свого роду школи з поглибленим вивченням математики.) Тема “Комплексні числа” планувалася вивчатися в ХІ класі і на її вивчення відводилось 16 годин.

Основним підручником у загальноосвітній школі з 1966/67 навчального року був підручник Є. С. Кочеткова і К. С. Кочеткової “Алгебра і елементарні функції” (видавництва 1965 року). За цим підручником згідно чинної програми на вивчення теми “Комплексні числа” відводилося 12 год. [140]. (Про питання, що розглядаються у темі “Комплексні числа” післяреволюційних підручників, докладно – у таблиці А.1 додатку А).

Першим посібником з математики, призначених для шкіл з математичною спеціалізацією стала книга Н. Я. Віленкіна, Р. С. Гутера, С. І. Шварцбурда, В. Г. Ашкінузе “Алгебра”, видана в 1968 році [4]. Дана книга була побудована в трьох планах. Основний текст її можна було використати не тільки в школах з математичною спеціалізацією, але і в звичайних школах. Цей же текст разом з матеріалом, набраним іншим шрифтом, був розрахований на учнів шкіл з матема тичною спеціалізацією і на сильних учнів звичайних шкіл. (Див. табл. А.1 додатку А).

Отже, в період з 30-х по 60-ті роки у зв’язку із введенням стабільних програм і підручників відмічається поширене вивчення елементів аналізу, у тому числі комплексних чисел, а в деяких випадках – поглиблене вивчення даної теми, включаючи використання комплексних чисел до розв’язування двочленних рівнянь вищих порядків та основної теореми алгебри.

У період реформи шкільної освіти 1966-1972 рр. тема “Комплексні числа”, яка входила в усі варіанти програм, виноситься на факультативні заняття у старших класах. Факультативні заняття за вибором були введені в навчальний план з метою поглиблення знань з певних наук, в тому числі з математики, а також з метою розвитку інтересів і здібностей учнів у школах, починаючи з VII класу.

У статті “Нові програми і деякі основні питання вдосконалення курсу математики в середній школі” академік А. М. Колмогоров стурбовано писав: “Великою жертвою, пов’язаною зі скороченням загального числа обов’язкових занять з математики в старших класах, є виключення з обов’язкової програми комплексних чисел. Ми вважаємо збереження теми в обсязі діючих зараз програм, коли, наприклад, тригонометрична форма комплексних чисел вивчається, але додавання аргументів при множенні з програми виключено, не має розумного змісту. Уявлення про той мінімальний обсяг знань про комплексні числа, при якому їх вивчення буде продуктивним, дає наша програма для факультативних занять, в якій комплексні числа вводяться в ІХ класі і широко використовуються як чисто в алгебраїчному аспекті, так і в зв’язку з тригонометрією і коливаннями” [127, 4].

Згідно затвердженої програми для факультативних занять з математики в 1974 році планувалося дану тему вивчати у двох частинах - у IX і X класах. На факультативному курсі “Додаткові розділи і питання математики” у IX класі на вивчення комплексних чисел відводилося 12 год., у X класі – 14. З 1974/75 навчального року кількість годин на дану тему зростає: у IX класі – 15, у X класі – 15 годин. Можна виділити три основні посібники для проведення факультативних занять: [169; 4; 101]. (Див. табл. А.1 додатку А).

У 1974 році виходить у світ книга “Дополнительные главы по курсу математики” для факультативних занять під редакцією З. А. Скопеца [82], що включає статтю Хасина Г. Б. “Комплексні корені многочлена. Основна теорема алгебри”, а також “Геометричні застосування комплексних чисел”, написану Скопецом З. А.

Проте вже з 1975/76 навчального року в період переходу на нові програми з математики тема “Комплексні числа” з деякими змінами переноситься для вивчення на факультативах у X класі. Факультативний курс “Додаткові розділи і питання математики” замінює факультативний курс “ Вибрані питання математики”. Планується вивчати наступний обсяг матеріалу (30 год.) у 10-му класі: Комплексні числа і операції над ними. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа. Формула Ейлера. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Функції комплексної змінної і відображення комплексної площини. Многочлени з комплексними коефіцієнтами. Розклад многочлена на лінійні множники. Формули Вієта.

Згідно програми, затвердженої у 1974 році, для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики (IX-X кл.) вказується: “Вивчення розширеного курсу математики … має своєю метою дати учням підвищену математичну підготовку… На основі такої підготовки учні зможуть виявити свої інтереси і нахили до математики і її застосувань, отримати міцну базу для успішної роботи в галузі, пов’язаній із застосуваннями математики, або для продовження освіти”. Зокрема, на вивчення комплексних чисел відводиться 26 год. у X класі. Можна виділити такі основні підручники: [4; 42]. (Див. табл. А.1 додатку А).

Підручник “Алгебра” для 9-10 класів середніх шкіл з математичною спеціалізацією під редакцією Віленкіна Н. Я. (видання 1972 р.) [4] на той час була основним підручником. Підхід до викладання теоретичного і практичного матеріалу ґрунтувався на тому, що в школах з математичною спеціалізацією однією з важливих задач є виховання математичного мислення. Поряд з теоретичним матеріалом багато уваги приділено методам розв’язування задач; кожен параграф доповнений завданнями для самостійної роботи. Цінність книги і в її багатоплановості, а тому нею могли користуватися читачі з різним рівнем математичної підготовки. Підхід до викладання матеріалу – теоретико-множинний. (Див. табл. А.1 додатку А).

У 1980-1985 рр. згідно з програмою для факультативних курсів “Вибрані питання математики” час на вивчення теми у X класі “Комплексні числа і многочлени” скорочується до 15 год. Залишаються для вивчення такі основні питання: Комплексні числа і операції над ними. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Тригонометрична форма комплексного числа. Формула Ейлера. Операції над комплексними числами в тригонометричній формі. Многочлени з дійсними коефіцієнтами. Основна теорема алгебри (без доведення). Теорема Безу. Розклад многочлена на лінійні множники. Теорема Вієта. Відомості з історії алгебри комплексних чисел.

З 1980 року виходить посібник Абрамова А. М., Віленкіна Н. Я., Дорофеєва Г. В. та укладачів В. В. Фірсова і С. І. Шварцбурда: “Факультативний курс. Вибрані питання математики” [103]. Також у списку основної літератури значиться книга Понтрягіна Л. С. “Знайомство з вищою математикою. Метод координат”, видана в 1977 році [216].

Головною рисою нового посібника Абрамова А. М. та ін. для факультативних курсів [103] є підсилення прикладного аспекту всього матеріалу, що викладається. Зокрема, розглядається застосування комплексних чисел до питань алгебри, геометрії, математичного аналізу. До методичних успіхів цього розділу можна віднести багатоступінчастий підхід до формули Ейлера, розгляд відображень з допомогою лінійної функції комплексної змінної, добір прикладів, які ілюструють застосування комплексних чисел. (Див. табл. А.1 додатку А).

Програма з математики 1986 року для шкіл (класів) з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики містить тему "Комплексні числа" в наступному обсязі: Поле комплексних чисел. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Полярна система координат. Тригонометрична форма комплексного числа. Множення, ділення, піднесення до степеня комплексних чисел в тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування коренів з комплексних чисел. Комплексні корені алгебраїчних рівнянь. Поняття про основну теорему алгебри. Застосування комплексних чисел. На вивчення теми відводиться 20 год. в X класі. В пояснювальній записці програми зазначається, зокрема, що завершення розвитку поняття числа шляхом введення комплексних чисел і знайомства з їх застосуванням є одним з основних завдань та визначено основні вимоги до математичної підготовки учнів. У результаті вивчення теми учні повинні вміти вільно виконувати дії над комплексними числами, оперувати комплексними числами, заданими в алгебраїчній і тригонометричній формі, знаходити комплексні корені многочленів, застосовувати комплексні числа до розв'язання тригонометричних і геометричних задач.

Навчання здійснюється за трьома основними підручниками, рекомендованими Головним управлінням загальної середньої освіти Міністерства освіти СРСР: [46; 103]. (Див. табл. А.1 додатку А).

Отже, в період з 1966-го до 1990-х років тема "Комплексні числа" виноситься на вивчення на факультативні заняття та продовжує вивчатися учнями класів (шкіл) з поглибленим вивченням математики в досить широкому обсязі, включаючи різноманітні застосування комплексних чисел всередині самої алгебри, при розв'язуванні геометричних задач та застосування до теорії коливань . Підручники того часу містять різні підходи до введення комплексних чисел: формальний (алгебраїчний), теоретико-множинний.

В період реформи математичної освіти 90-х років Державним комітетом СРСР з народної освіти розробляється в руслі перебудови школи нова концепція загальної середньої освіти і на її основі концепція шкільної математичної освіти. В ній характеризується місце математики в системі шкільної освіти, що визначається новими соціально-економічними умовами в країні, і основний зміст загальної математичної освіти на даному етапі. Головною ідеєю оновлення математичної освіти признається її гуманізація; її основні дидактичні ідеї – диференціація навчан ня, рівнева підготовка учнів, перебудова навчально-виховного процесу в напрямі зміни відношення до учня і створення кращих можливостей для індивідуального розвитку учня.

Згідно програми 1990 року для шкіл (класів) з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики [227] зміст курсу алгебри і початків аналізу XI класу включає додаткові самостійні розділи (серед них – комплексні числа), які у звичайній школі не вивчаються, проте є важливими змістовими компонентами сучасної системи безперервної математичної освіти. На тему "Комплексні числа" в XI класі відводиться 18-20 год. (з розрахунку 5 год. на тиждень); зокрема, включаються наступні питання для вивчення: Розвиток поняття числа: натуральні, цілі, раціональні, дійсні числа. Комплексні числа в алгебраїчній формі. Арифметичні дії з комплексними числами. Спряжені комплексні числа. Розв'язування квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Комплексна площина. Тригонометрична форма комплексного числа . Множення, ділення і піднесення до степеня комплексних чисел в тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування коренів з комплексних чисел. [Застосування комплексних чисел в тригонометрії.] Комплексні корені многочлена. *Основна теорема алгебри.* [Використання комплексних чисел в геометрії.] [Показникова форма комплексного числа.].

Програма передбачає можливість вивчення курсу з різним степенем повноти. При цьому вчитель має можливість варіювати обсяг матеріалу, що вивчається, і, відповідно, степінь поглиблення і розширення курсу в залежності від конкретних умов (підготовка класу, інтереси учнів і ін.). Додаткові питання, відмічені квадратними дужками, за певних умов можна не вивчати. Окремі питання, відмічені в програмі зірочками з двох сторін, являють собою матеріал підвищеної складності; ці питання вивчаються в ознайомлювальному порядку. Вчитель має право самостійно будувати курс. При цьому він може вибрати підручник з числа діючих в школі, пробних і спеціально призначених для поглибленого вивчення математики. Вищезгадане планування орієнтоване на підручник Віленкіна Н. Я. і ін. “Алгебра і математичний аналіз”, видання 1989 року .

Пробний підручник “Алгебра і початки аналізу, 10-11 класи” авторів Л. О. Маркушевича, Р. С. Черкасова, Г. А. Ястрябінецького [170] також містив розділ “Комплексні числа”, оскільки автори, як і багато вчителів математики, вважали, що без цієї теми курс шкільної математики неможливо вважати завершеним. На думку авторів, знайомство з комплексними числами повинно входити в програму курсу математики середніх загальноосвітніх шкіл довільного профілю. (Див. табл. А.1 додатку А).

На Україні у 1998 році було розроблено державний стандарт з математики, який визначав мінімум змісту навчального матеріалу за основними змістовими лініями шкільного курсу і мінімальні вимоги до цього змісту (обов’язкові результати навчання). На основі стандарту розроблялися різнорівневі програми і підручники, які, крім обов’язкового рівня, забезпечували підвищений і поглиблений рівні математики.

У період розбудови Української держави виникла гостра проблема – забезпечення шкіл різнорівневими підручниками. Потрібно було підготувати і швидко видати національні підручники з математики, методичну літературу для вчителів; і все це в умовах економічної кризи та скорочення фінансування потреб освіти.

Було створено пробні і деякі стабільні різнорівневі підручники і посібники з математики. Зокрема, для учнів старших класів загальноосвітньої школи виходить у світ “Алгебра і початки аналізу” для 10, 11 кл. авторів М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук (1998 р.) [343]. Підручник написаний з метою надання змоги учням працювати за ним в умовах диференціації навчання. (Див. табл. А.1 додатку А).

Для профільних шкіл, ліцеїв та гімназій видаються підручники “Алгебра і початки аналізу” для 10-го та 11-го класів авторів М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара (1993, 1994) [344], які кількаразово перевидавалися і залишилися основними підручниками для класів (шкіл) з поглибленим вивченням математики. Зокрема, тема “Комплексні числа” розглядається у 10 класі і згідно чинної програми включає традиційну частину матеріалу теми. У підручнику підібрано диференційовані завдання для самостійної роботи учнів, серед яких гармонічно вплітаються певна кількість завдань на застосування комплексних чисел. (Див. табл. А.1 додатку А).

У дворівневому підручнику “Алгебра і початки аналізу” для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів авторів Неліна Є. П., Долгової О. Є. [197] тема “Комплексні числа” розглядається як додатковий матеріал для вивчення математики на більш глибокому рівні. (Обсяг теми - у табл. А.1 додатку А).

При цьому програми для поглибленого вивчення математики відповідних закладів середньої освіти (шкіл з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики, спеціалізованих шкіл фізико-математичного профілю, гімназій, ліцеїв) включають тему “Комплексні числа” у широкому обсязі. Наприклад, програма з математики Українського фізико-математичного ліцею Київського університету імені Тараса Шевченка [233, 27] містить дану тему в обсязі 30 годин, в яку входять, зокрема, такі питання: Постановка задачі про розширення поля дійсних чисел. Побудова поля комплексних чисел. Комплексні числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі. Спряжені комплексні числа та їх властивості. Геометрична інтерпретація комплексних чисел і арифметичних дій над ними. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування коренів з комплексних чисел. Корені степеня n з 1 та їх групові властивості. Розв’язування двочленних рівнянь. Побудова геометричних образів на комплексній площині. Застосування комплексних чисел до обчислення сум та доведення тригонометричних тотожностей. Показникова, логарифмічна і тригонометрична функції комплексної змінної. Формула Ейлера. Про походження формули Ейлера. Реальні застосування реальних чисел. Узагальнення комплексних чисел.

Отже, з 90-х років і до сьогоднішнього часу у зв’язку із введенням профільного навчання тема комплексні числа вивчається поширено у класах з поглибленим вивченням математики і класах фізико-математичного профілю та оглядово в загальноосвітніх школах. Бажаючі учні класів інших профілів мають можливість вивчати тему в індивідуальному порядку, на спецкурсах чи заняттях математичного гуртка.

Розглянемо, як вивчаються комплексні числа учнями старших класів математичного спрямування в деяких країнах світу.

Наприклад, курс математичного напряму у середніх школах Франції (ліцеях) являє собою чималий курс, метою якого є підготовка учнів до подальшого серйозного професійного заняття математикою. Програма цього курсу передбачає не тільки поглиблене вивчення тих чи інших теорій, але й володіння математичними методами досліджень задач з інших областей знань. Згідно з програмою з математики математичного напряму в I (передостанньому) класі на вивчення математики відводиться 6 годин на тиждень і 9 годин на тиждень – у випускному. Розділ “Комплексні числа” вивчається учнями випускного класу. Тема включає розгляд наступних питань: Поле комплексних чисел. Біекція з в . Геометричний зміст комплексного числа; афікс точки, вектора. Спряжені комплексні числа. Модуль; нерівність трикутника; модуль добутку. Комплексні числа одиничного модуля; аргумент комплексного числа, що не дорівнює нулю; позначення ; співвідношення . Похідна функції . Формула Муавра. Приклади лінеаризації тригонометричних многочленів. Перетворення суми в добуток і добутку в суму. Перетворення в добуток . Корінь -го степеня з комплексного числа; група коренів -го степеня з одиниці, геометрична інтерпретація. Розв’язування рівнянь другого степеня [43, 148]. Як видно, розглядається прикладний напрям теми “Комплексні числа” у різних аспектах.

У Японії дану тему вивчають учні середньої вищої школи (IX-XII класи за нашим численням). Структура у вищій середній школі дисциплін математичного циклу наступна: “Математика I” (4 год. в тиждень), “Математика II” (3 год. в тиждень), “Математика III” (3 год. в тиждень), “Математика А” (2 год. в тиждень), “Математика В” (2 год. в тиждень), “Математика С” (3 год. в тиждень). Обов’язковими є предмети: “Математика I”, “Математика II” і “Математика III”. Курси математики А, В, С незалежні один від одного. Учні, зацікавлені у вивченні математики, мають можливість вибрати один з них або довільну їх комбінацію. Тема “Комплексні числа і комплексна площина” входить у курс “Математика В” і вивчається в обсязі: Комплексні числа і операції над ними (розв’язування квадратних рівнянь; розв’язування найпростіших рівнянь вищих степенів); комплексна площина (геометричне зображення комплексних чисел, формула Муавра) [316, 73].

У США тема “Комплексні числа” входить в обов’язковий для вивчення курс “Алгебра для коледжів” (по віку учні коледжів відповідають учням наших старших класів). Зокрема, вивчаються питання: Зображення комплексних чисел. Додавання, віднімання, множення і ділення комплексних чисел. Добування квадратного кореня з від’ємних чисел. Степені числа . Комплексні розв’язки квадратних рівнянь.

На наступному етапі вивчення математики учні коледжів США обирають спеціальні курси для поглибленого вивчення певного розділу математики, наприклад, курс “Тригонометрія для коледжів”, або професійно спрямовані курси, наприклад: “Математика для бізнесменів та гуманітаріїв”, “Технічна математика” і т . д. Програма курсу “Тригонометрія для коледжів” містить тему “Комплексні числа і полярні координати” в наступному обсязі: Дії над комплексними числами. Графічне зображення комплексних чисел. Полярні координати. Тригонометрична форма комплексного числа. Множення і ділення комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі. Теорема Муавра. Добування кореня -го степеня з комплексних чисел. Корені -го степеня з одиниці. Геометричне зображення коренів -го степеня з комплексного числа. Криві в полярній системі координат [317, 65-68].

Цікавим є досвід вивчення комплексних чисел у школах Австрії. У сучасних австрійських середніх школах (старші класи називають вищою школою), згідно підручника "Математика. Вища ступінь (1-4). Робоча книга з розв'язками" авторів Г. Бюргера, Р. Фішера та ін. (6 авторів та 8 експертів, викладачів математики, вчених-методистів та вчителів шкіл Австрії) в чотирьох томах (1-4), тема "Комплексні числа" вивчається досить широко.

Цікавим є введення поняття комплексного числа. Учням прямо нагадують про психологічний бар'єр, який долає першокласник, що знає тільки натуральні числа, при розв'язуванні рівняння , . Перевірка . Цей спосіб дій стане для нього зрозумілим після вивчення ним від'ємних чисел. Аналогічно, виходячи з практичної задачі про розклад числа 10 на два доданки, добуток яких є числом 30 (приклад Ж. Жордано), підводять учнів до поняття комплексного числа. Враховуючи специфіку учнівського мислення, автори докладно на прикладах висвітлюють арифметичні дії з комплексними числами, не забуваючи проводити аналогії з дійсними числами. Цікавим є міркування про існування множини комплексних чисел взагалі, які зводяться до того, що в математиці припускають існування об'єктів, коли це є корисним і не веде до протиріч. Розглядаються питання про впорядкування і закони монотонності множини комплексних чисел. Доводиться теорема про існування двох коренів квадратного рівняння, формулюється основна теорема алгебри, вивчається геометрична інтерпретація додавання і множення комплексних чисел за допомогою векторів з . Лише після такого всебічного і доступного пояснення автори підводять учня до більш абстрактного поняття про тригонометричну форму комплексного числа, розглядаються дії над комплексними числами в тригонометричній формі, включаючи піднесення комплексного числа до степеня та добування кореня -го степеня з комплексного числа. Геометричну інтерпретацію всіх розв'язків рівняння виду пропонується виконати самостійно. Усі міркування, означення, теореми, які розглядаються в розділі "Комплексні числа", ілюструються численними прикладами і задачами (понад 100). А весь розділ разом з розділом "Повторення і поглиблення" дає цілісну картину походження і властивостей комплексних чисел, а також їх використання [272, 49-50].

Таким чином, проведений історико-педагогічний аналіз дозволяє зробити висновок про те, що тема "Комплексні числа" протягом останніх двох століть була актуальною і вивчалася учнями старших класів середніх шкіл. Якщо на початку XIX століття вивчення комплексних чисел мало ознайомлюючий характер, то надалі, у XX ст., вивчення проводиться більш широко, поглиблено, і сприймається учнями з інтересом як робота з певними цікавими математичними об'єктами, сприяючи розвитку їх пізнавальних інтересів та інтересу до математики в цілому. Це підтверджує також аналіз тематики дослідних робіт учнів у рамках діяльності МАН України.

Були періоди, коли тема виключалася з обов'язкової програми, проте її вивчення проводилося на інших формах навчальної діяльності учнів (факультативи, математичні гуртки), де розглядалася і в більш широкому обсязі, включаючи певні застосування.

Вивчення комплексних чисел на сьогодні є потрібним і важливим, про що свідчить і зарубіжний досвід, особливо для учнів профільних класів, які планують пов'язати своє майбутнє з математикою, проте не в вузькому оглядовому аспекті, а разом з практичними застосуваннями в різних галузях науки і техніки.

Можливості для цього передбачені в Концепції профільного навчання шляхом запровадження курсів за вибором. Розробка відповідного методичного забезпечення для старшої профільної ланки середньої загальноосвітньої школи є важливим і актуальним завданням у галузі методики навчання математики на сучасному етапі.

1.3. Психолого-педагогічні особливості поглибленого навчання математики старшокласників

1.3.1. Психологічні особливості учнів старшої школи. Згідно із загальною схемою періодизації психічного розвитку людини (Л. С. Виготський [52], Д. Б. Ельконін [349], М. М. Заброцький [92], І. С. Кон [131] та ін.) час навчання в старшій школі припадає на період старшого шкільного віку або віку ранньої юності.

“Юнацький вік – не просто фаза “підготовки до життя”, але і надзвичайно важливий, такий, що має абсолютну самостійну цінність, етап життєвого шляху” [132, 180]. В цей період характерним є інтенсивне зростання інтелектуальних та моральних сил і можливостей старшокласника, в основному завершується процес становлення його як особистості.

Розвиток особистості дитини – цілісний процес. Окремі сторони особистості не можуть розвиватися незалежно від інших властивостей і якостей. Так, важко собі уявити формування характеру людини без розвитку здібностей, розвиток здібностей без уявлень про психічні процеси, а становлення пізнавальних функцій – без розвитку мотиваційної сфери. Всі ці психологічні функції і характеристики особистості взаємопов’язані, і відокремлення однієї з них неминуче позначається на розвитку іншої [187, 20].

Особливості розвитку учнів юнацького віку зумовлені тісно пов’язаними між собою анатомічними та фізіологічними змінами.

До цього часу в основному завершується дозрівання кори великих півкуль та формування нейронного апарату всіх областей головного мозку. Коркові зони у людей дозрівають нерівномірно і протягом усього періоду навчання у школі. Раніше від усіх дозрівають сомато-сенсорна зона та рухова зона, пізніше – зорова і слухова. Значно пізніше дозрівають асоціативні ділянки кори мозку, які є структурами, що відповідають за синтез отриманих відомостей, прийняття рішення та адекватне реагування. Вони також є апаратом, необхідним для переходу від наочного сприйняття до абстрактних символічних процесів. Ці ділянки забезпечують формування та удосконалення організації процесів сприйняття й уваги, зв’язку між ними, наявність якого є однією з передумов ефективного навчання. Повного розвитку досягає система зв’язків між різними відділами мозку, і завдяки його структурному дозріванню зростають можливості для виникнення нових зв’язків, нових асоціацій [92, 72].

У процесі структурного дозрівання мозку відбувається поступове вдосконалення системи пам’яті, зокрема, розвивається і вдосконалюється словесно-логічна абстрактна пам’ять. Причому у старших школярів виявляються вищі швидкості обробки різноманітних відомостей структурами лівої півкулі, тоді як в молодших школярів і підлітків – правої півкулі. Ліва півкуля, в основному, відповідає за мову, за аналітичну і послідовну переробку відомостей, забезпечуючи тим самим аналітичне мислення. Права півкуля оперує образами, переробляючи їх одночасно і цілісно [244; 251].

Разом з тим, складна психічна діяльність людини здійснюється за умов спільної роботи лівої та правої півкуль мозку. Це необхідно враховувати при побудові і використанні організаційно-методичного забезпечення процесу навчання математики у старшій школі.

Більшість дослідників стверджують, що функціональна асиметрія мозку лежить в основі різних стилів мислення людини. Під стилем мислення розуміють стійку сукупність індивідуальних варіацій в способах сприйняття, запам’ятовування і мислення, за якими стоять різні шляхи отримання, накопичення та переробки знань [131, 76].

Потрібно враховувати індивідуальні особливості стилю мислення і пам’яті учнів. Це передбачає можливість представлення нових математичних знань в різних формах (вербальній, матеріалізованій, графічній, знаково-символічній та ін.). При цьому велике значення набуває схематизація знань, що виступає засобом його структурування і систематизації. Володіння різними формами представлення знань і, зокрема, математичних понять, необхідно і тому, що мова образів відіграє важливу роль в творчості. Творча діяльність і розвиток особистості тісно взаємопов'язані і взаємообумовлені. Крім того, "необхідною умовою формування теоретичних знань є свобода переходу від одного рівня до другого в будь-якому напрямі: від реальних об'єктів до схем, від них до знаків і навпаки" [256, 268].

Це впевнено свідчить про необхідність індивідуального підходу в навчанні, який стимулював би самостійність і творчість.

Для цього вікового періоду провідним, в основному, є словесно-логічне абстрактне мислення , тоді як в учнів підліткового віку провідним є наочно-образне мислення. Проте роль конкретного наочно-образного мислення не знижується: набуваючи узагальнення, конкретне мислення виступає в ролі технічних образів, схем, малюнків і т. д., воно стає носієм загального, а загальне виступає як представник конкретного. Оволодіння абстрактними і теоретичними знаннями приводить до зміни у старшокласників самого перебігу мисленнєвого процесу. Мисленнєва діяльність відрізняється у них високим рівнем узагальнення і абстракції, учні прагнуть до встановлення причинно-наслідкових зв'язків і інших закономірностей між явищами навко лишнього світу, виявляють критичність мислення, вміння аргументувати судження, успішніше здійснюють перенесення знань і вмінь з однієї ситуації в іншу. В процесі засвоєння навчального матеріалу старшокласники прагнуть самостійно розкрити відношення загального і конкретного, виділяти істотне, а потім формулювати означення наукових понять.

Старший шкільний вік "характеризується розвитком високого рівня здібності до навчання, першими кроками в науковій і технічній творчості" [122, 125]. Наукова творчість, зокрема в математиці, зазвичай поєднується з високими загальними показниками інтелекту, здатністю до абстрактно-логічного мислення. Нестандартність, оригінальність мислення у творчих обдарованих дітей легко сплутати з оригінальничанням як засобом ствердження, а тягу до самостійності – з віковою самовпевненістю й негативізмом.

У юнацькому віці велике значення в розвитку особистості набуває комунікативна діяльність індивіда. Тому важливого значення набуває створення групи однодумців, об'єднаних спільним навчальним інтересом.

Згідно з психологічними даними [213, 8] ефективним процес навчання може вважатися лише тоді, коли у ньому передбачена необхідна єдність навчальних впливів на учня, особистісного сприйняття чи несприйняття ним цих впливів і самостійної діяльності школяра над оволодінням знаннями, навичками і вміннями.

Крім того, треба враховувати, що інтелектуальна й мотиваційно-потребнісна сфери школярів тісно пов'язані одна з одною, взаємозалежні. У побудові навчального процесу треба виходити з того, що повноцінне і гармонійне формування особистості відбувається тільки тоді, коли інтелектуальна й мотиваційно-потребнісна сфери розвиваються нарівні одна з одною при деякому випередженні першої.

У цей віковий період виникає потреба і можливість удосконалення своєї навчальної діяльності, що проявляється у прагненні до самоосвіти, виходу за межі шкільної програми. Навчальні дії можуть переростати в методи наукового пізнання, сприяючи змиканню навчальної діяльності з елементами дослідницької. Орієнтувальні та виконавчі навчальні дії можуть виконуватися не тільки на репродуктивному, але і на продуктивному рівні. Особливої ваги набуває оволодіння контрольно-оцінювальними діями до початку роботи у формі прогнозуючої самооцінки, запланованого самоконтролю своєї навчальної діяльності і на цій основі – прийомів самоосвіти [167, 47-48].

Ряд укрупнених навчальних дій, дій контролю і оцінювання може просунутися на рівень "автоматичного" виконання, перейти у звички, що є основою культури розумової праці, основою подальшої неперервної самоосвіти.

У старшому шкільному віці широкі пізнавальні мотиви укріплюються за рахунок того, що інтерес до знань зачіпає закономірності навчального предмету і основи наук. Навчально-пізнавальний мотив (інтерес до способів добування знань) розвивається в напрямі інтересу до методів теоретичного і творчого мислення (застосування дослідницьких методів аналізу на уроці, участь у роботі курсів за вибором, в шкільних наукових товариствах). Мотиви самоосвітньої діяльності в цьому віці пов'язуються з віддаленими цілями, життєвими перспективами вибору професії.

Формується чітко виражений інтерес до раціональної організації розумової праці, а також прагнення до аналізу індивідуального стилю своєї навчальної діяльності, визначення сильних і слабих сторін своєї навчальної роботи.

Відбувається народження нових мотивів професійного і життєвого самовизначення. Як стверджує Л. І. Божович [27, 380], потреба в самовизначенні, що виникає на рубежі підліткового і юнацького віку, не тільки впливає на характер навчальної діяльності старшокласника, але іноді й визначає її. Це стосується перш за все вибору навчального закладу, класів з поглибленою підготовкою, профілю навчання, ігнорування предметів того чи іншого циклу.

Особистісні інтереси забезпечують мотиваційний перехід до професійної (навчально-професійної) діяльності і становлять цінну основу для стійких професійних намірів [209].

Здібності й інтерес до предметів, що вивчаються, чи певних видів діяльності найчастіше збігаються, оскільки внутрішніми основами для вибору професії виступають, як правило, нахили, бажання та інтереси. Учні пов'язують своє майбутнє життя з роботою в галузі, яка тим чи іншим чином пов'язана зі шкільними предметами.

Наявність певного зв'язку між навчальними інтересами учнів і їх професійними намірами встановлено дослідженнями психологів. І. С. Кон [131] відзначає, що на етапі професійного самовизначення, який у психології називається етапом попереднього вибору професії й охоплює весь підлітковий вік і більшу частину юнацького віку, різні види діяльності сортуються та оцінюються спочатку з погляду інтересів підлітка, потім з погляду його здібностей і, нарешті, – його системи цінностей. Причому ціннісні аспекти, суспільні чи особисті, як більш узагальнені, дозрівають й усвідомлюються пізніше, ніж інтереси і здібності. Інтерес до предмета стимулює шко ляра займатися ним, це розвиває його здібності, а виявлені здібності, підвищуючи успішність діяльності та приносячи визнання оточуючих, у свою чергу підкріплюють інтерес.

Чим старші школярі, тим частіше збігаються у них професійні наміри й інтереси. Учні, що проявили інтерес і здібності до певного навчального предмета, впевнено вибирають собі професію . За даними Т. Б. Захарової [100], в учнів до 8 класу включно у трьох випадках із чотирьох (а в 11 класі більше) вибір професії чітко пов'язаний з інтересом до конкретного навчального предмета. За даними експериментальної роботи Н. І. Шиян [341], 91% десятикласників загальноосвітніх шкіл сільської місцевості визначилися з майбутньою професією і свої інтереси до того чи іншого предмета пов'язують з життєвими планами.

У кожного школяра формується своє вибіркове ставлення до різних дисциплін, свої способи засвоєння навчального матеріалу, своє мовлення, своя термінологія, свій стан готовності до пізнавальної діяльності (здоров'я, зацікавленість, емоційний стан тощо), різні прояви почуттів, різні пізнавальні потреби, різні здібності, можливості, наміри. У результаті цього виникає суперечність між єдиним освітнім процесом, єдиним змістом освіти і різним рівнем розвитку учнів , відмінністю їхніх індивідуальних можливостей, здібностей, бажань. Ця суперечність вимагає активного пошуку нових шляхів та моделей навчання. Дану проблему в значній мірі може розв'язати профільна диференціація, в основі якої лежить мета задоволення природних задатків, інтересів, мотивів, нахилів, здібностей, які потрібно розвивати у напрямі майбутньої професійної діяльності учнів. Цьому, зокрема, і сприяють курси за вибором.

Враховуючи результати досліджень, пов'язаних з розвитком особистості старшокласників, потрібно спиратись на такі основні принципи організації навчання математики у профільних класах:

– мотивація навчання повинна будуватися на зв'язку навчання з майбутньою діяльністю після закінчення школи;

– навчальна діяльність ведеться на грані мисленнєвих можливостей учнів, що забезпечується поданням матеріалу на достатньо високому науковому рівні, не дублюючи при цьому вузівської програми;

– вибір форм і методів навчання у напрямі надання процесу навчання проблемного характеру, більшої самостійності учнів у навчальній діяльності та можливості проявляти творчий підхід при виконанні завдань, адже “особистість є лише там, де є свобода і творчість” [132, 187];

– врахування індивідуальних особливостей стилю мислення і пам’яті учнів;

– активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів в усіх її аспектах.

1.3.2. Розвиток математичних здібностей і пізнавальних інтересів учнів профільних класів. Під здібностями у психології розуміють істотні психічні властивості особистості, що виявляються в її цілеспрямованій діяльності і зумовлюють її успіх [139, 308]. Вони не зводяться до вмінь і знань, але можуть пояснити легкість і швидкість набування цих знань і вмінь (С. Л. Рубінштейн, О . В. Петровський). Знання, вміння і здібності взаємообумовлені [304, 143-144].

Під здібностями розуміють сукупність індивідуально-психологічних особливостей сприйняття, мислення, пам’яті, уяви, що проявляються в навчальній діяльності учнів, і завдяки яким можливе успішне, творче оволодіння знаннями, вміннями і навичками в сфері тієї чи іншої дисципліни як навчального предмету [143, 91].

Отже, здібності – це індивідуально-психологічні особливості людини, що сприяють більш високій продуктивності і результативності її діяльності при менших затратах часу і зусиль.

Математичні здібності – індивідуально-психологічні особливості людини, що сприяють більш високій продуктивності її математичної діяльності, дозволяють використовувати в ході цієї діяльності нестандартні шляхи і методи, створюючи в результаті порівняно новий (або якісно новий) продукт розумової діяльності.

Формування математичних здібностей відбувається на основі певних природних задатків. “Задатки – це генетичні програми, що визначають розвиток функціональних систем у структурі мозку” [245, 11]. “Природні особливості є однією з внутрішніх умов формування здібностей, але це ще не здібності, а їхні анатомо-фізіологічні передумови. Необхідно їх враховувати, створювати оптимальні умови для їхнього розвитку” [319, 8]. На рівень їх розвитку винятковий вплив мають процеси виховання і навчання.

Математичні здібності характеризуються формалізованим сприйняттям, швидким і широким узагальненням математичного матеріалу; згорнутістю математичного мислення; гнучкістю мислення в процесі математичної діяльності; прагненням до своєрідної економії розумових зусиль , раціональності; математичною пам’яттю; розвиненістю просторових уявлень геометричного характеру [143, 92].

Встановлено існування трьох ступенів розвитку узагальненого математичного мислення [323 , 90-129]. Грань між цими ступенями дещо умовна. Про здібність учня до математики можна говорити тоді, коли узагальнення стає його внутрішньою потребою, коли він прагне до узагальнення в тих задачах, де воно не випливає автоматично з її розв’язання. Такі учні вирізняються тим, що не лише мають узагальнені уявлення, але й спроможні сприймати конкретну задачу у світлі цих узагальнених уявлень.

Наявність цих здібностей визначається за допомогою психологічних тестів та аналізу спостережень за розв’язуванням учнями творчих завдань, а також опосередковано – через оцінювання результатів виконання письмових робіт, успішності навчання учнів. Відповідно до наявності певних якостей мислення виділяють такі рівні розвитку математичних здібностей учнів старшої школи [315]:

Перший рівень (обдаровані діти). Учні здатні самостійно формулювати проблему, виявляти її у вже поставленій задачі, формулювати її математичною мовою, прогнозувати, висувати гіпотезу. Аналізуючи умову, моделюють можливі варіанти виконання завдання різними способами, вибирають найбільш раціональний. Здійснюють план розв’язування, перевіряючи кожний крок. Поширюють застосовані методи на розв’язання інших завдань.

Другий рівень (високий). Учні загалом мають ті ж якості, що і учні першого рівня, але не завжди чітко формулюють гіпотезу, відчувають труднощі при знаходженні різних способів розв’язування завдання. Переносячи отриманий досвід у змінені умови, не завжди здатні пристосувати його до цих умов.

Третій рівень (середній). Учні працюють за завданням підвищеного рівня складності під керівництвом або за допомогою учителя. Розв’язуючи завдання, зосереджуються на одному способі. З труднощами здійснюють зворотній розумовий процес, переносять набутий досвід на розв’язання інших завдань. Для відпрацювання вмінь їм потрібен тривалий час. Не мають достатньо розвиненого абстрактного мислення, просторової уяви, культури математичної мови, графічної та обчислювальної грамотності.

Четвертий рівень (низький). Учні сприймають навчальний матеріал не завжди свідомо, хід розв’язування завдань отримують за постійною допомогою вчителя. Необхідну інформацію здатні отримувати лише в готовому вигляді. Рівень просторової уяви, графічної грамотності, обчислювальних навичок низький.

У класах фізико-математичного профілю навчаються, в основному, діти з високим рівнем розвитку математичних здібностей, рідше можливі випадки навчання дітей із середнім рівнем розвитку. Експериментальна робота показала, що школярі третього та четвертого рівнів розвитку математичних здібностей найчастіше вибирають теми для індивідуальної роботи, перших наукових досліджень у рамках роботи курсу за вибором, МАН.

У здібних до математики старшокласників згортання умовиводів відбувається при мінімальній кількості вправ [323, 127]. Він дає змогу передбачати результат і тим самим пов’язаний з орієнтовними узагальненнями. Однак потрібно відрізняти свідоме згортання умовиводів учнем від пропуску ним суттєвих етапів у ланцюжку міркувань.

Одним з показників математичних здібностей учнів є швидкість і ефективність зміни мислення від прямого до оберненого. В учнів класів фізико-математичного профілю вже існує внутрішня потреба, відчуття необхідності обернених зв’язків. Обернені асоціації виробляються ними одночасно або майже одночасно з прямими. Вони зберігаються і актуалізуються у зв’язку з прямими, що відрізняє здібних дітей від тих, які мають обмежені математичні здібності. Прямі й обернені асоціації для таких дітей є в певній мірі незалежними одна від одної.

Можна стверджувати про існування у здібних учнів гармонійного зв’язку абстрактно-символічного і образного компонентів мислення з акцентом на той чи інший в залежності від доцільності у даному випадку та індивідуальних особливостей.

На думку В. А. Крутецького, у прямому зв’язку з математичними здібностями знаходяться взаємодія мислення і пам’яті, вибірковість і міцність запам’ятовування математичного матеріалу. Здібні учні зберігають знання узагальнено, незалежно від конкретних властивостей об’єктів, тобто володіють узагальненою математичною пам’яттю. Часто не пам’ятаючи формулювання теорем, конкретних формул, знають їх функціональні образи, що забезпечує ефективне відтворення самих конкретних форм.

Проте здібності людини залишаться нереалізованими, якщо їх вчасно не виявити і не створити умови для їх використання.

Істотним чинником розвитку математичних здібностей учнів є стійкий інтерес до математики. Стійкі спеціальні інтереси – це інтереси до змісту певної галузі людської діяльності, вони переростають у нахили професійно займатися цим видом діяльності. Таким чином, виникнення інтересу до математичної діяльності тісно пов’язано з пробудженням математичних здібностей і служить основою для їх розвитку.

При реалізації моделі профільної диференціації навчання важливе значення має мотивація. Ефективність такого навчання буде низькою, якщо в учнів не сформована усвідомлена мотивація в набуванні знань. Виділяють дві великі групи мотивів: пізнавальні та соціальні. Серед пізнавальних мотивів найдієвішим є інтерес. Г. І. Щукіна стверджує, що “суть пізнавального інтересу полягає в прагненні школяра проникнути в пізнавальну галузь більш глибоко і ґрунтовно, в постійному спонуканні займатися предметом свого інтересу” [347, 24]. Інтерес до предмета стимулює школяра займатися ним, це розвиває його здібності; а виявлені здібності, підвищуючи успішність діяльності й приносячи визнання оточуючих, у свою чергу підкріплюють інтерес.

Адже успішність учнів залежить не лише від природних здібностей, а й від розвитку навчальної мотивації. За певних умов недостача здібностей може доповнюватися розвитком мотиваційної сфери (інтерес до предмета, усвідомленість вибору професії тощо) і учень досягає помітних успіхів.

В основу виникнення і розвитку здібностей сучасні психологи поклали розумову активність і саморегуляцію. Розумова активність дає стимул до розвитку здібностей. Можливість саморегуляції – основа правильності дій, своєчасного прилаштування до умов задачі, успішного досягнення необхідного результату.

Процес навчання математики, навчання розв'язанню завдань проблемного характеру, нестандартних, підвищеного рівня складності є процесом творчим. Математичні здібності розглядають як здібності до розв'язання творчих математичних завдань. Схему творчого математичного процесу можна зобразити так:

1 етап. Осмислення, формулювання проблеми.

2 етап. Аналіз проблеми, інтуїтивне передбачення гіпотези.

3 етап. Пошук шляхів розв'язування, відбір необхідних даних (тих, що містяться в умові задачі, і тих, що вже були відомі раніше); пошук шляхів перевірки висунутої гіпотези.

4 етап. Розв'язування проблеми одним чи кількома шляхами, способами; оцінка ефективності кожного з них, відбір раціонального і зручного.

5 етап. Узагальнення і систематизація набутого досвіду при розв'язуванні проблеми, розповсюдження, перенесення знайденого методу, алгоритму (принципу, схеми) на розв'язання задач певного класу (при одночасному розвитку здібності легко виділяти задачі того чи іншого класу, типу).

Виділяють такі основні ознаки проблеми: а) новизна завдання; б) певна вимогливість до інтелектуальних здібностей учнів; в) аналітико-синтетичний характер [203].

Тому учням корисними будуть завдання, які допускають їхню максимальну пізнавальну активність при мінімальному керівництві ззовні або взагалі його відсутності. Це можуть бути завдання, самостійно виконані учнями у вигляді написання повідомлень, рефератів чи доповідей, доведення тверджень. Проведення самостійних досліджень, написання реферативних робіт дозволять пробудити пізнавальний інтерес, розвинути розумові здібності старшокласників.

Серед напрямів, які сприяють розвитку пізнавального інтересу, а разом з цим і рівня та якості засвоєння знань учнями, є підсилення прикладного спрямування математичної освіти.

Крім безпосередньої підготовки учнів до дослідження реальних явищ природи, прикладні задачі та задачі з міжпредметними зв'язками дають можливість формувати в учнів наукове світорозуміння. За їх допомогою вчителі можуть активізувати пізнавальну діяльність учнів, підвищити їх інтерес до навчального предмета.

Як показала практика, досить ефективним засобом навчання є міжпредметні пізнавальні задачі, для розв'язання яких залучаються знання із декількох предметів, їх перенесення на узагальнення. Такі задачі сприяють росту самостійності учнів, вмінню узагальнювати знання з різних предметів при вивченні загальних об'єктів і питань. Міжпредметні задачі можуть бути цілеспрямовані на досягнення пізнавальної мети. Під час розв'язання таких задач учні не тільки навчаються застосовувати математичні знання, а й отримують нові відомості. Одночасно учні набувають корисних навичок роботи з довідниками, навчаються самостійно знаходити потрібну інформацію в додатковій літературі. Тому одним із головних завдань курсу математики, і особливо, курсів за вибором, є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності. Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Формування навичок застосування математики до розв'язування прикладних задач та задач з міжпредметними зв'язками є однією із головних цілей викладання математики.

Важливу роль у навчанні математики відіграє систематичне використання історичного матеріалу, який підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює потяг до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику як невід'ємну складову загальнолюдської культури. "Звернення до минулого – плодотворне джерело пізнання сучасного" [120, 13]. На цікавих змістовних прикладах слід показувати учням, як розвивалися математичні поняття (зокрема, поняття числа), теорії і методи (зокрема, теорія функцій комплексної змінної та метод комплексних чисел), ознайомлювати їх з іменами та біографіями видатних математиків. При цьому реалізується виховна функція, активізується розвивальна і пізнавальна функції навчання.

У особистісно-орієнтованому навчанні особливого значення набуває створення ситуації успіху – суб'єктивних психічних станів задоволення учнів наслідками фізичної, інтелектуальної або моральної напруги. "Успіх, який переживає дитина неодноразово, відкриває період визволення прихованих можливостей особистості, перетворення та реалізації духовних сил" [210, 43]. Створити таку атмосферу – обов'язок учителя.

Старший школяр включається в новий тип провідної діяльності - навчально-професійну, правильна організація якої багато в чому визначає його становлення як суб'єкта подальшої трудової діяльності, його ставлення до праці (майбутньої професії).

Профільне навчання ставить за мету озброїти випускника знаннями, вміннями, навичками, необхідними і достатніми для продовження навчання у відповідних вищих навчальних закладах – професійними компетентностями [248]. Це формування особистісних якостей, що відповідають вимогам майбутнього професійного середовища і необхідні для професіоналів, здатних до самоактуалізації й саморозвитку через сформовану потребу та психологічну готовність до саморозвитку. У першу чергу в ході навчання створюються внутрішні умови саморозвитку. Своїм змістом освіта задає певні ідеали для учня, багатократно в рамках різних навчальних дисциплін, повертає учня до їх осмислення, оцінювання, "примірки" їх до власного життя. Інтерес в учнів залежить від міри духовності і професійності педагога, уміння реалізувати свою особистісно-професійну здатність духовного впливу на вихованців.

Зовнішні, власне педагогічні умови для особистісного саморозвитку учня в освітньому процесі задаються методами і формами організації навчальної діяльності. Переважання активних методів профільного навчання у загальноосвітній школі надає відносинам учнів і наставника характеру взаємносприймаючої взаємодії, створюючи поле сумісної творчої напруги, емоційного переживання.

Звернення до рефлексії – не як до процедури, а як до глибинного проникнення в предмет, що осмислюється, в своє ставлення до нього – викликає пробудження інтуїції, знімаючи внутрішню млявість, апатію, індиферентність у ставленні до матеріалу, що вивчається, до самого процесу навчання, до учасників цього процесу, в тому числі і до себе самого. Тільки в рефлексії може виховуватися і зміцнюватися самостійність як глибинний стан свідомості і якість особистості, як характер самоорганізації людини.

Звернення до створення проблемних ситуацій та пошуку їх розв'язання, що є основним принципом розвивального навчання (З. І. Калмикова [112], Л. В. Занков [201]), створює інтелектуально-вольове й емоційне напруження, яке часто доповнюється при використанні групових форм роботи напругою моральною, перетворюючи таку навчальну діяльність у саморозвиток – оновлення смислів, набуття суб'єктного досвіду, вироблення характеру.

Використання дослідницької роботи як методу навчання сприяє проведенню складної внутрішньої роботи, що відповідає потенційним можливостям учнів профільних класів. При цьому важливу роль відіграє дидактичний принцип навчання на високому рівні складності. Реалізувати його можна лише в умовах рівневої диференціації навчання. Тому в умовах класу стає необхідністю впровадження групової діяльності у навчальну роботу, що передбачає об'єднання дітей у групи, використання в межах групи системи завдань на вибір. Обов'язковим елементом навчання мають стати індивідуальні завдання з теми. Їх варто пропонувати як на початковому, так і на завершальному етапах вивчення розділу.

Для навчання математики учнів профільних класів природним є високий рівень складності матеріалу, вивчення його швидким темпом. У зв'язку з цим особливу роль набуває лекційно-практична система навчання, яка сприяє вирішенню проблеми раціонального використання на вчального часу та активній наукової організації пізнавальної діяльності учнів як у школі, так і вдома.

Психолого-педагогічні дослідження та шкільна практика свідчать про те, що розвитку особистості учнів профільних класів, який включає розвиток математичних здібностей та задоволення їхніх пізнавальних інтересів, активно сприяють побудова навчального процесу за принципом розвивального навчання шляхом рівневої диференціації з використанням методів проблемного навчання в умовах лекційно-практичної системи при доцільному поєднанні різних форм організації навчальної діяльності старшокласників.

1.3.3. Особливості формування і засвоєння основних понять теорії комплексних чисел. Формування поняття числа – одне з найважливіших завдань методики математики і один з методологічних аспектів філософських проблем математики: розвитку математичного пізнання. На прикладі формування поняття числа можна прослідкувати процес виникнення і розвитку наукових понять.

При побудові математичних теорій, як правило, використовують поняття інших, раніш побудованих теорій. Ці поняття повторюють, видозмінюють, узагальнюють. Завдяки цій обставині , об'єктивно присутній у всіх випадках, не тільки встановлюють зв'язки, але і досягають, зокрема, ясності в розумінні основ [255].

У процесі свого розвитку математичні знання старшокласників поповнюються такими новими поняттями, абстрактний характер яких все більш підсилюється. При засвоєнні таких понять чуттєво-предметна діяльність учнів звужується до мінімуму, але при цьому одночасно зростає роль інтелектуальної діяльності.

Методика вивчення цих понять повинна базуватися на використанні історичних і конкретно-практичних даних про їх введення, а це дозволяє обґрунтувати питання зв'язку математики з практикою, що й показується наприкінці вивчення конкретної теми. Але при вивченні таких понять потрібно звернути особливу увагу на розкриття логіко-математичних зв'язків нових абстракцій з уже відомими учням математичними поняттями.

Все вищесказане має пряме відношення до введення основних понять теми "Комплексні числа".

При формуванні основних понять теорії комплексних чисел, які належать до понять високого рівня абстракції, важливі наступні моменти:

–цілеспрямоване формування головного образу даного поняття – образу, який має міцну опору в досвіді учня;

–варіативність образу, яка включає: зміну "первинного образу" в процесі розкриття змісту поняття; використання різних форм представлення нового математичного поняття;

–тісний взаємозв'язок з раніше вивченим за рахунок того, що первинний образ будується на попередньому знанні і його використанні в новій ситуації;

–схематизація: використання різних форм подання математичних фактів створює можливості для виявлення зв'язків всередині даної теми, зв'язків нового знання з попереднім; результатом виявлення цих зв'язків і структурування вивченого стає побудова схеми, що відображає суть поняття і фіксує її за допомогою знакових засобів. Ці засоби виступають в ролі опорного сигналу, який дозволяє учню пізніше "розгорнути" вивчене поняття, дію в повному обсязі;

–розкриття можливостей застосування даного поняття при розв'язуванні прикладних задач та задач із міжпредметними та внутріпредметними зв'язками.

Основні поняття теорії комплексних чисел є такі: комплексне число, модуль комплексного числа, аргумент комплексного числа, алгебраїчна форма комплексного числа, тригонометрична форма комплексного числа, спряжені комплексні числа, протилежні комплексні числа та інші.

Як відомо, багатьом основним поняттям теорії комплексних чисел взаємно-однозначно відповідає визначений геометричний образ. Це і послужило історично поштовхом до виникнення різних підходів до побудови теорії комплексних чисел. Аналіз наукової і методичної літератури дозволив виявити існування різних підходів до введення поняття комплексного числа та виділити основні з них.

І спосіб. Вводиться поняття комплексного числа як упорядкованої пари дійсних чисел. Множину таких упорядкованих пар позначають символом . На цій множині визначається відношення рівності і дві бінарні алгебраїчні операції: додавання і множення таким чином:

тоді і тільки тоді, коли і ;

;

.

Показується, що алгебраїчна система утворює поле. Одиницею даного поля є пара , а нулем – пара . Далі розглядається рівність

і отримують, що в полі пара є розв’язком рівняння

. (1)

Позначивши , , отримують алгебраїчну форму запису комплексного числа :

,

причому .

Потім доводиться, що поле є мінімальним полем, яке містить поле дійсних чисел і в якому має розв’язок рівняння (1), а також, що таке поле єдине з точністю до ізоморфізму.

Далі пояснюється, що дії над комплексними числами в алгебраїчній формі виконуються як над многочленами і чому саме вибрано спочатку саме такі означення дій над комплексними числами.

Такий спосіб побудови комплексних чисел використаний у посібниках [9; 58; 93; 113; 168] та інших і є в певній мірі формальним та вказує на “тонкі” моменти теоретичного характеру.

ІІ спосіб. Встановлюються взаємно-однозначні відповід-ності між дійсними числами, точками координатної прямої і векторами, початок яких співпадає з початком координат. При цьому додатному числу ставлять у відповідність вектор, довжина якого , а напрям збігається з напрямом координатної прямої; від’ємному числу – вектор, модуль якого дорівнює , а напрям – протилежний до напряму координатної прямої, тобто кут між напрямом вектора і напрямом координатної прямої дорівнює (рис. 1 .1). Нулю відповідає нульовий вектор, модуль якого дорівнює нулю і якому не приписують ніякого напряму.

При такій (векторній) інтерпретації дійсних чисел дії додавання і віднімання між ними можна інтерпретувати як паралельне перенесення. Так, перетворення зсуває кожну точку прямої на одиниць вправо, якщо – додатне, і на одиниць вліво, якщо – від’ємне. Таким чином, додаванню дійсних чисел відповідає додавання векторів і навпаки, тобто .

Множення і ділення дійсних чисел подається як перетворення гомотетії відносно початку координат. При перетворенні , якщо , то маємо або розтяг вектора при , або стиск його при ; і якщо , то відповідно розтяг або стиск із зміною напряму (центральну симетрію відносно точки *O*). При такій інтерпретації множення на число задає відображення множини дійсних чисел на себе.

Рис. 1.2

Позначають один з коренів рівняння через , тоді за означенням кореня рівняння . Тоді множення дійсного числа на , яке є рівносильним множенню на , можна тлумачити як двократне множення на . Інакше кажучи, двократне множення дійсного числа на означає поворот навколо початку координат на кут . Тому природно вважати, що множення на означає поворот навколо початку

координат на кут .

Застосування множення на одиничного вектора дає вектор , перпендикулярний до нього: . Проведемо нову вісь координат . Тоді вектору , , , (рис. 1.1). Аналогічні міркування, коли довжина вектора відмінна від одиничної.

Таким чином, кожному вектору осі відповідає дійсне число , кожному вектору осі - число . Тоді сумі векторів відповідає число (рис. 1.2).

Отже, між точками координатної площини, упорядкованими парами дійсних чисел, які є координатами точок площини, векторами, початок яких співпадає з початком координат, і виразами виду можна встановити взаємно-однозначну відповідність.

Оскільки , і , то

.

Означення. Комплексним числом називається сума виду , де і – дійсні числа, і – одиниці, взяті відповідно на осях і .

Далі означається рівність комплексних чисел. Оскільки дві точки координатної площини збігаються тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні, то природне таке означення рівності комплексних чисел.

Означення. Комплексне число дорівнює комплексному числу тоді і тільки тоді, коли рівні відповідні їх дійсні й уявні частини, або, що те саме, коли

, де і . В іншому випадку комплексні числа називаються нерівними.

Цим способом подано матеріал у посібнику [172] та деяких інших. На користь цього методу можна навести такий аргумент: досить наочно проходять означення дій над комплексними числами, проте важко дається учням розуміння, як вектор на декартовій площині стає числом.

ІІІ спосіб. Поле комплексних чисел будують як просте алгебраїчне розширення поля дійсних чисел. Суть цього методу з наукової точки зору полягає в наступному.

В алгебрі многочленів показують, що коли многочлен степеня незвідний над числовим полем (тобто не має коренів у цьому полі), – число, корінь цього многочлена, то кожен елемент поля , утвореного в результаті приєднання елемента до поля , можна однозначно подати у вигляді:

. (2)

Нехай і розглянемо многочлен , який не має дійсних коренів. Позначимо число, що є розв'язком рівняння , через і назвемо його числом нової природи. Отримаємо, що просте алгебраїчне розширення і є полем комплексних чисел . Справді, із співвідношення (2) випливає, що кожен елемент з матиме вигляд , де .

Для учнів усі ці викладки теорії не наводяться. З метою універсальної розв'язності квадратних рівнянь множину дійсних чисел розширюють за допомогою приєднання до неї числа , для якого . При цьому многочлени першого степеня відносно уявної одиниці , тобто вирази виду , де і – дійсні числа, називають комплексними числами. Даний підхід носить назву генетичного, оскільки базується на історичному розширенні поняття числа і потребах науки, які приводять до цього розширення.

Цим способом подано матеріал у підручниках [344; 343; 342; 197], посібнику [226], дисертаційних роботах [260; 124] та інших. На користь цього методу говорить те, що він досить доступний учням, за його допомогою скорочується обсяг теоретичних викладок (без втрати відомостей) і дає можливість швидше перейти від теорії до практики обчислень і застосувань. Зв'язок нових чисел з реальною дійсністю є таким моментом, який в рамках шкільного курсу не може бути повністю висвітленим, тому при вивченні основ теорії комплексних чисел доцільно це враховувати і не допускати до того, щоб у свідомості учнів цей розділ запам'ятався як формально-логічна гра, що не має ніякого відношення до реального світу.

IV спосіб. Розглядається множина формальних виразів виду , де , символ – просто деякий знак, а символи і · позначають відповідно алгебраїчні операції додавання і множення в множині .

Означаються відношення рівності і алгебраїчні операції в :

1) тоді і тільки тоді, коли і ;

2) ;

3)

Алгебраїчну систему називають системою комплексних чисел, а її елементи – комплексними числами. З властивостей 1), 2), 3) безпосередньою перевіркою отримують комутативний, асоціативний і дистрибутивний закони додавання і множення, а також те, що символ є коренем незвідного над полем рівняння . Справді, з рівності

при маємо: . Тоді при , дістаємо, що , тобто є коренем рівняння . Потім на основі введених операцій додавання і множення показується, що алгебраїчна система утворює поле, яке є розширенням поля дійсних чисел.

Цим способом подано матеріал у посібниках [44; 183; 140] та інших.

Позитивним моментом даного способу введення є строгий науковий підхід до викладу теорії, проте він може виявитися надто формальним і нецікавим для учнів середньої школи, що не сприятиме формуванню стійкого інтересу до математики.

Вищенаведені підходи відрізняються, але не суперечать один одному. В методичній літературі, зокрема підручниках, посібниках для середньої школи, найчастіше зустрічаються такі способи введення: перший та третій, названі формальним та генетичним відповідно [260].

Нам ближче подання матеріалу теми генетично-геометричним способом, який ґрунтується на історичному розвитку поняття комплексного числа і на здоровому глузді та сприймається учнями природно і зрозуміло, не викликає у них психологічного протесту. Крім того, математичний розвиток учнів X класу дає змогу розглядати внутрішні вимоги самої математики щодо виконуваності обернених операцій і універсальної розв’язності деяких найпростіших рівнянь як побічний вияв вимог практики. Введення операцій не знаходить суперечностей і нагадує звичайні дії з дужками, що завжди подобається навіть несильним учням. Саме тому у посібнику [325] для учнів профільних класів нами використано генетично-геометричний підхід до подання теми “Комплексні числа”, залучаючи при цьому близькі учневі геометричні образи, зокрема, використовуючи геометричну інтерпретацію самих комплексних чисел та дій над ними, а також прикладну спрямованість задач.

Наша методична позиція близька до думки, яку висловив відомий методист О. Я. Хінчин [310, 21]: “Ми не можемо погодитись з тими, хто відстоює повну геометризацію теорії комплексних чисел в середній школі, тобто такий виклад цієї теорії, при якому означення нових чисел і операцій над ними зразу даються в геометричній формі; оскільки зі всіх точок зору комплексне число повинно ввійти у свідомість учня перш за все як об’єкт арифметики, тобто як нове розширення поняття числа, а не як геометричне поняття, не як символ відомого геометричного перетворення, яке лише після цього отримує арифметичне тлумачення. Геометрична ілюстрація повинна бути тим, чим вона є, тобто ілюстрацією. Але ця ілюстрація може бути широко використана для конкретизації у свідомості учнів ідеї комплексного числа, для зв’язку цієї ідеї з рядом простих наочних уявлень”.

Шкільний курс математики є дуже зручний для введення комплексних чисел. За час навчання в основній школі учні ознайомлюються з основними поняттями, що є базовими для даної теми. З усіх опорних знань, умінь і навичок, достатніх для вивчення теми “Комплексні числа” як найважливіші базові виділимо такі: відомості про множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел, закони арифметичних дій над ними; поняття вектора, зображення вектора, радіус-вектора на площині; геометричне додавання та віднімання векторів; співвідношення між сторонами і кутами у прямокутному трикутнику; значення тригонометричних функцій числового аргументу, знаки та періодичність тригонометричних функцій; основні тригонометричні тотожності; формули тригонометричних функцій суми і різниці двох аргументів, формули зведення.

Разом з тим комплексні числа можна використовувати при вивченні таких тем програми шкільного курсу математики.

Алгебра і початки аналізу: многочлени від однієї змінної; розв’язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів; диференціальні рівняння другого порядку.

Тригонометрія: доведення основних тригонометричних тотожностей; доведення формул додавання, формул кратних аргументів; доведення формул суми і різниці тригонометричних функцій; виведення формул перетворення добутку тригонометричних функцій у суму або різницю ; виведення формул пониження степеня тригонометричних функцій; обчислення сум тригонометричних функцій, аргументи яких утворюють арифметичну прогресію.

Геометрія: паралельність і перпендикулярність прямих, хорд одиничного кола; побудова правильних многокутників; площі многокутників; перетворення площини: паралельне перенесення, поворот, центральна і осьова симетрії, гомотетія, перетворення подібності.

Фізика: додавання і розкладання швидкостей і сил; гармонічні коливання; задачі на розрахунок ланцюгів змінного струму.

Досвід нашої експериментальної роботи підтвердив, що найбільш доцільним для середньої школи є таке введення поняття комплексного числа, при якому на перший план виступає принцип розширення поняття числової області, потім розглядається геометрична інтерпретація та практичні застосування, з допомогою яких і з'ясовується реальний зміст комплексного числа. Доцільність цього підходу підтверджується роботами більшості методистів. Для вивчення комплексних чисел ніяких спеціальних знань та вмінь не потрібно, всі необхідні учням знання дає основна школа. Використовувати комплексні числа доцільно при вивченні різних розділів природничо-математичних дисциплін загальноосвітньої школи у вигляді прикладних задач та задач із міжпредметними та внутріпредметними зв’язками.

Висновки до розділу 1

Впровадження профільності навчання у старшій школі ставить перед освітянами цілу низку проблем, вирішення яких потребує нових теоретичних і практичних досліджень. Гостро актуальною є проблема добору змісту навчання для курсу математики профільного рівня, курсів за вибором та розробка відповідного методичного забезпечення.

У процесі свого розвитку математичні знання старшокласників поповнюються такими новими поняттями, абстрактний характер яких все більш підсилюється. До них належать комплексні числа.

Поняття комплексного числа завершує і збагачує одну зі змістових ліній шкільної математики – ідея розвитку поняття числа. Знання комплексних чисел дозволяє глибше усвідомити такі розділи шкільної програми як розв’язування рівнянь і нерівностей, тригонометричні функції. Наявність в арсеналі учнів комплексних чисел збагачує їхні уявлення про сукупність методів пізнання, зокрема, розширює їхні можливості при розв’язуванні задач. Знання про комплексні числа сприяють розвитку математичної культури учнів та успішному продовженню освіти у вищих навчальних закладах. Широке коло застосувань комплексних чисел відкриває значні дидактичні можливості для розвитку математичних інтересів учнів.

Методика вивчення комплексних чисел повинна базуватися на використанні історичних і конкретно-практичних даних про їх введення, логіко-математичних зв’язків з уже відомими учням математичними поняттями, обґрунтуванні питання зв’язку математики з практикою, що доцільно показати наприкінці вивчення даної теми у вигляді розв’язування прикладних задач та задач із міжпредметними та внутріпредметними зв’язками.

Вивчення основ теорії комплексних чисел та їх застосувань повинно відбуватися з урахуванням вікових особливостей старшокласників та особливостей провідної навчальної діяльності цього періоду.

Обов’язковим є дотримання педагогічних умов та методичних вимог до реалізації рівневої і профільної диференціації та індивідуалізації навчання, що дозволить забезпечити ефективність вивчення комплексних чисел та активізувати пізнавальний інтерес.

Аналіз вітчизняних та зарубіжних програм, навчальних планів та підручників дає підстави говорити про доцільність та можливість особливу увагу приділити прикладному аспекту застосування комплексних чисел, а також можливості використання міжпредметних зв’язків. Зміст цього розділу повинен мати чітко виражену прикладну спрямованість.

Реалізація ідеї прикладної спрямованості цієї змістової лінії можлива через доповнення відповідного змісту навчального матеріалу прикладними задачами та задачами з міжпредметними та внутріпредметними зв’язками курсу за вибором “Комплексні числа та їх застосування”. П ропонований курс за вибором дає змогу не обмежуватись вивченням основних понять теорії комплексних чисел і зосередитись на вивченні даного розділу у безпосередньому зв’язку з багатьма темами шкільного курсу математики, а також, використовуючи міжпредметні зв’язки, показати різноманітні цікаві застосування комплексних чисел: при розв’язуванні геометричних і фізичних задач, при доведенні тригонометричних тотожностей та обчисленні тригонометричних сум і багато інших, без яких введення цієї теми у шкільний курс буде малоефективним.

Основні результати першого розділу опубліковані у роботах [327–329; 332; 333].

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ВИВЧЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ

2.1. Особливості методичної системи вивчення комплексних чисел в умовах профільного навчання

Відповідно до Концепції профільного навчання [137] у 10-12 класах планується здійснювати навчання за такими основними напрямами: суспільно-гуманітарний, природничо-математичний, технологічний, художньо-естетичний, спортивний. За основними напрямами профілізації визначаються різноманітні навчальні профілі.

На сьогодні вивчення розділу "Комплексні числа" передбачене діючою "Програмою поглибленого вивчення математики в 10-11 профільних класах" у 10 класі у такому обсязі: "Поняття комплексного числа. Поле комплексних чисел. [Геометрична інтерпретація комплексного числа.] [Тригонометрична форма комплексного числа.]" [241, 20]. У дужки взято питання, які можна не вивчати або вивчати на рівні ознайомлення. При цьому зауважується, що "залежно від конкретних умов, учитель може використати цей матеріал для роботи з усім класом, групою учнів або для індивідуальної роботи" [241, 20].

Для 10-12 класів загальноосвітніх шкіл математичного, фізичного та фізико-математичного профілів, а також класів з поглибленим вивченням математики на сьогодні створено нові програми з математики, у яких відведено місце темі "Комплексні числа" у 12 класі. Тема включає такі питання для вивчення: Множина комплексних чисел. Геометрична інтерпретація комплексного числа. Алгебраїчна і тригонометрична форми запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в різних формах запису. Формула Муавра. Корінь n - го степеня з комплексного числа [239; 240].

Такий обсяг навчального матеріалу для учнів профільних класів природничо-математичного напряму вивчення комплексних чисел забезпечує, по суті, досягнення однієї, безперечно важливої, мети – певного завершення процесу формування цілісного уявлення про одну змістову лінію курсу математики, числову. Однак це не є достатнім для розвитку в учнів стійких пізнавальних інтересів до математики і, зокрема, до розділу "Комплексні числа". Враховуючи важливість даної теми для підвищення математичної культури учнів, нами було розроблено курс за вибором, який включає ознайомлення учнів із застосуваннями комплексних чисел (для формування реального образу комплексного числа, усвідомлення їх корисності та важливості). Метою даного курсу є розширення і поглиблення змісту курсу математики профільного рівня.

Практичну реалізацію доцільно здійснити за таким планом:

1)вивчення на основних заняттях згідно програми поглибленого вивчення математики в профільних класах запланованого матеріалу [241];

2)продовження вивчення матеріалу учнями, які зацікавилися ним, на курсі за вибором. А саме – вивчення різноманітних застосувань як в середині самої алгебри, так і в інших розділах науки: геометрії, тригонометрії, механіці, електротехніці та ін.

Таке планування є можливим, оскільки вивчення комплексних чисел в сучасних класах з поглибленим вивченням математики заплановано на початку навчального року. Вважаємо недоцільним перенесення даної теми згідно нових програм [239; 240] для вивчення у 12 класі, оскільки це знижує дидактичні можливості даної теми.

У старших класах загальноосвітньої школи (нематематичних профілів), які навчаються за програмою математики академічного рівня, даний розділ повністю пропонуємо вивчати як курс за вибором. Метою даного курсу є підвищення рівня вивчення математики до профільного та задово лення пізнавальних інтересів учнів (див. пункт 1.1.2). Розраховано курс за вибором на 34 години з розрахунку 1 година на тиждень протягом навчального року.

Зміст курсу за вибором

"Комплексні числа та їх застосування"

Розвиток поняття числа від натурального до комплексного. Поняття комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа. Арифметичні операції над комплексними числами в алгебраїчній формі та їх властивості. Степінь комплексного числа з натуральним та цілим показником. Взаємно спряжені комплексні числа. [Добування квадратного кореня з комплексного числа.]

Геометрична інтерпретація комплексних чисел і арифметичних операцій над ними. Поняття модуля комплексного числа, його властивості. Поділ відрізка у заданому відношенні. Відстань між точками комплексної площини. Рівняння кола та прямої.

Поняття аргумента комплексного числа, його властивості. Тригонометрична форма комплексного числа. Добуток і частка комплексних чисел у тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування кореня -го степеня з комплексного числа. Розв'язування двочленних рівнянь .

Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа. Добуток і частка комплексних чисел в показниковій формі. [Поняття експоненти комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Степінь з довільним показником. Синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс комплексного числа.]

Комплексні корені многочлена. Основна теорема алгебри (без доведення). Розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів.

Застосування комплексних чисел в тригонометрії.

Використання комплексних чисел в геометрії. Перетворення площини і комплексні числа.

Застосування комплексних чисел до розв'язування задач із деяких розділів фізики (механіка, електротехніка).

Історичні відомості про розвиток теорії комплексних чисел.

Основна мета курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування":

завершити змістову числову лінію курсу алгебри розширенням множини дійсних чисел до множини комплексних чисел; озброїти учнів новим ефективним методом розв'язування задач з використанням апарату комплексних чисел; за допомогою прикладних задач та задач з міжпредметними та внутріпредметними зв'язками сформувати в учнів інтерес до вивчення комплексних чисел та математики в цілому; підготувати учнів до вивчення курсу "Теорія функцій комплексної змінної" у вищих навчальних закладах; розвивати математичну культуру, інтуїцію та ерудицію учнів.

Досягнення зазначеної мети забезпечується розв'язанням таких завдань:

- формування уявлень учнів про комплексні числа та їх застосування у різних галузях науки і техніки;

- підвищення математичної культури учнів у зв'язку з ознайомленням із методом комплексних чисел розв'язування задач;

- формування стійких пізнавальних інтересів до математики;

- формування природничо-наукового світогляду на основі міжпредметних зв'язків, що усвідомлюються в процесі розв'язування прикладних задач та задач із міжпредметними та внутріпредметними зв'язками;

- підсилення прикладної спрямованості курсу математики.

Змістове наповнення програми курсу за вибором реалізує компетентнісний підхід до навчання, спрямований на формування системи відповідних знань, навичок, досвіду, здібностей, яка дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, визначає готовність випускника школи до успішної навчальної діяльності у вищих закладах освіти. Тематичне планування курсу за вибором (34 год.) поміщено у таблиці Б.1 додатку Б. Рівневі ви моги до знань та вмінь випускника профільного класу, який вивчив даний курс за вибором, зазначені у таблиці Б.2 додатку Б. У пропонованому тематичному плануванні курсу за вибором перших 10 годин повністю вичерпують зміст розділу "Комплексні числа" профільного рівня.

Пропонована програма курсу за вибором не є строго регламентованою і може допускати певні модифікації. Вона містить традиційну частину (означення поняття комплексного числа, різні форми запису комплексних чисел, правила виконання дій над комплексними числами в різних формах запису, геометрична інтерпретація тощо) та частину про застосування комплексних чисел. Вивчення традиційної частини курсу є обов'язковим, оскільки в ній подаються основні відомості, що становлять основу вивчення наступних тем курсу за вибором. Рівень оволодіння знаннями та вміннями традиційної частини курсу за вибором визначає контрольна робота, як і згідно з діючою програмою для поглибленого вивчення математики [241].

Застосування комплексних чисел включають в себе 6 підтем [325]. Вони присвячені застосуванням комплексних чисел до теорії многочленів, в геометрії до розв'язування планіметричних задач і задач на перетворення площини, застосуванням комплексних чисел в тригонометрії та до розв'язування задач із деяких розділів фізики. Останній оглядовий розділ присвячений практичним застосуванням комплексних чисел у техніці. Всі застосування автономні, їх можна вивчати в довільній послідовності: одні теми вивчати глибше, з іншими тільки ознайомитися чи не розглядати зовсім. Така гнучкість курсу за вибором у виборі тем для вивчення спрямована на допомогу вчителю, якому слід враховувати конкретні умови: інтереси учнів, пов'язані з проектованою професією, їх навчальні можливості, час, відведений на вивчення курсу (можна вивчати протягом одного чи двох навчальних років), матеріально-технічну базу школи і інші умови. Як показує практика, учні профільних класів, де математика вивчається поглиблено, обирають для вивчення застосування комплексних чисел до теорії многочленів, застосування у тригонометрії та геометрії. Учням класів фізичного профілю цікаві застосування до розв'язування фізичних задач та застосування комплексних чисел у техніці. Залежно від конкретних умов учитель може використати цей матеріал для роботи з усім класом, групою учнів або для індивідуальної роботи. У квадратні дужки взято матеріал, який пропонуємо вивчати з учнями на рівні індивідуальної роботи.

Оскільки підготовка вчителів до навчання в класах різних профілів є однією із проблем реформування середньої школи, то даний курс може бути використаний і як курс за вибором для студентів педагогічних університетів з метою підготовки майбутніх вчителів математики до навчання основ теорії комплексних чисел у профільних класах.

2.2. Методика формування основних понять теорії комплексних чисел

2.2.1. Особливості вивчення теоретичного матеріалу. Практика показує, що найбільш важким для сприйняття учнів є саме поняття комплексного числа. Якщо у 8 класі було зроблено перший крок до завершення числової лінії курсу математики введенням поняття числа при розв'язуванні квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом, то це спрощує подальшу роботу.

Сприйняття учнями комплексних чисел значно полегшується, якщо вводити їх так, як вони виникли історично, – у зв'язку з "незвідним" випадком кубічного рівняння, де вони з'являються природно. Крім того, драматична історія пошуків коренів кубічного рівняння має великий виховний вплив на учнів. Це заняття бажано проводити у вигляді семінару-диспуту (див. пункт 2.2 .3).

Отже, на першому – семінарському занятті учні ознайомлюються з історією розвитку поняття числа від натурального до дійсного, розширенням множини дійсних чисел та виникненням поняття комплексного числа.

Надалі домінуючим методом подання нового матеріалу доцільно обрати метод проблемної лекції у поєднанні з різними прийомами активізації пізнавальної діяльності учнів. Цей метод дозволяє актуалізувати вже відомі учням знання і підтримує інтерес, примушує думку учня слідувати за думкою учителя. При цьому всі основні означення, позначення, властивості комплексних чисел бажано підготувати на кодоплівці. Це допомагає учневі зосередити увагу, грамотно вести записи у конспектах, виховує повагу до строгості математичного тексту.

Мета першого лекційного заняття (урок 2): ввести поняття алгебраїчної форми комплексного числа і дій над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі: додавання, віднімання, множення, ділення, добування квадратного кореня, геометрично проілюструвати додавання і віднімання комплексних чисел.

Наведемо фрагмент лекції.

Згадуємо з попереднього заняття, що комплексними числами називаються вирази виду

, де і - дійсні числа, число , для якого , - уявна одиниця. Вводимо поняття рівності комплексних чисел, протилежних та спряжених комплексних чисел.

Два комплексні числа та називаються ***рівними***, якщо і

.

Комплексне число називається ***спряженим*** до числа . З цього означення випливає, що якщо число є спряженим до числа , то число є спряженим до числа і тому числа і називають взаємно спряженими.

Комплексне число називається ***протилежним*** до числа **.** З цього означення випливає, що якщо число є протилежним до числа , то число є протилежним до числа і тому числа і називають взаємно протилежними.

Запис комплексного числа у вигляді , де ***, – дійсні числа, – уявна одиниця, називається алгебраїчною формою комплексного числа, і дає можливість визначити операції над комплексними числами як відповідні операції над многочленами, враховуючи, що*** **.**

Запропонувавши учням знайти суму двох комплексних чисел та як суму двох многочленів приходимо до висновку, що це можна зробити шляхом зведення подібних доданків:

.

Отже, *сумою* двох комплексних чисел і природно назвати комплексне число .

Зазначимо, що, як і для дійсних чисел, .

Пропонуємо учням згадати, що називається різницею двох дійсних чисел, після чого кажемо, що так само визначається і різниця двох комплексних чисел, тобто різницею комплексних чисел

і називається таке комплексне число , яке в сумі з дає .

Якщо , то . Згідно з означенням рівності комплексних чисел , . Тоді , . Отже,

, різницю двох комплексних чисел можна знайти як різницю двох многочленів.

Введення суми і різниці зразу ілюструємо геометрично (ставимо проблему, учні її вирішують).

Комплексне число зображається на координатній (комплексній) площині вектором або точкою , а комплексне число - вектором або точкою . Тоді комплексне число зображається сумою цих векторів, тобто вектором , а комплексне число зображається відповідно різницею заданих векторів, тобто вектором (рис. 2.1).

Далі пропонуємо учням знайти добуток двох комплексних чисел та , як добуток двох многочленів, враховуючи, що :

.

Добутком комплексних чисел і називається комплексне число

.

Для прикладу знайдемо суму та добуток взаємно спряжених комплексних чисел . Нехай ***, тоді*** та

,

.

Разом з учнями згадуємо означення частки двох дійсних чисел, після чого кажемо, що це означення зберігається і для комплексних чисел.

Часткою комплексних чисел і ( ) називається таке комплексне число , яке при множенні на дає .

З цього означення одержуємо, що . Тобто . Тоді за

означенням рівності комплексних чисел Помножимо перше рівняння системи на

, а друге – на і додамо отримані рівняння. Маємо . Оскільки , то

, отже, . Аналогічно, якщо перше рівняння домножити на , а друге – на

і відняти від другого рівняння перше, одержимо , отже, .

Таким чином, . Звертаємо увагу учнів на те, що запам'ятовувати цю формулу не обов'язково, оскільки її легко дістати шляхом множення

чисельника і знаменника дробу на число :

.

Далі ставиться перед учнями проблема про геометричну інтерпретацію операцій множення і ділення комплексних чисел, яку розв'язуємо пізніше у зв'язку з введенням іншої форми запису комплексного числа.

За допомогою учнів вводимо поняття суми та добутку заданих комплексних чисел ,…, для будь-якого , а також поняття степеня з натуральним показником.

Обчислимо степені уявної одиниці, тобто вирази виду, де .

Використавши означення уявної одиниці ( ), маємо:

, ,

, ,

, ,

, ,

і т.д.

Разом з учнями приходимо до висновку, що

, , , (2.1)

для будь-якого числа **.**

Іншими словами, щоб піднести число до натурального степеня , достатньо піднести до степеня, показник якого рівний остачі від ділення на 4.

Рівності (2.1) є зручними при піднесенні комплексного числа до степеня з натуральним показником за допомогою правила піднесення двочлена до степеня.

Звертаємо увагу учнів на те, що з наведених означень операцій над комплексними числами випливає справедливість для комплексних чисел тих основних властивостей операцій додавання і множення, які виконувалися для дійсних чисел, а саме: комутативність, асоціативність операцій додавання, множення та дистрибутивність множення відносно додавання. При цьому підкреслюємо, що нулем у множині ***є звичний нуль*** , одиницею – звична одиниця , протилежним до числа є число , оберненим – число . Тому всі тотожні перетворення, відомі з елементарної алгебри: дії з дужками, формули скороченого множення, формули прогресій і т. д., справджуються і в множині комплексних чисел.

Доведемо, наприклад, дистрибутивність множення відносно додавання.

Нехай , . Тоді

.

Оскільки для дійсних чисел справджується дистрибутивний закон множення відносно додавання, то із попередньої рівності отримуємо, що

.

Аналогічно доводяться решта із вказаних законів.

Далі можна також вивести формулу для добування квадратного кореня з комплексного числа в алгебраїчній формі. Учням з високим рівнем підготовки можна запропонувати розв’язати квадратні рівняння з комплексними коефіцієнтами. При цьому учні переконуються у громіздкості формул добування кореня з комплексного числа.

Важливо розглянути з учнями властивості спряжених комплексних чисел. Основними з них є наступні (для їх демонстрації можна використати мультимедійний проектор):

1) Сума двох взаємно спряжених комплексних чисел є число дійсне.
2) Добуток двох взаємно спряжених комплексних чисел є невід’ємне дійсне число, а при число завжди є додатним.
3) тоді і тільки тоді, коли .
4) , , тоді і тільки тоді, коли є суто уявним числом.
5) Для довільного комплексного числа виконується .
6) Спряжене до суми двох комплексних чисел дорівнює сумі спряжених до цих чисел, тобто для довільних комплексних чисел і :

.

7) Спряжене до добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку спряжених до цих чисел, тобто для довільних комплексних чисел і :

.

8) Спряжене до частки двох комплексних чисел дорівнює частці спряжених до цих чисел, тобто для довільних комплексних чисел і , де :

.

Доведення цих властивостей учні зможуть провести самостійно в класі чи вдома. Учитель спрямовує, допомагає, підказує, учні самостійно мислять, розв’язують пізнавальні задачі, що виникають в процесі роботи. Працюємо за допомогою частково-пошукового методу.

Учителем висувається гіпотеза, що множина комплексних чисел відносно операцій додавання і множення має структуру поля. Учням пропонується самостійно дослідити справедливість висунутої гіпотези. Перевіряється також, чи має місце в полі комплексних чисел теорема Вієта.

Наступна тема лекційного заняття “Геометрична інтерпретація комплексних чисел” (урок 5) є дуже важливою для сприймання старшокласниками комплексних чисел. Як відомо з історії математики, комплексні числа, як і числа від’ємні, отримали повне визнання лише після того, як була введена їх геометрична інтерпретація. Тому при вивченні комплексних чисел потрібно якнайширше

O Рис. 2. a x
2

спиратися на їх геометричне тлумачення.

Як зазначав видатний методист О. Я. Хінчин, геометрична інтерпретація комплексних чисел дозволяє використовувати їх в якості аналітичного апарату для найпростіших операцій над векторами і повинна закріпити у свідомості учнів уявлення про комплексні числа, як про такий математичний об'єкт, який не є ізольований мисленням, а навпаки – пов'язаний міцними нитками з цілим рядом актуальних питань алгебри і геометрії [310, 22].

Згадуються з учнями розглянуті на попередньому занятті геометричні інтерпретації комплексних чисел. Оскільки дійсні числа зображаються точками з координатами , які знаходяться на осі абсцис, то ця вісь комплексної площини названа дійсною віссю. Суто уявні числа зображаються точками з координатами , які знаходяться на осі ординат. Тому ця вісь комплексної площини названа уявною віссю. Спряжені комплексні числа зображаються точками, симетричними відносно осі , а протилежні числа і зображаються точками, симетричними відносно початку координат.

За допомогою геометричних міркувань пояснюється учням, чому для комплексних чисел не доцільно вводити поняття "більше" і "менше". Для дійсних чисел при зображенні їх на числовій осі відповідають такі співвідношення між точками, які можна подати словами "передує", "йде за". Коли ж узяти дві довільні точки координатної площини, то ці співвідношення втрачають простоту, характерну для точок числової осі. Тому поняття "більше", "менше" в тому розумінні, в якому їх застосовували до дійсних чисел, до комплексних чисел застосовувати не можна.

Вводиться поняття модуля комплексного числа. Довжину вектора , що дорівнює , називають модулем комплексного числа і позначають , або , тобто

(рис. 2.2).

Для дійсного числа його модуль співпадає із звичайним модулем дійсного числа.

Для довільного числа мають місце твердження:

і .

Учні ознайомлюються з основними властивостями модуля:

1) , причому тоді і тільки тоді, коли ;

2) , , ;

3) , ;

4) .

Деякі властивості доводяться на занятті, інші – на самостійне опрацювання.

Виводяться формули відстані між двома точками комплексної площини, координати середини відрізка та координати точки, що ділить відрізок у заданому відношенні, систематизуються знайомі учням відомості про вектори. Цікавими для учнів є рівняння кола в комплексних координатах, рівняння прямої, перпендикулярної до відрізка, що сполучає задані точки, і проходить через його середину (див. посібник [325]). Виведення деяких рівнянь та формул , які розглядаються, можна запропонувати учням виконати самостійно на занятті. Доцільно розглянути приклади розв'язування завдань на визначення геометричного місця точок площини, що задовольняють певні умови.

Тригонометрична форма комплексного числа вводиться виходячи з його геометричної інтерпретації. Важливо, щоб учні самостійно вивели формули переходу від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної і навпаки, формулу для знаходження головного значення аргументу. Важливо наголосити, що в літературі можна зустріти й інше означення головного значення аргументу (коли береться проміжок). З метою забезпечення наступності при вивченні цього питання у вищій школі, вважаємо, що головним значенням аргументу доцільно назвати те із його значень, яке належить проміжку .

Наведемо фрагмент лекції.

Як відомо, комплексне число зображається точкою або радіус-вектором (з координатами). Довжина цього вектора називається модулем комплексного числа і позначається (рис. 2.2).

Кут між додатним напрямом осі *Ox* і вектором називається ***аргументом*** комплексного числа і позначається . Для комплексного числа вектор перетворюється на точку (нуль-вектор) і говорити про його напрям немає зміс ту. Тому вважають, що число 0 не має аргументу. Очевидно, що кожне комплексне число, відмінне від нуля, має нескінченну множину значень аргументу і ці значення відрізняються одне від одного на ціле число повних обертів, тобто на величину , де – довільне ціле число. Єдине з множини , яке належить фіксованому проміжку , позначається . Зокрема, значення , яке лежить в межах , називається головним значенням аргументу і позначається через argz . Справедливі формули

, , ,

, , , .

Останні дві рівності слід розуміти як рівності між множинами.

Як бачимо із рис. 2.2, положення довільної точки на площині визначається не тільки її декартовими координатами і , а й відстанню точки до точки та кутом між додатним напрямом осі *Ox* і вектором .

Із співвідношення у прямокутному трикутнику отримуються наступні залежності між числами , та , (рис. 2.2):

.

Звідси , тобто кожне комплексне число можна записати у вигляді:

, (2.2)

де , , який називається ***тригонометричною формою*** комплексного числа . Якщо комплексне число записане у вигляді (2.2), де і , то

, .

Рівність двох чисел, записаних в тригонометричній формі, означає, що модулі цих чисел рівні, а аргументи або рівні, або відрізняються на число, кратне .

Щоб записати число в алгебраїчній формі, потрібно скористатися формулами .

Щоб записати число в тригонометричній формі, потрібно знайти і . Використовуючи формулу , знаходимо модуль комплексного числа . Для знаходження головного значення аргумента числа справедлива формула

(2.3)

Зокрема, для дійсних чисел ( ) при і при , а для суто уявних чисел ( ) при і при .

Множина називається множиною аргументів числа , а кожний елемент цієї множини – аргументом числа .

Оскільки , , якщо не є від'ємним дійсним числом, і , якщо , то тригонометрична форма комплексного числа , спряженого до числа , має вигляд

.

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі доцільно дати учням на самостійне опрацювання з наступною доповіддю біля дошки. Доведення теореми про існування значень кореня -го степеня з ненульового комплексного числа доцільно опрацювати з сильнішими учнями в індивідуальному порядку.

Пропонуємо дати геометричну інтерпретацію множення двох комплексних чисел, оскільки з цим питанням пов'язано розв'язування певної частини цікавих геометричних задач, у такому вигляді (розв'язуємо разом з учнями раніше поставлену проблему).

Нехай , , тоді

.

Тому множенню комплексного числа на комплексне число відповідає композиція двох перетворень площини, тобто послідовне виконання гомотетії з коефіцієнтом .3 відносно початку координат і повороту на кут навколо початку координат.

Множення комплексного числа на суто уявне число еквівалентне повороту

радіус-вектора числа навколо точки О на кут , множення на дійсне число – на кут, рівний .

Можна сказати, що множення на комплексне число можна геометрично трактувати як оператор повороту (на кут) і розтягу з коефіцієнтом (при це перетворення насправді буде стисканням). Термін “оператор” (від латинського “operator”– виконавець) означає те ж саме, що відображення, функція [173, 431].

Після вивчення операцій над комплексними числами важливо підкреслити, що в множині комплексних чисел всі арифметичні операції та добування кореня -го

степеня виконувані без обмежень, за винятком ділення на нуль, тобто результатом цих операцій над комплексними числами є комплексне число. Це носить назву алгебраїчної замкнутості поля комплексних чисел.

Тему “Корені -го степеня з одиниці” можна дати на індивідуальне вивчення кращим учням (див. посібник [325]).

Навчальні можливості учнів математичних та фізико-математичних класів дозволяють частину інформативних функцій учителя передавати учням, сприяючи тим самим розвитку їхньої пізнавальної активності. Оскільки самостійна робота є основною формою діяльності студентів, то це забезпечить умови для дотримання наступності у методах навчання у середній та вищій школах . Таким чином можна вивчати “Показникову форму комплексного числа”, обов’язково сформувавши поняття показникової форми у всіх учнів курсу за вибором, як зручної і компактної форми запису комплексного числа та дій над комплексними числами в показниковій формі.

Наведемо фрагмент лекції.

Вираз виду (– дійсне число) часто зустрічається в математиці та її застосуваннях. Для нього використовують різноманітні скорочені позначення.

Наприклад, в картографії його позначають символом , в електротехніці – символом , а в роботах з математики – через або . Надалі вважатимемо, що:

EMBED Equation.3 . (2.4)

Наприклад,

, ,

, .

Формула (2.4) вперше зустрічається у статті Ейлера (1743 р.) і тепер її називають ***формулою Ейлера.*** Вираз виду називають ***уявною експонентою***.

Показується, що для довільних дійсних чисел і та довільного цілого числа *n* справедливі рівності

, (2.5)

, (2.6)

, (2.7)

які є аналогами рівностей

, , ,

де , , .

Справді, нехай , . Тоді

.

Поклавши у формулі (2.5) , отримаємо

.

Звідси випливає, що .

Рівність (2.7) доводиться методом математичної індукції. При дана рівність є правильною, бо . Припустимо, що рівність (2.7) виконується для довільного , тобто і доводимо, що вона правильна для . Справді .

Отже, згідно з принципом математичної індукції формула (2.7) справедлива для всіх натуральних *n*.

Нехай тепер *n* – довільне ціле від'ємне число, тоді , де *m* – натуральне число, тому . Звідси

.

Враховуючи, що для довільного , , за означенням , звідси отримуємо, що рівність (2.7) виконується для довільних і .

Формула є компактним записом формули , яку, як відомо, називають ***формулою Муавра***.

Формули (2.5)–(2.7) дозволяють виконувати перетворення з виразами виду так, ніби це звичайні степені.

Ставимо проблему: який вигляд матиме запис комплексного числа, якщо скористатися формулою Ейлера.

Формула Ейлера дозволяє довільне комплексне число записати у ***показниковій (експоненціальній) формі***

(2.8),

де , . Навпаки, якщо комплексне число записане у формі (2.8), де , , то , .

Використовуючи формули (2.4)–(2.7), учні легко отримують правила виконання дій (множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня -го степеня) над комплексними числами, записаними в показниковій формі. Нехай , , . Тоді

;

;

.

Також необхідно показати учням, як за допомогою формули Ейлера можна виразити і , а також і через уявні експоненти. Додавши і віднявши почленно рівності

, ,

отримаємо

, ,

звідки

Звідси легко отримати відповідні формули для тангенса і котангенса:

.

Можна сформувати в учнів уявлення про поняття експоненти комплексного числа, логарифма комплексного числа, степеня з довільним показником, синуса, косинуса, тангенса, котангенса, а також поняття арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса комплексного числа, як основи для вивчення показникової, логарифмічної і тригонометричної функцій комплексної змінної у вищих закладах освіти. Учні, які розібралися в цьому матеріалі, можуть зробити доповіді або для всіх учнів, або на занятті курсу за вибором. Наведемо основні означення.

Експонентою довільного комплексного числа називається комплексне число

.

Використавши формулу Ейлера, отримуємо, що для довільного комплексного числа

.

Крім цього, безпосередньо із означення, формули Ейлера та властивостей функцій , та дійсної змінної випливає, що для для довільних комплексних чисел , , та довільного цілого числа правильні рівності

, , ,

, , , де .

Якщо , то . Тому для використовують також позначення .

Логарифмом комплексного числа називається таке число , яке є розв’язком рівняння . Множина всіх таких чисел позначається через . Нехай і , де і – одне із значень . Для знаходження кожного маємо рівняння

.DSMT4 або .

Два комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівними є їх модулі, а їх аргументи, відрізняються на доданок , де . Тому знайдеться таке, що

або

Отже, якщо для числа справедлива рівність , то існує та такі, що . Оскільки , то кожне число виду є розв’язком рівняння . Таким чином, множина

, , (2.9)

є множиною розв’язків рівняння , тобто множиною логарифмів числа .

Часто символом позначають довільний елемент множини розв’язків рівняння , тому рівність (2.9) правильніше було б записувати у такому вигляді

.

Оскільки , , то справедливі рівності (множин)

, .

Степенем комплексного числа з довільним показником називається кожний елемент множини , тобто

.

Зокрема,

.

Таким чином, , але у множині не збігається з .

Синусом комплексного числа називається число

.

Ця рівність визначає для довільного комплексного числа . Із формули Ейлера випливає, що для дійсних це означення збігається із введеним раніше, а також, що для довільних і справедлива рівність .

Арксинусом комплексного числа називається таке число , для якого . Множину всіх розв'язків рівняння позначається через . Для знаходження маємо рівняння

,

або

.

Розв'язавши це квадратне рівняння, отримуємо

,

Звідки

.

Таким чином, остання формула задає всі розв'язки рівняння . Отже,

.

Якщо , і , то і

,

тобто в даному випадку . Із цієї рівності отримуємо, що .DSMT4 , , тобто тоді і тільки тоді, коли для деякого . Таким чином, при переході у комплексну площину в рівняння не появляється нових коренів.

Косинусом комплексного числа називається комплексне число

.

Ця рівність визначає для довільного комплексного числа . Із формули Ейлера випливає, що для дійсних це означення збігається із введеним раніше, а також, що для довільних і справедлива рівність .

Арккосинусом комплексного числа називається таке число , яке є розв'язком рівняння . Множина всіх розв'язків рівняння позначається через . Для знаходження маємо рівняння

,

з якого знаходимо, що

,

тобто

.

Якщо , і , то і

.

Таким чином,

Зокрема, Отже, при переході у комплексну площину у рівняння не появляється нових коренів. Разом з цим

і тому нерівність для комплексних не обов'язково виконується.

Тангенсом і ***котангенсом*** комплексного числа називаються відповідно числа

, .

Множина розв'язків рівняння позначається через , а кожний елемент цієї множини називається арктангенсом числа . Для знаходження кожного числа маємо рівняння

,

з якого знаходимо, що

Якщо , то звідси отримуємо

Множина розв'язків рівняння позначається , а кожний елемент w цієї множини називається арккотангенсом комплексного числа . Для знаходження маємо рівняння

,

з якого знаходимо, що

Якщо , то

Всі тригонометричні формули залишаються справедливими і в множині .

Таким чином, у процесі подання нового матеріалу треба показувати учням нові методи дослідження відомих фактів, понять і на цій основі, залучаючи учнів до дослідницької роботи, сприяти активному засвоєнню навчального матеріалу та задоволенню пізнавальних інтересів старшокласників.

2.2.2. Формування основних понять теорії комплексних чисел. Оскільки комплексні числа органічно пов'язані з дійсними числами, то в основу побудови методики формування основних понять теорії комплексних чисел в профільних класах слід покласти такі положення:

- продовження змістових ліній, розпочатих в основній школі (лінія розвитку поняття числа, лінія розв'язування рівнянь, лінія прикладної спрямованості);
- використання символіки і термінології як один із способів здійснення наступності курсів математики середньої школи та вищої;
- використання рівневих вправ як засобу формування основних понять теорії комплексних чисел.

Для формування основних математичних понять використовують відповідну систему вправ. Сучасна дидактика виділяє такі основні функції вправ: навчальна, розвивальна, виховна і контролююча.

Уточнимо, що навчальна функція задач (у тому числі вправ) спрямована на формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок. До складових навчальних функцій вправ відносять:

1)формування в учнів понять;

2)встановлення різноманітних зв'язків (відношень) між поняттями, законами;

3)формування основних знань, вмінь і навичок;

4)формування вмінь і навичок моделювання навчального матеріалу (рисунки, графіки, схеми і т. д.);

5)формування вмінь, навичок роботи з навчальною і довідниковою літературою.

Розвивальна функція задач спрямована на розвиток мислення школярів, на формування у них розумових дій та прийомів розумової діяльності, просторових уявлень і уяви, алгоритмічного мислення, вміння моделювати ситуацію. Найважливішими з них, на наш погляд, є наступні:

1)вміння ефективно використовувати спостереження, порівняння, досвід, аналіз, синтез, узагальнення, та інші методи наукового пізнання (прийоми розумових дій);

2)вміння висловлювати гіпотези і перевіряти їх;

3)вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між окремими знаннями;

4)вміння здійснювати вибір засобів і методів для досягнення поставленої мети;

5)вміння виділяти головне;

6)вміння здійснювати перенесення використання певного уміння в нові умови застосування;

7)вміння оцінити практичну значимість вивченого матеріалу.

Виховна функція задач спрямована на формування в учнів наукового світогляду, сприяння екологічному, економічному, естетичному вихованню, розвиток пізнавальних інтересів, позитивних рис особистості (наполегливості, волі, відповідальності за доручену справу та ін.). Говорячи про виховні функції вправ, ми маємо на увазі також виховання культури мовлення (усної та письмової), графічної культури, виховання позитивного відношення учнів до навчальної діяльності.

Контролююча функція задач (у тому числі вправ) спрямована на встановлення навченості, рівня загального і математичного розвитку, стану засвоєння навчального матеріалу окремими учнями і класом в цілому.

Для формування поняття комплексного числа і засвоєння його геометричної інтерпретації необхідно використати рівневу систему вправ, в якій можлива реалізація кожної із згаданих функцій. Охарактеризуємо цю систему вправ.

Для формування поняття комплексного числа доцільно розв'язати з учнями квадратні рівняння в полі комплексних чисел та відпрацювати правила виконання операцій над комплексними числами в алгебраїчній формі (рівень А). Рівнева система вправ для роботи у гомогенних і гетерогенних групах розроблена нами у посібнику [325]. Наприклад, завдання виконати дії (рівень А, Б):

а) ; г) ;

б) ; ґ) ;

в) ; д) .

Для засвоєння основних понять теорії комплексних чисел призначено такі вправи (рівень Б):

а) при яких дійсних значеннях і комплексні числа і будуть рівними?

б) при яких дійсних значеннях і комплексні числа і будуть взаємно спряженими?

в) при яких дійсних значеннях і комплексні числа і будуть взаємно протилежними?

Такі вправи дають можливість не тільки використати умову рівності двох комплексних чисел , але й одночасно повторити розв'язування систем рівнянь.

Значну увагу треба приділити не тільки розв'язуванню квадратних рівнянь з від'ємним дискримінантом, але і складанню квадратних рівнянь за його коренями. Наприклад (рівень Б, В):

1) складіть квадратне рівняння, якщо відомо його корені:

а) , ; б) , ;

2) запишіть квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами, якщо відомо один його корінь:

а) ; б) .

Дані вправи попри перевірку вмінь виконувати операції з комплексними числами виконують розвивальну функцію, сприяючи формуванню стійкого інтересу до математики.

Цій меті сприятимуть і наступні завдання (рівень В):

1) доведіть твердження:

а) , , тоді і тільки тоді, коли є суто уявним числом;

б) ; в) .

2) обчисліть (рівень Г):

а) ; в) ;

б) ; г) .

3) знайдіть всі комплексні числа *z*, які задовольняють умову (рівень Г):

а) ; б) ; в) .

Для закріплення знань основних понять теми та вмінь виконувати операції над комплексними числами можна провести навчальну самостійну роботу у формі групової роботи в парах із взаємооцінюванням результатів виконаної роботи чи самооцінюванням за допомогою персонального комп'ютера (див. підрозділи 2.4, 2.5).

Усвідомленому засвоєнню ідеї геометричного зображення комплексного числа сприяє виконання таких вправ, виконання яких можна проводити усно або із записами відповідей на індивідуальних планшетах (рівень А).

1)Побудуйте комплексні числа (зобразіть на комплексній площині точки, які є зображенням чисел): ; ; ; ; ; ; ; .

2) Запишіть комплексні числа, зображенням яких є задані точки на комплексній площині (рис. 2.3) та вектори (рис.2.4).

3) Побудуйте на комплексній площині точку, що є зображенням суми (різниці) комплексних чисел і , не виконуючи дії додавання, якщо , . Перевірте правильність виконання побудови, виконавши дію додавання (віднімання).

4) Як на комплексній площині розташуються точки, які зображають дане число, і число: а) протилежне даному; б) спряжене до даного; в) протилежне до спряженого .

5) Завдання на зв'язок понять модуля з раніше вивченими поняттями, наприклад: у якому відношенні знаходяться модулі взаємно спряжених чисел, взаємно протилежних чисел?

6) завдання на відшукання частини площини за заданими умовами, наприклад (рівень Б, В):

а) ; ґ) ; ж) ; ї) ;

б) ; д) ; з) ; й) ;

в) ; е) ; и) ; к) .

г) ; є) ; і) ;

7) За допомогою нерівностей запишіть такі множини точок комплексної площини:

а) півплощину, розташовану зліва від уявної осі;

б) півплощину, розташовану над дійсною віссю;

в) четверту чверть координатної площини;

г) смугу, шириною і паралельну осі ;

ґ) точки, розміщені зовні кола з центром у точці і радіуса 2.

8) Знайдіть найменше значення , якщо (рівень Г).

Дані завдання в системі складено так, що, крім прямої задачі, необхідно також розв'язати обернену задачу. Це розвиває математичне мислення учнів. У вправі 4) треба розв'язки подати в загальному вигляді, оскільки конкретного числа не задано. Завдання такого характеру потребують певної систематизації знань і носять розвивальний характер. Вправи 6)-8) мають творчий характер ; вони узагальнюють знання учнів про коло та пряму.

Підвищують інтерес до пізнавальної (навчальної) діяльності та розвивають творче мислення на домальовування (заштриховується частина розв'язку даного завдання). Використовуючи групову самостійну роботу з гетерогенними групами по 3-4 учні, пропонуємо виконати подібні завдання. На кодоплівці зручно подати правильні розв'язки завдань для самоконтролю учнів (див. підрозділ 2.4).

Слід застерегти учнів від можливих неточностей записів. Дуже часто можна зустріти в учнівських зошитах позначення , що без попередньої домовленості є неправильним, оскільки вираз має два значення: та .

Поняття тригонометричної форми комплексного числа формується в процесі виконання вправ при груповій формі роботи. Рівнева система вправ на відпрацювання операцій множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня розроблена нами у посібнику [325]. Наприклад, такі завдання (рівень А):

1) Побудуйте точку, яка є зображенням комплексного числа , якщо

1) ; г) ;

2) ; ґ) ;

3) ; д) .

2) Знайдіть модуль та головне значення аргументу комплексних чисел:

1) ; г) ; е) ;

2) ; ґ) ; є) ;

3) ; д) ; ж) .

3) Подайте у тригонометричній формі комплексні числа:

1) ; г) ; е) ;

2) : ґ) ; є) ;

3) ; д) ; ж) .

4) Подайте в алгебраїчній формі комплексні числа:

1) ; в) ;

2) ; г) .

5) Виконайте дії над комплексними числами (рівень Б):

1) ; в) ;

2) ; г) ; ґ) .

6) Побудуйте на комплексній площині всі значення (рівень Б):

а) ; б) ; в) ; г) .

7) Виконайте дії (рівень В):

а) ; б) .

8) Знайдіть усі розв'язки рівняння і дайте їх геометричну інтерпретацію:

а) ; б) ; в) .

9) Знайдіть аргумент комплексного числа (рівень Г):

а) ; б) .

На обчислювальному практикумі доцільно на перших порах дозволяти учням користуватися виведеними на лекції чи самостійно вдома формулами. Вони засвоюються саме в процесі розв'язування вправ.

Вправи 1), 2) спрямовані на розуміння поняття модуля і аргументу комплексного числа. Важливими і потрібними для формування поняття тригонометричної форми комплексного числа є вправи 3)-5). При виконанні вправи 6) учні дослідницьким методом переконуються, що точки, які зображають корені -го степеня з комплексного числа, лежать у вершинах правильного -кутника. При розв'язуванні вправи 7) учні впевнюються у зручності тригонометричної форми для виконання певних операцій над комплексними числами, такими як множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня з комплексного числа. Вміння добувати корінь з комплексного числа учні з цікавістю застосовують до розв'язування двочленних рівнянь (вправа 8); при цьому слід звернути увагу учнів на існуючі способи розв'язування двочленних рівнянь: розкладання на множники лівої частини; за допомогою добування коренів -го степеня з комплексного числа. Слід розглянути виконання і нестандартних вправ (вправа 9).

Бажаючим поглибити свої знання з даної теми можна запропонувати розглянути питання про корені -го степеня з одиниці в індивідуальному порядку. Такі прагнення варто всіляко заохочувати. Вчитель при цьому може виступати в ролі консультанта.

З метою забезпечення своєчасної перевірки правильності виконання завдань учнями гомогенних груп та корекції набутих знань та вмінь, можна скористатися програмним засобом DERIVE. Використання даного засобу полегшує:

а) відшукання розв'язків рівнянь вищих степенів (при цьому додатково з'ясовується, що кількість коренів співвідноситься зі степенем старшого члена многочлена в лівій частині рівняння);

б) конструювання рівнянь із заданими комплексними коренями;

в) перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної і навпаки (Докладніше про це – у підрозділі 2.5.).

Після вивчення тригонометричної форми комплексного числа доцільно провести самостійну роботу з метою контролю рівня засвоєння учнями цього матеріалу (див. підрозділ 2.4).

Для формування поняття показникової форми комплексного числа, потрібно розглянути з учнями систему вправ, яка включає такі завдання.

1) Вправи, які пов'язують вивчені числа: (рівень А):

Перевірте справедливість рівності:

а) ; б) , ; в) .

2) Вправи на виконання переходу з однієї форми запису комплексного числа до іншої та виконання операцій над комплексними числами, записаними в показниковій формі, наприклад (рівень В):

Запишіть у показниковій і алгебраїчній формах комплексне число:

а) ; б) ; в) .

Виконуючи вправу 2) учні повторюють правила виконання дій над комплексними числами в різних формах запису.

Систематизує знання учнів традиційної частини курсу за вибором складання наступної таблиці, яку учні заповнюють самостійно на уроці чи вдома.

Таблиця 2.1

Виконання операцій над комплексними числами

Операція	Алгебраїчна форма	Тригонометрична форма	Показникова форма
1	2	3	4
Додавання	; .	Дія виконується з попереднім переходом в алгебраїчну форму	
Віднімання	; .	Дія виконується з попереднім переходом в алгебраїчну форму	
Множення	, де , .	, де , .	, де , .
Ділення	, де , , .	, де , .	, де , .

Продовж. таблиці 2.1

1	2	3	4
Піднесення до степеня	з використ. формул , і степенів уявної одиниці , .		з врахуванням властивості
Добування кореня - го степеня	; для - складні обчислення	, - арифметичний корінь	, , - арифметичний корінь

Вправи на застосування виведених формул логарифма комплексного числа, степеня з довільним показником, синуса, косинуса, тангенса, котангенса, а також значень обернених тригонометричних функцій комплексного числавиконуємо, використовуючи метод індивідуальної самостійної роботи для учнів, які зацікавилися цими питаннями:

3) Знайдіть:

а) ; в) ; ґ) ;

б) ; г) ; д) .

4) Розв'яжіть рівняння:

а) ; г) ; е) ; з) ;

б) ; ґ) ; є) . и) .

в) ; д) ; ж) ;

5) Виходячи із означення синуса і косинуса комплексного числа, доведіть властивості:

а) ; б) .

6) Знайдіть корені рівняння , що містяться в крузі .

7) Знайдіть множини точок, в яких значення , є:

а) дійсним числом; б) суто уявним числом.

Складання учнями подібних задач та розподіл пропонованих задач за чотирма рівнями складності сприяє формуванню в учнів уміння реально самооцінювати свої можливості.

Рівень знань учнів традиційної частини курсу за вибором перевіряємо за допомогою контрольної роботи (див. підрозділ 2.4).

Таким чином, при формуванні основних понять теорії комплексних чисел в учнів курсу за вибором нами була використана спеціально розроблена система вправ. Вона містить різнорівневі завдання, формує необхідні обчислювальні вміння, а також навички побудови геометричних зображень на комплексній площині. За допомогою даної системи вправ встановлюється міцний зв'язок з раніше вивченим матеріалом. При цьому найчастіше використовується метод самостійної роботи при груповій та індивідуальній формі організації навчальної діяльності старшокласників.

Досвід роботи з учнями експериментальних класів підтвердив, що введення комплексних чисел генетично-геометричним шляхом сприяє опануванню учнями навчального матеріалу всієї теми "Комплексні числа".

Крім того, таке введення економить час, дає можливість розширити систему вправ, сприяє ефективній організації процесу формування вмінь і навичок. Відмітимо, що вибране нами означення комплексних чисел за своїм записом візуально сприймається як алгебраїчна форма комплексного числа і в учнів не викликає ніяких сумнівів знак "+", який вони сприймають як знак "плюс".

Розглянуте введення понять теми "Комплексні числа" враховує особистісно-орієнтований підхід до цілей навчання і відповідає структурі пізнавальної діяльності учнів, яка включає:

1)сприйняття та первинне уявлення і розуміння нового поняття;

2)осмислення об'єктивних зв'язків і відношень поняття, що вивчається, в процесі мислительних операцій – порівняння, аналіз, синтез, абстрагування;

3)запам'ятовування його образу, терміну, знаку;

4)узагальнення і включення поняття комплексного числа в систему вже відомих понять (з цього погляду комплексні числа – найбільш узагальнене поняття числа, відоме учням);

5)практичне використання нового поняття.

Домашні завдання потрібно зосередити на розв'язуванні вправ з метою відпрацювання необхідних практичних вмінь учнів. Виконання творчих завдань, які потребують значного часу, не є обов'язковим для всіх учнів. Однак їх виконання варто всіляко заохочувати.

2.2.3. Систематизація і узагальнення набутих знань та вмінь на семінарських заняттях. Важливим компонентом лекційно-практичної системи навчання є семінарські заняття, на яких учні мають змогу продемонструвати свої вміння працювати з додатковою літературою, оформлювати свої думки у вигляді повідомлень, доповідей, рефератів. Вікові особливості учнів 10 -го класу уже дозволяють узагальнювати і виділяти головне у тексті.

Як показує практика, дуже часто підготовка учнів до семінарських занять приводить до їхнього перевантаження. Тому в певних випадках доцільним є проведення уроків-семінарів, які не вимагають великого обсягу підготовчої роботи.

В процесі опрацювання курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування" пропонуємо провести наступні семінарські заняття.

Семінарське заняття 1.

Тема: Розвиток поняття числа від натурального до дійсного. Розширення множини дійсних чисел. Поняття комплексного числа.

Навчальна мета: Прослідкувати розвиток поняття числа від натурального до комплексного. Розглянути основні мотиви розширення числових множин. Ввести поняття комплексного числа.

Виховна мета: Прививати інтерес до математики. Ознайомити учнів з історією розвитку комплексних чисел. Проілюструвати широке застосування комплексних чисел, а також функцій комплексної змінної на практиці.

Це заняття пропонуємо проводити як семінар з підготовкою учнів на самому уроці, оскільки цей семінар є першим заняттям курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування". Нестандартно організоване заняття сприятиме підвищенню інтересу учнів до даного курсу та математики в цілому.

Вчитель повідомляє тему, мету уроку, згадує з учнями відомі їм числові множини, пропонує план дослідження питання виникнення натуральних, дробових, від'ємних та ірраціональних чисел. На дошці записані висловлення відомих вчених: "Серед чисел існує така досконалість і узгодженість, що нам треба розмірковувати дні і ночі над їх дивовижною закономірністю" (С. Стевін), "Знання людей заслуговує імені Науки залежно від того, яку роль відіграє в ній число" (Е . Борель). Далі проходить самопідготовка учнів за посібником "Комплексні числа та їх застосування" [325], додатковою літературою: "Історія математики у школі" Г. Глейзера [60], "Енциклопедичний словник юного математика" [350] та іншими науково-популярними математичними виданнями. Основна форма проведення семінару – групова: клас розбивається на кілька груп, кожна з яких отримує завдання обґрунтувати історичну необхідність появи тієї чи іншої множини чисел. Один з учнів групи доповідає, інші – доповнюють.

Саме семінарське заняття проводиться у формі усних міркувань, колективного обговорення, дискусії. Учитель може запропонувати запитання дискусійного характеру.

Дискусія розпочинається словами давньогрецького драматурга Есхіла (VI-V ст. до н. е.), який у трагедії "Прикований Прометей" приписує безсмертному титану відкриття всіх ремесел:

"Послухайте, що смертним я зробив…
Число їм винайшов
Та літери навчив єднати." [353, 13]

Як ви думаєте, яким чином виникло число? Чи могла окрема людина, навіть дуже здібна і сильна, здійснити таке відкриття?

Що стимулювало появу натуральних чисел? Як велося позначення цих чисел? Чи могло число виникнути в один день, чи на це пішло багато часу?

Що привело до виникнення дробових чисел, які практичні потреби?

Які потреби науки зумовили необхідність введення від'ємних чисел? Чи була практична потреба введення від'ємних чисел?

Як виникли ірраціональні числа?

Коли прийшло остаточне визнання дійсного числа?

Як ви вважаєте, до якої множини належать корені квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами? Чи всі вони належать множині ?

Тут доцільно розглянути різні випадки розв’язування квадратних рівнянь:

1)при – рівняння має 2 різних дійсних корені;

2)при – рівняння має 2 рівних дійсних корені;

3)при – рівняння дійсних коренів не має, зокрема, рівняння не має дійсних коренів.

Для усунення “білої плями” в теорії розв’язування квадратних рівнянь необхідне введення нових чисел і дій над ними. Це відбувається шляхом введення комплексних чисел. Звернемося до історії виникнення комплексних чисел.

Які потреби науки сприяли появі комплексних чисел і як це відбувалося?

Інформація про історію виникнення комплексних чисел подається в повідомленні учня, який опрацював цей матеріал заздалегідь самостійно. Для цього можна запропонувати учням розв’язати кубічні рівняння за формулою Кардано, серед яких одне незвідне, наприклад, . Вчитель відкидає твердження учнів про те, що рівняння не має розв’язку, вказуючи на корінь . Ставиться проблема отримати цей корінь з формули Кардано: якщо , то , де

, , .

Вказується, що для цього потрібно ввести числа нової природи, в множині яких існував би корінь парного степеня з від’ємного числа. Виконуються (поки що без обґрунтування) перетворення, які дозволяють отримати корінь .

Далі ставиться проблема: які спільні правила для кожного розширення числових множин (введення нових чисел). Ці правила доцільно сформулювати разом з учнями:

1)нова числова множина повинна містити вже відому (розширювану) множину;

2)смисл дій над числами в старій множині залишається тим самим і в новій множині, причому усі ці дії визначено на новій множині;

3)у новій множині виконуються нові дії (як мінімум одна), які не можна було виконати у старій множині;

4)нова множина чисел повинна бути такою, щоб не існувало жодної її власної підмножини, яка задовольняла б умови 1)-3) (вимога мінімальності розширення).

Разом з учнями заповнюється таблиця “Розвиток поняття числа від натурального до комплексного” із вказівкою рушійного мотиву розширення цього поняття (з математичної точки зору):

Таблиця 2.2

Розвиток поняття числа від натурального до комплексного

Вихідна числова множина	Позначення вихідної множини	Рушійний мотив до розширення (мета)	Числа, що приєднуються	Розширена числова множина	Позначення розширеної множини
Натуральні числа		Зробити можливим віднімання рівних чисел (або розв’язування рівняння)	Нуль	Цілі невід’ємні числа	
Цілі невід’ємні		Зробити можливим віднімання більшого числа від меншого (	Цілі від’ємні числа	Цілі числа	

числа		або розв'язування рівняння , де)			
Цілі числа		Зробити завжди можливим ділення (або розв'язування рівняння)	Дробові числа	Раціональні числа	
Раціональні числа		Зробити завжди можливим добування кореня із будь-якого додатного числа (або розв'язування рівняння , де)	Ірраціональні числа (алгебраїчні та трансцендентні)	Дійсні числа	
Дійсні числа		Зробити завжди можливим добування кореня з від'ємного числа (або розв'язування рівняння , де)	Уявні числа	Комплексні Числа	

Після заповнення таблиці 2.2 можна поставити проблему введення нових чисел (комплексних) і розпочати її вирішення таким чином. Серед нових чисел повинно існувати таке, що є розв'язком рівняння , тобто . Позначимо таке нове число літерою і назвемо його "уявною одиницею", тобто за означенням. Згідно з правилом 2) повинен існувати добуток довільного дійсного числа на уявну одиницю , тобто серед нових чисел повинні бути числа виду , причому, коли , доцільно вважати, що за означенням, а коли , то також за означенням. Числа , де і , називають суто уявними числами. Далі також за правилом 2) повинна існувати сума довільного дійсного числа і суто уявного числа , тобто серед нових чисел повинні бути числа виду , де і - довільні дійсні числа. При цьому за означенням вважаємо, що коли , то число є дійсним числом, а коли , то число називають уявним числом (що перетворюється у суто уявне число, коли).

Після цього вводиться означення комплексних чисел, як виразів виду , де і – дійсні числа. Число називають дійсною частиною комплексного числа і позначають , число – уявною частиною комплексного числа і позначають (від латинських realis – дійсний, imaginarius – уявний).

Фіксоване число , для якого , назвали уявною одиницею, с... и вважали, що це число не виражає ні результатів вимірювання величин, ні змін цих вел... ь усіх комплексних чисел називають множиною комплексних чисел і познач... . Отже, для розглянутих нами числових множин виконується співвідношення: .

Співвідношення між числовими множинами допомагає зрозуміти їх зображення кругами Ейлера-Венна (рис. 2.5).

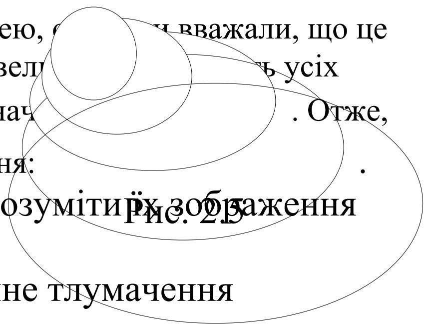


Рис. 2.5

Після проведеної роботи доцільно навести геометричне тлумачення комплексних чисел та означення комплексної площини.

Розпочати пояснення доцільно з поступового "заселення" числової осі. Після того, як до раціональних чисел були приєднані ірраціональні, тобто побудовано по ле дійсних чисел, числова вісь стала цілком "заселеною". Це означає, що кожному дійсному числу відповідає на числовій осі одна точка; і навпаки, кожній точці чис лової осі відповідає одне дійсне число. Тобто між множиною точок числової осі і множиною дійсних чисел існує взаємно однозначна відповідність. Це зображення поширюється і на випадок комплексних чисел, якщо кожному комплексному числу поставити у відповідність точку координатної площини. Виберемо на площині прямокутну декартову систему координат з віссю абсцис і віссю ординат . Кожному комплексному числу поставимо у відповідність точку координатної площини (рис. 2.7). Очевидно, що така відповідність є взаємно однозначною. При цьому дійсні числа зображаються точками осі , тому вісь називають дійсною віссю. Суто уявні числа зображаються точками осі , тому вісь називають уявною віссю. Зокрема, уявна одиниця зображається точкою з координатами . Числу відповідає точка . Площину, точки якої є зображеннями комплексних чисел, називають комплексною площиною.

Як відомо, координати на площині має не тільки точка , але і вектор з початком в точці і кінцем в точці , який називають радіус-вектором точки . Тому кожному такому вектору відповідає одне комплексне число ; і навпаки, будь-якому комплексному числу відповідає один вектор з початком в точці і кінцем в точці . Отже, комплексне число є комплексною координатою як точки , так і вектора (рис. 2.6).

Корисною для учнів є повідомлення вчителя про застосування комплексних чисел: в науці і техніці, зокрема, у вченні про рух рідин і газів (гідродинаміці), в електротехніці і літакобудуванні, картографії, теорії пружності для розрахунку конструкцій на міцність, аеродинаміці, ядерній фізиці, в теорії автоматичного регулювання і т.д. Як підсумок наводимо слова великого математика Б. Рімана “Майже кожен крок, тут зроблений, не тільки надавав більш простий, більш закінчений вигляд результатам, отриманим без допомоги комплексних чисел, але і вказував шляхи до нових відкриттів” [18, 188].

Протягом бесіди у свідомості учнів формується уявлення про множину комплексних чисел як найширшу числову множину, що включає в себе всі відомі старшокласникам числові множини, з якими вони послідовно ознайомлювались протягом всього часу навчання у школі.

Разом з тим, можна повідомити учням про існування чисел, що є узагальненням комплексних, їх названо “кватерніони”. Кватерніони також мають реальні практичні застосування. З їх допомогою вимірюються векторні величини, що змінюються у просторі. Існують і інші узагальнення комплексних чисел, з якими при бажанні учні можуть ознайомитися з додаткової літератури і зробити повідомлення на наступно му семінарському занятті [18; 29; 90; 227].

У результаті цілком усвідомленим стає висновок: поняття числа постійно розвивається разом з розвитком суспільства, науки і техніки, і, в свою чергу, поняття числа впливає на цей розвиток, оскільки є засобом пізнання навколишнього світу.

На закінчення заняття учитель виставляє оцінки за активність на уроці та пропонує теми рефератів на наступні семінарські заняття: “Спроби інтерпретації комплексних чисел видатними математиками”, “Внесок видатних математиків у розвиток теорії комплексних чисел”. Орієнтовні теми рефератів подані у додатку В.

Учні обирають теми рефератів і готуються за рекомендованою учителем літера турою до наступних семінарських занять, які доцільно проводити не швидше, ніж по закінченні вивчення операцій над комплексними числами в різних формах запису та їх геометричної інтерпретації. Матеріал, підготовлений для доповіді, учні оформля ють у вигляді рефератів, які повинні задовольняти такі вимоги: відповідність темі, повнота розробленої теми, обґрунтованість висновків.

Учням повідомляється план наступного семінарського заняття, який учитель відкриває вступним словом і контролює хід обговорення теми, не допускаючи відхилень від теми заняття і підтримуючи регламент. Повідомлення учнів заслуховуються і обговорюються на семінарі в ході вільного товариського обміну думками. Школярі рецензують відповіді своїх товаришів, вносять свої корективи. На семінарському занятті доцільно продемонструвати портрети великих вчених, які зробили значний внесок у розвиток теорії комплексних чисел та її застосувань, їхні висловлювання про комплексні числа.

Робота з довідковою літературою, підготовка повідомлень, доповідей, рефератів стимулюють творчу пізнавальну активність старшокласників, тому є корисною для їхнього інтелектуального розвитку.

2.3. Використання комплексних чисел при розв’язуванні задач

Результатом вивчення курсів за вибором повинно стати не просто знання учнями відповідних термінів і формулювань, а вміння застосовувати вивчені теореми і методи в процесі самостійного розв’язування задач, в тому числі прикладних та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками, адже саме в процесі розв’язування таких задач формуються вміння старшокласників застосовувати апарат комплексних чисел, розвиваються інтереси і нахили до математики.

Відмітимо деякі позитивні моменти, пов’язані з впровадженням у навчальний процес прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками.

По-перше, застосування таких задач створює належні умови для активізації навчального процесу. Нестандартна постановка математичної задачі вже викликає зацікавленість учнів, оскільки зосереджує їхню увагу на аналізі змісту задачі, на пошуку відповідної математичної моделі, математичних формул, виразів, рівнянь, а вже потім – на виконання необхідних обчислень.

По-друге, створюються умови для самостійної роботи. Адже для розв’язування більшості прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками недостатньо механічно застосовувати раніше вивчені теоретичні поло ження тієї чи іншої теми, а необхідно самостійно адаптувати їх до аналізу певних ситуацій та прийняття відповідного рішення.

По-третє, більшість прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками носить проблемний характер, що, в свою чергу, сприяє використанню не тільки вже відомих учням математичних знань для аналізу поставленої проблеми, а й спонукає їх до відшукання і оволодіння новими знаннями, поповнює їхній індивідуальний банк математичних методів, які можуть використовуватись для розв'язування різноманітних математичних проблем. Окремі задачі потребують додаткового опрацювання навчального матеріалу, зокрема із суміжних дисциплін.

По-четверте, прикладні задачі та задачі з міжпредметними і внутріпредметними зв'язками мають вирішальне значення у розвитку мислення, особливо теоретичного, яке є основою для виховання творчої особистості. Сам процес розв'язання задач є безперервною взаємодією суб'єкта з об'єктом, в якій суб'єкт через аналіз та синтез розкриває відношення між даним і шуканим, намагається встановити зв'язок.

По-п'яте, прикладні задачі та задачі з міжпредметними і внутріпредметними зв'язками є засобом формування тих психічних якостей (системність мислення, здатність бачити всі можливі варіанти і здійснювати вибір оптимального, передба чати наслідки обраних рішень, орієнтувати мислення на розв'язання задач найбільш раціональним шляхом) та позитивних моральних рис особистості (старанність, кмітливість, працьовитість, відповідальність, наполегливість), які необхідні майбут нім фахівцям: математикам, інженерам, економістам тощо.

По-шосте, прикладні задачі та задачі з міжпредметними і внутріпредметними зв'язками виконують певні дидактичні функції, зокрема забезпечують мотивацію вивчення відповідного матеріалу. Розв'язуючи такі задачі, учні розуміють широкі можливості застосувань математики до досліджень реального світу та використання набутого досвіду в майбутній професійній діяльності.

Тому мета введення комплексних чисел у загальноосвітні школи не буде досягнута, якщо не познайомити учнів хоча б із найпростішими їх застосуваннями на основі розв'язування прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками. Ними можуть бути: застосування комплексних чисел до теорії многочленів, використання комплексних чисел у тригонометрії (задачі з внутріпредметними зв'язками), розв'язування геометричних задач методом комплексних чисел, застосування комплексних чисел до перетворень площини (задачі з міжпредметними зв'язками), розв'язування задач з механіки та електродинаміки використанням комплексних чисел (задачі з міжпредметними зв'язками та прикладні задачі). Під прикладною задачею ми розуміємо задачі, які виникають за межами математики, але розв'язання яких вимагає використання математичного апарату [322, 8].

2.3.1.Комплексні корені многочленів вищих степенів. Ознайомлення учнів із застосуваннями комплексних чисел у теорії многочленів слід розпочати із зосередження уваги учнів на кількості коренів довільного квадратного тричлена. Наведемо фрагмент лекції.

Актуалізацію опорних знань учнів проводимо за допомогою фронтальної бесіди за такими запитаннями:

- Що називають коренем рівняння?
- Що таке, на вашу думку, корінь многочлена?
- Скільки дійсних коренів може мати квадратний тричлен?

Розглядаючи квадратний тричлен з дійсними коефіцієнтами на множині , учні можуть знайти корені цього многочлена. В залежності від значення виразу їх може бути: два дійсних різних корені

, коли ; два корені, що співпадають, , коли ; і немає дійсних коренів, якщо .

Розглянемо цей же квадратний тричлен на множині комплексних чисел. Тут незалежно від коренів завжди буде два: 2 дійсних різних, 2 дійсних рівних, або 2 комплексно спряжених числа. Це стосується і многочленів другого степеня з комплексними коефіцієнтами.

Виявляється, кожен многочлен -го степеня у множині комплексних чисел має рівно коренів. Цей факт випливає із основної теореми алгебри многочленів, яка була вперше доведена німецьким математиком Карлом Фрідріхом Гауссом (1777-1855) у 1799 році й тому часто називається теоремою Гаусса. Доведення теореми не наводимо, проте бажаючим для індивідуального опрацювання даємо список рекомендованої літератури: [147; 227; 228; 229; 294].

Далі формулюється основна теорема алгебри многочленів, основні наслідки з неї та необхідні теореми:

Теорема 1 (Гаусса). Будь-який многочлен степеня з комплексними коефіцієнтами має принаймні один комплексний корінь.

Наслідок 1. Будь-який многочлен степеня з комплексними коефіцієнтами розкладається в добуток лінійних множників. (Доведення методом математичної індукції учні можуть провести самостійно удома.)

Наслідок 2**.** Будь-який многочлен степеня з комплексними коефіцієнтами має коренів, враховуючи їх кратність.

Теорема 2. Якщо комплексне число є коренем многочлена

з дійсними коефіцієнтами , , …, , , то

є коренем того ж многочлена , причому корені і мають однакову кратність (, тобто не є дійсним числом). (Доведення учні проводять самостійно, використовуючи властивості спряженості).

Теорема 3. Довільний многочлен степеня з дійсними коефіцієнтами можна розкласти в добуток лінійних двочленів з дійсними коефіцієнтами і квадратних тричленів з дійсними коефіцієнтами та від'ємними дискримінантами.

Тут доцільно зауважити, що задача відшукання коренів многочлена зводиться до розв'язування квадратних або лінійних рівнянь.

Теоретичні викладки доцільно ілюструвати прикладами, які розглядаємо частково-пошуковим методом.

1. Розкладіть многочлен на лінійні та квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами.

Розв'язання. Згрупувавши доданки, отримаємо

.

2. Знайдіть дільник многочлена .

Розв'язання. Додавши та віднявши , отримаємо

.

Користуючись посібником [325], учні виводять теорему Вієта для многочленів довільного степеня, яка випливає з основної теореми алгебри многочленів:

Теорема (Вієта). Для довільного многочлена з комплексними коефіцієнтами

( ) сума всіх можливих добутків коренів

многочлена дорівнює , де .

Формування вмінь та навичок шукати корені многочленів проводимо за допомогою системи вправ, використовуючи групову форму роботи.

1. Розв'язування вправ усно із можливими записами відповідей на індивідуальних планшетах (рівень А – низький).

1) Розкладіть двочлен на лінійні множники в полі комплексних чисел, використовуючи формули скороченого множення:

а) ; г) ; е) ;

б) ; ґ) ; є) ;

в) ; д) ; ж) .

2) Розкладіть многочлен на лінійні множники, знайшовши його корені:

а) ; в) ;

б) ; г) .

3) Знайдіть корені многочлена і вкажіть їх кратність:

а) ;

б) .

4) Використавши теорему Вієта для многочлена , знайдіть:

а) ;

б) ;

в) ;

г) .

2. Розв'язування вправ на дошці та в зошитах (рівень Б – середній).

5) Знайдіть корені многочлена:

а) ;

б) ;

в) (самостійно).

6)Запишіть многочлен третього степеня з дійсними коефіцієнтами, коренями якого є числа ;

.

3. Робота в групах різнорівневого складу.

7) Знайдіть цілі числа і , при яких многочлен має даний корінь (рівень Б – середній):

а) , ;

б) , .

8) Вкажіть кратність кореня многочлена (рівень Б, В):

а) , ;

б) , .

9) Розкладіть многочлен на лінійні множники (рівень В – достатній):

а) ; б) .

10) Сума двох коренів рівняння дорівнює 2. Знайдіть і розв’яжіть це рівняння.

11) Добуток двох коренів рівняння дорівнює 1. Знайдіть і розв’яжіть це рівняння.

12) Знайдіть суму квадратів коренів степеня 2004 з числа (рівень Г – високий)

Картка-інструкція до завдання 12
Використайте теорему Вієта для многочлена .

Учитель аналізує ідеї учнів щодо розв’язування завдань самостійної роботи в групах та звіряються відповіді на завдання, які отримала кожна група, з правильними. Таким чином учні отримують своєчасну корекцію знань та вмінь.

2.3.2. Тотожні перетворення тригонометричних виразів. На практичних заняттях з учнями доцільно розглянути ряд тригонометричних завдань, які розв’язуються також за допомогою апарату комплексних чисел.

При цьому формули Ейлера і Муавра, відомі учням, дозволяють ефективно розв’язувати різноманітні задачі, пов’язані з тригонометричними функціями і . Зокрема, можна вивести велику частину формул тригонометрії, використовуючи тригонометричну чи показникову форми комплексного числа.

Наприклад, розглядаючи формулу Муавра для різних показників степеня, можна отримати формули синуса і косинуса кратних аргументів. На основі правил множення і піднесення до степеня комплексних чисел у тригонометричній формі можна записати всі формули зведення.

Дійсно, очевидна тотожність

, де ,

містить в собі всі формули зведення.

Наприклад, при маємо

,

.

Прирівнявши праві частини останніх двох рівностей, отримуємо:

, .DSMT4 .

Отже, при вивченні застосування комплексних чисел у тригонометрії з учнями доцільно розглянути наступні твердження: основні тригонометричні тотожності, співвідношення між сторонами і кутами трикутника (теореми синусів, косинусів та ін.), формули кратних аргументів, формули суми і різниці тригонометричних функцій, перетворення добутку тригонометричних функцій у суму або різницю, формули пониження степеня тригонометричних функцій, обчислення сум тригонометричних функцій, аргументи яких утворюють арифметичну прогресію. Значну частину цього матеріалу доцільно запропонувати учням опрацювати самостійно, оскільки використовуються відомі твердження, лише в нових умовах.

Учитель подає матеріал у формі бесіди, залучаючи до неї учнів та використовуючи самостійну роботу з посібником [325] (якщо посібників немає, то учні самі виводять формули, користуючись вказівками учителя).

При цьому важливо, що учні мають можливість повторити і систематизувати тригонометричний матеріал та побачити його з іншого боку, що є дуже важливим для його глибокого усвідомлення, а також отримати новий метод дослідження, що використовує комплексні числа.

Приклад 1. Виразимо та через та .

За формулою Муавра

.

З іншого боку

.

З останніх двох рівностей отримуємо, що

.

Використавши умову рівності двох комплексних чисел, отримуємо, що

,

.

Аналогічно доводяться формули і для довільного , при цьому використовується формула бінома Ньютона:

,

де – біноміальні коефіцієнти, .

Приклад 2. Обчислимо суми

і .

Позначимо

,

.

Якщо , , то , . Тому надалі вважаємо, що , , і розглянемо комплексне число

.

Числа , , утворюють геометричну прогресію, перший член якої дорівнює , а знаменник – . Тому, використавши формулу суми перших її членів

, маємо

.

Звідси ; .
Отже,

, , ,

, , .

Формування вмінь застосовувати комплексні числа у тригонометрії проводимо при виконанні такої системи вправ (повний набір вправ – у посібнику [325]).

Виконання вправи біля дошки:

1)Доведіть, що для довільного , .

Робота в парах:

2)Доведіть, що для довільного , .

Виконання вправи біля дошки:

3) Доведіть тотожність: .

Робота в парах:

4) Доведіть тотожність: .

Виконання вправи біля дошки:

5) Обчисліть суми: , .

Самостійне виконання завдань. Один (або 2) учень виконує завдання на відкидній дошці чи на кодоплівці, інші – у зошитах, пізніше звіряють розв'язання із записами на дошці чи кодоплівці.

6) Доведіть тотожність: .

7) Обчисліть суми: , .

Додаткові завдання.

8) Доведіть: .

9) Виразіть , , де , через синус і косинус кутів, кратних .

В результаті проведеної роботи учні ознайомлюються з основними прийомами використання комплексних чисел у тригонометрії при доведенні тригонометричних тотожностей та обчисленні тригонометричних сум певного виду.

2.3.3. Геометричні задачі. При вивченні матеріалу, пов'язаного з комплексними числами, вчителі стикаються з проблемою підбору вправ і задач, які ілюстрували б реальні застосування комплексних чисел. Для її розв'язання доцільно залучити міжпредметні зв'язки, зокрема між алгеброю і геометрією. У запропонованій нами добірці вправ [325] рівнів складності не виділяємо. Це пояснюється тим, що кожне завдання цікаве і не повторює попереднє, хоч можна прослідкувати їх послідовне ускладнення. Однотипні вправи в даному випадку недоцільні, оскільки метою навчання є не вміння користуватися певними алгоритмами, а вміння застосовувати знання з різних галузей науки до розв'язування певної задачі, знаходити різні способи розв'язування.

Дуже корисним для учнів профільних класів є розв'язування одних і тих самих задач кількома способами. Ще американський математик У. Сойєр переконував, що "людині... часто корисніше розв'язати одну й ту саму задачу різними способами, ніж розв'язати три-чотири різні задачі. Розв'язуючи одну задачу різними методами, можна шляхом порівнянь з'ясувати, який з них коротший і ефективніший. Так виробляється досвід" [279, 16]. Доцільно показати учням розв'язання задач міжпредметного та внутріпредметного характеру методом комплексних чисел і традиційним методом. Такий підхід дає змогу учням розширити коло методів пізнання, порівнювати способи розв'язування задач та вибирати найбільш доцільний.

O Рис. 2.7 *x* *O* Рис. 2.
8 *x*

Для цього в множині комплексних чисел разом з учнями встановлюємо додаткові критерії (ознаки) певних відношень, наприклад, колінеарність та ортогональність векторів, хорд одиничного кола, приналежність трьох точок одній прямій та ін.; учні переконуються в простоті та корисності застосування методу комплексних чисел.

На лекції слід розглянути такі твердження.

Теорема 1. Два ненульові вектори є колінеарними тоді і тільки тоді, коли відношення їх комплексних координат є дійсним числом (додатним, якщо вектори однаково напрямлені, і від'ємним, якщо вони протилежно напрямлені).

Доведення демонструємо учням на переносній дошці чи кодоплівці:

Нехай вектори і мають комплексні координати відповідно і . Якщо вони однаково напрямлені, то їхні аргументи рівні з точністю до доданку, кратного , тобто , , і тому

.

Якщо вектори і протилежно напрямлені, то , , і тому

.

Якщо ж вектори і не є колінеарними, то , і число , очевидно, не буде дійсним.

Цікавими для учнів є наслідки з цієї теореми, які є певними додатковими ознаками і які вони можуть довести самостійно (див. посібник [325]) :

Наслідок 1. Нехай *a* і *b* – комплексні координати ненульових векторів і відповідно. Тоді для того, щоб вектори і були колінеарними, необхідно і достатньо, щоб або .

Наслідок 2. Нехай a, b, c – комплексні координати точок A, B, C відповідно. Тоді для того, щоб точки A, B, C лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб .

Критерій приналежності трьох точок одній прямій можна записати і в іншому вигляді: .

Наслідок 3. Рівняння прямої, яка проходить через точки A і B, має вигляд або , де a, b – комплексні координати точок A і B відповідно.

Теорема 2. Два ненульові вектори є ортогональними тоді і тільки тоді, коли відношення їх комплексних координат є суто уявним числом.

Доведення демонструємо учням на переносній дошці чи кодоплівці:

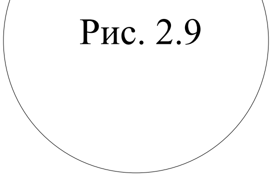


Рис. 2.9

Наслідок. Нехай a і b – комплексні координати векторів і відповідно. Тоді для того, щоб вектори і були ортогональними, необхідно і достатньо, щоб або . (При доведенні використовується властивість: , , тоді і тільки тоді, коли є суто уявним числом).

Далі вводиться поняття одиничного кола та розглядаються відповідні властивості хорд одиничного кола.

Одиничним колом називають коло, центром якого є початок координат, а радіус дорівнює 1. Очевидно, на ньому розміщуються точки, які задовольняють рівняння і мають комплексні координати . Тобто для точок одиничного кола виконується рівність або , тобто .

Теорема 3. Для того, щоб хорди AB і CD одиничного кола були паралельними, необхідно і досить, щоб , де , , , – комплексні координати точок , , , відповідно.

Доведення теореми учні розбирають самостійно, використовуючи посібник [325], або під керівництвом учителя.

Наслідок. Якщо в точці C одиничного кола проведена дотична паралельно до хорди AB цього кола, то , де , , – комплексні координати точок A, B, C.

Теорема 4. Для того щоб хорди AB і CD одиничного кола були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб , де , , , – комплексні координати точок , , , відповідно.

Приклад 1. Написати рівняння дотичної до одиничного кола в точці з комплексною координатою .

Розв’язання. Нехай довільна точка дотичної має комплексну координату . Тоді і за наслідком із теореми 2

або .

Звідки .

Оскільки є точкою одиничного кола, то . Тому рівняння дотичної до одиничного кола в точці з комплексною координатою має вигляд

.

На практичних заняттях доцільно розглянути приклади розв’язування геометричних задач, серед яких є вже відомі учням. Для наочності розв’язуємо задачу двома способами. Це дає змогу впевнитись у тому, що застосування відомостей про комплексні числа часто суттєво спрощує процес розв’язування задачі.

1. Розв’язування задач біля дошки.

1) Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна основі і дорівнює її половині.

2) Доведіть, що вписаний в коло кут, який спирається на діаметр, дорівнює .

3) Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін. (Розв’язання див.: задача Д4 додатку Д.)

Рис. 2.10

4) Знайдіть комплексну координату точки перетину медіан трикутника (центроїда), якщо задано комплексні координати його вершин. (Розв'язання див.: задача Д1 додатку Д.)
5) Знайдіть комплексну координату точки перетину висот трикутника (ортоцентра), якщо задано комплексні координати його вершин.

6) На сторонах трикутника зовнішнім чином побудовані квадрати. Точки , , – центри цих квадратів. Доведіть, що , . (Розв'язання див.: задача Д7 додатку Д.)

2. Робота в групах різнорівневого складу

7) Доведіть, що середини сторін довільного чотирикутника утворюють паралелограм. (Розв'язання див.: задача Д2 додатку Д.)

8) Доведіть, що сума квадратів медіан трикутника дорівнює суми квадратів його сторін. (Розв'язання див.: задача Д5 додатку Д.)
9) Доведіть, що діагоналі чотирикутника перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли суми квадратів протилежних сторін цього чотирикутника рівні.
10) Доведіть, що сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює сумі подвоєного квадрата медіани, проведеної до його третьої сторони, і половини квадрата цієї сторони. (Розв'язання див.: задача Д6 додатку Д.)

Розв'яжемо деякі з них.

Задача 1. Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна основі і дорівнює її половині.

Розв'язання. У школі ця задача розв'язується так. Нехай - середня лінія трикутника . Проведемо через точку пряму, паралельну стороні . За теоремою Фалеса вона перетне відрізок в його середині, тобто містить середню лінію . Отже, середня лінія паралельна стороні .

Проведемо тепер середню лінію . Вона паралельна стороні . Чотирикутник - паралелограм. За властивістю паралелограма , а через те, що за теоремою Фалеса , то .

Розв'яжемо цю задача за допомогою комплексних чисел.

Нехай вершини трикутника мають комплексні координати відповідно, а середини сторін і – точки і – комплексні координати і . Тоді , . Вектор має комплексну координату , а вектор – комплексну координату . Звідси отримуємо, що відношення комплексних координат цих векторів дорівнює дійсному числу . Отже, за теоремою 1 вектори і є колінеарними, а прямі, що їх містять, паралельними.

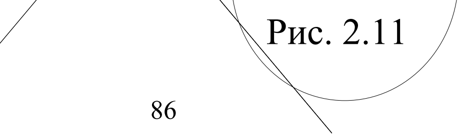


Рис. 2.11

Крім цього, , що і треба було довести.

Задача 2. Не використовуючи теорему про величину вписаного кута, доведіть, що вписаний в коло кут, який спирається на діаметр, дорівнює .

Розв’язання. Нехай задано коло радіуса . Виберемо систему координат так, щоб початок координат співпадав з центром кола (рис. 2.11). Тоді рівняння кола має вигляд . Нехай - довільна точка кола з комплексною координатою . Вектори і , де і – точки перетину кола з дійсною віссю, мають комплексні координати і відповідно. Оскільки , то

,

тому за наслідком з теореми 2 вектори і є ортогональними, тобто кут, який вони утворюють, рівний .

Значна частина запропонованих задач – це задачі на доведення. Учні мають можливість прослідкувати різні прийоми доведення і способи математичних міркувань.

Задача 9. Доведіть, що діагоналі чотирикутника перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли суми квадратів протилежних сторін цього чотирикутника рівні.

Розв’язання. Нехай комплексні координати вершин чотирикутника відповідно дорівнюють , , , . Нехай , доведемо, що .

За наслідком з теореми 2 про ортогональність векторів

або .

Треба довести, що .

Для цього розглянемо різницю лівої і правої частин рівності і покажемо, що вона дорівнює нулю.

,

що і треба було довести.

Нехай тепер виконується рівність ; доведемо, що . За умовою задачі . Аналогічними міркуваннями показуємо, що . За наслідком з теореми 2 вектори і є ортогональними.

Задача 11. Доведіть, що для точок і кола радіуса з центром в точці справджується рівність , де і – комплексні координати точок і

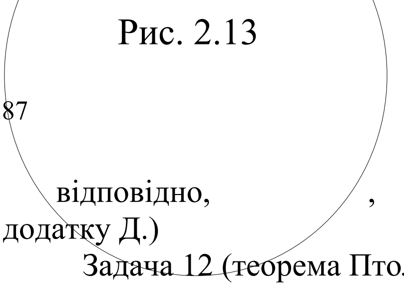


Рис. 2.13

відповідно, , , причому . (Розв’язання див.: задача Д8 додатку Д.)

Задача 12 (теорема Птолемея). Доведіть, що в кожному вписаному в коло опуклому чотирикутнику сума добутків протилежних сторін дорівнює добутку його діагоналей. (При доведенні використовуємо задачу 11). (Розв’язання див.: задача Д9 додатку Д.)

Задачі 13-16 потребують певної систематичності знань і сприяють розвитку математичного мислення та ерудиції учнів профільних класів.

Задача 13. У коло вписано правильний багатокутник . Доведіть, що знакозмінна сума відстаней від центра кола до сторони і до діагоналей , …, дорівнює

половині радіуса, тобто що , де - основа

перпендикуляра, опущеного з центра кола т. на відрізок , .

Розв’язання. Нехай – радіус описаного кола навколо багатокутника (рис. 2.13). Опустимо з точки перпендикуляр на сторону . є висотою рівнобедреного

трикутника , причому . Тому

.

Аналогічно є висотою рівнобедреного трикутника , причому . Отже,

.

Продовжуючи цей процес, отримаємо, що .

Тоді знакозмінна сума відстаней від точки O до сторони і до діагоналей , …, буде дорівнювати

.

Нехай і обчислимо суму .

Позначимо

,

.

Розглянемо комплексне число

.

Рис. 2.14

Числа , , , утворюють геометричну прогресію, перший член якої дорівнює , а знаменник – . Тому,

використавши формулу суми перших її членів, маємо

.

При парному маємо

;

.

При непарному маємо

.

.

Якщо , то і тому в обох випадках .

Отже, .

Задача 14. У рівнобедреному прямокутному трикутнику на сторонах

, , вибрано відповідно точки , , так, що . Довести, що відрізки та взаємно перпендикулярні і рівні.

Розв'язання. Запишемо векторні рівності

;

.

Оскільки трикутник рівнобедрений, то , . Звідси

,

тобто , а це означає, що відрізки та рівні та взаємно перпендикулярні (множення на уявну одиницю означає поворот вектора на).

Подібними відносно способу розв'язування є наступні задачі.

15. Доведіть, що сума довжин всіх сторін і діагоналей правильного -кутника, вписаного в одиничне коло, дорівнює . (Розв'язання див.: задача Д10 додатку Д.)

16. Доведіть, що сума квадратів відстаней від вершин правильного -кутника до довільної прямої, проведеної через його центр, не залежить від вибору цієї прямої і дорівнює , де – радіус кола, описаного навколо багатокутника. (Розв'язання див.: задача Д11 додатку Д.)

17. На колі, описаному навколо правильного -кутника, вибрали точку . Доведіть, що сума квадратів відстаней від цієї точки до всіх вершин -кутника не залежить від розміщення точки на колі і дорівнює , де – радіус кола. (Розв'язання див.: задача Д12 додатку Д.)

Після вивчення геометричних застосувань на узагальнюючому уроці з учнями складаємо таблицю основних співвідношень між відомими геометричними поняттями:

Таблиця 2.3

Основні розглядувані співвідношення

	Мовою координат	Мовою комплексних чисел
Рівняння кола радіуса R з центром у точці		
Відстань між точками і		
Координати середини відрізка з кінцями в точках ,	,	
		,

Рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку		
Рівняння прямої, перпендикулярної до відрізка, що сполучає точки і , і проходить через його середину	EMBED Equation. DSMT4	,
Критерій колінеарності векторів і		, причому - вектори співнапр. - вектори протилежно напрямлені
Рівняння прямої, що проходить через дві точки ,		
Рівняння одиничного кола		або

Як показує порівняльний аналіз стовпців таблиці, мовою комплексних чисел записи основних співвідношень виглядають компактніше, при цьому встановлюються додатково деякі нові цікаві факти. Це ще раз підтверджує слова великого математика Б. Рімана “Майже кожен крок, тут зроблений, не тільки надавав більш простий, більш закінчений вигляд результатам, отриманим без допомоги комплексних чисел, але і вказував шляхи до нових відкриттів” [18, 188].

За допомогою комплексних чисел учні також мають змогу відкрити новий метод побудови правильних многокутників. Підвищують інтерес до навчального матеріалу історичні факти, з яких доцільно розпочати вивчення цього питання. Дане питання та наступне про площі многокутників є доступним для самостійного вивчення учнями, тому можна запропонувати опрацювати його індивідуально, залу чаючи до частково-пошукової роботи окремих учнів, з частковою демонстрацією для всіх. Принцип побудови дуже простий і полягає в наступному.

Як відомо, завдання побудови циркулем і лінійкою правильного n-кутника рівносильне задачі поділу кола на n рівних частин. Точка перетину одиничного кола з дійсною віссю має комплексну координату . Правильний n-кутник, у якого однією з вершин є точка , матиме інші вершини у точках з комплексними координатами: . Ці числа є коренями, відмінними від 1, рівняння , тобто рівняння , яке називають ***рівнянням поділу кола***.

Отже, потрібно побудувати точки , , які є коренями рівняння поділу кола.

Наводиться для прикладу побудова правильного п'ятикутника. Для цього розв'язуємо рівняння або рівносильне йому рівняння . Рівняння є рівнянням поділу кола. Оскільки число не є коренем цього рівняння, то поділивши це рівняння на , отримаємо .

Нехай . Тоді і останнє рівняння набуде вигляду .

Звідки , . Отже,

або .

Таким чином, розв'язками рівняння поділу кола є числа

, .

Очевидно, точки , , можна побудувати на одиничному колі за допомогою циркуля і лінійки. Достатньо зобразити на дійсній осі дійсну частину одного із чисел , , найближчу до , наприклад , і побудувати відповідну точку на одиничному колі. Тоді, отримавши відрізок , легко визначити за допомогою циркуля решту вершин правильного n -кутника.

За допомогою комплексних чисел легко знаходити площі многокутників. Формули виводимо в процесі розв'язування практичних завдань. Учні встановлюють, що:

1. Площа трикутника , комплексні координати вершин якого відповідно дорівнюють , , , знаходиться за формулою .

2. Площа трикутника , комплексні координати вершин якого відповідно дорівнюють , і , знаходиться за формулою

.

На закріплення вивченого матеріалу розв'язуємо такі задачі.

1) Побудуйте правильний чотирикутник, шестикутник.

2)Знайдіть площу трикутника , вершини і якого мають комплексні координати:

, .

3)Знайдіть площу трикутника, вершини якого мають комплексні координати: ,

, .

4)Виразіть площу п'ятикутника через комплексні координати його сторін.

В результаті проведеної роботи учні усвідомлюють, в чому полягає ідея використання методу комплексних чисел при розв'язуванні геометричних задач, його переваги над іншими методами, додаткові методи побудови правильних многокутників та особливості обчислення площ многокутників на комплексній площині.

2.3.4. Перетворення площини. Метод комплексних чисел у геометрії цікавий тим, що він дозволяє розв'язувати планіметричні задачі елементарними викладками за готовими формулами, що досі вважалося учнями неможливим у рамках шкільної геометрії. Застосування комплексних чисел до перетворень площини наглядно демонструє учням нескінченні можливості удосконалення математичних методів дослідження фактів і явищ, цим самим сприяючи підвищенню пізнавального інтересу учнів до математики та, разом з цим, розширюючи сукупність методів пізнання старшокласників.

При вивченні цього матеріалу необхідно повторити і систематизувати знання учнів про перетворення площини, зокрема перетворення подібності.

Згадуємо означення подібності та наводимо приклади подібностей:

1) паралельне перенесення (або трансляція) на вектор (позн.);

2) поворот навколо фіксованої точки на кут (позн.);

3) центральна симетрія з центром у точці (позн.);

4) осьова симетрія відносно прямої (позн.);

5) гомотетія з центром у точці і коефіцієнтом (позн.).

Серед згаданих перетворень подібності встановлюємо, що рухами є перетворення 1)–4).

Подаємо твердження про повну класифікацію рухів, назване на честь французького математика М. Шаля.

Теорема Шаля. Довільний рух площини є або паралельним перенесенням, або поворотом, або осьовою симетрією, або ковзною симетрією (тотожний рух, що задається функцією , окремо не виділяємо, бо його можна розглядати або як паралельне перенесення на нульовий вектор, або як поворот на нульовий кут).

Ковзною симетрією називається рух площини, який є композицією осьової симетрії та паралельного перенесення, вектор якого паралельний осі симетрії (позн.). Отже,

.

Доведення теореми Шаля учні можуть опрацювати за бажанням в індивідуальному порядку. З ним можна ознайомитися у посібнику [325] чи в іншій науково-популярній літературі [166].

Розглядаємо кожний рух зокрема, задаючи його формулою в комплексних координатах. Із властивостей вказаних перетворень відзначаємо лише найпростіші:

1) належність відповідного перетворення до рухів;

2) композиція двох перетворень, тобто їх послідовне виконання.

Учитель у формі лекції з елементами бесіди подає матеріал про перетворення площини, основні властивості яких пропонує учням довести удома. При цьому доводяться такі твердження:

Теорема 1. Паралельне перенесення на вектор задається формулою , де – комплексна координата вектора .

Теорема 2. Поворот навколо фіксованої точки на кут задається формулою

.

Теорема 3. Центральна симетрія з центром в точці задається формулою

.

Теорема 4. Осьова симетрія відносно довільної прямої має вигляд , де – довільна точка осі .

Теорема 5. Гомотетія з центром в точці і коефіцієнтом задається формулою

.

Виведені формули використовуємо при розв’язуванні задач.

Учні пересвідчуються, що при вивченні геометричних перетворень можна використовувати аналітичний метод, пов’язаний з комплексними числами, який досі їм був невідомий.

Завдання можна поділити на такі типи: завдання на відпрацювання формул певного перетворення площини; творчі задачі на застосування вивченого матеріалу про перетворення площини до задач, в яких, зокрема, комплексні числа не згадуються; задачі на комбінації перетворень площини.

1. Розв’язування вправ на застосування формул перетворення усно або з деякими записами на планшетах чи у зошитах.

1)Знайдіть комплексну координату точки , отриманої паралельним перенесенням точки на вектор , якщо , .

2)Точка отримана паралельним перенесенням точки на вектор . Знайдіть комплексну координату точки , якщо , .

3)Точка отримана паралельним перенесенням точки на вектор . Знайдіть комплексну координату вектора перенесення , якщо , .

4) Записати в комплексній формі перетворення повороту на кут відносно довільної точки .

5) Знайдіть комплексну координату точки , отриманої поворотом точки навколо точки на кут , якщо

а) , , ; б) , , .

6) Точка отримана поворотом точки навколо точки на кут . Знайдіть комплексну координату точки , якщо , , .

7) Точка отримана поворотом точки навколо точки на кут . Знайдіть комплексну координату точки , якщо , ,

.

8) Запишіть в комплексній формі перетворення симетрії відносно точки .

9) Знайдіть комплексну координату точки , симетричної точці відносно точки , якщо:

а) , ; б) , .

10) Точки і симетричні відносно точки . Знайдіть комплексну координату точки , якщо , .

11) Записати в комплексній формі формулу перетворення симетрії відносно прямої, що проходить через початок координат і точку .

12) Записати в комплексній формі формулу перетворення симетрії відносно прямої, що проходить через точку і паралельна осі .

13) Знайдіть комплексну координату точки , симетричної точці відносно:

а) осі ; б) осі ;

в) прямої, яка проходить через точку і паралельна осі ;

г) прямої, яка проходить через точку і паралельна осі ;

ґ) прямої, яка проходить через початок координат і утворює з додатним напрямом осі кут ;

д) прямої, яка проходить через точку і утворює з додатним напрямом осі кут .

14) Запишіть у комплексній формі гомотетію з центром у точці і коефіцієнтом .

15) Знайдіть комплексну координату точки , гомотетичної до точки відносно центра з коефіцієнтом гомотетії . Побудуйте точки на комплексній площині:

а) , , ; б) , , .

16) Точки і гомотетичні відносно точки . Знайдіть комплексну координату центра гомотетії , якщо , , .

17) Знайдіть коефіцієнт гомотетії , при якій точка переходить у точку , а центр гомотетії знаходиться в точці , , .

Кількість таких вправ можна зменшити чи, навпаки, збільшити, скориставшись посібником [325], в залежності від сприймання матеріалу певним класом учнів. Для сильніших учнів можна одразу запропонувати складніші завдання, записані на окремих карточках або на кодоплівці; вони можуть бути такими.

2. Розв’язування творчих задач на перетворення площини з використанням комплексних чисел.

18) Знайдіть комплексну координату четвертої вершини ромба , якщо ,
, .

19) Відрізок отриманий паралельним перенесенням відрізка на вектор . Довести, що середина відрізка отримується паралельним перенесенням середини відрізка на той же вектор .

20) Знайдіть комплексну координату вершини прямого кута рівнобедреного трикутника , якщо , . (*Самостійно* з наступним коментуванням розв'язку).

21) Дві сусідні вершини квадрата мають комплексні координати і . Знайдіть комплексні координати двох його інших вершин.

22) Дві протилежні вершини квадрата мають комплексні координати і . Знайдіть комплексні координати двох його інших вершин.

23) Знайдіть комплексну координату четвертої вершини квадрата , якщо
, , . (*Самостійно* з наступним коментуванням).

24) Паралелограми і симетричні відносно початку координат. Знайдіть комплексні координати точок , , , і точки – точки перетину його діагоналей, якщо , , .

25) Довести, що відрізок, що з'єднує середини катетів прямокутного трикутника, видно з основи висоти, опущеної на гіпотенузу, під прямим кутом.

26) Трикутник отриманий із трикутника за допомогою осьової симетрії . Довести, що середини сторін трикутника симетричні до середин сторін трикутника відносно тієї ж осі. *(Самостійно).*

27) Трикутник отримано із трикутника в результаті гомотетії з центром в точці і коефіцієнтом . Знайдіть комплексну координату точок , , , якщо:

а) , , , ;

б) , , , ; *(Самостійно).*

28)Вершина правильного шестикутника має комплексну координату , а його центр – комплексну координату . Знайдіть комплексні координати двох її сусідніх вершин і .

29) Трикутник отриманий із трикутника поворотом навколо деякої точки на кут . Довести, що медіана трикутника перпендикулярна медіані трикутника . (Розв'язання див.: задача Д19 додатку Д.)

30) Трикутник отриманий паралельним перенесенням трикутника . Доведіть, що відповідні медіани трикутників і паралельні і рівні. *(*

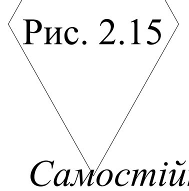


Рис. 2.15

Самостійна робота в парах).

31) На сторонах трикутника зовні побудовані довільні паралелограми , і . Довести, що з відрізків , , можна скласти новий трикутник. (Розв'язання див.: задача Д14 додатку Д.)

32) На протилежних сторонах і паралелограма від вершин і відкладені рівні відрізки і , а на двох інших сторонах – рівні відрізки і . Довести, що – паралелограм. *(Самостійна робота в парах).*

33) Доведіть, що якщо на сторонах трикутника зовнішнім чином побудовані правильні трикутники, то їх центри також утворюють правильний трикутник.

34) Довести, що якщо відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, перпендикулярний до цих основ, то трапеція рівнобічна.

35) Трикутник отримано із трикутника в результаті гомотетії з центром у точці . Доведіть, що центр гомотетії і точки перетину медіан трикутників лежать на одній прямій.

3. Розв'язування задач на комбінації перетворень площини.

36) Доведіть, що , де – точка перетину прямих і , – кут між прямими і .

Картка-інструкція до задачі 36
Застосувати двічі формули осьової симетрії:

37) Доведіть, що композиція двох осьових симетрій відносно паралельних прямих і є паралельним перенесенням. Знайдіть вектор паралельного перенесення.

38) Нехай – гомотетія з центром в точці і коефіцієнтом , – паралельне перенесення на вектор . Доведіть, що:

а) ; б) .

Знайдіть центри гомотетій і .

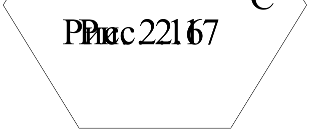
При яких умовах ?

Наведемо приклади розв'язання деяких із запропонованих задач.

Задача 18. Знайдіть комплексну координату четвертої вершини ромба, якщо комплексні координати трьох його вершин рівні відповідно , і .

Розв'язання. Нехай у ромба відомо комплексні координати трьох вершин , , – відповідно , , . Оскільки у ромба протилежні сторони паралельні і рівні, то можна сказати, що точка утворюється паралельним перенесенням точки на вектор , комплексна координата якого рівна . Звідси комплексна координата вершини дорівнює .

Задача 28. Вершина правильного шестикутника має комплексну координату , а його центр – комплексну координату . Знайти комплексні координати двох її сусідніх вершин і .



Розв’язання. Знайдемо величину кута . Оскільки шестикутник правильний,

то . Тоді вершина отримується при повороті точки на кут ,

вершина – при повороті на кут , а їх комплексні координати рівні:

, , де – комплексна координата вершини , – комплексна координата центра шестикутника. Отже,

,

.

Задача 33. Доведіть, що якщо на сторонах трикутника зовнішнім чином побудовані правильні трикутники, то їх центри також утворюють правильний трикутник. (Цю задачу приписують Наполеону і тому вказаний трикутник називають зовнішнім трикутником Наполеона трикутника .)

Розв’язання. Нехай , , , , , , , , – комплексні координати точок , , , , , , , , відповідно. Тоді

,

, .

Використаємо твердження про комплексну координату точки перетину медіан трикутника.

,

,

.

Знайдемо комплексні координати векторів і , що утворюють трикутник

і покажемо, що вектор утворений поворотом вектора на кут проти годинникової стрілки, тобто що


Рис. 2.18

.

,

,

.

Оскільки число задовольняє рівняння або , звідси , але , то або .

Тому і

.

А це означає, що трикутник – правильний.

Задача 32. На протилежних сторонах і паралелограма від вершин і відкладені рівні відрізки і , а на двох інших сторонах – рівні відрізки і . Довести, що – паралелограм.

Розв'язання. Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб точка перетину діагоналей паралелограма співпадала з початком координат. Оскільки протилежні вершини паралелограма , комплексні координати яких рівні відповідно , , , , симетричні відносно точки , то , . За умовою задачі , звідси маємо, що точки і ділять у певному відношенні сторони і , причому їхні координати

, .

А це означає, що точки і симетричні відносно точки . Аналогічно можна показати, що точки і також симетричні відносно точки . Отже, діагоналі і чотирикутника точкою перетину діляться пополам, а це означає, що – паралелограм.

Задача 34. Доведіть, що якщо відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, перпендикулярний до цих основ, то трапеція рівнобічна.

Розв'язання. Нехай відрізок , що з'єднує середини основ трапеції , перпендикулярний до цих основ, а пряма, що його містить, співпадає з віссю ординат . Тоді якщо комплексні координати вершин трапеції – відповідно , , , , то , , а комплексні координати векторів і рівні відповідно і . А це означає, що вектори і симетричні відносно осі , тобто прямої . За властивістю осьової симетрії зберігати довжини маємо, що відрізки і рівні, а це означає, що трапеція – рівнобічна.

Задача 35. Трикутник отримано із трикутника в результаті гомотетії з центром в точці . Доведіть, що центр гомотетії і точки перетину медіан трикутників лежать на одній прямій.

Розв'язання. Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб початок координат збігався з центром гомотетії точкою . Нехай комплексні координати вершин трикутників і дорівнюють , , і , , відповідно. Тоді точка перетину медіан трикутника ділить медіану у відношенні , починаючи з вершини, і її комплексна координата

. Гомотетія з центром у точці і коефіцієнтом переводить трикутник у трикутник , причому , , . Тоді комплексна координата точки перетину медіан трикутника :

. Отже, точки і гомотетичні з центром гомотетії у точці і коефіцієнтом . А це означає, що точки , і лежать на одній прямій.

В процесі розв'язування геометричних задач методом комплексних чисел ілюструються можливості цього методу та діапазон його застосувань. При цьому звертається увага учнів на те, що розв'язування задач та доведення тверджень методом комплексних чисел не завжди є найпростішим.

2.3.5.Задачі з механіки та електротехніки. Геометрична інтерпретація комплексних чисел дозволяє зрозуміти, що застосування комплексних чисел ефективне в тих областях науки і техніки, де доводиться мати справу з величинами, які можна подати у вигляді точки або вектора на площині. Виявилося, що таких областей досить багато. Тому комплексні числа (точніше теорія функцій комплексної змінної) знайшли широке застосування для розв'язання багатьох питань теоретичної фізики, гідродинаміки, аеромеханіки, електротехніки, кораблебудування, теорії пружності, картографії.

Розуміння учнями існування комплексних чисел на практиці завжди було проблемним.

"...Дуже важко уявити собі, в якому розумінні існує . До деякої міри нас може заспокоїти той факт, що його реальність має чисто математичний характер. Проте ще менш зрозуміло, в якому розумінні існують фізичні процеси, що описуються такого роду виразами" [229, 146].

Отже, розв'язування учнями реальних фізичних задач з використанням комплексних чисел сприяє не лише формуванню понятійного образу комплексного числа, що само собою дуже важливо, а й формуванню у них позитивних мотивів учіння, встановленню міжпредметних зв'язків, систематизації і глибшому засвоєнню шкільного матеріалу з математики та інших дисциплін.

Комплексні числа при розв'язуванні фізичних задач можна використовувати, насамперед, у тих випадках, коли фізичні величини характеризуються числовим значенням і напрямом, тобто мають властивості векторів. Такими, наприклад, є сила , швидкість та інші.

Задачі на додавання й розкладання сил і швидкостей розв'язуються єдиним аналітичним методом, що вимагає від учнів тільки вміння виражати вектори комплексними числами, виконувати дії над цими числами в різних формах, знаходити модуль і аргумент комплексного числа. При цьому в більшості випадків одержуємо менш громіздке й більш просте розв'язання.

Наведемо приклади розв'язання задач.

Задача 1. Яку швидкість повинен розвинути катер, щоб при швидкості течії ріки, рівної , він рухався перпендикулярно до берега зі швидкістю ?

Розв'язання. Зазвичай задача розв'язується в такий спосіб. При русі катера на

рис. 2.21

його швидкість впливають як швидкість течії ріки , так і швидкість, що надає катеру мотор – . Причому, . Із трикутника (рис. 2.20) за теоремою Піфагора маємо:

.

За допомогою комплексних чисел задача розв'язується так: із рис. 2.20 видно, що . Але вектору відповідає число , а вектору – число , тоді вектору відповідає число . Звідси швидкість знаходиться як модуль комплексного числа , тобто .

Задача 2. Дощові краплі, що падають вертикально, попадають на вікно вагона, що рухається зі швидкістю , і залишають на ньому слід під кутом до вертикалі. Яка швидкість падіння краплі?

Розв'язання. Замість руху вагона вправо відносно крапель можна розглядати рух крапель відносно вагона з тією ж швидкістю. При цьому результуюча швидкість краплі буде складатися з двох взаємно перпендикулярних швидкостей і (рис. 2.21). За умовою задачі , .

Тоді .

Для визначення використовують різні прийоми:

чи .

За допомогою комплексних чисел дану задачу можна розв'язати так.

З рис. 2.21 видно, що . З іншого боку

. На підставі рівності комплексних чисел

маємо ; .

Задача 3. Знайти рівнодійну двох сил і , які спрямовані на точку тіла під кутом 30° між ними.

Розв'язання. У школі ця задача розв'язується, як правило, з використанням теореми косинусів. Розв'яжемо її іншим способом, використовуючи комплексні числа. Будемо вважати, що точка прикладання сил у всіх випадках збігається з початком координат, а сила співнапрямлена з дійсною віссю. Тоді силі відповідає дійсне число , а силі – комплексне число

. Тоді . Звідси величина

рівнодійних дорівнює: .

Задача 4. На одній із станцій метро швидкість руху ескалатора дорівнює

. Визначте горизонтальну і вертикальну складові швидкості і глибину тунелю метро, якщо ескалатор рухається під кутом і піднімає людину нагору за 150 секунд.

Розв'язання. З рисунка 2.22 видно, що , при цьому вектору відповідає дійсне

число , вектору - комплексне число , вектору - комплексне число , де і треба знайти.

Запишемо комплексне число в тригонометричній та алгебраїчній формах. За умовою задачі

, , тому

.

Звідси (м/с), (м/с).

Обчислимо глибину тунелю (м/с).

Формування вмінь розв'язувати фізичні задачі методом комплексних чисел проводимо за допомогою системи задач.

5.Повітряна куля піднялася на висоту і при цьому була віднесена вітром у

горизонтальному напрямку на відстань . Знайдіть шлях складного руху кулі, вважаючи обидва рухи рівномірними.

6.Тіло одночасно бере участь у двох рівномірних рухах, напрямлених під кутом один

до одного. Швидкості й обох рухів рівні. Знайдіть величину і напрямок швидкості результуючого руху .

7.Через річку пливе човен перпендикулярно до берега. Швидкість човна ,
швидкість течії ріки , ширина річки . Знайдіть час, за який човен перепливе річку. На скільки метрів знесе човен за течією?

8.Ящик ковзає по похилій площині, розміщеній під кутом до горизонту, з постійною швидкістю . Знайдіть горизонтальну і вертикальну складові швидкості.

9.На візку, який рухається горизонтально і рівномірно із швидкістю , встановлена труба. Під яким кутом до горизонту потрібно нахилити трубу, щоб капля дощу, що падає вертикально, впала на дно труби, не зачепивши її стінок, якщо швидкість падіння каплі ?

10.Знайдіть рівнодійну двох сил по кожна, що діють в одній площині, якщо кут між силами .

11.Який кут повинні утворити напрями двох рівних по величині сил, що діють на ту саму точку, щоб їх рівнодійна по величині дорівнювала одній з даних сил?

12.До обводу диска по напрямах радіусів прикладено шість сил під кутом одна до одної. Визначте величину і напрямок рівнодійної цих сил, якщо вони відповідно рівні: , , , , , .

13.Хлопчик тягне санки по горизонтальній поверхні, натягаючи прив’язану до них мотузку під кутом до горизонту із силою . Яку роботу він виконає здолавши відстань ?

Використання задач з фізики і електротехніки на етапі вивчення комплексних чисел дозволить учням не лише добре засвоїти основні поняття теми “Комплексні числа”, а й сприятиме формуванню у них позитивних мотивів навчання. Наведемо стислий конспект лекції на використання комплексних чисел при розв’язуванні задач на розрахунок ланцюгів змінного струму.

Заняття доцільно розпочати із проведення актуалізації, зазначивши, що наприкінці XIX століття для розрахунку кіл постійного струму вже існували зручні і прості способи, які спиралися на закони Ома і Кірхгофа. Це дозволяло розв’язувати різноманітні електротехнічні задачі засобами елементарної алгебри і арифметики.

При розрахунку кіл змінного струму своє застосування знайшли комплексні числа. Особливістю такого струму є те, що миттєві значення сили струму , напруги і електрорушійної сили (ЕРС) у кожній ділянці кола змінюються синусоїдально, тобто описуються для довільного моменту часу формулами: , , , де , , – амплітуда струму, амплітуда напруги та амплітуда ЕРС відповідно, – циклічна частота, – початкова фаза.

У 1893 році американський електротехнік Чарльз Протеус Штейнмец (1865–1923) запропонував спосіб розв’язування задач на розрахунок кіл змінного синусоїдального струму, який ґрунтується на застосуванні комплексних чисел, і називається методом комплексних амплітуд або символічним методом.

Наступний фрагмент заняття необхідно присвятити ознайомленню учнів із поняттями комплексної амплітуди і комплексу струму (ЕРС струму).

Звертаємо увагу учнів на те, що надалі для позначення уявної одиниці символ , оскільки символом в електротехніці позначають миттєве значення сили струму. Тоді кожне комплексне число можна записати у вигляді:

або , де ,

причому , .

Нехай сила струму в колі змінюється за синусоїдальним законом, тобто

, де - амплітуда струму, - циклічна частота, - початкова фаза. Тоді величину можна вважати уявною частиною деякого комплексного числа

EMBED Equation.DSMT4 , де - величина (сила) струму, що набуває комплексні значення.

Отже, .

Величину називають комплексним струмом або комплексом струму.

Розглянемо показникову форму числа . Вираз

називають комплексною амплітудою струму і позначають . Отримуємо формулу .

Аналогічно вводяться формули для ЕРС та напруги змінного струму:

,

- комплекс ЕРС, ,

- комплексна амплітуда ЕРС,

.

,

- комплекс напруги, ,

- комплексна амплітуда напруги,

.

Далі слід розглянути задачі на засвоєння учнями понять комплекс і комплексна амплітуда струму (ЕРС та напруги).

Задача 14. Знайти комплексну амплітуду змінного струму, якщо його амплітуда дорівнює

, а початкова фаза .

Розв’язання. За умовою задачі , . Тому

.

Задача 15. По колу проходить змінний струм, величина якого (в амперах) змінюється за

законом . Знайти комплексну амплітуду і комплекс струму.

Розв’язання. За умовою задачі А, , .

Комплексна амплітуда струму .

Комплекс струму .

Задача 16. Комплексна амплітуда ЕРС джерела змінного струму дорівнює .

Циклічна частота зміни ЕРС . Записати формулу для знаходження ЕРС у довільний момент часу .

Розв’язання. Для запису комплексної амплітуди в показниковій формі знайдемо її модуль і аргумент

, ,

.

Візьмемо в уявну частину, одержимо .

Доцільно також розглянути матеріал, пов’язаний із додаванням синусоїдальних струмів.

Нехай деяке коло змінного струму складається з двох віток, з’єднаних паралельно. Нехай по них проходять струми та однакової частоти . Тоді, як відомо, при об’єднанні цих віток в одне коло по ньому буде проходити струм . У цій ситуації прийнято говорити, що відбувається додавання струмів. З’ясуємо, що відбулося при цьому з комплексними амплітудами.

Нехай струми , та мають комплексні амплітуди відповідно , та . Тоді

.

Очевидно, що – періодична функція часу з частотою і .

Отже, при додаванні синусоїдальних струмів однієї і тієї ж частоти їх амплітуди, взагалі кажучи, не додаються, а їх комплексні амплітуди додаються.

Задача 17. Знайти суму сил струмів однієї і тієї ж циклічної частоти , якщо відомо, що вони мають в амперах такі комплексні амплітуди: ,

.

Розв’язання. Оскільки , то , .

Тому . Звідси знаходимо

, .

Далі можна ознайомити учнів з поняттям **комплексного опору**.

Нехай розглядається деяке коло, яке підключено до генератора з ЕРС, яка змінюється за синусоїдальним законом із частотою . В цьому колі можуть бути активні опори, індуктивності (котушки), ємності (конденсатори). Згідно зі Штейнмецом, кожній індуктивності величиною поставимо у відповідність суто уявне число , яке домовимося називати *комплексним опором котушки*, а кожній ємності величиною - суто уявне число

, яке називатимемо *комплексним опором конденсатора.* Крім того, якщо в колі є активний опір величиною , то поставимо йому у відповідність дійсне число , яке називають *комплексним опором активного опору*.

Якщо коло складається із ***послідовно*** з’єднаних активних або реактивних опорів (резисторів, котушок, конденсаторів), то *комплексним опором цього кола* називається комплексне число , що дорівнює сумі комплексних опорів елементів

складових елементів, тобто . Число , обернене до числа ( ), при цьому називають комплексною провідністю кола, величину - повним опором кола.

Має місце таке співвідношення .

Задача 18. Котушка має активний опір Ом і індуктивність Гн. Визначити повний опір котушки, якщо по ній проходить змінний струм з частотою Гц.

Розв’язання. Комплексний опір Z котушки знайдемо за формулою , де . Маємо

.

Звідси Ом.

Задача 19. Коло, у яке послідовно увімкнено реостат, конденсатор і котушка, підключено до генератора, що дає синусоїдальну ЕРС з частотою Гц. Знайти комплексний і повний опори кола, якщо опір реостата Ом, ємність конденсатора Ф, індуктивність котушки Гн.

Розв’язання. Оскільки

, ,

,

то ,

Ом.

Нехай у коло змінного струму паралельно увімкнено два елементи, які мають комплексні опори та відповідно. Комплексним опором такого кола домовимося називати число , яке

визначається рівністю , звідки .

Через , і позначимо комплексні провідності відповідно всього кола, першого та другого елементів. Тоді .

Задача 20. Коло, яке складається з двох паралельних віток (рис. 2.23), має такі параметри: Ом, Гн, Ом, Ф. Знайти комплексні опори кожної із

Рис. 2.
23

віток і повний опір всього кола, якщо по ньому проходить струм з частотою Гц.

Розв'язання. Нехай , , та – комплексні опори першої і другої віток та всього кола (див. рис. 2.23). За умовою задачі

,

, .

Знайдемо комплексні опори першої і другої віток

, .

Комплексний опір всього кола

.

Звідси знаходимо повний опір кола

(Ом).

Використовуючи метод комплексних амплітуд, можна в символічній формі записати закон Ома для кола синусоїдального струму , де – комплексний опір. Незважаючи на те, що є комплексом, крапку над ним не ставлять, бо крапку прийнято ставити тільки над такими комплексними величинами, що зображають собою синусоїдальні функції часу.

Крім цього, комплексний опір можна подати в алгебраїчній формі, тобто , де – активний опір, а – реактивний опір.

Відмітимо, що в символічній формі можна записати не тільки закон Ома, але і закони Кірхгофа, а також робити розрахунки кіл синусоїдального струму, не пов'язаних між собою магнітно.

Задача 21. Дано комплексний струм і комплексну напругу . Визначити комплексний та повний опори у колі і кут зсуву фаз між струмом і напругою.

Розв'язання. . Тому в даному випадку Ом – повний опір кола, – кут зсуву фаз між струмом і напругою.

Задача 22. Яку загальну напругу дають два джерела, включених послідовно, якщо

, ?

Розв'язання. Відомо, що при послідовному з'єднанні джерел загальна напруга дорівнює сумі напруг джерел. Тому

.

Формування вмінь розв'язувати задачі з електротехніки методом комплексних чисел проводимо за допомогою системи задач.

23. Знайдіть комплексну амплітуду струму .

24. Знайдіть комплексну амплітуду напруги .

25. Запишіть у показниковій і алгебраїчній формах вираз для комплексної амплітуди струму, якщо

А, .

Рис. 2.
24

26.Комплексна амплітуда струму . Запишіть миттєве значення сили цього струму в момент часу , якщо його частота дорівнює .

27.Комплексна амплітуда напруги . Знайдіть миттєве значення напруги в момент часу , якщо циклічна частота дорівнює .

28.Знайдіть величину струму в колі, комплексна напруга якого , а комплексний опір .

29.Дано комплексний струм і комплексна напруга . Визначте комплексний опір і кут зсуву в колі.

30.Яка величина струму, що протікає в одній паралельній вітці , якщо струм, що протікає через іншу вітку і загальний струм у нерозгалуженій частині кола .

31.Яку загальну напругу дають два включені послідовно джерела, якщо , ?

32.Знайдіть загальний спад напруги на трьох послідовно з'єднаних опорах, якщо спад напруги на кожному з них відповідно дорівнює , і ?

33.Знайдіть величину повного опору двох з'єднаних послідовно опорів, якщо , ?

34.Знайдіть величину повного опору в колі, якщо опори і з'єднані паралельно?

35.Дві паралельно з'єднані котушки мають опори і . Визначте загальний струм у колі, якщо відомо, що напруга, прикладена до цього кола, дорівнює .

36.По колу проходить змінний струм з частотою . Напруга, прикладена до кола, дорівнює . Котушка має індуктивність , котушка – індуктивність і обидві вони, з'єднані послідовно, мають активні опори . Визначте величину струму в колі.

37. Нехай котушки і з'єднані паралельно (див. умову задачі 36). Визначте величину струму в колі.

38.Якої величини струм тече в колі, зображеному на рисунку 2.24, якщо напруга, прикладена до кінців цього кола, дорівнює , частота дорівнює . Котушка має індуктивність і активний опір , котушка – індуктивність і опір , а котушка – індуктивність і опір .

Наведемо приклад розв'язування задачі з електротехніки.

Розв'яжемо задачу 38, яка, можна сказати, містить кілька частинних задач.

Дано:

В

Гц

Гн

Ом

Гн

Ом

Гн

Ом

- ?

Знайдемо загальний комплексний опір цього кола

.

Тоді загальний струм у колі

.

В результаті проведеного заняття учні усвідомлюють способи та можливості використання комплексних чисел в механіці та електротехніці, зокрема, їхнє велике значення при розрахунку кіл змінного струму.

При розв'язуванні задач на застосування комплексних чисел слід використовувати групову форму організації навчання та індивідульне дослідження учнями окремих задач. Особливості оцінювання розв'язання прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками наведено у підрозділі 2.4.

2.4. Контроль та корекція результатів навчання

Особистісно орієнтована освіта передбачає передусім облік особистісних характеристик учнів як суб'єктів діяльності і стосунків, побудову партнерських суб'єкт-суб'єктних стосунків між ними. Тому вивчення та облік індивідуальних особливостей під час побудови освітнього процесу, зміна системи перевірки, оцінювання й обліку знань учнів є однією з головних умов підвищення рівня навчальних досягнень учнів, їхньої зацікавленості в самоосвіті, формуванні свідомого ставлення до навчання.

Основна дидактична мета контролю – виявлення ступеня якості знань і вмінь, що характеризують етап засвоєння учнями логічно завершеного блоку навчального матеріалу; корекція набутих знань і вмінь учнів.

Структурні компоненти контролю можуть бути наступними:

1)перевірка здобутого учнями фактичного матеріалу на рівні репродукції;

2)перевірка усвідомленості знань: пояснення сутності понять, тверджень, ілюстрування прикладами, встановлення взаємозв'язків у вивченому;

3)перевірка вмінь застосовувати вивчений матеріал у знайомих і нових ситуаціях;

4)загальна характеристика якості виконання робіт;

5)корекція набутих знань і вмінь на основі аналізу допущених помилок

Після вивчення теми або її частини необхідно визначити рівень навчальних досягнень учнів. У розроблених критеріях оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти визначені такі функції оцінювання:

–контролююча – визначає рівень досягнень кожного учня, готовність до засвоєння нового матеріалу, що дає вчителеві відповідно планувати й викладати навчальний матеріал;

–навчальна – сприяє повторенню, уточненню й поглибленню знань, їхньої систематизації, вдосконаленню умінь та навичок;

–діагностично-корегувальна – з'ясовує причини труднощів, що виникають в учня в процесі навчання; виявляє прогалини у засвоєному; вносить корективи, спрямовані на їхнє усунення;

–стимулювально-мотиваційна – формує позитивні мотиви навчання;

–виховна – сприяє формуванню умінь відповідально й зосереджено працювати, застосовувати прийоми контролю й самоконтролю, рефлексії навчальної діяльності [94, 2].

Особливості процедури оцінювання результатів навчання у випадку курсу за вибором вимагають певного уточнення.

Оцінювання результатів вивчення курсу за вибором повинно ґрунтуватися на позитивному принципі, що насамперед передбачає облік рівня досягнення учня, а не ступінь його невдач. Визначення рівня навчальних досягнень учня є найбільш важливим з позиції того, що навчальна діяльність в остаточному покликана не просто дати дитині суму знань, умінь і навичок, а ще й сформувати вміння самооцінки.

На нашу думку, найбільш доцільною є рейтингова система оцінювання навчальних досягнень учнів. Для оцінювання теоретичних знань та розв'язання стандартних практичних завдань більш придатний жорсткий рейтинговий контроль, тоді як розв'язання нестандартних практичних завдань, зокрема задач на застосування комплексних чисел, можливо оцінити тільки завдяки лояльному рейтинговому контролю. При застосуванні жорсткого рейтингу учень повинен виконувати всі завдання даної роботи, бо максимальну оцінку він одержить лише за повністю виконані завдання. Лояльний рейтинг дає можливість учневі вибирати завдання, які йому най більш імпонують. Кількість пропонованих вчителем завдань у даному випадку повинна значно перевищувати ту кількість, яку учень має виконати. Цей вид рейтингу допомагає кожному учневі реалізувати себе як особистість, максимально показати рівень своїх математичних здібностей, розкрити свої знання найбільш вдало. Застосування лояльного рейтингу дає можливість вчителеві визначити напрямок для своєї подальшої роботи – це ті завдання, які не вибрав жоден учень класу або розв'язувало мало учнів. Лояльний рейтинг допомагає учневі критично оцінити свої навчальні можливості.

За нашими спостереженнями ефективними в умовах курсу за вибором є такі форми оцінювання навчальних досягнень учнів: поточне оцінювання; неповна перевірка досягнень учнів на етапі вивчення теми (короткочасні самостійні роботи, які складає вчитель чи учні один одному); повна перевірка досягнень на рівні теми (рівнева самостійна робота); контрольна робота; домашні довгострокові самостійні роботи (з отриманням індивідуальних консультацій), підсумковий контроль (залік по всьому курсу), можливо, з використанням комп'ютерної програми .

Необхідно зауважити, що крім основних робіт контролюючого спрямування можна використовувати і такі прийоми перевірки: спостереження за поточною роботою учня на уроці; вивчення окремих результатів пізнавальної індивідуальної роботи (домашнє завдання, дослідницькі, творчі завдання); робота за листами взаємоконтролю, використання можливостей комп'ютера.

Система оцінювання має бути досить гнучкою, не копіювати практики оцінювання результатів вивчення обов'язкового курсу. Потрібно заохочуючи учнів, які вибрали додатковий курс, в жодному разі не можна ставити негативну оцінку за невиконання завдання творчого характеру і відштовхувати від роботи, яку вони вибрали за власним бажанням. Частково контролюючі функції вчителя доцільно перекласти на учнівський колектив, використовуючи такі форми контролю: взаємоконтроль (основні теоретичні положення, формули), математичний диктант, експертна оцінка самостійно розв'язаних нестандартних задач, рефератів.

З метою урізноманітнення прийомів контролю і корекції знань учнів на заняттях курсу за вибором нами було розроблено дидактичні матеріали у посібнику "Комплексні числа та їх застосування" [325]. Даний посібник призначений для організації рівневого навчання у старших класах при вивченні відповідного курсу за вибором. Сформовані на кожному етапі вміння використовувати знання розглядаються як послідовні ієрархічні рівні навчальних досягнень учнів, тобто вони названі початковим, середнім, достатнім і високим рівнями. Таким чином, у посібнику: рівень А (початковий) – первинне розуміння базового теоретичного матеріалу; рівень Б (середній) – стандартне застосування базового теоретичного матеріалу за алгоритмами і зразками; рівень В (достатній) – аналітико-конструктивне, логічно обґрунтоване застосування теоретичного матеріалу в стандартних, але змінених і ускладнених ситуаціях; рівень Г (високий) – ускладнене аналітико-конструктивне і евристичне застосування теоретичного матеріалу – означень, теорем і опорних задач посібника – в різних ситуаціях. Розділи підручника, що стосуються застосувань комплексних чисел, також укомплектовані наборами вправ, але без виділення рівнів. Зазначено лише задачі підвищеної складності. Це пояснюється тим, що кожне завдання цікаве і не повторює попереднє; хоча можна прослідкувати послідовне ускладнення вправ. Однотипні вправи в даному випадку шкідливі, оскільки потрібно навчити старшокласника не тільки користуватися постійним алгоритмом, а, що важливіше, навчити застосовувати знання з різних галузей науки до розв'язування задачі, бачити простіше розв'язання. Виконання таких вправ повинно розвіяти невпевненість учня у випадку нестандартних розв'язань.

Для контролю знань старшокласників нами складено наступний дидактичний матеріал.

Перший, основний, блок навчального матеріалу пропонуємо оцінювати із застосуванням жорсткого рейтингу, що включає короткочасні і рівневі самостійні роботи, контрольну роботу. Для оцінювання частини вивченого матеріалу про застосування комплексних чисел пропонуємо використати лояльний рейтинг, оскільки завдання на застосування є нестандартні, творчого чи ускладненого характеру. Наприкінці курсу проводимо залікову роботу, яка може бути оформлена у вигляді комп'ютерної навчально-корекційної програми. Розглянемо ці види контролю зокрема.

Для перевірки виконання домашнього завдання з теми "Алгебраїчна форма комплексного числа" і готовності до наступного заняття пропонуємо провести математичний диктант (Загальна кількість балів – 12).

1.Закінчіть речення: "Комплексні числа – це …". ["Спряженим до комплексного числа називається …"]. *(1 бал)*

*2.*Запишіть критерій суто уявного [дійсного] числа, використовуючи поняття спряженості. *(1 бал)*

3.Розв'яжіть рівняння [ ].*(1 бал)*

4.Які властивості операції додавання [множення] виконуються у множині ? (1 б.)

5.Запишіть спряжені [протилежні] до чисел: ; ; ; .*(1 бал)*

6.Запишіть властивості суми та добутку взаємно спряжених комплексних чисел. [Сформулюйте умову рівності двох комплексних чисел.] *(1 бал)*

7.Розкладіть на множники в множині комплексних чисел . *(1 бал.)*

8.Подайте в алгебраїчній формі: . *(1 бал)*

9.До[redacted], де , є дійсним числом [дійсним числом]. (2 б.)

10. Зна[redacted]ння: . *(2 бали)*

Після в[redacted]ометричної інтерпретації комплексних чисел та дій над ними пропонуємо провести **короткочасну самостійну роботу** навчального чи перевірочного характеру (із самоперевіркою за допомогою комп'ютера, використавши ППЗ GRAN1, або взаємоперевіркою в парах), яку складають учні один для одного, або яку складає вчитель. Правильні результати можна подати за допомогою кодопроектора чи комп'ютера. Вона може бути такого вигляду:

Варіант 1 *Варіант 2*

1. Обчисліть модуль і головне значення аргументу комплексного числа:

; . (1 бал)

2. Виконайте дії:

; . (1 бал)

3. Зобразіть множину точок площини, що задовольняють умову:

; . (1 бал)

4. Домалюйте частину площини, точки якої задовольняють умову:

(2 бали)

5. Додаткове завдання. Доведіть, що задане число є дійсним:

.

Індивідуальний підхід до учнів реалізуємо, використовуючи картки-підказки та картки-інструкції.

Картка-підказка до завдання 3 (I варіант) Геометрично знаходження змінної у знаменнику дробу означає, що її нульове значення потрібно вилучити із області визначення.

Картка-інструкція до завдання 4 (II варіант) Замалюйте внутрішню частину першого круга і частину площини, зовні другого кола.

Після ознайомлення з тригонометричною формою комплексного числа доцільно провести рівневу самостійну роботу з метою виявлення рівня засвоєння знань учнями.

Початковий рівень навчальних досягнень учнів

1. Подайте в тригонометричній формі комплексні числа:

а) ; б) . (1 бал)

2. Подайте в алгебраїчній формі комплексні числа:

а) ; б) . (1 бал)

3. Виконайте дії: (1 бал)

а) ; б) .

Середній рівень навчальних досягнень учнів

4. Виконайте дії:

а) ; б). . (1,5 бала)

5. Знайдіть множину точок комплексної площини, для яких виконується умова

. (1,5 бала)

Достатній рівень навчальних досягнень учнів

6. Подайте в тригонометричній формі комплексні числа:

, . (1,5 бала)

7. Розв'яжіть рівняння: . (3 бали). (1,5 бала)

Високий рівень навчальних досягнень учнів

8. Обчисліть: , якщо , ; (3 бали)

Самостійна робота розрахована на урок або його частину. Не обов'язково учням пропонувати всю роботу повністю, можна дати частину завдань. Завдання вибираються на розсуд учителя, залежно від складу класу та його підготовки. Завдання підвищеної складності позначені значком *. Їх можна оцінювати окремо.

Згідно програми для класів фізико-математичного профілю потрібно провести контрольну роботу, метою якої є контроль рівня досягнень учнів з тем: "Алгебраїчна форма комплексного числа", "Геометрична інтерпретація комплексного числа", "Тригонометрична форма комплексного числа". Пропонована робота визначить стан вивчення основного блоку матеріалу про комплексні числа і в учнів курсу за вибором. (Див. додаток Е.)

Профільна освіта покликана сприяти більш повному розкриттю здібностей старшокласників, допомогти встановити гармонійні взаємовідносини з навколишнім середовищем, суспільством і природою. Це можливо лише тоді, коли людина може реально проконтролювати та оцінити себе і оточуючих. При цьому великого значення набуває взаємоконтроль та самоконтроль учнів.

Самоперевірку засвоєння знань та вмінь учнів з теми комплексні корені многочлена здійснюємо за допомогою самостійної роботи з використанням комп'ютера.

Варіант 1 Варіант 2

1. Розв'яжіть рівняння, розклавши многочлен на множники:

; . (1 бал)

2. Розкладіть на лінійні множники многочлени:

а) ; ; *(1 бал)*

б) ; . *(1 бал)*

3. Запишіть многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами, коренями якого є числа:

; ; ; ; ; . (2 бали)

Учні виконують завдання під копірку; один екземпляр роботи здають учителеві, за допомогою другого екземпляра здійснюють самоперевірку правильності виконання завдань самостійної роботи, скориставшись комп'ютером та використавши програмний засіб DERIVE.

Засвоєння теми "Застосування комплексних чисел у геометрії" та готовність учнів до наступного заняття перевіряємо за допомогою математичного диктанту. Пропонуємо такі завдання .

1. Які два вектори називаються колінеарними [ортогональними]? (1 бал).
2. Як перевірити, чи будуть вектори, задані комплексними координатами, колінеарні та однаково напрямлені? [протилежно напрямлені?] (1 бал).
3. Закінчіть речення: "Два вектори є ортогональними тоді і тільки тоді, коли…". ["Критерій належності трьох точок одній прямій: …"]. (1 бал).
4. Яку фігуру називають одиничним колом? [Запишіть рівняння одиничного кола.] (1 бал).
5. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку) [ ] (1 бал).
6. Запишіть критерій перпендикулярності [паралельності] двох хорд одиничного кола (1 бал).
7. Чи будуть вектори з комплексними координатами та колінеарними [ортогональними]? (1 бал).
8. Як зміниться напрям вектора при множенні його двічі на число ? [Яка геометрична інтерпретація операції множення на число ?](1 бал).
9. Перевірте, чи лежать точки , , з комплексними координатами , , [, ,] на одній прямій? (2 бали).
10. Задача. OABC – квадрат. Вектор [ ] має комплексну координату [ ]. Обчисліть комплексну координату вектора [ ]. Зробіть рисунок. (2 бали).

Відповіді демонструються за допомогою кодопроектора. Учні самі оцінюють свої роботи.

З метою самоконтролю учнів та підготовки до заліку по матеріалу із застосувань комплексних чисел даємо учням довгострокову домашню самостійну роботу. Завдання довгострокової домашньої роботи учні отримують за 10-14 днів до залікового уроку. Вибравши із 15 завдань, запропонованих вчителем, 10 завдань на свій розсуд, учні можуть виконувати їх у зручний для себе час. З окремих завдань вчитель може надавати індивідуальні консультації (див. додаток Ж).

Як показала практика, цікаво проходить підсумкова дидактична гра "Перший мільйон", під час якої у ненав'язливій, ігровій обстановці з'ясовується рівень засвоєння старшокласниками теми "Комплексні числа". (Завдання для гри див. у додатку З.)

Для визначення рівня засвоєння знань учасниками курсу за вибором наприкінці проводимо залікову роботу. Правильне розв'язання завдань чотирьох рівнів дає змогу одержати максимальну оцінку – 12 балів. На виконання контрольної роботи відводиться один урок (див. додаток И). Наступний – урок систематизації знань та корекції помилок, допущених учнями у роботі.

Всі форми перевірки засвоєння навчального матеріалу повинні обов’язково супроводжуватися поясненням, коментарями, аналізом отриманих результатів учителем. Корекція знань учнів є дуже важливим етапом в глибокому усвідомленні та систематизації їхніх знань.

Велику допомогу у проведенні цієї роботи надають комп’ютерні засоби навчального призначення, наприклад, з метою встановлення самоконтролю учнів та наступної за ним корекції знань та вмінь доцільно використати програмну систему комп’ютерної алгебри DERIVE та педагогічний програмний засіб GRAN1 (докладніше про це - у підрозділі 2.5). Після проведення залікової роботи (чи замість неї) можна скористатися складеною нами навчально-корекційною програмою по даному курсу. Програма має, крім контролюючої функції, ще й навчальну, а також передбачено два рівні допомоги учневі: підказка до кожного завдання та відповідний теоретичний матеріал (див. підрозділ 2.5).

Отримані бали з різних форм контролю учні самостійно заносять у таблицю і слідкують за своїм рейтингом, який наприкінці року стане оцінкою з вивченого курсу за вибором (див. таблицю К.1 додатку К).

2.5. Комп’ютерна підтримка курсу за вибором

Комп’ютерна підтримка процесу розв’язування задач, побудови й аналізу математичних моделей найрізноманітніших процесів і явищ дає значний педагогічний ефект, полегшуючи, розширюючи і поглиблюючи вивчення та розуміння понять та методів математики. На сучасному етапі організації профільного навчання виникає потреба спрямувати зусилля на з’ясування дидактичних можливостей використання комп’ютерних засобів навчання на різних етапах засвоєння змісту освіти, виявлення ефективності різних моделей навчання з використанням інформаційних технологій, проектування цілісних комп’ютерних систем навчання та їх психолого-педагогічне обґрунтування, розробку педагогічних програмних засобів навчання [163, 6].

Широке впровадження в навчальний процес педагогічних програмних засобів відкриває широкі перспективи щодо гуманітаризації і гуманізації навчального процесу, поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичної значущості, активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, створення умов для повного розкриття їхнього творчого потенціалу з урахуванням вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів, запитів і здібностей [89, 3].

На наш погляд, доступною для супроводу вивчення алгебри в профільних класах, і зокрема, під час вивчення курсу за вибором, є система комп’ютерної алгебри DERIVE. Вона компактна, невибаглива до техніки, досить проста у використанні і дає змогу виконувати найрізноманітніші математичні операції. Поступово система DERIVE знаходить все більше прихильників і серед шкільних вчителів, про що свідчать публікації у науково-методичних журналах [11; 247]. Цікаво, що тих, хто використовує DERIVE у навчальному процесі, цей пакет приваблює насамперед своїми аналітичними можливостями.

Не менш привабливим комп’ютерним засобом навчання, особливо для ілюстрації матеріалу, пов’язаного з геометричними побудовами, є педагогічний програмний засіб GRAN1. Використання даного ППЗ на заняттях курсу за вибором “Комплексні числа” дозволяє швидко встановити правильність виконаних завдань на дослідження геометричних місць точок комплексної площини.

Однак до використання аналітичних математичних пакетів у шкільному навчанні слід ставитися дуже виважено. Запровадження інформаційних технологій навчання не повинно бути самоціллю. Воно має бути педагогічно виправданим, розглядатися передусім з позицій педагогічних переваг, які воно може забезпечити порівняно з традиційною методикою навчання [273, 99]. Адже метою курсу математики, у тому числі і курсу за вибором, є не отримання розв’язків задач, а формування певних знань та навичок, розвиток абстрактного мислення, розвиток культури мислення тощо. Тому не можна використовувати комп’ютерні програми без огляду на мету вивчення тієї чи іншої теми. Але є випадки, коли громіздкі перетворення, складні обчислення відвертають увагу учнів від основного змісту поняття, що вивчається, приховують його сутність. Тоді у пригоді стане прикладний математичний пакет.

Виходячи з того, що контроль навчальних досягнень учнів на курсі за вибором є нежорстким , програму DERIVE можна використати для самоконтролю учнів та наступної за ним корекції знань та вмінь. З цією метою згаданий прикладний математичний пакет можна використати після вивчення дій над комплексними числами в алгебраїчній формі. Після розв’язування вправ самостійної роботи учні мають змогу проконтролювати правильність виконання завдань, ввівши умови у персональний комп’ютер. При цьому одержують на дисплеї монітора готові розв’язки вправ. Звіривши свої розв’язки з правильними, учень може реально оцінити свої знання, а також провести корекцію неправильно виконаних завдань, можливо, включаючи допомогу вчителя. З рис. 2.25 видно зліва пропоновані завдання, а справа правильний результат, який повинен отримати учень. Таким чином відбувається краще усвідомлення матеріалу, оскільки зростає впевненість учня у правильності власних дій (виконання завдань), і як наслідок – розвиток особистості старшокласника.

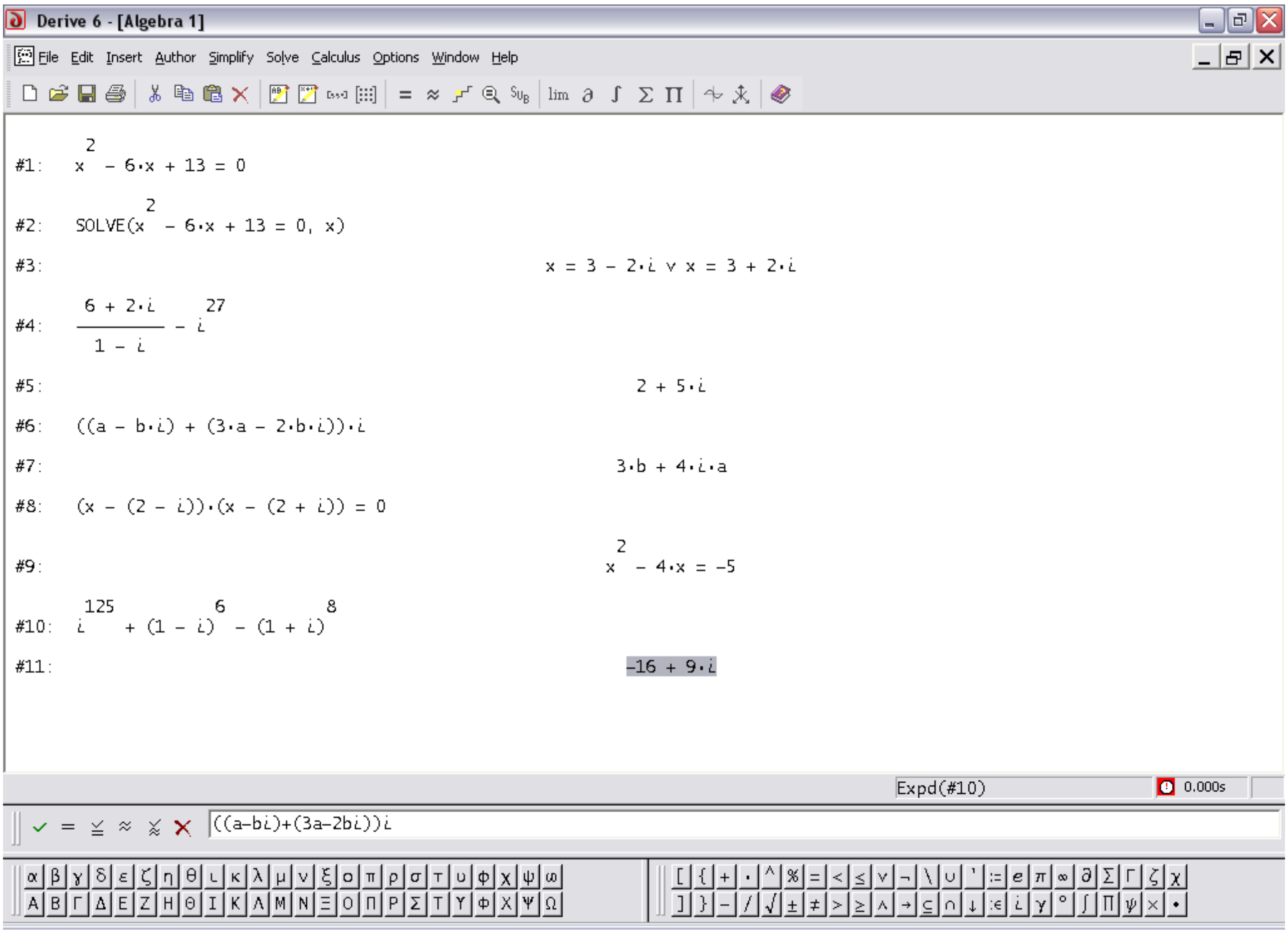


Рис. 2.25

Під час вивчення курсу “Комплексні числа та їх застосування” значна увага приділяється задачам, що привели до виникнення комплексних чисел, та різним видам їх представлення. Останній аспект є дуже важливим для формування абстрактних понять взагалі. Адже перехід від однієї форми подання комплексного числа до іншої (від вербальної до графічної, від графічної до символічної і навпаки) сприяє свідомому засвоєнню матеріалу, застосуванню його у нетривіальних ситуаціях, і як наслідок – розвиткові математичних здібностей учня.

Але на перешкоді стають обчислення, виконання алгебраїчних перетворень тощо. При використанні програмного засобу DERIVE ці перешкоди легко долаються. Засоби DERIVE значно спрощують перехід від алгебраїчної форми комплексного числа до тригонометричної і навпаки (рис. 2.26).

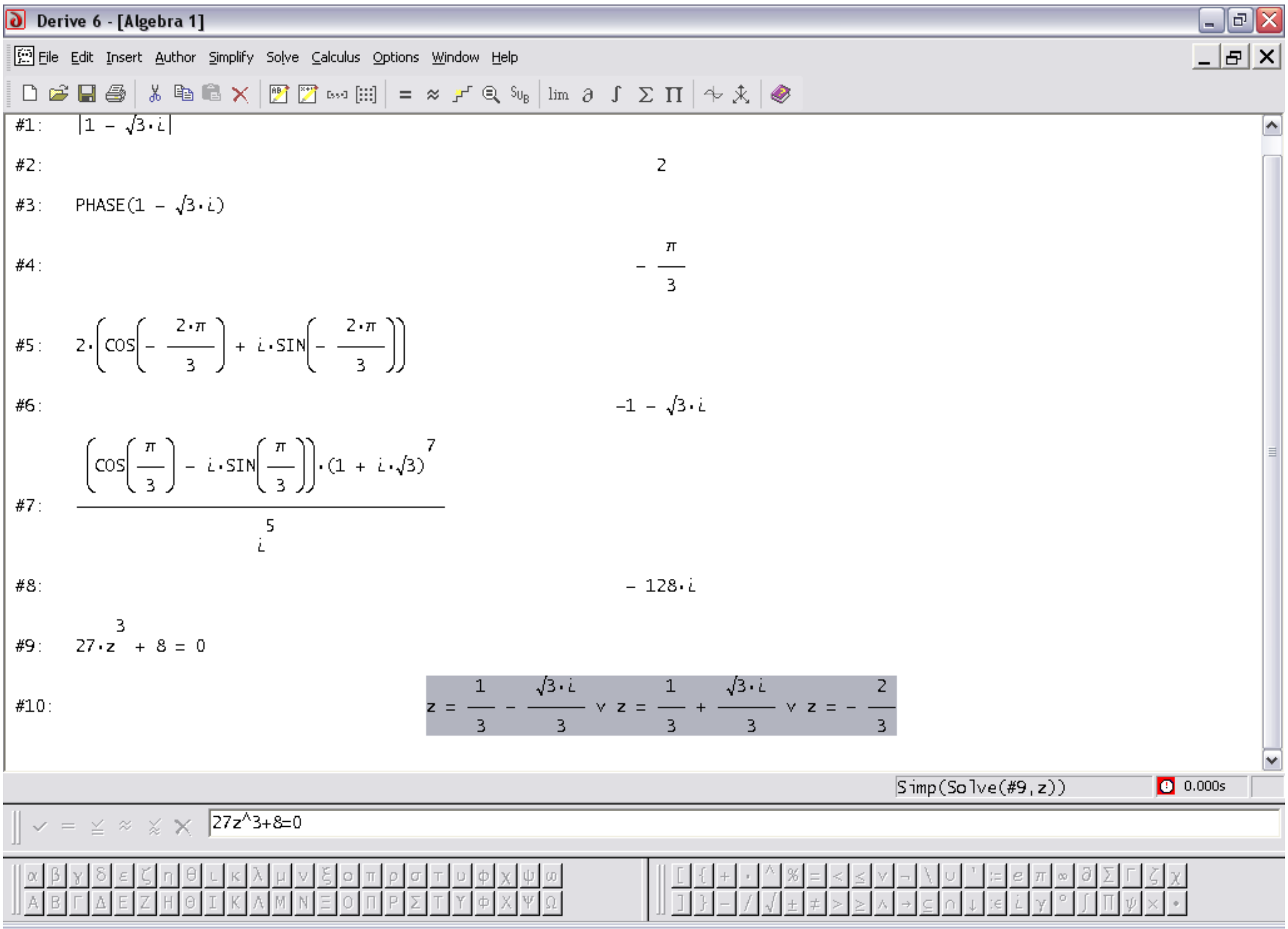


Рис. 2.26

Зручність використання програмного продукту DERIVE полягає ще і в тому, що при переході до тригонометричної форми комплексного числа головне значення аргументу змінюється

в межах , як і в пропонованому курсі за вибором.

Програма DERIVE дає змогу отримати розв’язки рівнянь не лише другого, а й третього, четвертого і вищих порядків і сформувати в учнів правильне уявлення про те, що не лише при розв’язуванні квадратних рівнянь корені можуть бути комплексними. Додатково з’ясовується, що кількість коренів співідноситься зі степенем старшого члена многочлена, тобто накопичується “експериментальний” матеріал для розв’язування рівнянь -го степеня.

За допомогою DERIVE є можливість розв’язувати обернену задачу: сконструювати рівняння із заданими комплексними коренями. Для цього потрібно подати рівняння у вигляді добутку множників. Можна скористатися можливістю цієї програми розкладати вирази на лінійні множники (рис. 2.27).

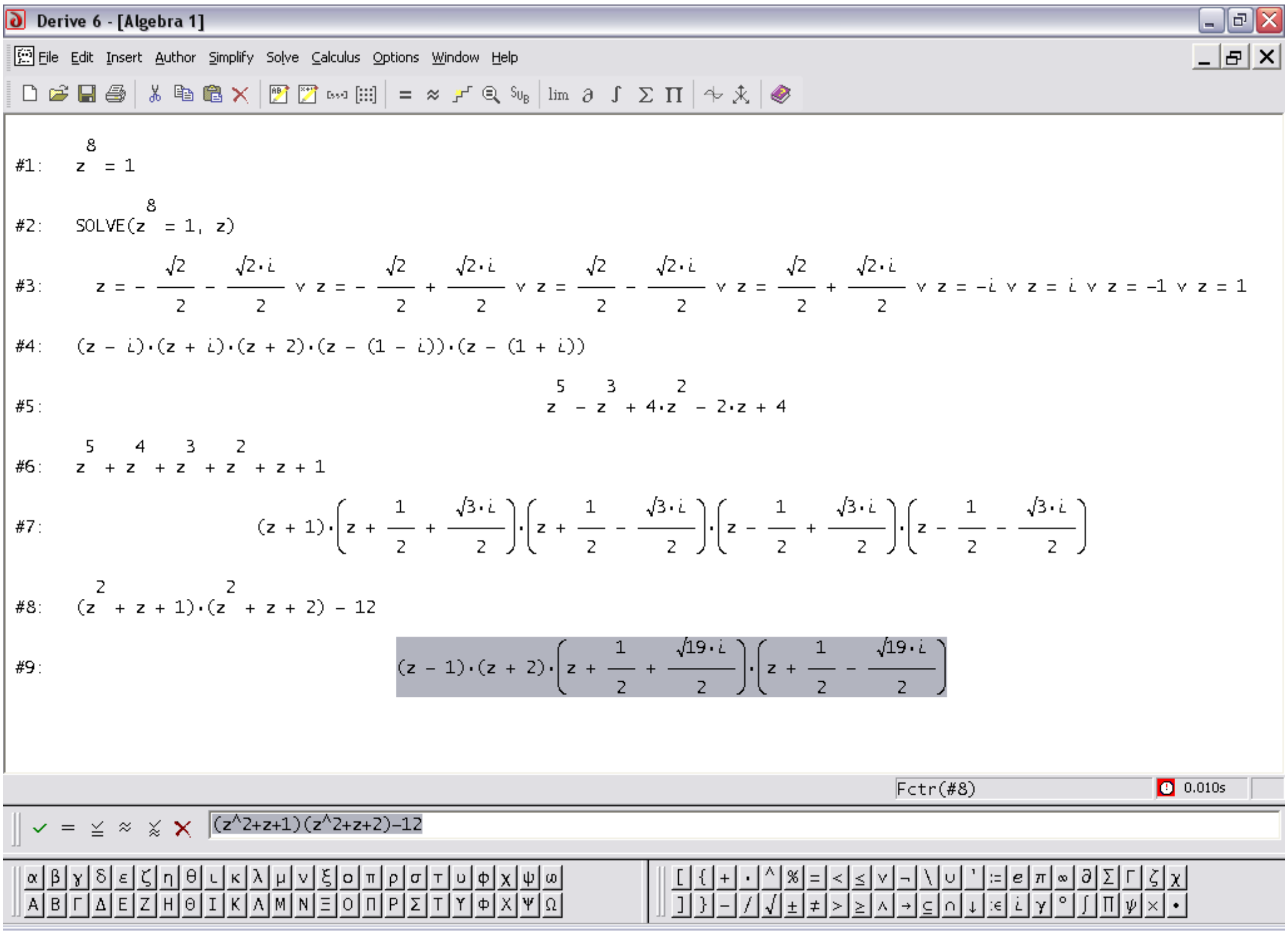


Рис. 2.27

Використання комп'ютера на заняттях курсу за вибором допомагає учням посилити розумові здібності, покращити свою пам'ять та здатність розв'язувати проблеми. Використання внутріпредметних зв'язків курсу алгебри дозволяє застосувати педагогічний програмний засіб GRAN1 для зображення різноманітних геометричних місць точок комплексної площини. При цьому учні систематизують свої знання про декартову систему координат та комплексну площину. Наприклад, щоб перевірити правильність геометричного зображення кола, заданого рівнянням

, учні переходять до відповідного йому запису мовою координат

. Внісши його у комп'ютер, учні перевіряють правильність власних побудов у зошитах (рис. 2.28).

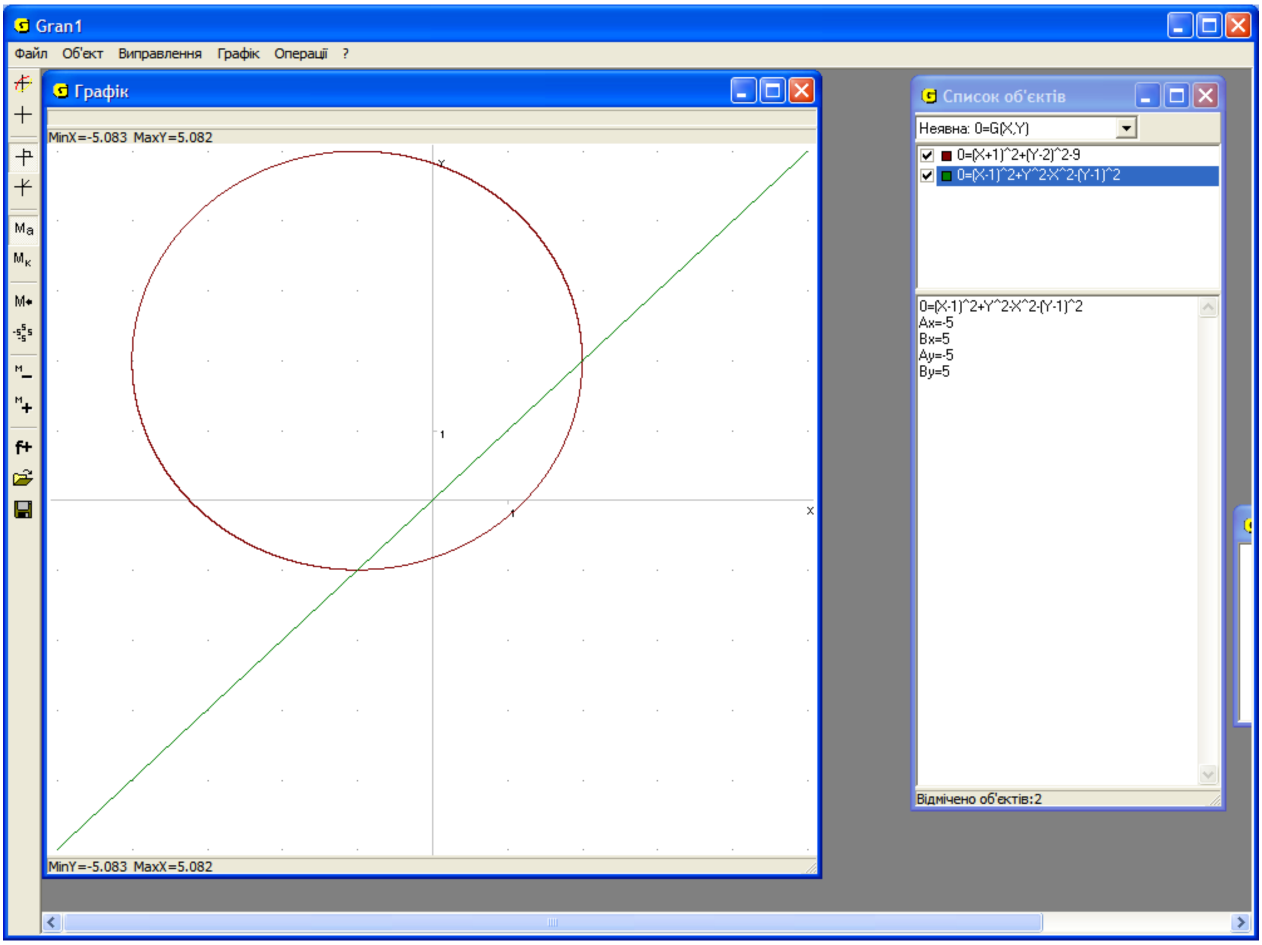


Рис. 2.28

За допомогою комп’ютера учні переконуються, що вираз задає на комплексній площині пряму, що є бісектрисою I і III координатних кутів (рис. 2.28).

Особливо важлива роль ППЗ GRAN1 відіграє при перевірці правильності графічного розв’язання нерівностей і систем нерівностей. Наприклад, після розв’язування системи

нерівностей використавши дану комп’ютерну програму, учні отримують такий результат (рис. 2.29).

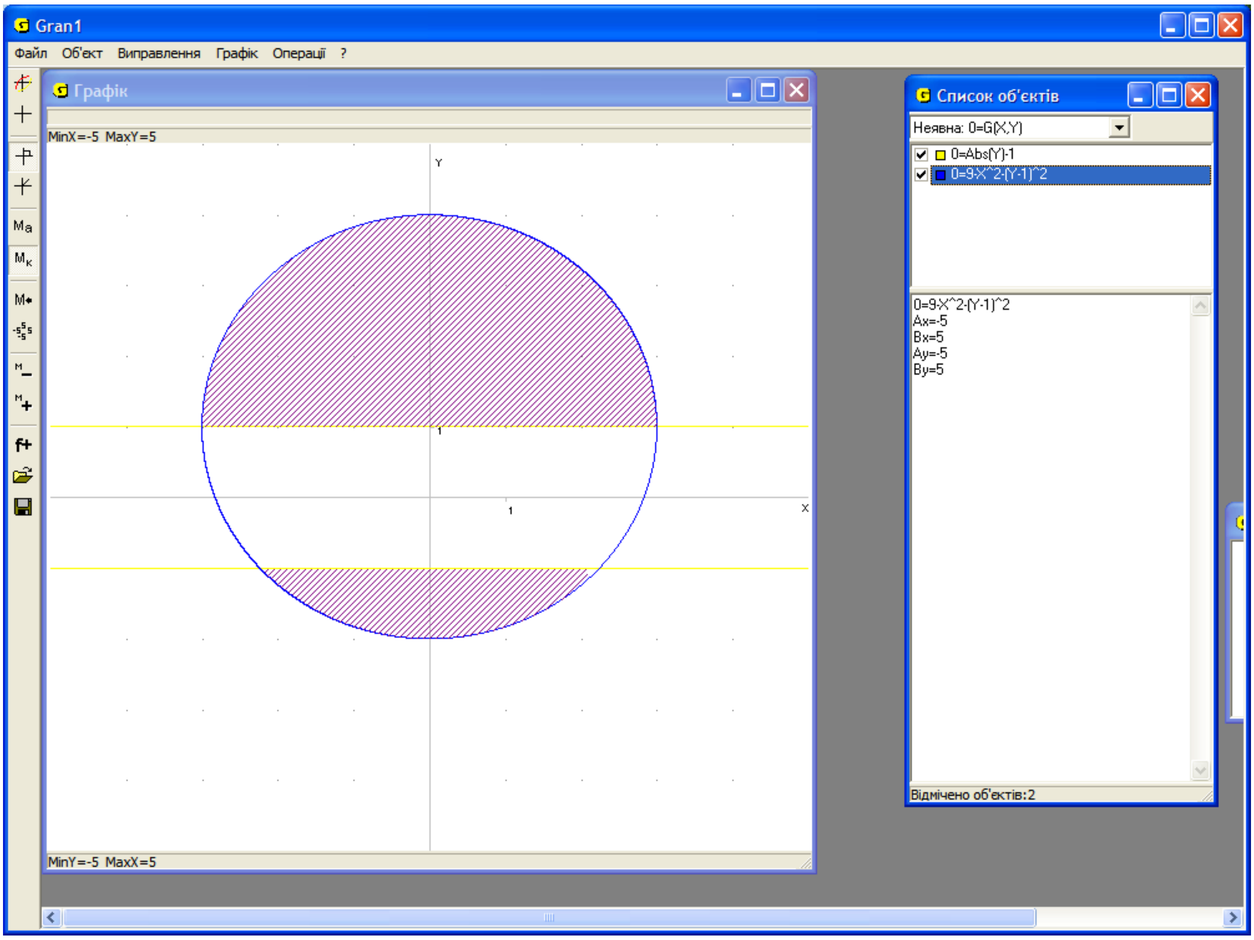


Рис. 2.29

До функцій учителя на різних етапах навчального процесу входить забезпечення контролю та, що дуже важливо, корекції знань та вмінь учнів.

Організовувати й управляти самостійною діяльністю учнів, з'ясувати питання про сформованість уявлень про комплексне число і прийомів виконання дій над такими числами в різних формах запису та вміння застосовувати ці знання при розв'язуванні прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками, здійснювати корекцію роботи учня на основі індивідуальних завдань, скоротити час на аналіз помилок учня може допомогти розроблена нами комп'ютерна програма з теми "Комплексні числа", написана мовою Object Pascal. На початку роботи за даною програмою учень має змогу вибрати певний підрозділ теми, який його цікавить, та рівень складності завдань, що відповідає його можливостям. При цьому можливі такі варіанти: А – початковий, Б – середній, В – достатній і Г – високий рівень. Після появи на екрані набору завдань відповідного рівня учень повинен послідовно їх розв'язати і вибрати на дисплеї правильну, на його думку, відповідь до кожного завдання. З навчальною метою в програму введена підказка до кожного завдання, якою, в разі потреби, може скористатися учень. В результаті опрацювання введеної інформації програма видає кількість правильно виконаних завдань та суму отриманих балів (оцінка). Учень має можливість також повторити теоретичний матеріал теми, вивівши його на екран. Після опрацювання завдань всіх підрозділів в режимі контролю учень може виконати залікову роботу по всій темі "Комплекні числа". Отримані бали при виконанні залікової роботи свідчать про рівень володіння основними поняттями теми. Приклад роботи учня 10 класу за даною навчально-корегуючою програмою наведено у додатку Л.

Таким чином, програми корегування допомагають вчителеві організувати й керувати самостійною діяльністю учнів, вони забезпечують індивідуалізацію навчального процесу, при цьому "слабші" учні мають можливість усунути прогалини у знаннях, поліпшити знання, а "сильніші" – розширити свій кругозір, задовольнити свої інтереси та схильність до математичних знань. Крім цього, програми корекції вчать виділяти головне в матеріалі підручника, зіставляти факти, явища, узагальнювати, тобто усвідомлено підходити до вивчення матеріалу, сприяють розвитку пам'яті, умінню користуватися літературою, виявляти свої помилки та виправляти їх.

Отже, використання аналітичних та графічних можливостей відповідно прикладного математичного пакету DERIVE та педагогічного програмного засобу GRAN1 дозволяє індивідуалізувати вивчення курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування", здійснювати контроль та самоконтроль засвоєння навчального матеріалу та отримувати учнем своєчасну корекцію знань та вмінь.

2.6. Організація та результати експериментальної перевірки ефективності запропонованої методики

Створення, дослідження, уточнення, корекція та перевірка ефективності запропонованої методичної системи вивчення комплексних чисел у профільних класах з метою підвищення математичної культури учнів, формування їхніх стійких пізнавальних інтересів до математики, формування природничо-наукового світогляду на основі міжпредметних зв'язків здійснювалися нами в процесі проведення педагогічного експерименту.

Експеримент проводився у старших класах Дрогобицького педагогічного ліцею, Дрогобицької ЗОШ №1 імені І. Франка; гімназії ім. Осипа Маковея м. Яворова; Славутицького ліцею; Технічного ліцею НТУУ "КПІ" міста Вишгорода; Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка.

Педагогічний експеримент проходив у три етапи:

1) констатувальний етап експерименту (2001-2003 рр.);
2) пошуковий етап експерименту (2003-2004 рр.);
3) формувальний етап експерименту (2005-2007 рр.).

На першому етапі аналізувалася психолого-педагогічна та методична література з проблеми дослідження та стан сучасної математичної освіти в школі, виявлявся рівень володіння учнями основами теорії комплексних чисел, розроблялася пробна система вправ навчання учнів з метою використання методу комплексних чисел при розв'язуванні прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками. У ході констатувального етапу експерименту використовувалися обсерваційні методи педагогічних досліджень (спостереження за діяльністю учнів і вчителів на уроках) та діагностичні методи (анкетування вчителів та студентів, тестування учнів – див. додатки М, Н, П). У ході констатувального експерименту проводилися бесіди з учнями, вчителями, вивчався педагогічний досвід, неодноразово відвідувалися уроки, які проводили вчителі різних категорій, починаючи з учителів-спеціалістів і закінчуючи вчителями-методистами. Отримані дані лягли в основу розробки гіпотези та матеріалів для пошукового експерименту.

Для з'ясування стану досліджуваної проблеми в шкільній практиці було проанкетовано близько 50 вчителів математики старших класів, з них 32 % - вчителі математики класів математичного та фізико-математичного профілів, 68 % - учителі математики профільних класів інших профілів. Результати анкетування свідчать про те, що переважна більшість учителів позитивно ставиться до розширеного вивчення теми "Комплексні числа" за рахунок включення прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками, оскільки комплексні числа є математичними об'єктами вищого роду абстракцій, ніж інші. Разом з тим вчителями висловлено побажання щодо забезпечення методичними матеріалами даного розділу ма тематики в частині застосувань комплексних чисел. Усі вчителі висловилися за те, щоб у випадку вивчення курсу за вибором учнем класу універсального профілю чи іншого нематематичного цей факт фіксувався в атестаті учня про середню освіту, що свідчитиме про вивчення ним поглибленого курсу алгебри.

Результати анкетування студентів першого курсу фізико-математичного факультету педагогічного університету свідчать про те, що майже всі студенти висловились за розширене вивчення комплексних чисел у середній школі з метою полегшення сприймання даної теми у вищому навчальному закладі, а вивчення практичних застосувань комплексних чисел – для кращого їх розуміння. Дослідження показали, що засвоєння теми "Комплексні числа" в курсі алгебри студентами фізико-математичного факультету, які навчалися за поглибленою програмою в школі, проходить без істотних труднощів. В той же час студенти, які навчалися за програмою масової школи, мають значні труднощі при засвоєнні цього розділу.

Як зазначається у програмі з математики для 12-річної школи [237], “формування навичок застосування математики є однією з головних цілей викладання математики”. При цьому забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі й до навчання математики зокрема. Прикладна спрямованість при вивченні тем є провідною у всіх закордонних підручниках та збірниках завдань, наприклад TIMSS та інших. Тому для визначення рівня засвоєння теми “Комплексні числа” у профільних класах було обрано прикладні задачі та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками, розв’язати які можна як методом комплексних чисел, так і іншими відомими старшокласникам методами.

Така перевірка проводилась з учнями 10-х класів фізико-математичного профілю, у ній брали участь 224 старшокласники. Її метою було виявити вміння учнів використовувати здобуті знання з теми “Комплексні числа” до розв’язування прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками. Учням було запропоновано розв’язати наступні задачі, використовуючи, по можливості, комплексні числа.

1. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін .

2. Знайдіть довжину сторони правильного -кутника, вписаного у коло одиничного радіуса.

3. Доведіть, що ; .

4. Ящик ковзає по похилій площині, розміщеній під кутом до горизонту, з постійною швидкістю . Знайти вертикальну і горизонтальну складові швидкості.

Таблиця 2.4

Результати перевірки вмінь учнів 10-х класів використовувати комплексні числа при розв’язуванні задач

		Номери завдань				К-сть дітей	%		
		1	2	3	4				
Використано метод комплексних чисел	у 4 завданнях	х	х	х	х	12	5,36	5,36	47,32
	у 3 завданнях	х	х		х	7	3,13	7,59	
			х	х	х	5	2,23		
		х		х	х	3	1,34		
		х	х	х		2	0,89		
	у 2 завданнях		х		х	6	2,68	10,27	
		х			х	5	2,23		
		х	х			4	1,79		
				х	х	4	1,79		
			х	х		3	1,34		
		х		х		1	0,45		
	в 1 завданні				х	17	7,59	24,11	
			х			14	6,25		
		х				13	5,80		
				х		10	4,46		
Не використано метод комплексних чисел у жодному завданні						118			52,68

Як видно з таблиці 2.4, 52,68 % учнів, що виконали роботу, не використали при розв'язуванні комплексні числа у жодному завданні та всього 24,11 % учнів використали комплексні числа при розв'язуванні лише однієї задачі.

Використовуючи вибірковий метод, можна розповсюдити отриманий результат на всю сукупність учнів, що навчаються у 10-х профільних класах. Оцінимо ймовірність появи робіт, у яких у жодному завданні не використано метод комплексних чисел. Замінимо відсоткове відношення (52,68 %) простим відношенням (0,5268). Це відношення є частотою . Для оцінки ймовірності знайдемо абсолютну похибку для 95 % рівня вірогідності за формулою

, де - частота дії, - обсяг вибірки.

.

Звідси отримуємо вірогідні межі для ймовірності: .DSMT4 та .DSMT4 . Таким чином, ймовірність буде знаходитися приблизно в інтервалі [258, 230].

Отже, у 95 % випадків ймовірність виникнення робіт, у яких у жодному завданні не використано метод комплексних чисел, міститься в інтервалі . Тобто від 46 до 59 робіт з кожних 100 не будуть містити розв'язання завдань за допомогою комплексних чисел. При цьому, якщо з сукупності всіх робіт учнів 10-х класів скласти послідовність вибірок з 100 робіт, то даний висновок буде справедливий скоріше за все для 95 % цих вибірок.

Таким чином, отримані дані свідчать про те, що набуті при вивченні теми "Комплексні числа" знання учні 10-х класів не вміють використовувати при розв'язуванні прикладних задач, задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками. Тобто значна частина учнів вважає комплексні числа формальними математичними об'єктами, які не застосовуються в інших розділах математики. Тому не можна стверджувати, що при вивченні теми проблема прикладної спрямованості розв'язується успішно.

Таким чином, констатувальний етап експерименту показав, що учні 10-х класів хоч не володіють умінням застосовувати комплексні числа до розв'язування прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками, проте охоче їх розв'язують іншими відомими їм методами: векторним, методом математичної індукції, метод геометричних місць та ін. Також було встановлено факт зацікавленості учнями-учасниками МАН даною темою, про що свідчить вибір ними відповідної теми дослідження. Отже, аналіз результатів проведення констатувального етапу експерименту дозволив зробити висновок про невисокий рівень сформованості в учнів вмінь застосовувати комплексні числа в інших розділах науки та зацікавленість ними цим розділом математики.

На другому етапі педагогічного експерименту відбувався пошук методів і форм, традиційних і сучасних засобів навчання, що сприяють формуванню вмінь учнів розв'язувати прикладні задачі, задачі із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками методом комплексних чисел. У результаті пошукового етапу експерименту були розроблені, дібрані й систематизовані експериментальні матеріали. Водночас проводилося уточнення гіпотези дослідження і моделі навчального процесу з урахуванням спрямування профільних класів і специфіки навчального матеріалу та психологічних особливостей учнів старшої школи. Неодноразово уточнювалися методичні рекомендації щодо впровадження системи прикладних задач, задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками, які можна розв'язати методом комплексних чисел, в практичну діяльність.

Спочатку слухачам курсу за вибором пропонувалися для вивчення всі розділи, які включають: застосування комплексних чисел до теорії многочленів, застосування у тригонометрії, використання комплексних чисел у геометрії, фізиці та техніці. Проте в процесі проведення експерименту було встановлено, що кожна група учнів виявляє зацікавлення до певного виду застосувань. Тому у зв'язку з незалежністю даних розділів та з метою задоволення пізнавальних інтересів більшості учнів було запропоновано вибіркове вивчення цих розділів. Для задоволення індивідуальних пізнавальних потреб пропонувалося самостійне вивчення певного розділу застосувань. При цьому учні класів з поглибленим вивченням математики обирали для вивчення застосування комплексних чисел до теорії многочленів, застосування до тригонометрії та геометрії; учням класів фізико-математичного профілю цікаві застосування комплексних чисел до розв'язування фізичних задач (розділи механіка і електротехніка) та застосування у техніці (приклади використання комплексних чисел у теорії пружності, картографії, аеромеханіки, теорії автоматичного регулювання систем та ін.). Враховуючи це, нами були розроблені відповідні дидактичні матеріали.

На третьому етапі проводився навчальний експеримент. Його мета полягала у перевірці справедливості сформульованої гіпотези. Проводилась експериментальна перевірка розробленої системи завдань та методичних рекомендацій для формування вмінь учнів 10-х класів використовувати комплексні числа при розв'язуванні прикладних задач, задач із міжпредметними і внутріпредметними зв'язками шляхом тривалого спостереження за їх діяльністю на уроках математики, анкетування вчителів та учнів, індивідуальних бесід з ними, аналіз відповідних занять . Однак провідними для висновків були результати виконання письмових робіт, запропонованих нами в середині навчального року і підсумкової контрольної роботи в кінці року.

Для участі в експерименті було залучено 189 учнів. Вибір експериментальних і контрольних груп відбувався таким чином: початковий рівень знань і вмінь з математики в експериментальних і контрольних групах однаковий згідно показників навчальних досягнень на кінець попереднього навчального року, заняття в експериментальних і контрольних класах ведуть учителі вищої категорії, тобто враховувалися вимоги щодо застосування експериментальних методів опрацювання результатів педагогічного дослідження. Нами були виділені такі однорідні та незалежні вибірки експериментальної та контрольної груп учнів для проведення формувального етапу експерименту.

Таблиця 2.5

Розподіл учнів за групами згідно участі у формувальному експерименті

Вибірки	Кількість учнів	Усього учнів
Експериментальна група (ЕГ)	94	189
Контрольна група (КГ)	95	

Щоби переконатися в тому, що до початку експериментального навчання контрольні та експериментальні групи за кількісними і якісними показниками рівня навчальних досягнень статистично однакові, було висунуто гіпотезу , яка містила це твердження. Перевірку її здійснено за результатами діагностичного тестування, проведеного на початку навчального року (див. додаток Р), які оброблені за допомогою критерію Колмогорова-Смирнова (обчислення подано у додатку С). Знайдене значення статистики критерію (0,043) менше від його критичного значення (0,198). Це означає, що прийнята гіпотеза - контрольні та експериментальні групи за кількісними і якісними показниками рівня навчальних досягнень статистично однакові.

Розподіл учнів експериментальних і контрольних груп за рівнями навчальних досягнень, здійснений на основі результатів виконання запропонованої нами письмової роботи, представлений в таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

Розподіл учнів контрольних та експериментальних груп за рівнями навчальних досягнень до початку експериментального навчання

Вибірки	Кіль-кість учнів	Рівні навчальних досягнень											
		Початковий			Середній			Достатній			Високий		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Експериментальна група	94	0	0	0	2	2	5	10	27	23	14	8	3
Контрольна група	95	0	1	3	5	7	10	23	19	16	6	3	2

Навчання у контрольній групі проводилося за традиційною методикою вивчення комплексних чисел у профільних класах згідно з діючою програмою [241]. Навчання учнів експериментальної групи проводилося за спеціально розробленою нами методикою вивчення основного блоку матеріалу, яка базувалась на демонстрації застосувань комплексних чисел у різних галузях науки і техніки, на включенні прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками у методичну систему навчання комплексних чисел на різних етапах вивчення матеріалу (при поясненнях на лекції демонструємо готове розв’язання за допомогою мультимедійних засобів навчання, кодопроектора чи переносної дошки; на практичних заняттях звертаємо увагу на прикладні задачі та задачі із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками; на семінарах розглядаємо використання комплексних чисел у науці і, зокрема, у техніці; зацікавлених учнів захоплюємо індивідуальною роботою на дослідження певних прикладів, що підтверджують існування і демонструють застосування комплексних чисел, розв’язування прикладних задач та задач із міжпредметними і внутріпредметними зв’язками).

В середині навчального року для виявлення рівня сформованості в учнів поняття комплексного числа та засвоєння дій над комплексними числами в різних формах запису нами було проведено письмову роботу у вигляді відкритого тесту, що включав 12 завдань (див. додаток Т). Всі завдання мали по чотири варіанти відповіді, із яких тільки одна була правильною. Правильно виконане завдання оцінювалося 1 балом.

Перевірці підлягала гіпотеза , тобто положення про однакові функції розподілу числа правильних відповідей на тестові завдання серед учнів, що навчалися за різними варіантами методик; іншими словами, що пропонована методична система не має ніяких переваг, а відмінність у результатах, що спостерігаються, залежить від певних випадкових і невідомих причин. Альтернативна гіпотеза стверджує, що функції розподілу числа правильних відповідей є різними в двох групах учнів, що розглядаються; іншими словами, що неоднаковість результатів роботи в експериментальній і контрольній групах обумовлена не випадковими факторами, а включенням у зміст навчання достатньої кількості завдань на застосування комплексних чисел.

Результати виконання роботи учнями двох вибірок подаємо у формі таблиці.

Таблиця 2.7

Результати виконання тесту

Число прав. відпо-відей	Абсолютна частота		Накопичена частота				
12	4	2	94	95	1	1	0
11	9	6	90	93	0,957	0,979	0,022
10	15	9	81	87	0,861	0,916	0,055
9	20	14	66	78	0,702	0,821	0,119
8	26	23	46	64	0,489	0,674	0,185
7	7	20	20	41	0,212	0,432	0,220
6	7	9	13	21	0,138	0,221	0,083
5	3	5	6	12	0,064	0,126	0,062
4	2	4	3	7	0,032	0,074	0,042

Продовж. таблиці 2.7

3	1	2	1	3	0,011	0,032	0,021
2	0	1	0	1	0	0,011	0,011
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Знайдемо значення статистики двостороннього критерію Колмогорова-Смирнова для вибірок обсягом та . З таблиці експериментальних даних 2.8 знаходимо, що найбільше значення виразу дорівнює 0,220. Значить, відповідно

.

Критичне значення статистики критерію знаходимо за спеціальною формулою для вибірок обсягом [68, 115]. Для і відповідно , згідно з цією формулою,

.

Звідси справедлива нерівність (0,220>0,198). Тому відповідно з правилом прийняття рішення [68, 113] нульова гіпотеза відхиляється і приймається альтернативна гіпотеза

, що дозволяє зробити висновок про відмінність розподілів числа правильних відповідей на тестові завдання для вибірок учнів, які навчалися за різними варіантами методик. Аналіз експериментальних даних (два перших стовпці таблиці 2.8) дозволяє нам уточнити отриманий висновок, оскільки дає підставу сказати, що учні, які навчалися в експериментальних класах за спеціальною методикою, дають стохастично більше правильних відповідей, тобто перший варіант методики є ефективніший щодо формування основних понять теорії комплексних чисел.

До кінця року в контрольних класах проводилося традиційне вивчення алгебраїчного матеріалу, при цьому лише епізодично застосовувались комплексні числа до розв'язування рівнянь вищих степенів. В експериментальних класах вивчення комплексних чисел було продовжено включенням текстових задач на застосування комплексних чисел не лише в теорії многочленів та рівнянь, але й при розв'язуванні задач на геометричні перетворення, задач з електродинаміки, тригонометрії. Серед учнів експериментальних класів 31 учень продовжив ви вчення розділу на курсі за вибором, з них 4 взяли участь у роботі МАН і вибрали теми з теорії комплексних чисел. Повідомлення цих учнів (з історії розвитку теорії комплексних чисел, певна розв'язана учнем прикладна задача чи задача із міжпредметними або внутріпредметними зв'язками, доведене твердження) систематично практикувались на уроках в експериментальних класах.

На кінець навчального року було проведено контрольний зріз результатів навчання учнів. За його результатами було визначено рівень їх навчальних досягнень з урахуванням обсягу та рівня складності виконаних завдань. Виходячи з результатів навчальних досягнень учнів, виявлених нами під час контрольного зрізу, було підраховано кількість учнів, що отримали оцінки "1", "2", "3",…, "12" та відповідно кількості учнів, що набули знання початкового, середнього, достатнього та високого рівня. Отримані результати відображено в таблиці 2.8.

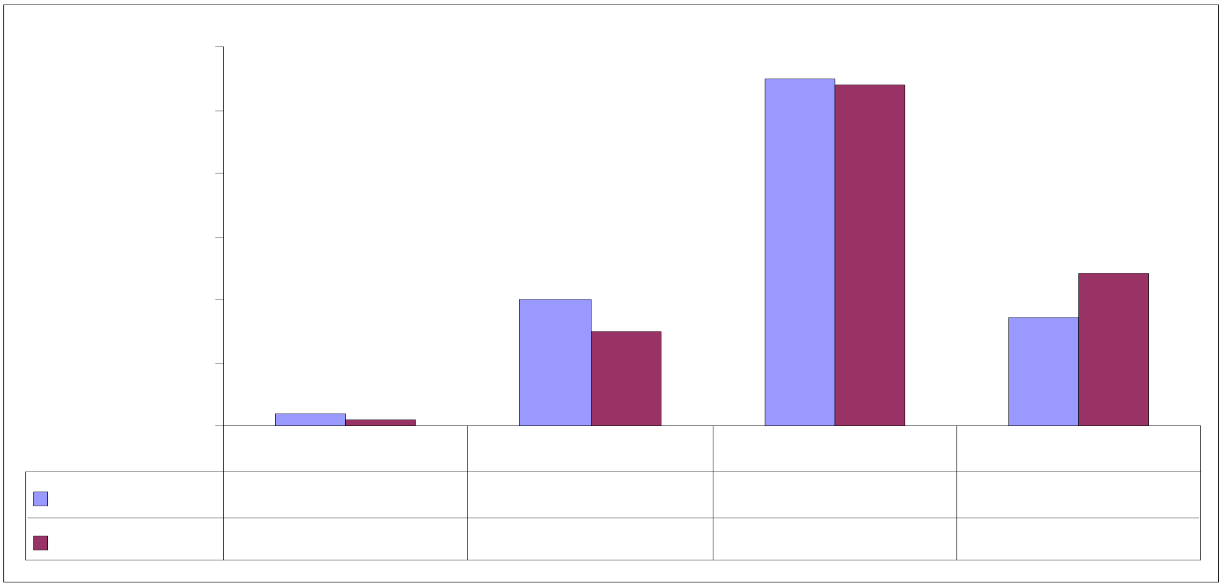
Таблиця 2.8

Розподіл учнів контрольних та експериментальних груп за рівнями навчальних досягнень після проведення контрольного зрізу

Вибірки	Кіль-кість учнів	Рівні навчальних досягнень											
		Початковий			Середній			Достатній			Високий		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Екпериментальна група	94	0	0	1	2	5	8	14	23	17	12	9	3
Контрольна група	95	0	1	2	4	7	8	19	22	15	8	7	2

На рис. 2.30 та 2.31 представлено розподіл учнів експериментальних та контрольних груп за рівнями навчальних досягнень на початку року (формувального етапу експерименту) та в кінці навчального року, які наочно підтверджують підвищення показників навчальних досягнень учнів



експериментальних класів з математики.

Рис. 2.30. Розподіл учнів експериментальних груп за рівнями навчальних досягнень

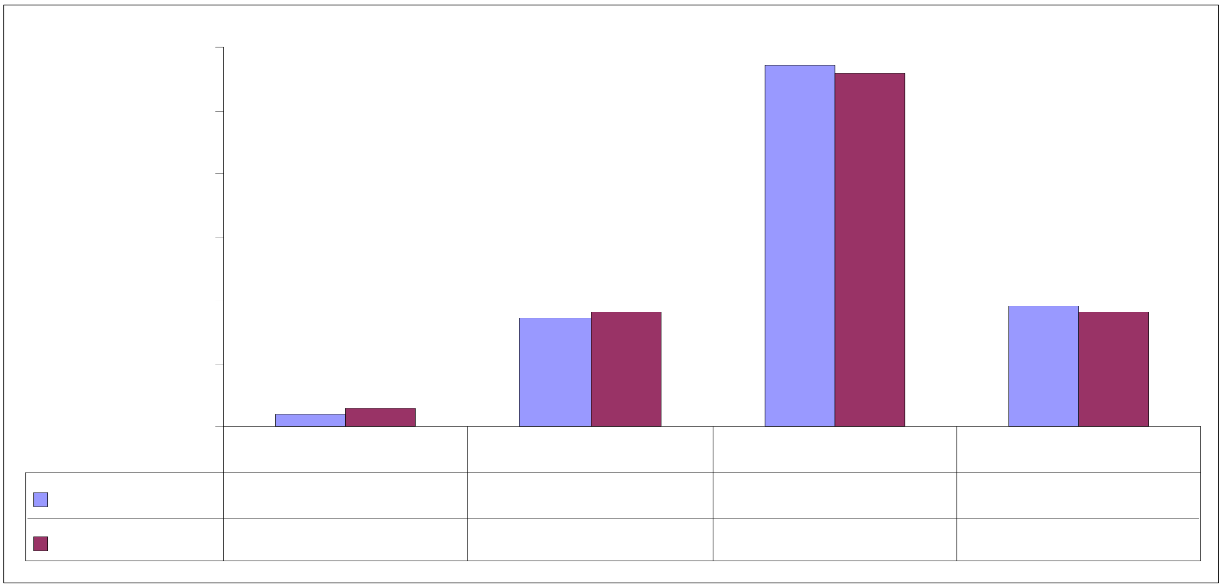


Рис. 2.31. Розподіл учнів контрольних груп за рівнями навчальних досягнень

Позитивним результатом формувального етапу експерименту вважаємо підвищення інтересу учнів експериментальних класів, які розв’язували прикладні задачі та задачі із міжпредметними чи внутріпредметними зв’язками методом комплексних чисел, до вивчення даного розділу математики, що проявлялося у допитливості цих учнів стосовно теоретичних і прикладних проблем теорії комплексних чисел та постійному збільшенні кількості учасників курсу за вибором
.

Відібраний матеріал курсу за вибором є доступний для сприймання і розуміння старшокласниками, що підтверджують результати проведених самостійних, контрольних робіт, відповідей учнів на заліку. Проте деякі з тем (згідно з посібником [325]), такі як: логарифм комплексного числа, степінь комплексного числа з довільним показником, синус, косинус, тангенс , котангенс комплексного числа, доцільно вивчати у вищій школі, хоча можна використати і в старшій школі для індивідуальної роботи з учнями, які зацікавилися цими питаннями.

Аналіз результатів проведеного дослідження свідчить про те, що запропонована методика вивчення комплексних чисел, яка базується на розв'язуванні більшої кількості прикладних задач та задач з міжпредметними та внутріпредметними зв'язками, є ефективнішою, ніж традиційна, а також озброює учнів новими методами досліджень, використання яких дає можливість підвищити пізнавальні можливості учнів, результативність процесу навчання та сприяє формуванню професійних компетентностей майбутніх математиків та інженерів.

Висновки до другого розділу

У другому розділі дисертаційного дослідження наведено методичну систему вивчення теми "Комплексні числа" учнями профільних класів.

Оскільки комплексні числа органічно пов'язані з уже відомими учням дійсними числами, то в основу побудови методики формування основних понять теорії комплексних чисел в профільних класах покладені такі положення:

- продовження змістових ліній, розпочатих в основній школі (лінія розвитку поняття числа, лінія розв'язування рівнянь, лінія прикладної спрямованості);
- використання символіки і термінології як один із способів здійснення наступності курсів математики середньої школи та вищої;
- використання рівневих вправ як засобу формування основних понять теорії комплексних чисел;
- застосування комплексних чисел до розв'язування прикладних задач та задач з міжпредметними та внутріпредметними зв'язками.

Методика вивчення комплексних чисел у профільних фізико-математичних класах складається з двох частин: 1) формування основних понять теорії комплексних чисел; 2) використання комплексних чисел при розв'язуванні прикладних задач та задач з міжпредметними та внутріпредметними зв'язками, які пропонуємо вивчати як курс за вибором. Причому, остання має подвійну функцію: по-перше, виступає як засіб для більш глибокого розкриття понять, по-друге, є критерієм визначення рівня володіння цими поняттями.

У старших класах загальноосвітньої школи інших профілів, де математика поглиблено не вивчається, основи теорії комплексних чисел разом із застосуваннями пропонуємо повністю вивчати як курс за вибором. Метою такого курсу є підняття рівня вивчення математики до профільного та задоволення пізнавальних інтересів старшокласників.

Як показав експеримент, матеріал курсу за вибором є доступний і цікавий для старшокласників, які проявляють інтерес до математики, тому значну частину його можна опрацьовувати з учнями за допомогою частково-пошукового методу, використовуючи групову чи індивідуальну форми навчання. Це стосується алгебраїчної, тригонометричної форм запису комплексного числа та дій над ними у цих формах запису, знаходження геометричних місць точок комплексної площини, розв'язування прикладних задач та задач з міжпредметними та внутріпредметними зв'язками. Робота з довідковою літературою, підготовка повідомлень, доповідей, рефератів на семінарські заняття стимулюють творчу пізнавальну активність старшокласників, тому є корисною для їхнього інтелектуального розвитку. Матеріал курсу за вибором дозволяє глибше ознайомити учнів з математичними ідеями та методами, спонукає до перших математичних досліджень.

Перший, основний, блок навчального матеріалу доцільно оцінювати із застосуванням жорсткого рейтингу, що включає короткочасні, довгострокові та рівневі самостійні роботи, контрольну роботу. Для оцінювання частини вивченого матеріалу про застосування комплексних чисел пропонуємо використати лояльний рейтинг, оскільки завдання на застосування є нестандартні, творчого чи ускладненого характеру.

Як відомо, поняття розкривається у всій повноті в процесі його застосування. Це положення підтвердив експеримент. Тому доцільно показати учням можливості застосування комплексних чисел у таких відомих для них розділах науки, як теорія многочленів, планіметрія, перетворення площини, механіка, електротехніка. При цьому теорія комплексних чисел дозволяє доводити відомі факти, встановлювати нові ознаки відомих понять, узагальнювати відомі твердження, а відтак розширює методи пізнання старшокласників, сприяє формуванню їх професійних компетентностей.

Ефективність формування математичних компетентностей старшокласників з розділу "Комплексні числа" підвищується за рахунок доцільного використання ППЗ на етапі формування поняття комплексного числа, переходу від однієї форми запису до іншої, знаходження комплексних коренів многочленів, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу та отримання учнем своєчасної корекції знань та вмінь.

Основні результати другого розділу опубліковані у роботах [311; 324–326; 330; 331].

ВИСНОВКИ

1. Реформування загальної середньої освіти згідно із Законом України “Про освіту” передбачає організацію профільного навчання в старшій школі. У зв’язку з цим однією із актуальних задач сьогодення є створення навчально-методичного забезпечення профільного навчання у старшій 12-річній школі.

2. Модель профільної диференціації є прогресивною в своїй ідеї, проте в цілому ряді випадків неадекватно реалізується на практиці, оскільки передбачає наявність в паралелі як мінімум двох класів. Невиконання цієї вимоги потребує включення додаткових механізмів побудови особистісно орієнтованої системи навчання з включенням курсів за вибором, передбачених Концепцією профільного навчання в старшій школі. Це дає додаткові можливості включення до змісту шкільної математичної освіти надзвичайно важливих для розвитку математичних здібностей, формування стійких пізнавальних інтересів майбутнього професіонала-математика відомостей про математичні теорії та їх застосування. Доцільність цього кроку та до ступність розробленого нами курсу за вибором “Комплексні числа та їх застосування” підтверджено експериментом.

3. Вагомість розділу “Комплексні числа” в математичній культурі майбутніх фахівців неодноразово відзначалась видатними математиками: Колмогоровим А. М., Лобачевським М. І., Хінчиним О. Я., Маркушевичем О. І. та ін. Ці числа знаходять застосування як всередині самої математики, так і в інших галузях науки і техніки. Ознайомлення з комплексними числами збагачує їхні уявлення про сукупність математичних методів пізнання, зокрема, розширює їхні можливості при розв’язуванні задач, посилює прикладну функцію математики та має суттєве світоглядне значення.

4. Підтверджено доцільність вивчення основних понять згідно з чинною програмою на початку навчального року, оскільки це дає можливість розширення та поглиблення змісту теми “Комплексні числа” курсом за вибором, що передбачає розв’язування відповідних прикладних задач та задач з міжпредметними і внутріпредметними зв’язками.

5. Пропонована програма курсу за вибором не є строго регламентованою і може допускати певні модифікації. Вона містить так звану “традиційну частину” (означення поняття комплексного числа, можливі форми запису комплексних чисел, правила виконання дій над комплексними числами в різних формах запису, основні властивості тощо) та розділи про основні застосування комплексних чисел (у теорії многочленів, тригонометрії, геометрії, фізиці, техніці). Всі напрями застосувань автономні, їх можна розглядати з учнями в довільній послідовності: одні теми вивчати глибше, з іншими тільки ознайомлюватися чи розглядати індивідуально з окремими учнями. Така гнучкість методики вибору тем та окремих завдань для математичних досліджень

спрямована перш за все на врахування конкретних умов: інтереси, бажання учнів, пов'язані з майбутньою професією, їх навчальні можливості, час, відведений на вивчення курсу, матеріально-технічну базу школи і інші умови. Використання комплексних чисел до розв'язування прикладних задач та задач з міжпредметними і внутріпредметними зв'язками не тільки дозволяє проілюструвати процес застосування математики, а й підвищує мотивацію вивчення матем атики.

6. Включення даного курсу за вибором в особистісно-орієнтовану систему навчання дозволяє глибше ознайомити учнів з математичними ідеями та методами, дає змогу обґрунтовано судити про застосування математики в реальному житті, спонукає до перших математичних досліджень, сприяє формуванню професійних компетентностей, необхідних для продовження освіти у вищих навчальних закладах.

7. Основною формою проведення занять під час проведення курсу за вибором залишається традиційна система уроків: вивчення нового матеріалу, формування вмінь та навиків, узагальнення та систематизація знань, контролю і корекції знань. Поряд з цим, ширше, ніж при вивченні обов'язкового курсу математики, використовується шкільна лекція, семінарські і практичні заняття, а також нетрадиційні форми навчання (групові, дидактичні ігри, математичні "бої", інтегровані уроки алгебри з іншими природничими дисциплінами тощо). Методика навчання характеризується інтенсивною самостійною діяльністю учнів, індивідуалізацією навчання, застосуванням проблемно-пошукових та дослідницьких методів.

8. Широкі можливості для інтенсифікації та оптимізації навчально-виховного процесу, активізації пізнавальної діяльності, розвитку творчого мислення учнів надають сучасні інформаційні технології навчання. Підвищенню ефективності уроків курсу за вибором в старших класах сприяє використання комп'ютерних засобів навчального призначення, наприклад системи комп'ютерної алгебри DERIVE, педагогічного програмного засобу GRAN1, складеної нами навчально-корегуючої програми з даного розділу та інших. Використання аналітичних та графічних можливостей згаданих програм дозволяє індивідуалізувати вивчення курсу за вибором "Комплексні числа та їх застосування", здійснювати контроль, самоконтроль засвоєння навчального матеріалу та своєчасну корекцію знань та вмінь.

9. Розроблена система прикладних задач та задач із міжпредметними та внутріпредметними зв'язками (з тригонометрії, геометрії, механіки, електротехніки). Експериментально перевірена ефективність методики її використання для формування основних понять теорії комплексних чи сел та вмінь застосовувати ці знання при розв'язуванні прикладних задач та задач з міжпредметними і внутріпредметними зв'язками в учнів профільних класів.

10. Педагогічний експеримент підтвердив гіпотезу нашого дослідження. Кількісний та якісний аналізи результатів експерименту дають підстави стверджувати, що розроблена методична система вивчення основ теорії комплексних чисел та їх застосувань у профільних класах сприяє підвищенню ефективності навчання старшокласників, поглибленню і посиленню мотивації до занять математикою.

Перспективними напрямками подальшого дослідження можуть бути дослідження, пов’язані з прикладною спрямованістю інших розділів математики, які мають достатньо високий рівень абстрактності, розробка відповідного методичного забезпечення профільної освіти.

ДОДАТКИ

Додаток А

Таблиця А.1

Аналіз підручників з математики видання після 1917 року, що містять тему “Комплексні числа”

Зміст теми “Комплексні числа” / Підручники	Поняття комплексного числа	Алгебраїчна форма комплексного числа	Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі	Геометрична інтерпретація	Тригонометрична форма комплексного числа	Дії над комплексними числами в тригонометричній формі	Розв’язування двочленних рівнянь 3-го і 4-го степеня	Основна теорема алгебри	Формула Ейлера	Застосування в теорії коливань	Многочлени з комплексними коефіцієнтами, розклад на лінійні множники	Функції комплексної змінної і відображення комплексної площини	Застосування комплексних чисел до геометричних перетворень	Застосування комплексних чисел у тригонометрії	Використання комплексних чисел у геометрії
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Кисельов А. П. Алгебра, ч. 2. (1888-1964)	+	+	+	+	+	+									
Кочетков Є. С., Кочеткова К. С. Алгебра і елементарні функції. Ч. 2. (1965)	+	+	+	+	+	+	+	+							

Виленкин Н. Я., Гутер Р. С., Шварцбурд С. И ., Овчинский В. В., Ашкинузе В. Г. Алгебра. (1968)	+	+	+	+	+	+	+	+							

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Маркушевич А. І., Сікорський К. П., Черкасов Р. С. Алгебра і елементарні функції. (1968)	+	+	+	+	+	+	+		+	+					
Избранные вопросы математики, 10 кл. Факультативный курс / Под ред. Фирсова В. В. (1980)	+	+	+	+	+	+			+		+	+			
Віленкін Н. Я. і ін. Алгебра і математичний аналіз для 10 кл. (1984)	+	+	+		+	+	+	+				+	+		
Маркушевич А. І., Черкасов Р. С., Ястребінецький Г. Алгебра і початки аналізу, 10-11 кл. (1986)	+	+	+	+	+	+	+								
	+	+	+	+	+	+	+	+	+					+	+

Віленкін Н. Я. і ін. Алгебра і математичний аналіз для 10 кл. (1989)															

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу, 11 кл. (1998)	+	+	+	+	+	+									
Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу, 10 кл. (1993-2008)	+	+	+	+	+	+									
Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу, 11 кл. (2005-2008)	+	+	+	+	+	+									

Додаток Б

Таблиця Б.1

Тематичне планування курсу за вибором (34 год.)

№ уроку	Зміст уроку	Тип уроку
1	2	3
1.	Розвиток поняття числа від натурального до дійсного. Розширення множини дійсних чисел. Поняття комплексного числа. Геометричне тлумачення комплексних чисел та означення комплексної площини.	Семінарське заняття з повідомленнями учнів і вчителя
2.	Алгебраїчна форма комплексного числа. Арифметичні операції над комплексними числами в алгебраїчній формі та їх властивості. Степінь комплексного числа з натуральним та цілим показником. Спряжені комплексні числа, їх властивості. [Добування квад ратного кореня з комплексного числа.]. Геометрична інтерпретація операцій додавання і віднімання.	Засвоєння нових знань, лекція
3.	Арифметичні операції над комплексними числами в алгебраїчній формі. Степінь комплексного числа з натуральним та цілим показником. [Добування квадратного кореня з комплексного числа.] Навчальна самостійна робота.	Формування вмінь і навичок, практичне заняття
4.	Формули скороченого множення. Розв’язування квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Математичний диктант.	Узагальнення і систематизації знань учнів
5.	Геометрична інтерпретація комплексних чисел і арифметичних операцій над ними. Поняття модуля комплексного числа, його властивості. Поділ відрізка у заданому відношенні. Відстань між точками комплексної площини. Рівняння кола та прямої, перпендикулярної до відрізка, що сполучає задані точки, і проходить через його середину.	Засвоєння нових знань, лекція
6.	Геометрична інтерпретація комплексних чисел і арифметичних операцій над ними. Геометричне місце точок, заданих на комплексній площині. Короткочасна самостійна робота перевірочного характеру.	Формування вмінь і навичок
7.	Поняття аргумента комплексного числа, його властивості. Тригонометрична форма комплексного числа. Добуток і частка комплексних чисел в тригонометричній формі. Формула Муавра. Добування кореня -го степеня з комплексного числа.	Засвоєння нових знань, лекція

Продовж. таблиці Б.1.

1	2	3
8.	Розв’язування вправ з використанням комп’ютера. Самостійна робота.	Узагальнення та систематизація знань учнів
9.	Контрольна робота.	Контроль знань учнів
10.	Аналіз контрольної роботи.	Корекція знань та вмінь учнів
11.	Формула Ейлера. Показникова форма комплексного числа. Добуток, частка комплексних чисел та піднесення до степеня в показниковій формі.	Засвоєння нових знань, лекція
12.	Добуток, частка комплексних чисел та піднесення до степеня в показниковій формі. Математичний диктант.	Формування вмінь і навичок
13.	[Експонента комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Степінь з довільним показником. Синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс комплексного числа.]	Засвоєння нових знань , лекція
14.	[Експонента комплексного числа. Логарифм комплексного числа. Степінь з довільним показником. Синус, косинус, тангенс, котангенс, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс комплексного числа.]	Формування вмінь і навичок
15.	Комплексні корені многочлена. Основна теорема алгебри. Розв’язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів.	Засвоєння нових знань , лекція
16.	Комплексні корені многочлена. Основна теорема алгебри. Розв’язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів.	Формування вмінь і навичок
17.	Комплексні корені многочлена. Самостійна робота з використанням комп’ютера.	Узагальнення і систематизація знань учнів
19.	Застосування комплексних чисел у тригонометрії.	Засвоєння нових знань
20.	Застосування комплексних чисел у тригонометрії.	Формування вмінь і навичок
21.	Використання комплексних чисел у геометрії: ознаки колінеарності та ортогональності векторів, паралельності й перпендикулярності прямих, хорд одиничного кола, умова приналежності трьох точок одній прямій, рівняння дотичної та прямої, яка проходить через дві задані точки.	Засвоєння нових знань

Продовж. таблиці Б.1.

1	2	3
22.	Використання комплексних чисел у геометрії: ознаки колінеарності та ортогональності векторів, паралельності й перпендикулярності прямих, хорд одиничного кола, умова приналежності трьох точок одній прямій, рівняння дотичної та прямої, яка проходить через дві задані точки. Математичний диктант.	Формування вмінь і навичок
23.	Використання комплексних чисел у геометрії: побудова правильних многокутників, обчислення площ довільних	Комбінований

	многокутників.	
24.	Перетворення площини і комплексні числа.	Засвоєння нових знань
25.	Перетворення площини і комплексні числа.	Формування вмінь і навичок
26.	Перетворення площини і комплексні числа. Розв’язування складніших задач.	Формування вмінь і навичок
27.	Розв’язування складніших задач на застосування комплексних чисел у геометрії. Практична робота (складання таблиці).	Узагальнення і систематизація знань учнів.
28.	Застосування комплексних чисел до розв’язування задач із деяких розділів фізики. Застосування комплексних чисел у техніці.	Комбінований
29.	Застосування комплексних чисел у електротехніці.	Засвоєння нових знань
30.	Застосування комплексних чисел у електротехніці.	Формування вмінь і навичок
31.	Внесок вчених-математиків у розвиток теорії комплексних чисел.	Семінарське заняття з повідомленнями учнів
32.	Спроби інтерпретації комплексних чисел провідними математиками.	Семінарське заняття з повідомленнями учнів
33.	Дидактична гра “Перший мільйон”.	Узагальнення і систематизація знань учнів
34.	Залікова робота. Підсумковий урок.	Контроль знань учнів

Продовження додатку Б

Таблиця Б.2

Рівневі вимоги до знань та вмінь учнів, які вивчали курс за вибором “Комплексні числа та їх застосування”

Початковий рівень (А)	Середній рівень (Б)	Достатній рівень (В)	Високий рівень (Г)
1	2	3	4
Алгебраїчна форма комплексного числа			
Учень знає: означення комплексного числа, уявної одиниці; означення суто уявного числа, спряжених, протилежних, рівних комплексних чисел. Учень вміє: розв’язувати квадратні рівняння в полі С, виконувати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі, підносити до сте-пеня уявну одиницю.	Знає: властивості дій над комплексними числами в алгебраїчній формі, властивості спряжених і протилежних комп-лексних чисел; умову рівності комплексних чисел; формулу добування квадратного кореня з комплексного числа. Вміє: підносити комплексне число до степеня з натуральним показником (з використанням формул скороченого множення), добувати квадратний корінь з комплексного числа .	Знає: необхідні умови розширення числової множини, доведення властивостей дій над комплексними числами в алгебраїчній формі. Вміє: розв’язувати квадратні рівняння з комплексними коефіцієнтами; складати квадратні рівняння з дійсними коефіцієнтами за відомим комплексним коренем.	Знає: загальні методи розв’язу-вання рівнянь та систем рівнянь на множині комплексних чисел; методи доведення тотожностей з комплексними компонентами. Вміє: розв’язу-вати рівняння та системи рівнянь з комплексними складовими; доводити такі тотожності.
Комплексна площина			
Знає: геометричну інтерпретацію комплексних чисел та дій над	Знає: означення модуля комплексного числа; рівняння кола, прямої у	Знає: правила зображення геометричних місць точок на комплексній	Знає: загальні методи зображення геометричних місць точок на

ними в алгебраїчній формі;	комплексних координатах;	площині. Вміє: задавати	комплексній площині.

Продовження таблиці Б.2

1	2	3	4
формули для знаходження комплексної координати середини відрізка , відстані між точками комплексної площини, комплексної координати вектора. Вміє: зображати комплексні числа на комплексній площині, їх суму та різницю, спряжені і протилежні комплексні числа.	формулу для знаходження комплексної координати точки, що ділить відрізок у заданому відношенні. Вміє: будувати зображення прямих і частин комплексної площини, заданих аналітично.	прямі і частини площини аналітично.	Вміє: розв'язувати рівняння з параметрами в комплексних числах, доводити твердження на геометричні місця точок комплексної площини.
Тригонометрична форма комплексного числа			
Знає: тригонометричну форму комплексного числа, правила виконання дій над комплексними числами в тригонометричній формі, формулу Муавра; формулу добування кореня з комплексного числа; означення модуля і аргумента комплексного числа. Вміє: знаходити модуль і головне значення аргументу	Знає: властивості дій над комплексними числами в тригонометричній формі, правила переходу від алгебраїчної до тригонометричної форми комплексного числа і навпаки. Вміє: переходити від алгебраїчної форми до тригонометричної і навпаки; розв'язувати двочленні рівняння.	Знає: доведення правил виконання операцій над комплексними числами у тригонометричній формі; геометричну інтерпретацію дій над комплексними числами в тригонометричній формі. Вміє: знаходити геометричні місця точок комплексної площини, аналітичні записи	Знає: аргументацію переваг алгебраїчної та тригонометричної форм комплексного числа. Вміє: розв'язувати складніші випадки переходу від алгебраїчної до тригонометричної форми комплексного числа і навпаки.

комплексного числа; виконувати операції над комплексними числами в тригонометричній формі.		яких містять модуль і (або) аргумент комплексного числа .	

Продовження таблиці Б.2

1	2	3	4
Експонента комплексного числа			
Знає: показникову форму комплексного числа; правила виконання дій над комплексними числами в показниковій формі. Вміє: виконувати дії над комплексними числами в показниковій формі; переходити від тригонометричної до показникової форми комплексного числа і навпаки.	Знає: формулу Ейлера; [означення експоненти, логарифма комплексного числа, степеня з довільним показником, синуса, арксинуса, косинуса, арккосинуса, тангенса, арктангенса, котангенса, арккотангенса комплексного числа]. Вміє: переходити від алгебраїчної форми до показникової і навпаки; [знаходити значення логарифма комплексного числа , степеня з довільним показником, синуса, арксинуса, косинуса , арккосинуса, тангенса, арктангенса, котангенса, арккотангенса комплексного числа]	Знає: доведення правил виконання операцій над комплексними числами у показниковій формі; виведення формул тригонометричних функцій дійсної змінної через уявні експоненти. Вміє: розв'язувати найпростіші показникові, логарифмічні та тригонометричні рівняння у множині комплексних чисел.	Знає: доведення формул для знаходження експоненти, логарифма комплексного числа, степеня з довільним показником, синуса, арксинуса, косинуса, арккосинуса, тангенса, арктангенса, котангенса, арккотангенса комплексного числа. Вміє: розв'язувати рівняння та доводити тотожності, які містять експоненту, логарифм комплексного числа , степінь з довільним показником, синус, арксинус, косинус, арккосинус, тангенс , арктангенс, котангенс, арккотангенс комплексного числа
Комплексні корені многочлена			

Знає: формулювання основної теореми алгебри многочленів. Вміє: знаходити корені та розкладати на множники в полі С,	Знає: алгоритм знаходження раціональних коренів многочлена, означення кратності кореня многочлена. Вміє: знаходити	Знає: доведення теореми Вієта та наслідків з основної теореми алгебри многочленів. Вміє: розкладати многочлени на	Знає: загальні методи відшукання коренів многочленів та розкладу їх на множники. Вміє: розв'язувати складніші вправи

Продовження таблиці Б.2

1	2	3	4
використовуючи формули скороченого множення	раціональні корені многочлена; за даними коренями знаходити многочлени, в т. ч. многочлени з дійсними коефіцієнтами; знаходити кратність коренів многочлена	лінійні та квадра-тичні множники з дійсними коефіцієнтами; застосовувати формули Вієта до розв'язування вправ.	на розкладання на множники многочленів та розв'язування алгебраїчних рівнянь.
Використання комплексних чисел у тригонометрії			
Знає: принцип використання комплексних чисел у тригонометрії. Вміє: доводити основні формули тригонометрії, тригонометричні тотожності та знаходити тригонометричні суми, використовуючи комплексні числа.			
Використання комплексних чисел у геометрії			
Знає: критерії колінеарності та ортогональності двох векторів комплексної площини; критерій приналежності трьох точок комплексної площини одній прямій; рівняння прямої на комплексній площині; критерії паралельності та перпендикулярності двох хорд одиничного кола; алгоритм побудови правильних многокутників; формулу для обчислення площі трикутника. Вміє: розв'язувати планіметричні задачі, застосовуючи комплексні числа; знаходити площі многокутників за заданими координатами вершин.			
Перетворення площини і комплексні числа			
Знає: формули паралельного перенесення, повороту, центральної симетрії, осьової симетрії, гомотетії у комплексних координатах. Вміє: описати аналітично перетворення площини; використовувати формули перетворення при розв'язуванні геометричних задач.			
Використання комплексних чисел у фізиці			
Знає: принцип використання комплексних чисел при розв'язуванні задач з механіки та електротехніки; формули комплексу стуму, напруги, елетрорушійної сили, комплексного опору кола.			

Вміє: використовувати комплексні числа при розв'язуванні задач з механіки та електротехніки.

Додаток В

Теми рефератів

1. Італійський математик Дж. Кардано і його погляди на комплексні числа.
2. Італійський інженер і математик Р. Бомбеллі і його спроби обґрунтування правил дій над комплексними числами.
3. Голландський математик А. Жірар та основна теорема алгебри.
4. Французький філософ і математик Р. Декарт і його погляди на застосування комплексних чисел в аналітичній геометрії.
5. Англійський математик Дж. Валліс і його спроби знайти реальне тлумачення комплексних чисел.
6. Німецький математик Г. Лейбніц і його погляди на природу логарифмів.
7. Л. Ейлер і його заслуги в розвитку теорії комплексних чисел.
8. Історія відкриття формули Муавра.
9. Геометрична інтерпретація комплексних чисел Весселя.
10. Геометричне тлумачення комплексних чисел французькими математиками Арганом і Франсе.
11. Внесок німецького математика К. Гаусса у розвиток теорії комплексних чисел.
12. Французький математик О. Коші і його заслуги у створенні теорії функцій комплексної змінної.
13. Ірландський математик У. Гамільтон і його арифметична теорія комплексних чисел.
14. Французький математик і філософ Ж. Д’Аламбер і його внесок у становлення теорії функцій комплексної змінної.
15. Узагальнення комплексних чисел.

A Рис. РРД Д Д 1.2 K B

Додаток Д

Розв’язання геометричних задач за допомогою комплексних чисел

Задача Д1. Знайдіть комплексну координату точки перетину медіан трикутника, якщо задано комплексні координати його вершин.

Розв’язання. Нехай – точка перетину медіан трикутника , – середина сторони , точки , , , і мають комплексні координати , , , і

відповідно. Очевидно, . Оскільки , то вектор має

комплексну координату . Звідси

.

Задача Д2. За допомогою комплексних чисел доведіть, що середини сторін довільного чотирикутника утворюють паралелограм.

Розв’язання. Нехай вершини чотирикутника мають комплексні координати відповідно. Тоді середини сторін цього чотирикутника – точки – мають комплексні координати відповідно:

, , , .

Доведемо, що чотирикутник є паралелограмом. Для цього знайдемо комплексні координати векторів і :

; .

Відношення комплексних координат цих векторів дорівнює 1, а це означає, що вектори і є колінеарними, а сторони і – паралельними. Аналогічно доводимо паралельність сторін і . Отже, чотирикутник – паралелограм.

Задача Д3. У площині паралелограма існує така точка , що . Доведіть, що є прямокутником.

Розв’язання. Виберемо систему координат так, щоб початок координат співпадав з точкою перетину діагоналей паралелограма. Тоді комплексні координати протилежних вершин паралелограма будуть взаємно протилежними комплексними числами, тобто, якщо – комплексні координати точок відповідно, то , .

За умовою задачі або

.

Оскільки

;

Рис. Д.5

14

,

то

.

Отже, діагоналі паралелограма рівні, а це означає, що він є прямокутником.

Задача Д4. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Розв'язання. Введемо систему координат так, як показано на малюнку. Нехай і – комплексні координати двох вершин і паралелограма . Тоді – комплексна координата третьої вершини – точки . Тоді

,

що і треба було довести.

Задача Д5. Доведіть, що сума квадратів медіан трикутника дорівнює суми квадратів його сторін.

Розв'язання. Нехай комплексні координати вершин і середин сторін трикутника – відповідно , , , , , . Тоді вектори , , , , і

мають комплексні координати: , , , ; і відповідно. Тому

EMBED Equation.3

Рис. Д.6 Рис. Д.7

15

.

Отже, .

Задача Д6. Доведіть, що сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює сумі подвоєного квадрата медіани, проведеної до його третьої сторони, і половини квадрата цієї сторони.

Розв'язання. Нехай комплексні координати вершин трикутника – відповідно дорівнюють , , і – медіана трикутника . Треба довести, що

.

Оскільки вектори , , , мають комплексні координати , ,

, відповідно, то

;

.

Звідси отримуємо, що .

Задача Д7. На сторонах трикутника зовнішнім чином побудовані квадрати. Точки , , – центри цих квадратів. Доведіть, що ,

.

Розв'язання. Нехай вершини трикутника мають комплексні координати

, , відповідно, а точки , , – , , . Тоді вектор утворюється при

повороті вектора проти годинникової стрілки на кут , тобто або

, де – комплексна координата точки . Звідси .

Обчислимо комплексну координату точки як середини відрізка :

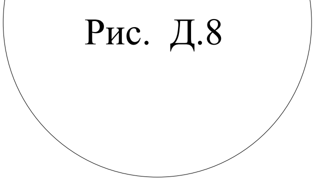


Рис. Д.8

16

. Аналогічно можна отримати комплексну координату точки

як середини відрізка : , або , де – комплексна

координата точки , , звідси . Тоді комплексна координата вектора дорівнює

.

Обчислимо подібним способом комплексну координату вектора .

або , , де – комплексна координата

точки ; звідси . Тоді комплексна координата вектора :

.

Легко бачити, що . Таким чином, вектор можна отримати при

повороті вектора на кут за годинниковою стрілкою, тобто .

Покажемо, що . Оскільки

,

,

то , що і треба було довести.

Задача Д8. Доведіть, що для точок і кола радіуса з центром в точці справджується рівність

,

де і – комплексні координати точок і відповідно, , , причому .

Розв'язання. Нехай , , причому . Запишемо комплексні координати вектора в показниковій формі

,

де і є зовнішнім кутом трикутника . Очевидно

,

17

де - кут при основі рівнобедреного трикутника .

Оскільки , то і тому

.

Звідси

,

що і треба було довести.

Задача Д9 (теорема Птолемея). Доведіть, що в кожному вписаному в коло опуклому чотирикутнику сума добутків протилежних сторін дорівнює добутку його діагоналей.

Розв'язання. Виберемо систему координат так, щоб початок координат співпадав з центром кола, описаного навколо опуклого чотирикутника , комплексні координати вершин якого відповідно рівні , , і , де , , і .
Враховуючи твердження попередньої задачі, отримуємо

,

тобто .

Задача Д10. Доведіть, що сума довжин всіх сторін і діагоналей правильного

-кутника, вписаного в одиничне коло, дорівнює .

Розв'язання. Нехай - правильний -кутник, вписаний в одиничне коло . З його вершини виходить загалом відрізок – сторін і діагоналей.

Позначимо , . Звідси сторона -кутника буде рівна

.

У рівнобедреному трикутнику :

, .

Аналогічно у рівнобедреному трикутнику :

, .

Продовжуючи цей процес, отримаємо, що

18

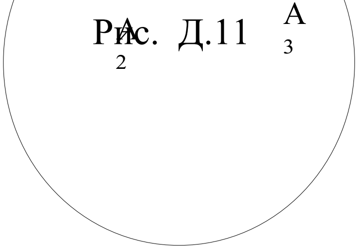


Рис. Д.11

.

Отже,

, .

Оскільки багатокутник правильний, то шукана сума довжин всіх сторін та діагоналей дорівнює

.

Тоді

EMBED Equation.3 .

(Ми використали відому формулу суми перших членів геометричної

прогресії.). Отже, .

Задача Д11. Доведіть, що сума квадратів відстаней від вершин правильного -кутника до довільної прямої, проведеної через його центр, не залежить від вибору

цієї прямої і дорівнює , де – радіус кола, описаного навколо багатокутника.

Розв'язання. Нехай – довільна пряма, проведена через центр кола радіуса ,

описаного навколо правильного багатокутника . Позначимо вершини цього

-кутника так, щоб пряма перетинала сторону . Опустимо перпендикуляри з

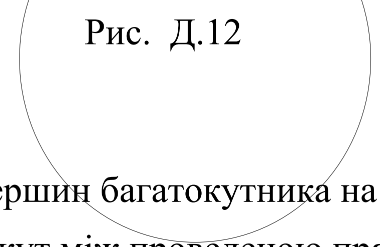


Рис. Д.12

19

вершин багатокутника на пряму : , . Тоді , де – кут між проведеною прямою і радіусом ;

, де ; .

Продовжуючи цей процес, отримаємо, що .

Тоді

, де

,

бо .

Отже, .

Задача Д12. На колі, описаному навколо правильного -кутника, вибрали точку . Доведіть, що сума квадратів відстаней від цієї точки до всіх вершин -кутника не залежить від розміщення точки на колі і дорівнює , де – радіус кола.

Розв'язання. Нехай – довільна точка кола радіуса , описаного навколо правильного багатокутника . Позначимо вершини -кутника так, щоб точка знаходилася між точками і . Нехай .

Оскільки трикутник є рівнобедреним, то . Аналогічно у рівнобедреному трикутнику знаходимо

, де .

Продовжуючи цей процес, отримуємо, що

.

Тоді

Рис. Д.14

, де

і аналогічно до попередньої задачі можна довести, що .

Отже, і від не залежить. А це означає, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола, описаного навколо правильного -кутника, до всіх вершин цього -кутника не залежить від вибору точки і дорівнює .

Задача Д14. На сторонах трикутника зовні побудовані довільні паралелограми , і . Доведіть, що з відрізків , , за допомогою паралельного перенесення можна скласти новий трикутник при умові, що відрізки не є паралельними.

Розв'язання. Нехай вершини трикутника мають комплексні координати , , відповідно. Оскільки за умовою задачі є паралелограмом, то можна сказати, що вершина утворюється паралельним перенесенням вершини на вектор , вершина - паралельним перенесенням вершини на вектор . Тоді комплексні координати цих вершин , , де – комплексна координата вектора . Аналогічно знаходимо комплексні координати вершин , , , : , , , , де , – відповідно комплексні координати векторів , .

Перенесемо відрізок на вектор , відрізок – на вектор і покажемо, що новоутворені точки: збігається з , збігається з , збігається з . Оскільки комплексні координати цих точок:

,

,

,

,

то точки , , . Оскільки розглядається випадок, що відрізки , , не є паралельними, то це означає, що з них можна утворити трикутник. В іншому випадку, коли відрізки , , є паралельними, то шуканий трикутник вироджується у відрізок, наприклад .

Задача Д15. В площині трикутника задано довільну точку , яка послідовно симетрично відображається відносно всіх вершин трикутника один, а потім другий раз. Доведіть, що після останнього відображення точка співпаде з точкою .

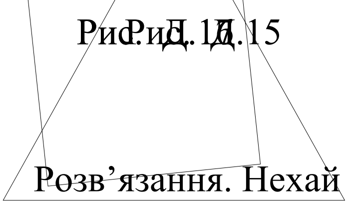


Рис. Д.16 Рис. Д.15

21

Розв'язання. Нехай комплексні координати вершин трикутника і точки – відповідно , , , і . Тоді при відображенні точки симетрично відносно вершин трикутника утворяться нові точки , , , , , . Покажемо, що точка співпаде з точкою . Для цього обчислимо комплексні координати нових точок. Точка матиме комплексну координату , точка – комплексну координату , точка – комплексну координату , точка – комплексну координату , точка – комплексну координату , точка – комплексну координату . Отже, точки та мають однакові комплексні координати, тобто вони збігаються.

Задача Д16. На сторонах і трикутника побудовані квадрати і , причому квадрат і трикутник розташовані по різні сторони від прямої , а квадрат і трикутник – по одну сторону від прямої . Доведіть, що відрізок дорівнює стороні і перпендикулярний до цієї сторони.

Розв'язання. Нехай вершини трикутника мають комплексні координати , , відповідно. Оскільки за умовою задачі і є прямокутниками, то вершину можна отримати при повороті точки на кут навколо вершини , вершину – при повороті точки на кут навколо тієї ж вершини . Тоді комплексні координати точок і рівні відповідно:

,

.

А комплексні координати векторів і рівні відповідно:

; .

А це означає, що дані вектори рівні за величиною, а також, що вектор можна отримати при повороті вектора на кут , що і треба було довести.

Задача Д17. Доведіть, що для правильного додатно орієнтованого трикутника справджується рівність , де , , – комплексні координати його вершин, а .

Розв'язання. Нехай трикутник – правильний і точка перетину його медіан збігається з початком координат. Тоді вектор утворений поворотом

Рис. Д.18

вектора навколо початку координат на кут , тобто

, де ,

звідси .

Проте є коренем рівняння , тобто , або , звідки

.

Але , то . Тому і

або .

Помноживши останнє рівняння на , маємо: .

Задача Д18. На бічних сторонах рівнобедреної трапеції поза нею побудовані рівносторонні трикутники і . Доведіть, що: а) ,

; б) (або і лежать на одній прямій).

Розв’язання. Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб вісь ординат проходила через середини основ трапеції. Тоді вершини трапеції , комплексні координати яких рівні , , , відповідно, будуть симетричними відносно осі ординат, тобто , . Оскільки трикутники і рівносторонні, то можна сказати, що точка утворюється при повороті точки

навколо точки на кут , точка – при повороті точки навколо точки на

кут . Тобто комплексні координати точок і рівні відповідно:

, ,

а це означає, що точки і симетричні відносно осі ординат. Звідси, враховуючи симетрію точок і відносно осі , отримуємо, що і , тобто

. Оскільки комплексні координати векторів та дорівнюють

відповідно та , то дані вектори є симетричними відносно осі ординат і за властивістю осьової симетрії зберігати відстані маємо, що . Аналогічно можна показати, що .

Задача Д19. Трикутник отриманий із трикутника поворотом

навколо деякої точки на кут . Довести, що медіана трикутника перпендикулярна медіані трикутника .

Розв’язання. Виберемо систему координат так, щоб початок координат співпадав з точкою повороту *O*. Нехай у цій системі координат вершини трикутника

мають координати відповідно, тоді вершини отриманого при повороті на кут трикутника матимуть координати відповідно.
Знайдемо комплексні координати медіан і

; .

Легко бачити, що відношення комплексних координат векторів і є суто уявним числом , що свідчить про те, що медіани є взаємно перпендикулярними.

Додаток Е

Контрольна робота (один із варіантів)

Початковий рівень навчальних досягнень учнів

1. Розв’яжіть рівняння в комплексних чисел:

а) ; б) . (1 бал)

2. Знайдіть , якщо , . (1 бал)

3. Знайдіть модуль, аргумент комплексного числа та подайте його в тригонометричній формі:

а) ; б) . (1 бал)

Середній рівень навчальних досягнень учнів

4. Зобразіть на комплексній площині множину точок, які задовольняють умову: а)

; б) (1, 5 бала)

5. При яких значеннях та числа та будуть спряженими? (1,5 бала)

Достатній рівень навчальних досягнень учнів

6. Складіть квадратне рівняння за його коренями:

, . (1,5 бала)

7. Розв’яжіть в комплексних числах рівняння: . (1,5 бала)

Високий рівень навчальних досягнень учнів

8. Знайдіть геометричне місце точок комплексної площини, які задовольняють систему нерівностей:

(3 бали)

9. Додаткове завдання. Доведіть, що якщо , то .

Додаток Ж

Довгострокова домашня самостійна робота (один із варіантів)

1. Розв’яжіть рівняння в множині комплексних чисел:

а) ; б) . (1,5 бала)

2. Розкладіть на лінійні множники в полі :

а) ; б) . (1,5 бала)

3. Складіть рівняння найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами, що має корені: ,

. (1,5 бала)

4. Виразіть і через синус і косинус кутів , , . (1,5 бала)

5. Доведіть тотожність: . (1,5 бала)

6. Обчисліть суми: , . (1,5 бала)

7. Доведіть, що середини сторін довільного чотирикутника утворюють паралелограм. (1,5 бала)

8. Побудуйте правильний шестикутник. (1,5 бала)

9. На сторонах трикутника зовнішнім чином побудовані квадрати. Точки , , - центри цих квадратів. Доведіть, що , . (1,5 бала)

10. Доведіть, що якщо відрізок, що з’єднує середини основ трапеції, перпендикулярний до цих основ, то трапеція рівнобічна. (1,5 бала)

11. Доведіть, що якщо на сторонах трикутника ззовні побудовані правильні трикутники, то їх центри утворюють правильний трикутник. (1,5 бала)

12. Трикутник отримано паралельним перенесенням трикутника на деякий вектор . Доведіть, що точка перетину серединних перпендикулярів трикутника (ортоцентр) отримана паралельним перенесенням ортоцентра трикутника на той же вектор . (1,5 бала)

13. Ящик ковзає по похилій поверхні, розміщеній під кутом до горизонту, з постійною швидкістю . Знайдіть горизонтальну і вертикальну складові швидкості. (1,5 бала)

14. На візку, який рухається горизонтально і рівномірно зі швидкістю , встановлена труба. Під яким кутом до горизонту потрібно нахилити трубу, щоб капля дощу, що падає вертикально, впала на дно труби, не зачепивши її стінок, якщо швидкість падіння каплі ? (1,5 бала)

15. Дві паралельно з’єднані котушки мають опори і . Визначте загальний струм у колі, якщо відомо, що напруга, прикладена до цього кола, дорівнює В. (1,5 бала)

Додаток З

Дидактична гра «Перший мільйон».

Мета: за допомогою ігрової форми проведення заняття сприяти свідомому засвоєнню матеріалу про комплексні числа та розумовому розвитку учнів.

Обладнання: кодопроектор, картки із запитаннями, подарунки.

Правила гри: спочатку всі учні класу відповідають на одне запитання відбіркового туру. Переможець стає учасником гри і відповідає на запитання (усього десять запитань). За правильну відповідь учень отримує 5 балів. Якщо ж дає неправильну відповідь, то вибуває із гри.

Кожному учасникові гри надається три підказки: «50×50», «Підказка класу», «Допомога друга». При використанні підказки «50×50» ведучий забирає дві неправильні відповіді; а коли потрібна «Підказка класу», учні на кожен варіант відповіді піднімають руки; «Допомога друга» - гравець на свій розсуд вибирає учня, від якого хотів би отримати правильну відповідь протягом 30 с.

Перемагають ті учасники гри, які набрали найбільшу кількість балів.

Завдання при потребі проектуються кодопроектором на дошку; учасникові гри завдання пропонуються на картці.

I відбірковий тур

Розмістіть числа у порядку зростання їхнього модуля: ; ; ; . (; ; ;).

Запитання

1. Обчисліть частку .

A) . B) -1.

C) . D) .

2. Уявною частиною комплексного числа є число …

A) . B) .

C) . D) .

3. Знайдіть комплексні координати вектора , якщо комплексні координати його кінців відповідно рівні , .

A) . B) .

C) . D) .

4. Яка множина точок задовольняє нерівність ?

A) коло. B) пряма.

C) круг. D) відрізок.

5. Скільки різних коренів у множині має вираз ?

A) 1. B) 2.

C) 3. D) 4.

6. Визначте, якою буде сума чотирьох коренів многочлена .

A) 3. B) 4.

C) 6. D) 8.

7. Якому координатному куту належить зображення значення виразу ?

A) 1. B) 2.

C) 3. D) 4.

8. Обчисліть значення виразу .

A) -5. B) 5.

C) 7. D) 35.

9. Гомотетія з центром у точці і коефіцієнтом 5 у комплексній формі має вигляд…

A) . B) .

C) . D) .

10. Хто із математиків у своїй праці у 1777 році вперше вжив символ для позначення уявної одиниці?

A) Гаусс. B) Ейлер.
C) Кардано. D) Лейбніц.

II відбірковий тур

Чому дорівнює 18 степінь уявної одиниці? (-1).

Запитання

1. Яким є число ?

A) дійсним. B) раціональним.
C) ірраціональним. D) комплексним.

2. Назвіть число, спряжене до числа .

A) . B) -1.

C) . D) .

3. Якому координатному куту комплексної площини належить зображення 5 степені числа

?

A) 1. B) 2.
C) 3. D) 4.

4. Якому з кругів належить початок координат?

A) . B) .

C) . D) .

5. Обчисліть модуль комплексного числа .

A) 1. B) 2.
C) 4. D) 0.

6. Критерій ортогональності двох векторів з комплексними координатами і має вигляд:…

A) . B) .

C) . D) .

7. Подайте в алгебраїчній формі комплексне число .

A) . B) .

C) . D) .

8. Чому дорівнює площа трикутника, однією з вершин якого є початок координат, а дві інші мають координати 2 та відповідно?

A) 1. B) 2.

C) .　　　D) 4.

9. Яка формула перетворення симетрії відносно бісектриси I і III координатних кутів у комплексних координатах?

A) .　　　B) .

C) .　　　D) .

10. Чиє ім’я носить основна теорема алгебри многочленів, доведена ще у 1899 році?

A) Кардано.　　　B) Гаусса.

C) Муавра.　　　D) Коші.

III відбірковий тур

На площині задано точки та . Знайти всі комплексні числа, що відповідають точкам бісектриси кута . (Вісь).

Запитання

1. Знайдіть число, протилежне до даного: .

A) .　　　B) .

C) .　　　D) .

2. Знайти головне значення аргумента комплексного числа .

A) .　　　B) .

C) .　　　D) .

3. Обчисліть модуль комплексного числа .

A) 1.　　　B) 2.

C) .　　　D) 0.

4. Знайдіть тридцяту степінь числа .

A) .　　　B) .

C) .　　　D) .

5. Три комплексні числа мають однакові аргументи. Як розмістяться відповідні точки в комплексній площині?

A) на одному колі.　　　B) на осі .

C) на осі .　　　D) на одному промені.

6. Запишіть многочлен найменшого степеня з дійсними коефіцієнтами, кореням якого є числа ; .

A) . B) .

C) . D) .

7. Знайдіть комплексну координату вектора , отриманого паралельним перенесенням вектора на вектор , якщо , , .

A) . B) .

C) . D) .

8. Яку пряму задає рівняння , де - суто уявне число?

A) вісь . B) бісектрису II і IV коорд. кутів.

C) вісь . D) бісектрису I і III коорд. кутів.

9. Дано комплексний струм і комплексна напруга . Визначте комплексний опір у колі.

A) 200 Ом. B) 110 Ом.

C) 240 Ом. D) 11 Ом.

10. Хто одним із перших в історії математики оперував комплексними числами, називаючи їх при цьому “суто софістичними величинами”?

A) Кардано. B) Гаусс.

C) Бомбеллі. D) Вессель.

IV відбірковий тур

Знайдіть , якщо відомо, що - суто уявне число. ( ).

Запитання

1. Спряженим до комплексного числа є число

A) . B) .

C) . D) .

2. Знайдіть корені рівняння в множині комплексних чисел.

A) . B) .

C) . D) .

3. Три комплексні числа мають однакові модулі. Як розмістяться відповідні точки в комплексній площині?

A) на одному колі. B) на осі .

C) на осі . D) на одному промені.

4. Обчисліть .

A) -1. B) 2.

C) 0. D) 1.

5. Критерій колінеарності двох векторів з комплексними координатами і має вигляд:…

A) . B) .

C) . D) .

6. Обчисліть .

A) 8. B) 4.

C) 16. D) .

7. Визначте, яким буде добуток чотирьох коренів многочлена .

A) 2. B) 1.

C) 6. D) 8.

8. Вектор має комплексну координату . Знайдіть комплексну координату його кінця, якщо комплексна координата його початку .

A) . B) .

C) . D) .

9. Яка формула перетворення симетрії відносно II і IV координатних кутів у комплексних координатах?

A) . B) .

C) . D) .

10. Згадайте, хто з математиків у 1831 році ввів термін “комплексні числа”.

A) Гаусс. B) Ейлер.

C) Гамільтон. D) Лейбніц.

Підсумок гри – нагородження переможців. Учитель аналізує рівень засвоєння курсу за вибором “Комплексні числа та їх застосування”; відповідає на запитання учнів.

Додаток И

Залікова робота (один із варіантів)

Початковий рівень навчальних досягнень

1.Розв'яжіть рівняння в полі : . (1 бал)

2.Знайдіть значення виразу: , якщо , . (1 бал)

3.Зобразіть на комплексній площині множину всіх точок, для яких

. (1 бал)

Середній рівень навчальних досягнень

4.Обчисліть: . (1,5 бала)

5.За допомогою нерівностей запишіть множину точок комплексної площини, розміщених у крузі з центром у початку координат радіуса 3, які не належать симетричній відносно дійсної осі смузі шириною 2. (1,5 бала)

Достатній рівень навчальних досягнень

Розв'яжіть одне завдання з двох запропонованих (3 бали)

6.Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

7.Одна із вершин правильного трикутника має комплексну координату . Знайдіть комплексні координати двох його інших вершин, якщо центр цього трикутника знаходиться в початку координат.

Високий рівень навчальних досягнень

Розв'яжіть одне завдання з двох запропонованих (3 бали)

8.Знайдіть площу трикутника , вершини і якого мають комплексні координати

, .

9. Доведіть тотожність, використовуючи комплексні числа:

.

Додаток К

Таблиця К.1.

Результати оцінювання

Форми контролю / Прізвище, ім’я учня	Математичний диктант	Самост. робота із взаємоперевіркою	Рівнева самостійна робота	Контрольна робота	Самост. робота з комп’ют. перевіркою	Матем. диктант на застосування у геом.	Довгострокова домашня сам. робота	Залікова робота	Знання означень, основних формул	Написання рефератів		Виконання індивід. (творчих) завдань	Активність у дидактичній грі	Сумарна кількість балів	Рейтинг
Максимальна кількість балів	12	5	12	12	5	12	15	12	5	5	5	10	10	120	-

Додаток Л

Приклад роботи за навчально-корегуючою програмою “Комплексні числа”

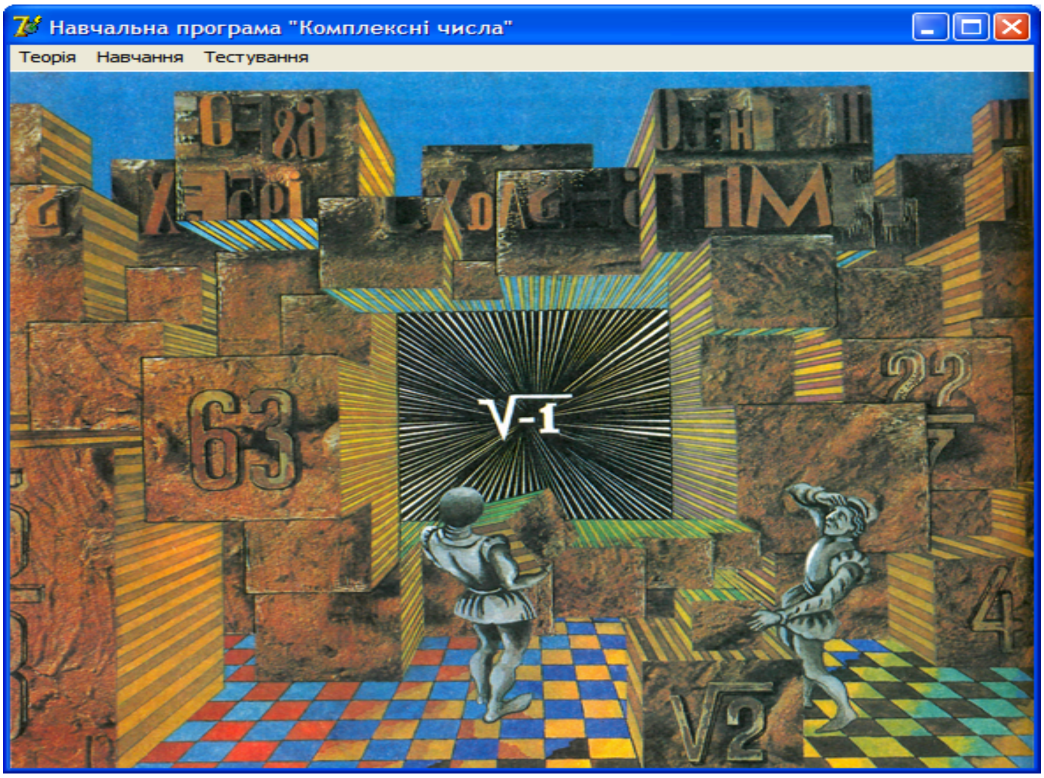


Рис. Л.1. Початковий вигляд монітора.

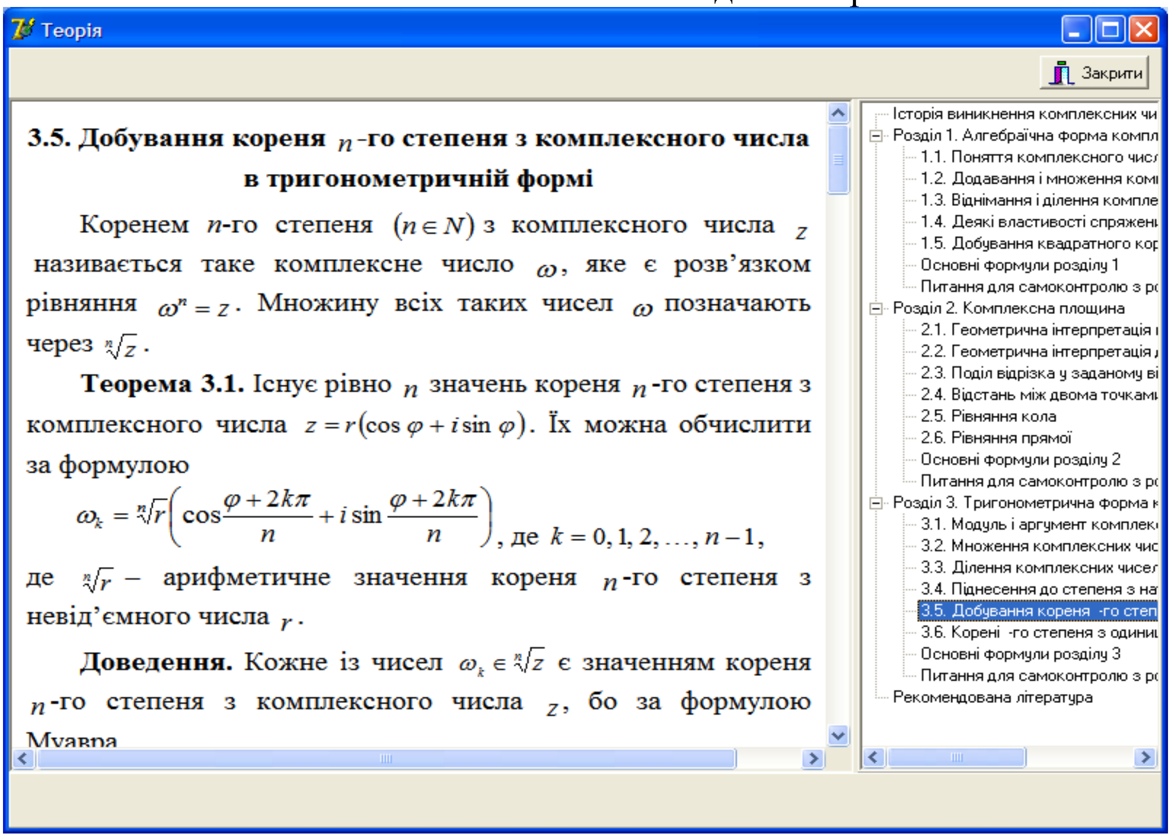


Рис. Л.2. Вигляд монітора з вибраним теоретичним питанням.

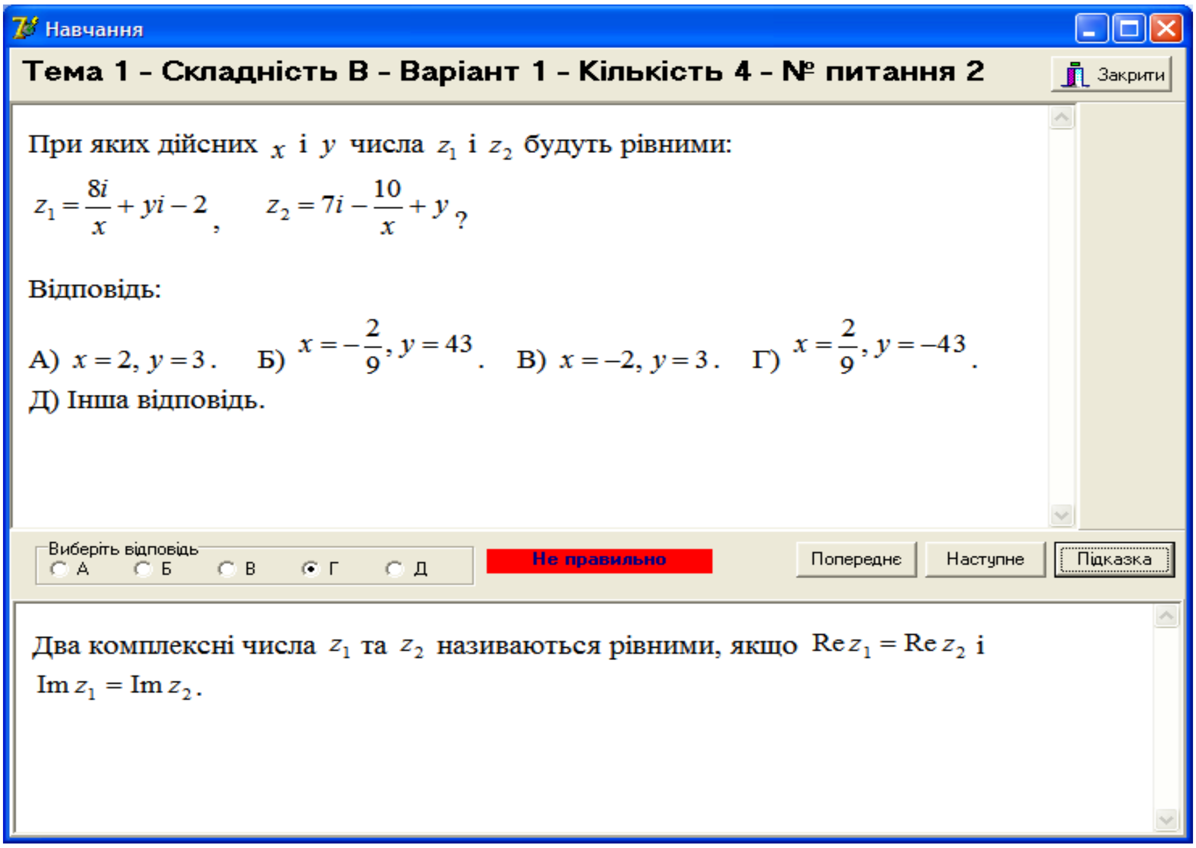


Рис. Л.3. Вигляд монітора з вибраним варіантом завдань для навчання і неправильною відповіддю учня.

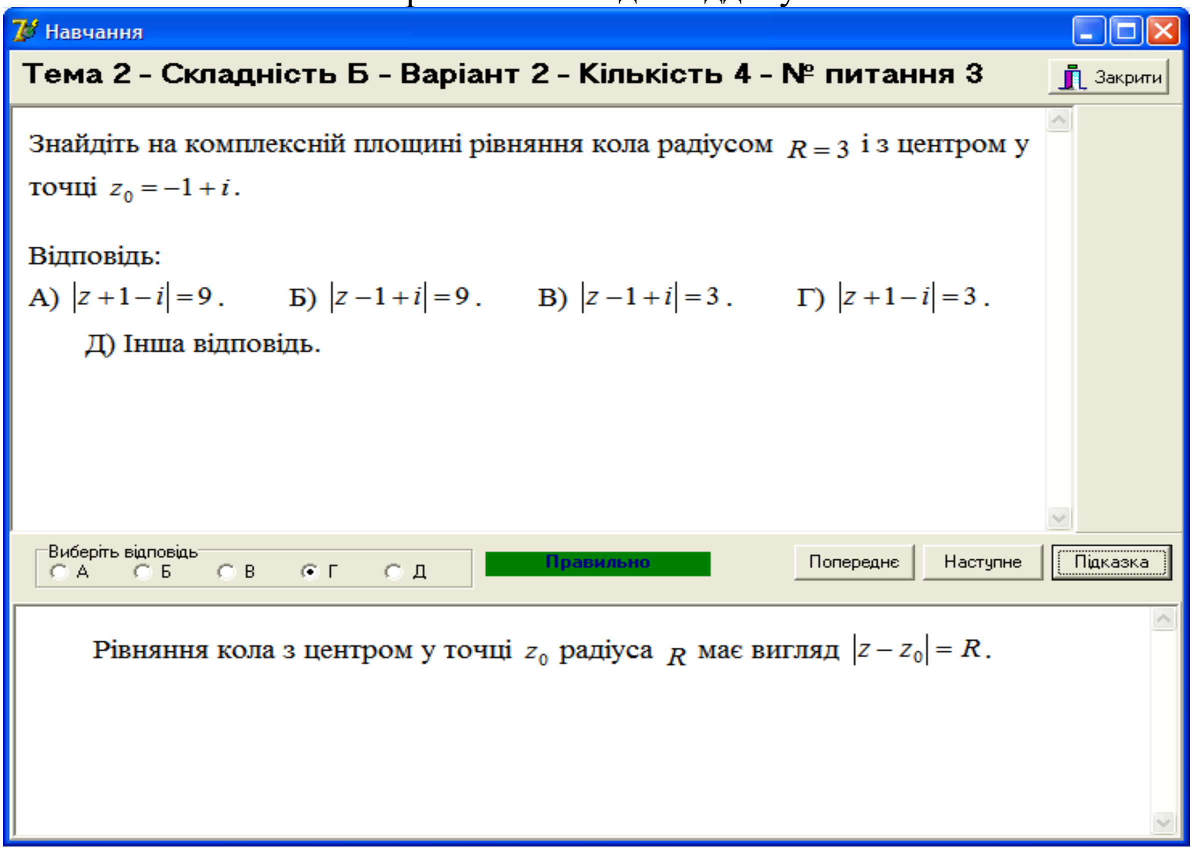


Рис. Л.4. Вигляд монітора з вибраним варіантом завдань для навчання і правильною відповіддю учня.

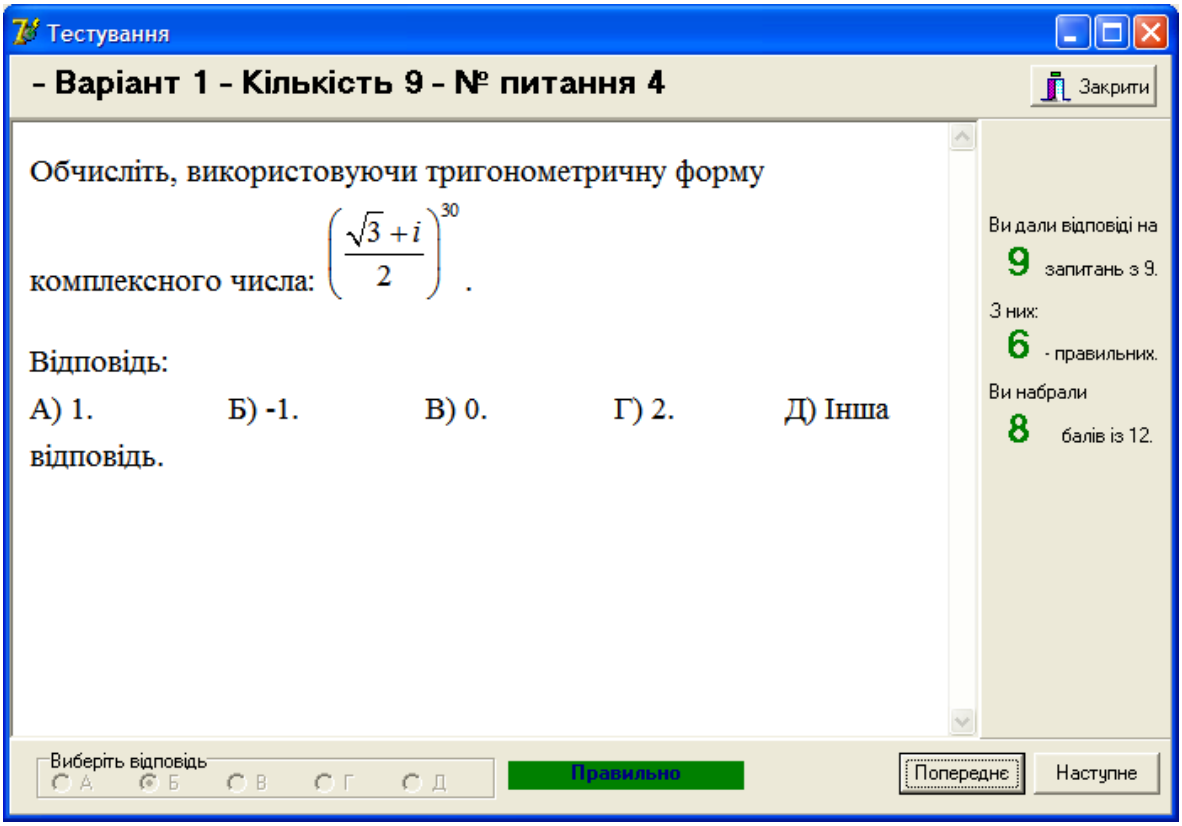


Рис. Л.5. Вигляд монітора з вибраним варіантом завдань для тестування.

Додаток М

Анкета для студентів-першокурсників математичних та інженерних спеціальностей

1. У якому класі ви навчалися?
   у звичайному класі загальноосвітньої школи;
   у класі або школі з поглибленим вивченням математики.
2. За яким підручником з алгебри проводилось навчання у старших класах?
   Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 класів середньої школи. / За ред. А. М. Колмогорова. – К.: Радянська школа, 1992. – 350 с.
   Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 608 с.
   Шкіль М. І., Колесник Т. В., Хмара Т. М. Алгебра і початки аналізу: Підручники для 10, 11 класів з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти. – К.: Освіта, 2000. – 318 с.
   ваш варіант відповіді: ____
   ____
3. Де ви вперше познайомилися з комплексними числами (числа виду , де)?
   на уроках в школі;
   на факультативах;
   на заняттях математичного гуртка;
   у вищому навчальному закладі;
   ваш варіант відповіді: ______________________________________.
4. Як на вашу думку, чи була б цікавою і посильною дана тема для учнів старших класів загальноосвітньої школи?
   Так.
   Ні.
5. Якщо ви вивчали комплексні числа в школі, то згадайте обсяг вивченого матеріалу з цієї теми:
   1. Поняття комплексного числа.
   2. Спряжені комплексні числа і їх властивості.
   3. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
   4. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.
   5. Тригонометрична форма комплексного числа.
   6. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.
   7. Показникова форма комплексного числа.
   8. Комплексні корені многочленів.
   9. Застосування комплексних чисел в тригонометрії.
   10. Застосування комплексних чисел в геометрії.
   11. Застосування комплексних чисел у фізиці.
6. Якщо ви вивчали комплексні числа в школі, то чи полегшує вивчення цієї теми сприймання вами цього матеріалу у вищому навчальному закладі?
   Так.
   Ні.
7. Ваші зауваження чи побажання щодо вивчення комплексних чисел у школі:
   ____
   ____

Додаток Н
Анкета для учителів (викладачів) курсу за вибором (спецкурсу)

у _______________ ____

клас (група) навчальний заклад

Кількість учнів (студентів): _________ чол.

Профіль (напрям) навчання: ______________________________________ .

Таблиця Н.1

Зміст	Вибраний зміст (+ - вивчався, – - не вивчався)	Інтерес до матеріалу (+ - наявний, – - відсутній)	Форми проведення занять (ф - фронтальна, г - групова, і - індивідуальна)
Поняття комплексного числа			
Спряжені комплексні числа і їх властивості			
Алгебраїчна форма комплексного числа			
Геометрична інтерпретація комплексних чисел			
Тригонометрична форма комплексного числа			
Показникова форма комплексного числа			
Комплексні корені многочленів			
Застосування комплексних чисел в тригонометрії			
Використання комплексних чисел в геометрії			
Застосування комплексних чисел у фізиці			

Продовження додатку Н

Дайте відповіді на запитання у відсотках із таких міркувань: 0% - відповідає відповіді “ні”, 100% - відповідає відповіді “так”.:

Таблиця Н.2

1. Чи вважаєте Ви доцільним вивчення курсу за вибором “Комплексні числа та їх застосування” у старшій школі? Якщо так, то в якому класі?	
2. Чи сприяє розв’язування задач методом комплексних чисел підвищенню рівня математичної підготовки учнів?	
3. Чи використовуєте Ви при вивченні теми “Комплексні числа” історичні відомості і в якій мірі?	

4. Чи зможете Ви організувати з цієї тематики навчально-дослідницьку роботу учнів?	
5. Чи вважаєте Ви, що готові реалізувати міжпредметні зв'язки математики та інших дисциплін? Якщо так, то чи сприяє цьому, і якою мірою, використання комплексних чисел?	
6. Чи сприяє розв'язування задач міжпредметного характеру з використанням комплексних чисел більш глибокому розумінню прикладного значення математики?	
7. Як ви вважаєте, чи варто фіксувати в атестаті про середню освіту факт вивчення учнем курсу за вибором, що поглиблює академічний курс математики?	
8. Які у Вас будуть побажання щодо змісту навчання математики, зокрема основ теорії комплексних чисел, та його методичного забезпечення?	

Додаток П

Анкета для учасників експерименту

1. Як Ви гадаєте, прослухавши курс за вибором "Комплексні числа та їх застосування", Ви оволоділи новим методом розв'язування задач?
   Так. Ні.
2. Чи цікавий для Вас метод комплексних чисел? Якщо так, то чим саме?
   Так. Ні.
   ____
3. Чи цікаво Вам було вивчати застосування комплексних чисел у різних галузях науки і техніки? Які саме?
   Так. Ні.
   ____
4. Чи хотіли б Ви зайнятися самостійним дослідженням деякої проблеми теорії комплексних чисел або з іншого розділу математики?
   Так. Ні.
5. Які форми проведення курсу за вибором Ви вважаєте доцільними?
   ____

Додаток Р

Тест для визначення рівня навчальних досягнень учнів експериментальних і контрольних груп на початку формувального експерименту

Завдання 1-12 мають по чотири варіанти відповіді, із яких тільки одна правильна. Правильно виконане завдання оцінюється 1 балом. (Правильні відповіді підкреслено.)

1. Знайдіть значення виразу при .

А	Б	В	Г

2. Спростіть вираз .

А	Б	В	Г

3. З формули виразіть змінну через .

А	Б	В	Г

4. Вкажіть область визначення функції .

А	Б	В	Г

5. Числа і є коренями рівняння…

А	Б	В	Г

6. Якщо , то вираз дорівнює...

А	Б	В	Г

7. Якщо дорівнює 3, то дорівнює...

А	Б	В	Г

8. При якому значенні віссю симетрії параболи є пряма ?

А	Б	В	Г

9. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 112, 110,…?

А	Б	В	Г

10. Між числами 1 і 81 стоять три числа, які разом з даними утворюють геометричну прогресію. Її знаменник дорівнює...

А	Б 3	В	Г -3

11. Спростіть вираз .

А	Б	В	Г

12. Знайдіть значення виразу .

А	Б	В 2	Г 0

Додаток С

Таблиця С.1

Розрахунки критерію Колмогорова-Смирнова при аналізі двох емпіричних вибірок за результатами проведення контрольних робіт на початку формувального експерименту

Число прав. відпо-відей	Абсолютна частота		Накопичена частота				
12	2	3	94	95	1	1	0
11	5	6	92	92	0,979	0,968	0,011
10	10	10	87	86	0,926	0,905	0,021
9	11	12	77	76	0,819	0,800	0,019
8	24	23	66	64	0,702	0,674	0,028
7	20	22	42	41	0,446	0,432	0,014
6	9	10	22	19	0,234	0,200	0,034
5	7	4	13	9	0,138	0,095	0,043
4	4	3	6	5	0,064	0,053	0,011
3	2	1	2	2	0,021	0,021	0
2	0	1	0	1	0	0,011	0,011
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Найбільша різниця між накопиченими частотами

.

Критичне значення статистики критерію для і відповідно обчислюємо за формулою

.

Звідси (0,043<0,198).

Додаток Т

Тест для визначення рівня володіння основними поняттями теорії комплексних чисел (один із варіантів)

Завдання 1-12 мають по чотири варіанти відповіді, із яких тільки одна правильна. Правильно виконане завдання оцінюється 1 балом. (Правильні відповіді підкреслено.)

1. Уявна одиниця – це число …

А –1	Б 1	В	Г

2. Знайдіть число, спряжене до числа .

А	Б	В	Г

3. Обчисліть .

А	Б	В	Г

4. Розв’яжіть рівняння в полі комплексних чисел .

А	Б	В	Г

5. Знайдіть дійсні числа та з умови рівності комплексних чисел

.

А	Б	В	Г

6. Знайдіть модуль і головне значення аргументу комплексного числа

.

А	Б	В	Г

7. Подайте комплексне число в алгебраїчній формі.

А	Б	В	Г

8. Знайдіть комплексні числа, для яких .

А	Б	В	Г

9. Піднесіть до степеня комплексне число .

А	Б	В	Г

10. Запишіть у комплексній формі рівняння кола радіуса 2 з центром у точці

.

А	Б	В	Г

11. Запишіть у комплексній формі рівняння бісектриси II і IV координатних кутів.

А	Б	В	Г

12. Складіть квадратне рівняння, якщо відомі його корені , .

А	Б	В	Г

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1.Активные формы организации процесса обучения: [метод. рекомендации / сост. В. Н . Осинская]. – Ворошиловград, 1988. – 43 с.

2.Актуальные проблемы возрастной и педагогической психологии / [под ред. Ф. И. Иващенко, А. Л. Коломинского]. – Минск: Вышейшая школа, 1980. – 175 с.

3. Алгебра: [підруч. для 8-10 классов средней школы] / В. М. Брадис, Н. С. Истомина, А. И. Маркушевич, К. П. Сикорский; под ред. А. И. Маркушевича. – М.: Учпедгиз, 1957. - 257 с.

4.Алгебра: учебное пособие для IX-X классов средних школ с математической специализацией / [Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, С. И. Шварцбурд та ін.] – М.: Просвещение, 1972. – 302 с.

5.Александров А. Пути развития школы / А. Александров // Математика в школе. – 1987. – № 5. – С. 9-14.

6. Алексюк А. М. Загальні методи навчання в школі / Анатолій Миколайович Алексюк. – К.: Радянська школа, 1981. – 206 с.

7. Амонашвили Ш. А. Воспитательная и образовательная функции оценки учения школьников: Эксперимент – педагогическое исследование / Шалва Александрович Амонашвили. – М.: Педагогика, 1984. – 296 с.

8. Амонашвили Ш. А. Психологические основы педагогики сотрудничества: [книга для учителя] / Шалва Александрович Амонашвили. – К.: Освіта, 1991. – 111с.

9. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел / Иван Козьмич Андронов. – М.: Просвещение, 1975. – 158 с.

10. Андронов И. К. Полвека развития математического образования в СССР / И. К. Андронов // Математика в школе. – 1966. – №2 . – С. 2-12; №3. – С. 4-11.

11. Анисимова Н. С. Компьютерная среда DERIVE на факультативе по алгебре и геометрии в старших классах средней школы / Н. С. Анисимова, Т. Л. Ниренбург // Информатика и образование. – 1997. – №8 . – С. 60-63.

12. Антология педагогической мысли России первой половины XIX века / [вступ. ст., биогр. очерки, сост. и коммент. П. А. Лебедева]. – М.: Педагогика, 1987. – 559 с.

13.Апанасенко М. Г. Лекційно-семінарська форма навчання фізики в середній загальноосвітній школі: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 "Теорія і методика навчання (фізика)" / М. Г. Апанасенко. – К., 1992. – 28 с.

14.Архипов М. М. Воспитание интереса к математике / М. М. Архипов // Математика в школе . – 1964. – №5 . – С. 24-29.

15. Бабанский Ю. К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Юрий Константинович Бабанский. – М.: Просвещение, 1985. – 208 с. – (Б-ка учителя по общ. пробл. теории обучения и воспитания).

16. Бабанский Ю. К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Методические основы / Юрий Константинович Бабанский. – М.: Просвещение, 1982. – 192с.

17.Балк Г. Д. Мнимые числа и геометрические задачи / Г. Д. Балк, М. Б. Балк // Квант. – 1973. – №3. – С. 22-31.

18.Балк М. Б. Реальные применения мнимых чисел / М. Б. Балк, Г. Д. Балк, А. А. Полухин. – К.: Радянська школа, 1988. – 255 с.

19.Балтага В. К. Комплексные числа / В. К. Балтага. – Харьков: Изд. ХГУ, 1959. – 103 с.

20.Бевз Г. П. Методи навчання математики / Г. П. Бевз // Математика в школі. – 1998. - №4. – С.4-5.

21. Бекаревич А. Н. Формирование понятия числа в 4-8 кл.: [книга для учителя] / Алексій Никифорович Бекаревич. – Минск: Нар. асвета, 1985. – 120 с.

22. Бертран Ж. Алгебра. Для гимназій и реальных училищ / Ж. Бертран. –

С.-Петербург: Типография М. М. Васюлевича, 1885. – 726 с.

23. Билибин Н. Алгебра. Для гимназій и реальных училищ / Н. Билибин. – С.-Петербург: Типография М. М. Стасюлевича, 1896. – 673 с.

24. Блонский П. П. Избранные педагогические и психологические сочинения: в 2 т. / Павел Петрович Блонский; [сост.: М. Г. Данильченко, А. А. Никольская]; под ред. А. В. Петровского. – М.: Педагогика, 1979 – . – Т. 2. – 1979. – 398 с.

25. Богоявленская Д. Б. Пути к творчеству / Диана Борисовна Богоявленская. – М.: Знание, 1981. – 96 с.

26. Богоявленский Д. Н. Психология усвоения знаний в школе / Д. Н. Богоявленский, Н. А. Менчинская. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1959. – 347 с.

27. Божович Л. И. Личность и ее формирование в детском возрасте / Лидия Ильинична Божович. – М.: Просвещение, 1968. – 464 с.

28. Болтянский В. Г. К проблеме дифференциации школьного математического образования / В. Г. Болтянский, Г. Д. Глейзер // Математика в школе. – 1988. – №3. – С.9-10.

29. Бородін О. І. Історія розвитку поняття про число і системи числення / Олексій Іванович Бородін. – К.: Радянська школа, 1968. – 116 с.

30. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе: [учеб. пособие для пед. ин-тов и гос. ун-тов] / Владимир Модестович Брадис; по ред. А. И. Маркушевича. – [3-е изд.]. – М.: Учпедгиз, 1952. – 504 с.

31. Брейтигам Э. К. Формирование математических понятий высокого уровня абстракции / Э. К. Брейтигам // М.: Педагогика, 1998. - №7. – С. 45-49.

32. Бродський Я. С. Про електричний струм, похідну та комплексні числа / Я. С. Бродський, А. К. Сліпенко // Математика. – 2002. -№7(163). – С. 9-11.

33. Брушлинский А. В. Психология мышления и проблемное обучение / Андрей Владимирович Брушлинский. – М.: Знание, 1983. -96 с.

34. Бударный А. А. Индивидуальный подход в обучении / А. А. Бударный // Советская педагогика. – 1965. – № 7. – С. 70-83.

35. Буковська О. І. Комплексні числа / Оксана Іванівна Буковська. – Х.: Основа, 2004. – 112 с.

36. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки; пер. с франц. И. Г. Башмаковой. – М.: URSS: КомКнига, 2006. – 291, [1] с.

37. Бурда М. І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М. І. Бурда // Педагогіка і психологія. – 1996. – №1. – С. 40-45.

38. Бурда М. І. Теорія шкільного підручника з математики як предмет методичного дослідження / М. І. Бурда // Математика в школі. – 1999. – №2. – С. 4-7.

39. Бэм Д. А. Сборник упражнений и задач по элементарному курсу алгебры: [курс старших кл . сред. учеб. заведений] Ч.2. / Д. А. Бэм, А. А. Волков, Р. Э. Струве. – М.: Типография т-ва Н. Д. Сытина, 1915. – 331 с.

40. Василенко І. Я. Організація групової навчально-пізнавальної діяльності учнів 7-9 класів на уроках геометрії: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Василенко Ігор Ярославович. – К., 1992. – 172 с.

41. Васильєв С. Мета – розвиток творчої особистості: Деякі питання викладання математики в математичних класах / С. Васильєв // Рідна школа. –1996. – №1. – С. 39-40.

42. Вейц Б. Є. Алгебра і початки аналізу: [пробні підруч. для IX і X класів] / Б. Є. Вейц, І. Т. Демидов; під ред. А. Колмогорова. - М.: Просвещение, 1973, 1974.

43. Верченко А. И. Дифференциация обучения математики во Франции / А. И. Верченко, С. Б. Верченко // Математика в школе. – 1989. – №3. – С. 148-158.

44. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ в 11 классе: [учебное пособие для классов с углубленным изучением математики] / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1990. – 288 с.

45.Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике: [книга для внеклассного чтения. IX-X кл.] / Наум Яковлевич Виленкин. – М.: Просвещение, 1978. – 192 с. – С. 173-190. – (Мир знаний).

46.Віленкін Н. Я. Алгебра і математичний аналіз для 10 класу: [навчальний посібник для учнів шкіл і класів з поглибленим вивченням математики] / Н. Я. Віленкін [та ін.] - М.: Просвещение, 1984. – 352 с.

47.Власенко К. В. Формування прийомів евристичної діяльності учнів на уроках геометрії в класах з поглибленим вивченням математики: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Власенко Катерина Володимирівна. – Донецьк, 2003. – 293 с.

48.Возняк Г. М. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики / Г. М. Возняк, К. П. Маланюк. – К.: Радянська школа, 1984. – 80 с.

49.Волков И. П. Учим творчеству / Игорь Павлович Волков. – М.: Педагогика, 1992. – 86 с.

50.Воловик П. М. Теорія ймовірностей і математична статистика в педагогіці / Павло Микитович Воловик. – К.: Радянська школа, 1969. – 222 с.

51.Выготский Л. С. Воображение и творчество в детском возрасте: Психологический очерк: [книга для учителя] / Лев Семенович Выготский – М.: Педагогика, 1991. – 480 с.

52.Выготский Л. С. Педагогическая психология / Лев Семенович Выготский; под ред. В. В. Давыдова. – М.: Педагогика, 1991. – 480 с.

53.Галицкий М. Л. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: Методические рекомендации и дидактические материалы: [пособие для учителя] / М. Л. Галицкий, М. М. Мошкович, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1990. – 352 с.

54.Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П. Я. Гальперин // Исследование мышления в советской психологии / [под. ред. Е. В. Шороховой]. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 516 с.

55.Гаткевич Д. И. О мышлении старшеклассника / Д. И. Гаткевич // Вопросы психологии познавательной деятельности учащихся / Д. И. Гаткевич. – М.: Просвещение, 1974. - 257 с.

56.Гельфанд М. Б. Формирование математических понятий в процессе преподавания алгебры и начал анализа / Михаил Борисович Гельфанд. – К.: Радянська школа, 1976. – 143 с.

57.Генкин Г. З. Преподавание в классе с углубленным изучением математики / Г. З. Генкин, Л . П. Глейзер // Математика в школе. – 1991. - №1. – С. 20-22.

58.Гибш И. А. Алгебра: [пособие для учителей IX-XI классов] / Исидор Аронович Гибш. – М.: Учпедгиз, 1960. – 664 с.

59.Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках / Семен Григорьевич Гиндикин. – М.: Наука, 1985. – 191 с.

60.Глейзер Г. И. История математики в школе. IX-X кл.: [пособие для учителей] / Герш Исаакович Глейзер. – М.: Просвещение, 1983. – 352 с.

61.Гнеденко Б. В. О математическом творчестве / Б. В. Гнеденко // Математика в школе. – 1979. – №6. – С. 16-22.

62.Гнеденко Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике / Борис Владимирович Гнеденко. – М.: Просвещение, 1982. – 144 с.

63.Головань М. С. Розвиток пізнавальної активності учнів в процесі навчання алгебри і початків аналізу на основі НІТ: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Головань Микола Степанович. – К., 1997. – 177 с.

64.Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / Семен Устимович Гончаренко. – К.: Либідь, 1997. – 376 с.

65.Гончаров Н. К. Еще раз о дифференцированном обучении в старших классах общеобразовательной школы / Н. К. Гончаров // Советская педагогика. – 1963. – №2. – С. 39-50.

66.Гончаров Н. К. О введении фуркации в старших классах средней школы / Н. К. Гончаров // Советская педагогика. – 1958. – №6. – С. 12-37.

67.Горошко Ю. В. Вплив нової інформаційної технології на практичну значимість результатів навчання математики в старших класах середньої школи: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Горошко Юрій Васильович. – К., 1993. – 103 с.

68.Грабарь М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях: Непараметрические методы / М. И. Грабарь, К. А. Краснянская. – М.: Педагогика, 1977. – 136 с.

69.Граве Д. Начала алгебры: [классное руководство для гимназий и другихъ учебных заведеній] / Д. Граве. – Петроград: Изданіе К. Л. Рикера, 1915. – 316 с.

70.Груденов Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем: [пособие для учителя] / Яков Иосифович Груденов. – М.: Просвещение, 1981. – 95 с.

71. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Яков Иосифович Груденов. – М.: Педагогика, 1987. – 158 с.

72.Гузеев В. Содержание образования и профильное обучение в старшей школе / В. Гузеев // Народное образование. – 2002. – №9. – С. 113-123.

73.Гутер Р. С. Джироламо Кардано / Р. С. Гутер, Ю. Л. Полунов – М.: Знание, 1980. – 192 с.

74.Даан-Дальмедико А. На стыке алгебры, анализа и геометрии: комплексные числа / А. Даан -Дальмедико, Ж. Пейффер // Пути и лабиринты: (очерки по истории математики) / А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер; под ред. И. Г. Башмаковой; [пер. с франц. А. А. Бряндинской]. – М.: Мир, 1986. – 432 с.

75.Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении. (Логико-психологические проблемы построения учебных предметов) / Василий Васильевич Давыдов. – М.: Педагогика, 1972. – 424 с.

76.Давыдов В.В. О понятии развивающего обучения / В. В. Давыдов // Педагогика. – 1995. – №1. – С. 29-40.

77.Державна національна програма "Освіта (Україна XXI століття)". – К.: Райдуга, 1994. – 62 с.

78.Державний стандарт базової і повної середньої освіти в Україні: Освітня галузь "Математика" // Освіта України. – 2004. – 20 січ. (№5). – С.7–8.

79.Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики: учеб. пособие для педагог. ин-тов / [Под ред. М. А. Данилова, М. Н. Скаткина]. – [2-е изд., перераб. и доп]. – М.: Просвещение, 1982. – 319 с.

80.Дидык Г. В. Содержание и формы углубленного изучения математики в старших классах: автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 "Теория и методика обучения (математика)" / Г.В.Дидык. – К., 1990. – 17 с.

81.Диференціація в навчанні математики / [Дорофеєв Г. В., Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Фірсов В. В.] // Математика в школі. – 1990. – № 4. – С. 21-27.

82.Дополнительные главы по курсу математики: [сборник статей / сост. З. А. Скопец]. – М.: Просвещение, 1974. – 256 с.

83.Дорофеев Г. В. О некоторых вопросах, связанных с формальным определением комплексного числа // Углубленное изучение алгебры и анализа: [сборник статей] / Георгий Владимирович Дорофеев. – М.: Просвещение, 1977. – 257 с. – С. 202-214.

84.Дорофеев Г. В. Строгость определения математических понятий с методической точки зрения / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1984. – №3. – С. 56-60.

85.Дорошенко Д. І. Історія України: З малюнками: Для школи й родини / Дмитро Іванович Дорошенко. – К.: Освіта, 1993. – 238 с.

86.Дрозд Ю. А. Комплексні числа як подібності площини / Ю. А. Дрозд // У світі математики. – К.: Радянська школа, 1979. – Вип. 10. – С. 71-81.

87.Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін; під ред. Г. О. Михаліна. – К.: Академія, 2002. – 624 с.

88.Ефремова А. И. Межпредметные связи физики и математики в 9-11 классах средней общеобразовательной школы: дисс. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Ефремова Олександра

Игоревна. – Одесса, 2001. – 223 с.

89.Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики: [посіб. для вчителів] / Мирослав Іванович Жалдак. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.

90.Жалдак М. І. Рiманові комплексні числа та їх застосування до уточнення понять степеня, експоненти, логарифма / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін // Математика в школі. – 2005. - № 7. – С. 43-50.

91.Жовтан Л. В. Диференціація навчання учнів 7-11 класів у процесі поглибленого вивчення предметів природничо-математичного циклу: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.09 / Жовтан Людмила Василівна. – Луганськ, 2000. – 275 с.

92.Заброцький М. М. Основи вікової психології: [навчальний посібник] / Михайло Михайлович Заброцький. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2002. – 112 с.

93.Завало С. Т. Комплексні числа / Сергій Трохимович Завало. – К.: Вища школа, 1982. – 135 с. – (Б-ка фіз.-мат. школи. Математика).

94.Загальні критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загальної середньої освіти // Математична газета. – 2008. – №5. – С. 1-6.

95.Задачі з математики. Алгебра / [В. В. Вавілов, І. І. Мельніков, С. Н. Олехник, П. І. Пасіченко] – М.: Наука, 1987. – 432 с.

96.Зайцева Т. В. Розвиток розумової діяльності старшокласників у процесі вивчення алгебри та початків аналізу з використанням інформаційних технологій: дис. … кандидата пед. наук: 13.00. 02 / Зайцева Тетяна Василівна. – К., 2001. – 215 с.

97.Закон України “Про загальну середню освіту” // Інформаційний збірник МО України. – К.: Педагогічна преса, 1999. - №15. С. 6-31.

98.Закон України “Про освіту”. – К.: Генеза, 1996. – 36 с.

99.Занков Л. В. Дидактика и жизнь / Леонид Владимирович Занков. – М.: Просвещение, 1968. – 175 с.

100.Захарова Т. Б. Профильная дифференциация обучения информатике на старшей ступени школы / Татьяна Борисовна Захарова. – М.: Б. и., 1997. – 212 с.

101.Збірник задач з математики: [посібник для учнів (для факультативних занять в 9-10 класах) / під ред. З. А. Скопеца]. - М.: Просвещение, 1971. – 157 с.

102.Иванов О. А. Углубленное математическое образование в школе сегодня /О. А. Иванов // Математика в школе. – 2001. – № 2. – С.10–43.

103.Избранные вопросы математики, 10 кл.: [факультативный курс / под ред. В. В. Фирсова]. – М.: Просвещение, 1980. – 190 с.

104.История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3 т. / [под ред. А. П. Юшкевича]. – М.: Наука, 1970-1972.

105.Ігнатенко М.Я. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики / Микола Якович. Ігнатенко. – К.: Тираж, 1997. – 299 с.

106.Історія педагогіки: [навч. посібник для пед. ін-тів / за ред. М. С. Гриценко]. – К.: Вища школа, 1973. – 447 с.

107.Кабанова-Меллер Е. Н. Психология формирования знаний и навыков у школьников. Проблема приемов умственной деятельности / Евгения Николаевна Кабанова-Меллер. – М.: Изд. АПН РСФСР, 1962. – 376 с.

108.Кабанова-Меллер Е. Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Евгения Николаевна Кабанова-Меллер. – М.: Знание, 1981. – 160 с.

109.Кабанова-Меллер Е. Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Евгения Николаевна Кабанова-Меллер. – М.: Просвещение, 1968. – 288 с.

110.Калашников А. Г. Проблемы политехнического образования // Избранные труды / Алексей Георгиевич Калашников. – М.: Педагогика, 1990. – 368 с.

111.Калмыкова З. И. Продуктивное мышление как основа обучаемости / Зинаида Ильинична Калмыкова. – М.: Педагогика, 1981. – 200 с.

112.Калмыкова З. И. Психологические принципы развивающего обучения / Зинаида Ильинична Калмыкова. – М.: Знание, 1979. – 48 с.

113.Калужнін Л. А. Побудова поля комплексних чисел / Л. А. Калужнін // У світі математики. – К.: Радянська школа, 1974. – Вип. 5. – С. 111-119.

114.Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа / И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. – М.: Наука, 1973. – 144 с.

115.Карп А. П. Материалы для работы над темой “Комплексные числа” в классах с углубленным изучением математики / А. П. Карп // Математика в школе. – 1992. – №6. – С. 8-11.

116.Кириллова Г. Д. Теория и практика урока в условиях развивающего обучения / Галина Дмитриевна Кириллова. – М.: Просвещение, 1980. – 159 с.

117.Кирсанов А. А. Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема / Анатолий Александрович Кирсанов. – Казань: Изд-во университета, 1982. – 224 с.

118.Кисельов А. П. Алгебра: [підручн. для середн. шк.]. Ч. 2. / Андрій Петрович Кисельов. – К.: Радянська школа, 1966. – 264 с.

119.Кларин М. В. Обучение на основе полного усвоения / М. В. Кларин // Дифференциация как система. Ч.1. / Михаил Владимирович Кларин. – М.: Новая школа, 1992. – 64 с.

120.Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии: [в 2 т.] / Ф. Клейн; под ред. М. М. Постникова; [пер. с нем. Н. М. Нагорного]. – М.: Наука, 1989 – . – Т.1. – 1989. – 453, [1] с.

121.Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: [в 2 т.] / Ф. Клейн; под. ред. В. Г. Болтянского; [пер. с нем. Д. А. Крыжановского]. – [4-е изд.]. – М.: Наука, 1987 – . – Т.1: Арифметика, алгебра, анализ. – 1987. – 432 с.

122.Ковалев А. Г. Психология личности / Олександр Григорьевич Ковалев. – М.: Просвещение, 1970. – 391 с.

123.Коваленко В. Г. Лекційно-практична форма навчання математики учнів 9-10 класів / Володимир Гаврилович Коваленко. – К.: Радянська школа, 1983. – 73 с.

124. Козира В. М. Система навчання алгебри в школах, ліцеях і гімназіях фізико-математичного профілю при педагогічних вузах: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Козира Василь Миколайович. – К., 1997. – 194 с.

125.Колесник Т. Педагогічна спадщина В. І. Левицького і сучасна математична освіта / Т. Колесник, Д. Требенко // Математика в школі. – 1998. – №3. – С.50–51.

126.Коллективная учебно-познавательная деятельность школьников / [под ред. И. С. Первина]. – М.: Педагогика, 1985. – 114 с.

127.Колмогоров А.Н. Новые программы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе / А.Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1967. – №2. – С. 4–13.

128.Колягин Ю. М. Задача в обучении математике / Юрий Михайлович Колягин. – М.: Просвещение, 1977. - 110 с.

129.Колягин Ю. М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова // Математика в школе. – 1990. – №4. – С.21–27.

130.Коменский Я. А. Избранные педагогические сочинения. / Ян Амос Коменский. – К.: Радянська школа, 1940 – . – Т. 1. Великая дидактика. – 1940. – 248 с.

131.Кон И. С. Психология ранней юности / Игорь Семенович Кон. – М.: Просвещение, 1989. – 255с.

132.Кон И. С. Психология старшеклассника / Игорь Семенович Кон. – М.: Просвещение, 1982 . – 207 с.

133.Кондаков Н. И. Логический словарь / Николай Иванович Кондаков. – М.: Наука, 1971. – 638 с.

134.Концепция дифференцированного обучения в средней общеобразовательной школе: [материалы для обсуждения на заседании Президиума АПН СССР / под ред. В. М. Монахова, В. А. Орлова]. – М., 1990. – 36 с.

135.Концепція базової математичної освіти в Україні / [укл. З. І. Слєпкань, М. І. Шкіль, А. Я. Дороговцев та ін.] – К.: ВІПОЛ, 1993. – 32 с.

136.Концепція математичної освіти 12-річної школи: [проект] // Математика в школі. – 2002. – № 2. – С.12–17.

137.Концепція профільного навчання в старшій школі // Інформаційний збірник Міністерства освіти і науки України. – 2003. – № 24. – С. 3-15.

138.Концепція середньої загальної освіти (12-річна школа) // Інформ. збірник Міністерства освіти і науки України. – 2002. – № 2. – С. 2-22.

139.Костюк Г. С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості / Григорий Силович Костюк. – К.: Радянська школа, 1989. – 608 с.

140.Кочетков Є. С. Алгебра і елементарні функції. Ч. 2: [навчальний посібник для уч. 10 кл. середньої школи] / Є. С. Кочетков, К. С. Кочеткова. – К.: Радянська школа, 1967. – 280 с.

141.Крупич В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / Вячеслав Иосифович Крупич. – М.: Прометей, 1995. – 166 с.

142.Крутецкий В. А. Основы педагогической психологии / Вадим Андреевич Крутецкий. – М. : Просвещение, 1972. – 255 с.

143.Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников / Вадим Андреевич Крутецкий. – М.: Просвещение, 1968. – 431 с.

144.Крутецкий В. А. Психология обучения и воспитания школьников / Вадим Андреевич Крутецкий. – М.: Просвещение, 1976. – 303 с.

145.Кузьмин Р. О. Алгебра и арифметика комплексных чисел: [пособие для учителей ср. шк.] / Р. О. Кузьмин, Д. К. Фадеев. – Л.: Учпедгиз, 1939. – 188 с.

146.Куланин Е. Д. Комплексные числа: [факультативний курс для 10 класу] / Евгений Дмитриевич Куланин; под ред. Г. Л. Луканкина. – М.: НИИ школ, 1988. – 120 с.

147.Курант Р. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов / Р. Курант, Г. Роббинс; [пер. с англ.]. – [2-е изд.]. – М.: Просвещение, 196. – 558 с.

148.Кухарь В. М. Развитие понятия о числе в средней школе: дисс. … кандидата пед. наук: 13 .00.02 / Кухарь Валентина Мифодиевна – К., 1955. – 339 с.

149.Кушнір І. Комплексні числа: Теорія і практика / І. Кушнір. – К.: Факт, 2002. – 168 с.

150.Ланков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики / А. В. Ланков. – М.: Учпедгиз, 1951. – 151 с.

151.Лаудыня Э. А. Применение комплексных чисел в задачах о правильных многоугольниках / Э. А. Лаудыня // Математика в школе. – 1968. – № 5. – С. 79–83.

152.Лейтес Н. С. Умственные способности и возраст / Натан Семенович Лейтес. – М.: Педагогика, 1971. – 280 с.

153.Лейфура В. М. Математичні задачі евристичного характеру / Валентин Миколайович Лейфура. – К.: Вища школа, 1992. – 91 с.

154.Леонтьев А. Н. Деятельность, сознание, личность / Алексей Николаевич Леонтьев. – М.: Политиздат, 1975. – 304 с.

155.Лернер И. Я. Дидактические основы методов обучения / Исаак Яковлевич Лернер. – М.: Педагогика, 1981. – 186 с.

156.Лернер И. Я. Процесс обучения и его закономерности / Исаак Яковлевич Лернер. – М.: Знание, 1980. – 96 с.

157.Лернер И. Я. Развивающее обучение с дидактических позиций / Исаак Яковлевич Лернер // Педагогика. – 1996. – № 2. – С. 7–11.

158.Лийметс Х. Й. Групповая работа на уроке / Хейно Йоханович Лийметс. – М.: Знание, 1975. – 64 с.

159.Лобачевский Н. И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. / Николай Иванович Лобачевский. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

160.Луначарский А. В. О народном образовании: [статьи и речи за период 1917-1929 гг.] / Анатолий Васильевич Луначарский. – М.: Изд. АПН РСФСР, 1958. – 559с.

161.Любар О. О. Історія української педагогіки / О. О. Любар, М. Г. Стельмахович, Д. Т. Федоренко. – К.: Інститут змісту і методів навчання МО України, 1998. – 357 с.

162.Ляпін С. Є. Методика викладання математики. Ч. ІІ: [посібник для вчителів математики VIII-X класів середньої школи] / С. Є. Ляпін, С. О. Гастєва, З. Я. Квасникова, Б. І. Крельштейн. – К .: Радянська школа, 1959. – 616 с.

163.Мадзігон В. М. Інститут педагогіки: здобутки і перспективи розвитку / В. М. Мадзігон // Педагогіка і психологія. – 2001. – № 3-4 (32-33). – С. 5-24.

164.Малинин А. Руководство алгебры и собрание алгебраических задач: [для гимназий, реальных училищ и учит. институтов] / А. Малинин, К. Буренин. – М: Типография Волчанинова М . Г., 1890. – 415 с.

165.Марач Г. К. Застосування комплексних чисел до розв’язування геометричних задач / Г. К. Марач, І. В. Марач // Математика. – 2003. – № 18 (222). – С. 12–16.

166.Марач Г. К. Комплексні числа і рухи площини / Г. К. Марач, В. С. Марач // Математика. – 2003. – № 19 (223). – С. 18–24.

167.Маркова А. К. Формирование мотивации учения: [кн. для учителя] / А. К. Маркова, Т. А. Матис, А. Б. Орлов. – М.: Просвещение, 1990. – 192 с.

168.Маркушевич А. И. Комплексные числа и конформные отображения / Алексей Иванович Маркушевич. – [2-е изд.]. – М.: Физматгиз, 1960. – 55 с.

169.Маркушевич О. І. Алгебра і елементарні функції. / О. І. Маркушевич, К. П. Сікорський, Р . С. Черкасов. – М.: Просвещение, 1968. – 257 с.

170.Маркушевич Л. О. Алгебра і початки аналізу, 10-11 класи / Л. О. Маркушевич , Р. С. Черкасов, Г. А. Ястрябінецький. - М.: Просвещение, 1986. – 257 с.

171.Мартынович А. А. Дифференциация обучения младших подростков в процессе самостоятельной работы: автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. пед. наук: спец. 13.00. 01 “Теория и история педагогики” / А. А. Мартынович. – Л., 1970. – 23 с.

172.Математика: [посібник для факультативних занять у 10 класі / упоряд.: В. Н. Боровик, Л. Н. Вивальнюк, М. М. Мурач та ін.] – К.: Радянська школа, 1985. – 208 с.

173.Математический энциклопедический словарь. / [гл. ред. Ю. В. Прохоров]. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.

174.Махмутов М. И. Организация проблемного обучения в школе / Мирза Исмаилович Махмутов. – М.: Просвещение, 1974. – 238 с.

175.Мацьоха О. М. Розвиток розумових здібностей учнів засобами інформатики / О. М. Мацьоха // Комп’ютер у школі та сім'ї. – 2003. – №8. – С. 19–21.

176.Мельников М. А. Опыт дифференцированного обучения в советской школе / М. А. Мельников // Советская педагогика. – 1962. – № 9. – С. 98-102.

177.Менчинская Н. А. Психологические вопросы развивающего обучения и новые программы / Н. А. Менчинская // Советская педагогика. – 1968. – № 6. – С. 5-18.

178.Менчинская Н. А. Психология обучения арифметике / Наталья Александровна Менчинская. – М.: Учпедгиз, 1955. – 432 с.

179.Менчинская Н. А. Психология усвоения понятий / Н. А. Менчинская // Известия АПН РСФСР, 1950. – Вып. 28. – С.3– 16.

180.Метельский Н. В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы / Николай Владимирович Метельский. – [2-е изд., перераб.]. – Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982. –

256 с.

181.Методика викладання математики / [упор. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр]. – Х.: Основа, 1992. – 304 с.

182.Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: [учебное пособие для студ. пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / сост. В. И. Мишин]. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

183.Методика факультативных занятий в 9-10 классах: Избр. вопросы математики: пособие для учителей / [И. Н. Антипов, В. Н. Березин, А. А. Егоров и др.]; сост.: И. Л. Никольская, В. В. Фирсов. – М.: Просвещение, 1983. – 176 с.

184.Методологические и логико-гносеологические основы учебно-познавательного процесса / Н. Г. Заволока. – К.: Вища школа, 1986. – 228 с.

185.Михалін Г. Деякі алгоритми знаходження дійсних та комплексних значень узагальненого степеня з раціональним показником та зображення графіка відповідної степеневої функції / Г. Михалін, О. Слука // Математика в школі. – 2003. – № 9. – С. 11-15.

186.Михалін Г. Математичний кругозір учителя математики та його формування у процесі навчання математичного аналізу / Г. Михалін // Математика в школі. – 2004. – № 3. – С. 12-16.

187.Мнацаканян Л. И. Личность и оценочные способности старшеклассников: [кн. для учителя] / Любов Исаковна Мнацаканян. – М.: Просвещение, 1991. – 191 с.

188.Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века. / Владимир Николаевич Молодший. – М.: Учпедгиз, 1963. – 262 с.

189.Моляко В. А. Психология решения школьниками творческих задач / Валентин Алексеевич Моляко. – К.: Радянська школа, 1983. – 95 с.

190.Моляко В. А. Психология творческой деятельности / Валентин Алексеевич Моляко. – К. : Знание УССР, 1978. – 77 с.

191.Момот Л. Л. Проблемно-пошукові методи навчання в школі / Л. Л. Момот. – К.: Радянська школа, 1984. – 63 с.

192.Монахов В. М. Дифференциация обучения в средней школе / В. М. Монахов, В. А. Орлов , В. В. Фирсов // Советская педагогика. – 1990. – №8. – С. 42-47.

193.Мордкович А.Г. Беседы с учителем математики: Концептуальная методика. Рекомендации, советы, замечания // Александр Григорьевич Мордкович. - М.: Школа-пресс, 1995. – 272 с.

194.Мышкис А. Д. О развитии математической интуиции учащихся / А. Д. Мышкис, П. Г. Сатьянов // Математика в школе. – 1987. – № 5. – С. 18–22.

195.Навчання в математичних школах / [збірник статей / укл. С. І. Шварцбурд, В. М. Монахов , В. Г. Ашкінузе] - М.: Просвещение, 1965. – (Серія "Проблеми математичної школи").

196.Національна доктрина розвитку освіти в Україні (XXI століття): [проект] // Педагогічна газета. – 2001. - №7(85). – С. 4-6.

197.Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: [дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосв. навч. закл.] / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – [4-те вид., виправл.]. – Х.: Світ дитинства, 2008. – 416 с.

198.Нелін Є. П. Особливості поглибленого вивчення математики в 10 класі: [метод. реком.] / Євген Петрович Нелін. – К.: Освіта, 1992. - 257 с.

199.Нікулін О.В. Геометрія: Поглиблений курс: [навч. посібник для 7-9 кл.] / О. В. Нікулін, О . Г. Кукуш. – Київ, Ірпінь: Перун, 1998. – 349 с.

200.Новиков Г. Н. Использование комплексных чисел в электротехнике / Г. Н. Новиков // Метод. реком. по математике: [сб. статей Минвуза СССР]. – М.: Высшая школа, 1980. – Вып. 3. – С. 61-70.

201.Обучение и развитие: Экспериментально-педагогическое исследование / [под ред. Л. В. Занкова]. – М.: Педагогика, 1975. – 440 с.

202.Огурцов Н. Г. Дифференцированное обучение в школе: опыт, проблемы, перспективы / Н. Г. Огурцов, Г. М. Бунтовская. – Минск: Знание, 1990. – 22 с.

203.Оконь В. Основы проблемного обучения / Винценты Оконь. – М.: Просвещение, 1968. – 208 с.

204.Окунев Л. Я. Целые комплексные числа / Леопольд Яковлевич Окунев. – М.: Учпедгиз, 1941. – 55 с.

205.Онищук В. А. Типы, структура и методика урока в школе / Василий Анисимович Онищук. – К.: Радянська школа, 1976. – 184 с.

206.Онищук В. А. Урок в современной школе / Василий Анисимович Онищук. – М.: Просвещение, 1986. – 160 с.

207.Орач Б. Г. Комплексні числа: [поурочна методична розробка для класів з поглибленим вивченням математики] / Б. Г. Орач // Математика. – 2000. - №5(65)-8(68), 10(70). – С. 3-8.

208.Оре О. Приглашение в теорию чисел / Ойстин Оре; [пер. с англ. Л. А. Савиной, А. П. Савина]. – М.: Наука, 1980. – 127 с.

209.Орлов А. Б. Склонность и профессия / Александр Борисович Орлов. – М.: Знание, 1981. – 96 с.

210.Освітні технології: [навч.-метод. посібник / О. М. Пєхота, А. З. Кіктенко, О. М. Любарська та ін.]; за заг. ред. О. М. Пєхоти. – К.: А.С.К., 2001. – 256 с.

211.Осинская В. Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике: [кн. для учителя] / Вера Никитична Осинская. – К.: Рад. шк., 1989. – 188 с.

212.Основы педагогики и психологии в высшей школе / [под ред. А. В. Петровского]. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 303 с.

213.Особенности обучения и психического развития школьников 13-17 лет / [под ред. И. В. Дубровиной, Б. С. Круглова]. – М.: Педагогика, 1988. – 192 с.

214.Остапчук У. Застосування сучасних освітніх технологій / У. Остапчук // Математика в школі. – 2004. – № 8. – С. 11–17.

215.Охитина Л. Т. Психологические основы урока: [в помощь учителю] / Людмила Тимофеевна Охитина. – М.: Просвещение, 1977. – 96 с.

216.Пеньков А. В. Использование новой информационной технологии при преподавании математики в старших классах средней школы: дисс. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Пеньков Андрей Викторович. – К., 1992. – 171 с.

217.Перелік програм, підручників та навчально-методичних посібників, рекомендованих Міністерством освіти і науки України для використання у загальноосвітніх навчальних закладах з навчанням українською мовою у 2008/2009 навчальному році // http://www.mon.gov.ua / main. php?query=education/average/per_n_pr

218.Петровский А. В. Социальная психология / А. В. Петровский, В. В. Шпалинский. – М.: Просвещение, 1978. – 458 с.

219.Пивоваров Г. Н. Комплексные числа в курсе алгебры средней школы: [метод. разработка] / Г. Н. Пивоваров. – М.: Учпедгиз, 1961. – 60 с.

220.Пидкасистый П. И. Самостоятельная деятельность учащихся / Павел Иванович Пидкасистый. – М.: Педагогика, 1972. – 184 с.

221.Подласый И. П. Педагогика: Новый курс: [учеб. для студ., обуч. по пед. спец.]: в 2 кн. / Иван Павлович Подласый. – М.: ВЛАДОС, 2000. – . – Кн. 1: Общие основы. Процесс обучения. – 2000. – 576 с.

222.Подмазин С. И. Личностно-ориентированное образование. Социально-философское исследование / Сергей Иванович Подмазин. – Запорожье: Просвіта, 2000. – 250 с.

223.Пойа Д. Математическое открытие: Решение задач, основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа; под ред. И. М. Яглома; [пер. с англ. В.С. Бермана]. – [2-е изд.]. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

224.Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: [книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов] / Яков Петрович Понарин. – М.: МЦНМО, 2004. – 160 с.

225.Понарин Я. П. Метод комплексных чисел в планиметрии / Я. П. Понарин // Математика в школе. – 1991. – № 2. – С. 46–54.

226.Понтрягин Л. С. Знакомство с высшей математикой: в 4 кн. / Лев Семенович Понтрягин. – М.: Наука, 1977. –. – Кн. 1: Метод координат. – 1977. – 135 с.

227.Понтрягин Л. С. Обобщения чисел / Лев Семенович Понтрягин. – М.: Наука, 1986. – 117 с.

228.Понтрягин Л. С. Основная теорема алгебры / Л. С. Понтрягин // Квант. – 1982. - №4. – С.3-9.

229.Попович М. В. Проверка истинности теории / М. В. Попович // Логика научного исследования / М. В. Попович, П. В. Копнин. – М.: Наука, 1965. – 360 с. – С. 144-177.

230.Поспелов Н. Н. Формирование мыслительных операций у старшеклассников / Н. Н. Поспелов, И. Н. Поспелов. – М.: Педагогика, 1989. – 150 с.

231.Постоева Н. И. Аналитическая геометрия на плоскости и комплексные числа / Наталья Ивановна Постоева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973. – 67 с.

232.Потапов Н. Г. Приложение комплексных чисел к решению задач по тригонометрии / Н. Г. Потапов // Математика в школе. – 1964. – № 2. – С. 61–65.

233.Програма з математики Українського фізико-математичного ліцею Київського університету імені Тараса Шевченка // Математика в школі, 2002. – № 6. – С. 27-29.

234.Програми для шкіл (класів) з поглибленим теоретичним і практичним вивченням математики та спеціалізованих шкіл фізико-математичного профілю. Математика, 8-11 класи. – К.: Радянська школа, 1989. – 23 с.

235.Програми факультативних курсів та курсів за вибором з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Навчальна книга, 2002. – 154 с.

236.Программы семилетней единой трудовой школы. – М.: ГИЗ, 1921. – 359 с.

237.Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 класи. – К.: Ірпінь, 2005. – 65 с.

238.Програма для класів з поглибленим вивченням математики. 8-11 класи / [підготували: М. Бурда, М. Жалдак, Т. Колесник, Т. Хмара, М. Ядренко] // Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-11 класи. – К.: Шкільний світ, 2001. – 111 с.

239.Програма з математики для 10 – 12 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень // http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12/matem_pr

240.Програма з математики для 10 – 12 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики) // http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12/matem_pogl

241.Програма поглибленого вивчення математики в 10-11 профільних класах // Математика в школі. – 2003. – № 7. – С. 19–24.

242.Профільність навчання в старшій школі – це соціальний захист молодої людини // Освіта України. – 2003. – № 11. – С. 2, 6–7.

243.Прудников В. Е. О русских учебниках математики для средних школ в XIX веке / В. Е. Прудников // Математика в школе. – 1954. – № 3. – С. 6–20.

244.Психологія: підруч. / [Ю. Л. Трофімов, В. В. Рибалка, П. А. Гончарук та ін.]; за ред. Ю. Л. Трофімова. – К.: Либідь, 1999. – 558 с.

245.Развитие и диагностика способностей / [отв. ред.: В. Н. Дружинин, В. Д. Шадриков]. – М.: Наука, 1991. – 181 с.

246.Разумовский В. Г. Развитие творческих способностей учащихся / Василий Григорьевич Разумовский. – М.: Просвещение, 1975. – 272 с.

247.Раков С. А. Использование пакета DERIVE в курсе математики: [учебное пособие] / С. А. Раков, Т. А. Олейник, Е. В. Скляр. – Харьков: РЦНИТ, 1996. – 158 с.

248.Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: [монографія] / Сергій Анатолійович Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

249.Ревякина В. И. Опыт дифференциации обучения в школе 20-80 гг. / В. И. Ревякина // Советская педагогика. – 1991. – № 11. – С. 87-93.

250.Роменець В. А. Психологія творчості: [навч. посібник] / Володимир Андрійович Роменець. – [2-е вид., доп.]. – К.: Либідь, 2001. – 288с.

251.Ротенберг В. С. Мозг. Обучение. Здоровье: [кн. для учителя] / В. С. Ротенберг, С. М. Бондаренко. – М.: Просвещение, 1989. – 239 с.

252.Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования / Сергей Леонидович Рубинштейн. – М.: Изд-во АПН СССР, 1958. – 147 с.

253.Руднев П. В. К вопросу о дифференциации общего образования в средней школе / П. В. Руднев // Народное образование. – 1963. – №11. – С. 12-22.

254.Рузавин Г. И. О природе математического знания / Георгий Иванович Рузавин. – М.: Мысль, 1968. – 302 с.

255.Рыбников К. А. Очерки методологии математики / Константин Алексеевич Рыбников. – М.: Знание, 1982. – 64 с.

256.Салмина Н. Г. Знак и символ в обучении / Нина Гавриловна Салмина. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 288,[2] с.

257.Самовол П. І. Методична система роботи зі здібними та обдарованими з математики учнями в середній школі: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Самовол Петро Ісаакович. – К., 1995. – 221 с.

258.Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: [учебное пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова]. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Наука, 1990. – 428 с.

259.Селевко Г. К. Современные образовательные технологии: [учебное пособие] / Герман Константинович Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.

260.Сергиенко Л. Ю. Методика изучения комплексных чисел и их приложений в курсе математики средних специальных учебных заведений: дисс. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Сергиенко Людмила Юльевна. – М., 1981. – 159 с.

261.Сигорский В. П. Математический аппарат инженера / Виталий Петрович Сигорский. – [2-е изд.]. – К.: Техника, 1977. – 766 с.

262.Сисоєва С. О. Підготовка вчителя до формування творчої особистості учня / Світлана Олександрівна Сисоєва. – К.: Поліграфкнига, 1996. – 406 с.

263. Скаткин М. Н. Методология и методика педагогических исследований (в помощь начинающему исследователю) / Михаил Николаевич Скаткин. – М.: Педагогика, 1986. – 150 с.

264.Скаткин М. Н. О методах обучения / М. Н. Скаткин, И. Я. Лернер // Советская педагогика. – 1965. - №3. – С. 32.

265.Скаткин М. Н. Трудовое воспитание и профориентация школьников / М. Н. Скаткин, Э. Г. Костяшкин. – М.: Просвещение, 1984. – 192 с.

266.Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология: [монография] / Елена Ивановна Скафа. – Донецк: Изд-во ДонГу, 2004. – 439 с.

267.Скафа О. І. Теоретико-методологічні основи формування прийомів евристичної діяльності в процесі вивчення математики в умовах впровадження сучасних технологій навчання: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 "Теорія і методика навчання (математика)" / О. І. Скафа – К., 2004. – 40 с.

268.Сковорода Г. С. Твори: в 2 т. / Григорій Савич Сковорода. – К.: Обереги, 1994. – Т. 2. Трактати; Діалоги; Притчі; Переклади; Листи. – 1994. – 479 с.

269.Скопец З. А. Геометрические миниатюры / Залман Алтерович Скопец. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

270.Скопец З. А. Приложение комплексных чисел к задачам элементарной геометрии / З. А. Скопец // Математика в школе. – 1967. – № 1. – С. 63–71.

271.Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике / Зинаида Ивановна Слепкань. – К.: Радянська школа, 1983. – 193 с.

272.Слєпкань З. Структурування змісту в сучасних австрійських підручниках з математики для середньої школи / З. Слєпкань, Б. Фуртак // Математика в школі. – 1999. – № 4. – С. 47–50.

273.Слєпкань З. І. Методика навчання математики / Зінаїда Іванівна Слєпкань. – К.: Зодіак–ЕКО, 2000. – 512 с.

274.Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / Зінаїда Іванівна Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.

275.Слєпкань З. І. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики / З. І. Слєпкань // Математика в школі. – 2003. – №1. – С.6–10; №2. – С.7 -14.

276.Смалько О. А. Розвиток творчого мислення старшокласників на уроках математики з використанням інформаційних технологій навчання: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 "Теорія і методика навчання (математика)" / О. Л. Смалько – К., 1999. – 19 с.

277.Смирнова И. Исторические аспекты дифференциации обучения / И. Смирнова // Математика: (еженедельное учебно-методическое приложение к газете "Первое сентября"). – 2000. – №12. – С. 1-8.

278.Советский энциклопедический словарь / [гл. ред. А. М. Прохоров]. – [4-е изд .]. – М.: Советская энциклопедия, 1986. – 1600 с.

279.Сойер У. У. Прелюдия к математике / У. У. Сойер; [пер. с англ. М. Л. Смолянского и С. Л. Романовой]. – [2-е изд.]. – М.: Просвещение, 1972. – 192 с.

280.Соколенко Л. О. Методика реалізації прикладної спрямованості шкільної алгебри і початків аналізу: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Соколенко Лілія Олександрівна. – К., 1997. – 245 с.

281.Сологуб А. І. Концепція креативної освіти у природничо-науковому ліцеї / А . І. Сологуб // Рідна школа. – 2000. – №12. – С. 9-19.

282.Столяренко Л. Д. Основы психологии / Людмила Дмитриевна Столяренко. – [3-е изд., перераб. и доп.]. – Ростов н/Д.: Феникс, 1999. – 672 с.

283.Стоюнин В. Я. Избранные педагогические сочинения / Владимир Яковлевич Стоюнин. – М.: Педагогика, 1991. – 368 с.

284.Суворова С. Б. Упражнения в обучении алгебры / С. Б. Суворова, М. Р. Леонтьева. – М.: Просвещение, 1986. – 128 с.

285.Сухотин А. К. Превратности научных идей / Анатолій Константинович Сухотин. – М.: Молодая гвардия, 1991. – 272 с.

286. Таганов Б. Преемственность в обучении математике между средней школой и вузом (на материалах Туркменской ССР): дисс. … кандидата пед. наук: 13 .00.02 / Таганов Б. – К., 1989. – 179 с.

287.Талызина Н. Ф. Теория планомерного формирования умственных действий сегодня / Н.Ф. Талызина // Вопросы психологии. – 1993. – №1. – С. 92–101.

288.Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Нина Федоровна Талызина. – [2-е изд., доп. и испр.]. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 344 с.

289. Талызина Н.Ф. Педагогическая психология: [учеб.] / Нина Федоровна Талызина. – [3-е изд.]. – М.: Академия, 2001. – 288 с.

290.Тарасенкова Н. А. Активизация познавательной деятельности учащихся в условиях лекционно-практической системы обучения математике в школе: дисс. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Тарасенкова Нина Анатольевна. – К., 1991. – 211 с.

291.Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики / Ніна Анатоліївна Тарасенкова. – Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. – 400 с.

292. Терлецька Л. Мислення школярів / Л. Терлецька // Психолог. – 2002. – №20. – С. 2–3.

293.Тимощук М. Е. О дифференцированной помощи при решении задач / М. Е. Тимощук // Математика в школе. – 1993. – № 2. – С. 16–20.

294. Тихомиров В. М. Десять доказательств основной теоремы алгебры / В. М. Тихомиров, В. В. Успенский // Математическое просвещение. – М.: Изд-во МЦНМО, 1997. – №1. – 97 с.

295. Узагальнення поняття про число. Комплексні числа: [метод. лист / склав Д. П. Селіванов]. – К.: Радянська школа, 1966. - 27 с.

296. Унт И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / Инге Эриховна Унт. – М.: Педагогика, 1990. – 188,[3] с.

297.Усова А. В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения / Антонина Васильевна Усова. – М.: Педагогика, 1986. – 176 с.

298. Ушинский К. Д. Сочинения. Т.10 / Константин Дмитриевич Ушинский. – М .: Изд-во АПН РСФСР, 1950. – 666 с.

299.Фадеев Д. К. Элементы высшей математики для школьников / Д. К. Фадеев, М. С. Никулин, И. Ф. Соколовский. – М.: Наука, 1987. – 336с.

300.Федина М. Ф. Проблема дифференцированного подхода к учащимся в процессе обучения в истории советской педагогики (1960-1970 годы): автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. пед. наук: спец. 13.00.01 “Теория и история педагогики” / М. Ф. Федина. – М., 1985. – 16 с.

301.Фетисов А. И. Формирование математических понятий / А. И. Фетисов // Известия АПН РСФСР. – 1958. – вып. 92. – С. 24-27.

302. Фіцула М. М. Педагогіка: навчальний посібник [для студентів вищих педагогічних закладів освіти] / Михайло Миколайович Фіцула. – К.: ВЦ “Академія”, 2001. – 528 с.

303.Фридман Л. М. Количественный и качественный анализ учебной деятельности школьников / Л. М. Фридман; под ред. В. В. Давыдова. – М.: Педагогика, 1982. – 215 с.

304.Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: [учителю математики о пед. психологии] / Лев Моисеевич Фридман. – М.: Просвещение, 1983. – 160 с.

305.Фридман Л. М. Проблемная организация учебного процесса: [методическая разработка] / Л. М. Фридман, В. И. Маху. – М.: Б. и., 1990. – 60, [2] с.

306.Фридман Л. М. Психологический справочник учителя / Л. М. Фридман, И. Ю. Кулагина. – М.: Просвещение, 1991. – 288 с.

307.Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: [пособие для учителей]. Ч. I / Ганс Фройденталь; под ред. Н. Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1982. – 208 с.

308.Фусс Н. И. Начальне основания чистой математики / Николай Иванович Фусс. – Санкт-Петербург: Типография народного образования, 1820. – 384 с.

309.Харламов И. Ф. Педагогика: [учеб. пособие] / Иван Федорович Харламов. – [2-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Высшая школа, 1990. – 576 с.

310.Хинчин А. Я. Основные понятия математики и математические определения в средней школе / Александр Яковлевич Хинчин. – М.: Учпедгиз, 1940. – 51 с.

311.Хмара Т. М. Застосування комплексних чисел до розв’язування геометричних задач / Т. М. Хмара, О. В. Шаран // Математика в школі. – 2004. – № 7 . – С. 41-45; № 8. – С. 32-40.

312.Хмара Т. М. Навчання учнів математичної мови: [методичний посібник] / Тамара Миколаївна Хмара. – К.: Радянська школа, 1985. – 95 с.

313.Хмара Т. М. Створюємо особистісно-орієнтовану систему навчання математики / Т. М. Хмара // Математика в школі. – 2001. – № 5. – С. 4.

314. Хуторской А. В. Развитие одаренности школьников: Методика продуктивного обучения: [пособие для учителя] / Андрей Викторович Хуторской. – М.: ВЛАДОС, 2000. – 320 с.

315.Чашечникова О. С. Розвиток математичних здібностей учнів основної школи: дис. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Чашечникова Ольга Серафимівна – К ., 1997. – 208 с.

316. Черкасов Р. С. Новая программа по математике в школах Японии / Р. С. Черкасов, М. Отани // Математика в школе. – 1991. – № 1. – С. 73.

317.Чошанов М. А. Анализ стандарта школьной математики в США / М. А. Чошанов // Математика в школе. – 2000. – № 2. – С.73–76.

318.Чошанов М. А. Математическое образование в профессиональных колледжах США / М. А. Чошанов // Математика в школе. – 1991. – № 6. – С. 65-68.

319.Чудновский В. Э. Психологические составляющие оптимального смысла жизни / В. Э. Чудновский // Вопросы психологии. – 2003. – № 3. – С. 3-14.

320.Шавалева В. И. Преемственность в построении методических систем обучения математике в школе и педагогическом вузе: дисс. … кандидата пед. наук: 13.00.02 / Шавалева Валентина Ивановна. – К., 1997. – 180 с.

321.Шамова Т. И. Активизация учения школьников / Татьяна Ивановна Шамова . – М.: Педагогика, 1982. – 208 с.

322.Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики / Иосиф Максимович Шапиро. – М.: Просвещение, 1990. – 95 с.

323.Шапиро С. И. Психологический анализ структуры математических способностей в старшем школьном возрасте / С. И. Шапиро // Вопросы психологических способностей / С. И. Шапиро. – М.: Педагогика, 1973. – С. 90-129.

324.Шаран О. В. Комплексні числа та їх застосування (10-11 класи) / О. В. Шаран // Математика в школі. – 2004. – №6. – С. 46-49. – (Програми курсів за вибором).

325.Шаран О. В. Комплексні числа та їх застосування / Олександра Василівна Шаран. – Дрогобич: НВЦ "Каменяр", 2004. – 192 с.

326.Шаран О. В. Конспекти уроків з теми "Комплексні числа" / О. В. Шаран // Математика в школі. – 2008. – № 2. – С. 41-48; № 3. – С. 45-52; № 4. – С. 35-42.

327.Шаран О. В. Курси за вибором як важливий компонент особистісно орієнтованої системи навчання / О. В. Шаран // Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи: всеукр. наук.-практ. конф., 6-7 грудня 2005 р .: тези доп. – Полтава, 2005. – 272 с. – С. 31-33.

328.Шаран О. В. Методи та організаційні форми проведення курсів за вибором / О. В. Шаран // Перспективні розробки науки і техніки: міжнар. наук.-практ. конф., 16-17 листопада 2007 р.: тези доп. – Перемишль: Наука і освіта, 2007. – Т. 7.– 112 с. – С. 97-100.

329.Шаран О. В. Педагогічні умови реалізації ідеї особистісно- орієнтованого навчання / О. В. Шаран // Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, 18-20 травня 2006 р.: тези доп. – К., 2006. – С. 952.

330.Шаран О. В. Перетворення площини і комплексні числа (паралельне перенесення, центральна симетрія, гомотетія) / О. В. Шаран // Математика в школі. – 2005. – № 4. – С. 39-43.

331.Шаран О. В. Перетворення площини і комплексні числа (поворот, осьова симетрія) / О. В. Шаран // Математика в школі. – 2005. – № 5. – С. 44-49.

332.Шаран О. В. Підготовка вчителів математики профільних класів / О. В. Шаран // Дні науки – 2005: міжнар. наук.-практ. конф., 15-27 квітня 2005 р.: тези доп. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2005. – Т. 26. – 81 с. – С. 71-72.

333.Шаран О. В. Теорія комплексних чисел у підручниках для середніх закладів освіти / О. В. Шаран // Дидактика математики: проблеми і дослідження:

міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2008. – Вип. 30. – С. 224-231.

334.Шарова О. П. Применение комплексных чисел к изучению геомет-рических преобразований / О. П. Шарова // Математика в школе. – 1970. – № 1. – С. 74-79.

335.Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: [учебное пособие для 10 кл. средней школы] / Игорь Федорович Шарыгин. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.

336.Шахмаев Н. М. Учителю о дифференцированном обучении: [методические рекомендации] / Николай Михайлович Шахмаев. – М.: НИИ ОП, 1989. – 64 с.

337.Шварцбурд С. И. Математическая специализация учащихся средней школы. Из опыта работы школы №444 г. Москвы / Семен Исаакович Шварцбурд. – М.: Изд-во АПН, 1963. – 150 с.

338.Шварцбурд С. И. Проблемы повышенной математической подготовки учащихся / Семен Исаакович Шварцбурд. – М.: Педагогика, 1972. – 105 с.

339.Шварцбурд С. И. Теория и практика педагогического эксперимента / Семен Исаакович Шварцбурд. – М.: Педагогика, 1979. – 208 с.

340.Швець В. О. Математика: [навч. посібник для фінансово-економ. коледжів] / В. О. Швець, Г. І. Білянін. - Чернівці: Зелена Буковина, 2003. – 382 с.

341.Шиян Н. І. Профільне навчання у школах сільської місцевості: теорія і практика / Надія Іванівна Шиян. – Полтава: АСМІ, 2004. – 442 с.

342.Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: [навч. посібник для учнів проф.-техн . навч. закладів] / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: Техніка, 2000. – 544 с.

343.Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: [підр. для 11 класу загальноосв. навч . закладів] / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002. – 384 с.

344.Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: підруч. [для учнів 10 кл. з поглибленим вивченням математики в середніх закладах освіти] / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник, Т. М. Хмара. – К.: Освіта, 2000. – 318 с.

345.Шмигевський М. Навчання математики у Франції / М. Шмигевський // Математика в школі. – 2001. – № 6. – С. 36–38.

346.Шустеф Ф. М. Методика преподавания алгебры: [курс лекций] / Фриза Максовна Шустеф. – Минск: Вышейшая школа, 1967. – 223 с.

347.Щукина Г. И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся / Галина Ивановна Щукина. – М.: Педагогика, 1988. – 208 с.

348.Эльконин Д. Б. Диагностика учебной деятельности и интеллектуального развития детей / Даниил Борисович Эльконин. – М.: Просвещение, 1981. – 157 с.

349.Эльконин Д. Б. Психология развития: [учеб. пособие для вузов] / Даниил Борисович Эльконин. – М.: Академия, 2001. – 144с.

350.Энциклопедический словарь юного математика / [сост. А. П. Савин]. – М.: Педагогика, 1989. – 352 с.

351.Эрдниев Б. П. Развитие творческого мышления учащихся при изучении математики / Батыр Пюрвяевич Эрдниев. – Элиста, 1991. – 124 с.

352. Эрдниев П. М. Обучение математике в школе / Укрупнение дидактических единиц: [книга для учителя] / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев. – М.: Столетие, - 1996.

– 320 с.

353. Эсхил. Трагедии / Эсхил; [пер. с древнегреч. С. Апта]. – М.: АСТ Харьков: Фолио, 2001. – 379,[2] с. – (Библиотека античной литературы).

354.Яглом И. М. Комплексные числа и их применения в геометрии / Исаак Моисеевич Яглом. – М.: Физматгиз, 1963. – 192 с.

355.Якиманская И. С. Дифференцированное обучение: “внешние” и “внутренние” формы / И. С. Якиманская // Директор школы. – 1995. – №3. – С. 39-45.

356.Якиманская И. С. Развивающее обучение / Ираида Сергеевна Якиманская. – М.: Педагогика, 1979. – 144 с. – (Воспитание и обучение. Б-ка учителя).

357.Якиманская И. С. Разработка технологии личностно-ориентированного обучения / И. С. Якиманская // Вопросы психологии. – 1995. – №2. – С. 31-41.

358.Яценко С. Є. Організація навчально-виховного процесу на уроках математики в класах з поглибленим вивченням предмета основної школи: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 “Теорія і методика навчання (математика)” / С. Є. Яценко. – К., 1999. – 19 с.

359.Blitzer R. Introductory Algebra for College Students / R.Blitzer. – New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995. – 706 p.

360.Brown R. Advanced Mathematics. Precalculus with Discrete Mathematics and Data Analysis / R. Brown. – Boston: Houghton Mifflin Company, 1992. – 837 p.

361.Group tests of intelligence by Philip Boswood Ballard. Hodder and Stoughton limited. – London, 1927. – 252 p.

362.Hungerford T. Contemporary College Algebra and Trigonometry a Graphing Approach: Harcourt College publishers / T. Hungerford. – 2001. – 875 p.

363.Intermediate Algebra for College Students. – New York: Macmillan Publishing Co, 1979. – 499 p.

364.Krygowska Z. Zarys dydaktyki matematyki. Czesc 2 / Zofia Krygowska. – Warszawa: Wydawnictwa szkolne i pedagogiczne, 1974. – 121 s.

365.Martin M. Modern mathematics for schools / M. Martin, N. Smart. – London: Scottish mathematics group, 1969 – 89 p.

366.Mathematik. Lahrbych für Klasse 11. Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin, 1980. – 288 p.

367.Mathématiques: Classes de seconde, première et terminale. – CNDP, 1984. – 637 p.

368.Skupecki J. Arytmetika i algebra / J. Skupecki, Z. Garbaj, T. Sawicki. – Warszawa: Panstwowe zaklady wydawnictw szkolnych, 1968. – 285 s.

369.Smith K. Test Items for Algebra and Trigonometry / K. Smith, P. Boyle. – Monterey, California: Brooks / Cole publishing Company, 1979. – 137 p.

370.Stewart J. Mathematics for calculus. Second edition / J. Stewart, L. Redlin, S. Watson. – California: Brooks / Cole publishing Company, 1993. – 773 p.