Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

Факультет початкової, технологічної та професійної освіти

Кафедра теорії і практики початкової освіти

Н. М. ЛЯШОВА, В.Ф.ЧАЙЧЕНКО

ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ В ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

Навчально-методичний посібник

Слов’янськ – 2021

Ляшова Н. М., Чайченко В. Ф. Елементи алгебри в початковій школі: Навчально-методичний посібник для підготовки здобувачів ступеня вищої освіти 013 Початкова освіта. Слов'янськ, 2021. – 110 с.

Рецензенти:

Матвієнко О.В., доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри педагогіки та методики початкового навчання, заступник декана з наукової роботи Факультету педагогіки і психології НПУ імені М. П. Драгоманова

Глазова В.В., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри геометрії і методики викладання математики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»

Навчально-методичний посібник націлений на поглиблення та узагальнення методичних знань здобувачів вищої освіти з дисципліни «Методика навчання освітньої галузі «Математика»», в якій зокрема розглядаються актуальні проблеми вивчення елементів алгебри в початковому курсі математики. У навчально-методичному посібнику розкрито методику та систематизовано особливості формування в учнів: уявлень про числові та буквені вирази; рівності, нерівності; рівняння; вирази зі змінною; функціональну залежність; навички розв'язування задач, рівнянь та нерівностей.

У посібнику представлені практичні рекомендації, завдання, вправи, задачі, схеми, таблиці, пам'ятки, які активізують мислення, дозволяють знаходити суттєві зв'язки між алгебраїчними явищами. Вони допоможуть забезпечити сприйняття та закріплення отриманих знань, структурувати їх та правильно орієнтуватися у навчальному методико-математичному матеріалі.

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
(протокол № від 2021 р.)

Зміст

Передмова……………………………………………………………4

І. Програмовий зміст алгебраїчної пропедевтики у початковій школі….6

ІІ. Математичні вирази. Числові вирази…..………………………………10

2.1. Формування поняття про вирази………..…………………………10

2.2. Перетворення виразів…………………………………………………21

2.3. Порівняння виразів……………………………………………...22

2.4. Розв'язання задач складанням числових виразів ………………..25

ІІІ. Буквені вирази. Вирази із змінною…………………………………….28

IV. Числові рівності та нерівності……………………………….………..33

V. Нерівності із змінною…………………………………………………37

VI. Рівняння…………………………………………………………………40

6.1. Способи складання та розв'язування рівнянь…………………...49

6.2. Тотожні перетворення рівнянь…………………….……………..54

6.3. Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь…………..55

VII. Функціональна пропедевтика у початкових класах…………………61

7.1. Лінійна залежність………………………………………………………63

7.2. Прямо пропорційна залежність…………………………………69

7.3. Обернено пропорційна залежність………………………………..74

VIII. Історичні довідки…………………………………………………………78

IX. Логіко-дидактичний аналіз навчальної теми…………………………84

X. Питання та завдання для самоконтролю……………………………….90

XI. Словник алгебраїчних термінів і понять………………………………99

Рекомендована література………………………………………………102

Додатки……………………………………………………………………106

ПЕРЕДМОВА

У полідисциплінарній діяльності вчителя початкових класів важливе значення має викладання курсу математики, оскільки математика є фундаментальною наукою, яка об’єднує загальне і абстрактне знання, використовується у всіх галузях знань та є унікальним засобом формування інтелектуального потенціалу особистості, розвитку її логічного мислення. У зв’язку з цим актуальним питанням професійної підготовки вчителя є його готовність до викладання математики у початковій школі, однією із основних часнин якої є опанування ними системи методичних знань взагалі та максимізації власного досвіду з вивчення елементів алгебри зокрема.

Мета посібника полягає у наданні навчально-методичної допомоги майбутнім фахівцям початкової школи в галузі початкової освіти в процесі розвитку їхньої професійної компетентності відповідно до провідних принципів оновлення методичної системи навчання в початковій та вищій школі, що задекларовано Концепцією «Нова українська школа». Узагальнити, розширити, поглибити знання здобувачів із навчальної дисципліни «Методика навчання освітньої галузі «Математика»» щодо навчання молодших школярів алгебраїчного матеріалу; розвинути фахові уміння і навички; сформувати комплекс загальних та спеціальних компетенцій, що є необхідними для сучасного фахівця вищої педагогічної освіти.

У посібнику висвітлено сучасні методичні підходи до аспектів формування алгебраїчних понять початкового курсу математики. Розглянуто загальнотеоретичний аспект ознайомлення з алгебраїчними поняттями, а саме: математичні вирази, числові рівності і нерівності, використання букв як символу, які позначають будь-яке число із відомої дітям області чисел, що складає умови для узагальнення багатьох питань арифметичної теорії і є гарною фундаментальною підготовкою до ознайомлення учнів з поняттями «змінна», «функція», сприяє розвитку у дітей функціонального мислення. Поняття рівняння розкривається у взаємозв'язку з методичними аспектами розв'язування простих і складених задачі за допомогою рівнянь. Формування уявлення про функціональну залежність представлено поняттями про лінійну, прямо пропорційну та обернено пропорційну залежність, що є підготовкою до засвоєння функціональної залежності на наступному ступені математичної освіти.

Визначені оптимальні умови і можливості реалізації нового освітнього стандарту щодо елементів алгебри засобами дидактичної системи завдань, вправ, задач, схем, таблиць, прикладів розвивального характеру, розкриті основні тенденції методики навчання математики, пов'язаної з формуванням загальнонавчальних умінь і навичок молодших школярів.

У посібник включено історичні довідки щодо виникнення та походження алгебраїчної термінології, відомості про вчених та їхні наукові праці.

Питання та завдання для самоконтролю допоможе студентам всебічно закріпити програмові вимоги алгебраїчної пропедевтики початкової школи; опановати логіку побудови алгебраїчного матеріалу у підручниках з першого по четвертий клас; проаналізувати різновиди алгебраїчних завдань, термінологією, якою повинні обов'язково користуватися діти. У результаті такої діяльності майбутні вчителі отримують уявлення про особливості формування алгебраїчних понять у початковій школі.

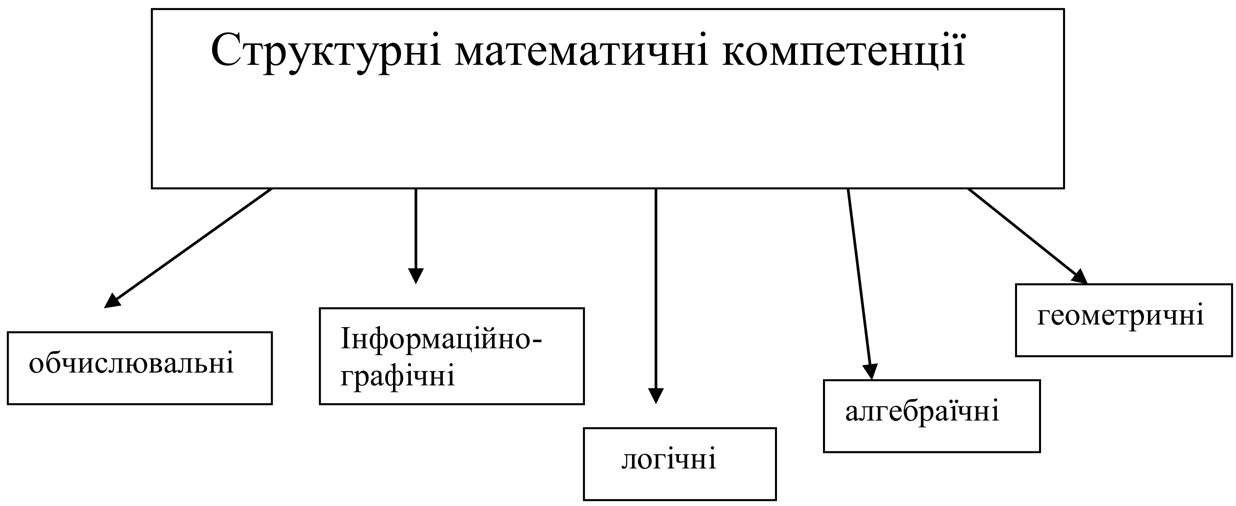
І. ПРОГРАМОВИЙ ЗМІСТ АЛГЕБРАЇЧНОЇ ПРОПЕДЕВТИКИ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

Відповідно до Державного стандарту початкової освіти курс математики будується за такими змістовими лініями:

- числа, дії з числами;
- величини;
- вирази, рівності, нерівності;
- сюжетні задачі;
- просторові відношення, геометричні фігури;
- робота з даними (реалізується наскрізно в усіх інших змістових лініях).

Основу змісту початкового курсу математики становить арифметика цілих невід'ємних чисел і вимірювання величин. На пропедевтичному рівні подаються елементи алгебри та геометрії. Зміст розділів у кожному класі розширюється і доповнюється. Таким чином забезпечується поступове розширення і ускладнення навчального матеріалу, його актуалізація, повторення, закріплення. Це сприяє формуванню знань, умінь, навичок і способів діяльності на вищому рівні узагальнення.

Схема предметних математичних компетенцій



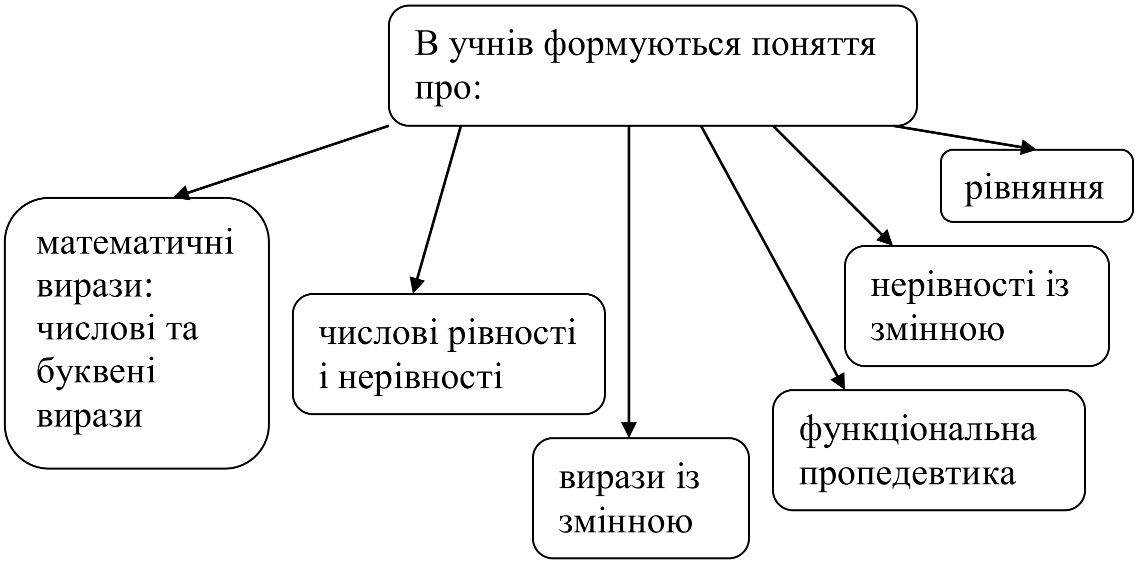
Кожна з цих компетенцій складає певний клас за змістом і функцією в опануванні молодшими школярами початкового курсу математики.

Щодо алгебраїчних компетенцій, то сучасний етап вивчення елементів алгебри в курсі математики початкової школи характеризується наступними тенденціями об'єму змісту: алгебраїчний матеріал вивчають, починаючи з першого класу, в тісному зв'язку з арифметичним і геометричним матеріалом. Головна роль вивчення елементів алгебри в курсі математики початкової школи полягає у сприянні узагальненню понять учнів про число, арифметичні дії, відношення і водночас забезпечує наступність у підготовці дітей до вивчення алгебри в старших класах.

Алгебраїчний зміст типової освітньої програми
для закладів загальної середньої освіти
(під керівництвом О.Я.Савченко)

Змістова лінія «Вирази, рівності, нерівності»	
1 клас	
Зміст навчання	***Очікувані результати навчання***
Сума. Різниця. Вирази на 1 – 2 дії. Числові рівності і нерівності.	*читає* і *записує* математичні вирази: сума і різниця; *обчислює* значення виразів на 1 – 2 дії; *встановлює* відношення рівності й нерівності між числами й числовими виразами
2 клас	
Числові вирази. Буквені вирази. Числові рівності. Числові нерівності	*записує* математичні твердження, подані в текстовій формі, з використанням математичних символів; *встановлює* відношення рівності й нерівності між числами й числовими виразами; *знаходить* значення числового виразу та буквеного виразу із заданим значенням букви; *встановлює* залежності між компонентами і результатом арифметично дії; *застосовує* правило порядку виконання дій у виразах без дужок та з дужками
3 клас	
Математичні вирази: числові і буквені. Числові рівності і нерівності.	*читає і записує* математичні вирази, подані в текстовій формі, з використанням математичних символів; *встановлює* відношення рівності й нерівності між числами й числовими виразами; *розрізняє* істинні та хибні числові рівності й

Правила порядку дій у числових виразах. Рівняння. Розв'язок рівняння. Нерівності зі змінною. Розв'язки нерівності зі змінною.	нерівності; *знаходить* значення числового виразу та буквеного виразу із заданим значенням букви; *застосовує* правила порядку виконання дій під час обчислень значень виразів без дужок та з дужками; *розуміє* сутність понять «рівняння», «розв'язок рівняння»; *розв'язує* рівняння на основі правил знаходження невідомого компоненту арифметичної дії та іншими способами; *розрізняє* числові нерівності та нерівності зі змінною; *знаходить* окремі розв'язки нерівності зі змінною зручним для себе способом
4 клас	
Числові вирази. Буквені вирази. Числові рівності. Числові нерівності. Рівняння. Нерівності зі змінною.	*записує* математичні вирази і твердження, подані в текстовій формі, з використанням математичних символів; *встановлює* відношення рівності й нерівності між числами й числовими виразами; *знаходить* значення числового виразу та буквеного виразу із заданим значенням букви; *застосовує* правила порядку виконання дій під час обчислень значень виразів без дужок та з дужками; *розв'язує* рівняння з однією змінною на основі правил знаходження невідомого компоненту арифметичної дії; *перевіряє*, що одержане числове значення змінної є розв'язком рівняння; *розуміє,* що нерівність зі змінною може мати один, кілька або безліч розв'язків, може не мати розв'язків; *знаходить* окремі розв'язки нерівності зі змінною зручним для себе способом.



Алгебраїчні поняття вводяться:

а) **контекстуально** – смисл нового терміну з'ясовується із змісту пояснювального тексту. Наприклад: «Буква ***x*** (ікс) позначає невідоме число, x + 2 = 5 – це рівняння. Розв'язати рівняння – означає знайти невідоме число»;

б) **остенсивно**, коли алгебраїчне поняття просто називається і демонструється. Наприклад: числові математичні вирази – числова рівність 6 + 4 = 10; буквені вирази – виду k – 8.

ІІ. МАТЕМАТИЧНІ ВИРАЗИ. ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ

2.1. Формування поняття про вирази

Розглядаючи числа як систему знаків, слід пам'ятати, що операції над ними підпорядковані точно сформульованим правилам. У цій системі і будуються числові вирази, що складаються із числових знаків (чисел) і знаків арифметичних дій. **Числовий вираз** – це**:** а) число; б) послідовність чисел, знаків, арифметичних дій і дужок, що мають смисл. Наприклад, 7; 4 + 5; 3 · (6 – 4) – числові вирази. Але послідовність + 8 – ( ) смислу немає, тож, не є числовими виразами.

Числовий вираз *– це запис, який складається з чисел, пов'язаних знаками математичних дій та знаками, які визначають порядок виконання арифметичних дій.*

Число, яке отримується в результаті виконання арифметичних дій, зазначених у виразі, відповідно до правила порядку їх виконання, що вказані у виразі, називається **значенням числового виразу.**

Поняття про числовий вираз у молодших школярів формують у тісному зв'язку з вивченням арифметичних дій першого і другого ступеня. Методика роботи передбачає два етапи. На першому формується поняття про найпростіші вирази (суму, різницю, добуток, частку двох чисел), а на другому – про складні вирази з використанням дужок та без них (суму добутку і числа, різницю двох часток тощо).

Формування поняття про найпростіші вирази

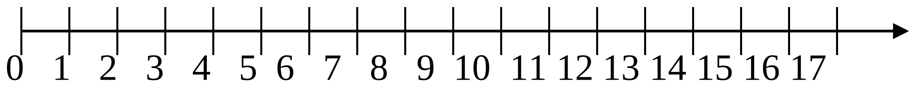
Під час вивчення теми «Числа від 1 до 10», учні засвоюють: назву арифметичних дій; терміни «доданок», «сума», «зменшуване», «від'ємник», «різниця»; читають числові вирази, використовуючи зазначені терміни: «сума чисел 6 і 4 дорівнює 10», «перший доданок 6, другий доданок 4, сума 10»; «різниця чисел 9 і 5 дорівнює 4», «зменшуване 9, від'ємник 5, різниця 4».

Також, доцільно познайомити учнів з термінами «сума» та «різниця» як з числом, яке є результатом додавання або віднімання та назвою виразу. Наприклад, у записі 6 + 4 = 10: (6 + 4) – сума – назва виразу; 10 – сума – числове значення суми (відповідь). Аналогічно і у записі 10 – 7 = 3: (10 – 7) – різниця – назва виразу; 3 – різниця – числове значення виразу.

Аналогічна робота ведеться під час ознайомлення дітей з добутком та часткою.

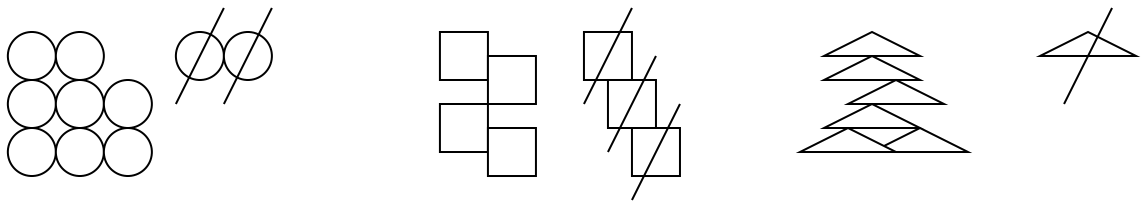
Формування вмінь і навичок розв'язувати числові вирази відбувається на основі різноманітних завдань та вправ практичного спрямування:

1. Знайдіть значення виразів за допомогою числового променя:



9 – 2;   8 – 3;   11 – 9;   15 + 2;   10 – 4;   12 – 7;   7 – 6; 13 + 1; 17 – 10.

2. Підберіть до кожного рисунка відповідний вираз і знайди його значення:

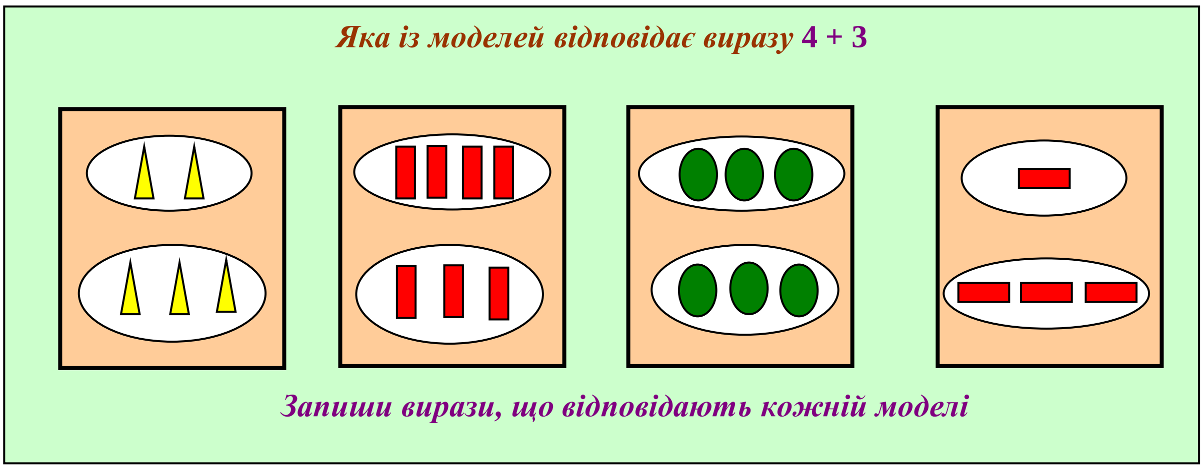


7 + 2; 9 – 7; 10 – 2; 5 – 4; 5 + 4; 7 – 3; 10 – 3; 1 + 4; 6 – 1; 8 + 1; 3 + 3.

3. Прочитайте спочатку вирази на додавання, а потім вирази на віднімання:

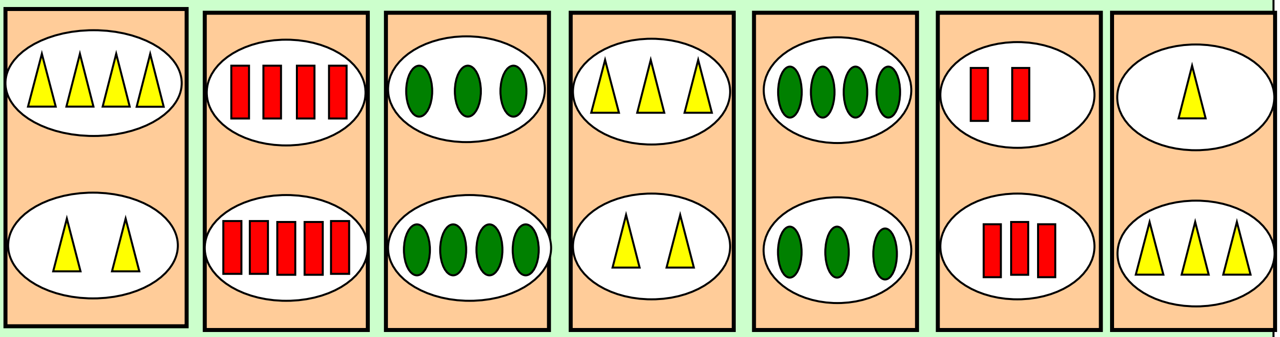
10 – 6, 7 + 3, 9 + 1, 7 – 4, 5 + 2, 6 – 1, 6 + 4, 8 + 5, 15 – 5, 13 – 8.

4. Знайдіть значення виразів, використовуючи наступні моделі:

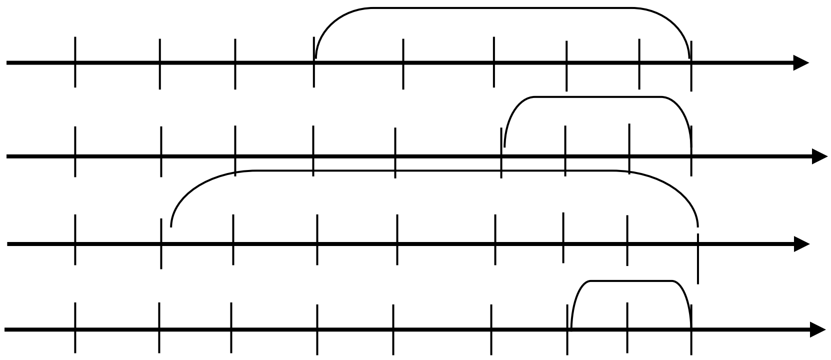


Який вираз відповідає кожній моделі:

2 + 3 1 + 3 3 + 2 4 + 3 4 + 5 3 + 4 4 + 2



Якому числовому променю належить кожний із наведених виразів



а)

б)

в)

г)

7 + 2 = 9

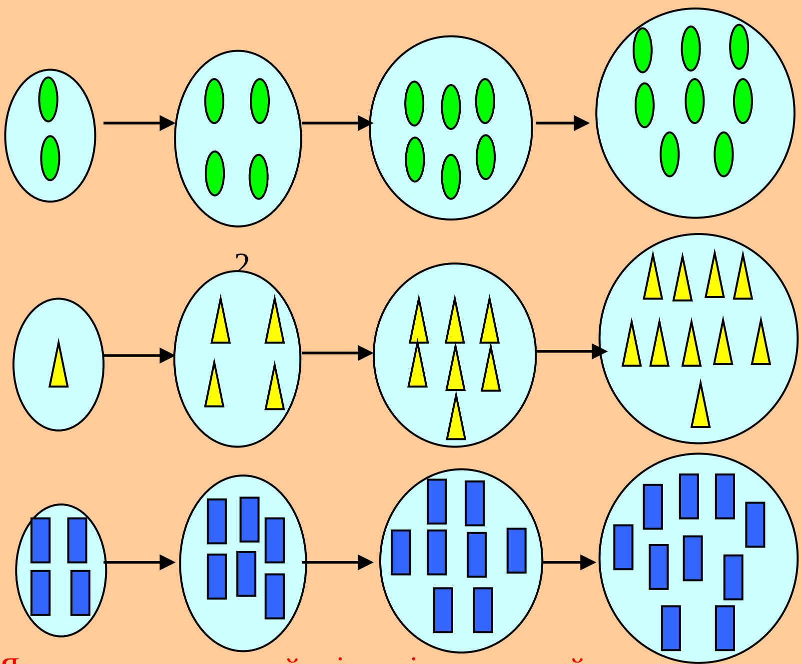
2 + 7 = 9

4 + 5 = 9

6 + 3 = 9

Що змінилося?

Встановіть правило, за яким отримали кожне наступне число



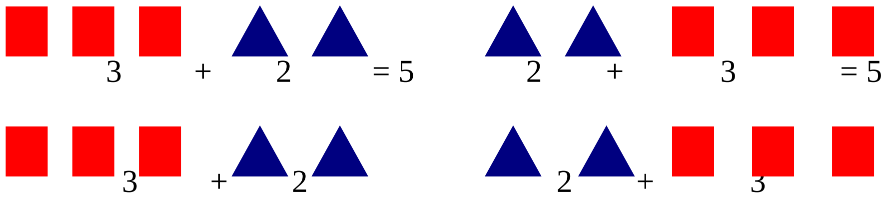
4, 4 + 2, 6 + 2, 8 + 2

2, 2 + 2, 4 + 2, 6 + 2

1, 1 + 3, 4 + 3, 7 + 3

Якому ряду моделей відповідає кожний ряд числових виразів. Знайди значення кожної суми, запиши отримані ряди чисел.

5. Доведіть, що числа можна додавати у будь-якому порядку. Зробіть висновок, що сума від зміни ...



5 = 5

6. Складіть і запишіть два вирази на додавання і два вирази на віднімання.

7. З одного виразу на додавання складіть два вирази на віднімання.

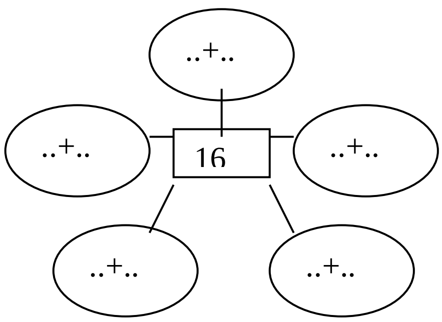
6 + 2 = 8

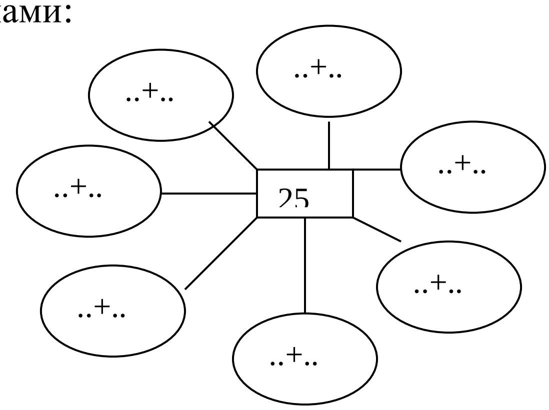
8 – 6 = 2 8 – 2 = 6

8. Випишіть парами рівні між собою вирази:

10 + 3, 13 – 4, 2 + 5, 4 + 5, 5 + 7, 12 – 5, 14 – 5, 9 + 4.

9. Запишіть числа різними сумами:





10. Виберіть з кожного стовпчика вираз, значення якого буде найбільшим. Перевірте себе!

37 + 25	49 + 37	58 + 18	37 + 28	49 + 38	58 + 14
37 + 23	49 + 32	58 + 16	37 + 27	49 + 39	58 + 13
37 + 26	49 + 36	58 + 19	37 + 24	49 + 31	58 + 12

11. Розшифруйте слово:

У	34 + 25	Ж	82 – 40
Р	66 – 21	Б	39 – 30
А	53 – 13	Д	48 – 2

46	45	59	42	9	40

Формування поняття про складні вирази

З виразами на дві і більше арифметичних дій, учні знайомляться під час вивчення прийому додавання та віднімання частинами, які розв'язуються наступним чином:

$$5+\underline{3}$$
$$\underbrace{5+2}_{7}+1=8$$

$$9-\underline{4}$$
$$\underbrace{9-2}_{7}-2=5$$

У подальшому дітей навчають перетворювати вирази в процесі обчислень: 19 – 7 + 6 = 12 + 6 = 18. Такі записи є першим кроком у виконанні тотожних перетворень.

Під час обчислення виразів, учні оволодівають правилом порядку виконання дій у виразах без дужок, які вміщують дії одного ступеня.

Правило. *У виразах без дужок, які вміщують лише додавання і віднімання або множення і ділення, дії виконуються у тому порядку, як вони записані: зліва направо.*

Для підготовки учнів до сприйняття цього правила як загального способу дій при обчисленні значень виразів доцільно навчити їх аналізувати різні числові вирази з точки зору тих ознак, на які зорієнтовано правило. Для цього рекомендуємо виконати наступні завдання на порівняння:

1. Порівняйте вирази у кожній парі. Чим вони схожі? Чим відрізняються? Чим схожі перші вирази в кожній парі? Чим схожі другі вирази в кожній парі? Знайдіть значення цих виразів.

72 – 9 – 3 + 6   48 – 6 + 7 + 8
72 : 9 · 3 : 6   48 : 6 · 7 : 8

2. Запиши суму 23 + 37 + 40 різними способами:

- як зміниться сума, якщо:

а) один із доданків збільшити на 7;

б) один із доданків збільшити на 15 одиниць, а другий – збільшити на 7 одиниць;

в) один із доданків збільшити на 20 одиниць, а другий – зменшити на 3 одиниці?

3. Виконай віднімання зручним способом і поясни свій вибір:

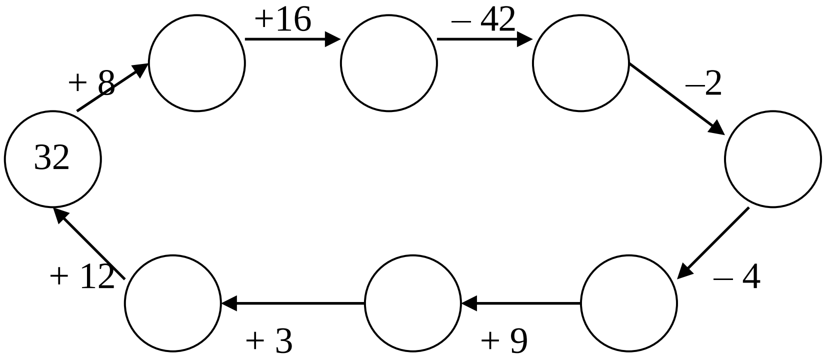
156 – 87 – 56 ;   287 – 51 – 87 ;   192 – 50 – 92.

4. Знайди значення виразу і розшифруй ім'я героя казки.

Л	7 + 4 – 3	К	7 + 7 – 8
А	3 + 9 – 8	Н	18 – 9 +2
Р	9 + 8 – 7	О	3 + 6 + 4
М	10 – 2– 5	С	15 – 8 –5

6	4	10	8	2	13	11

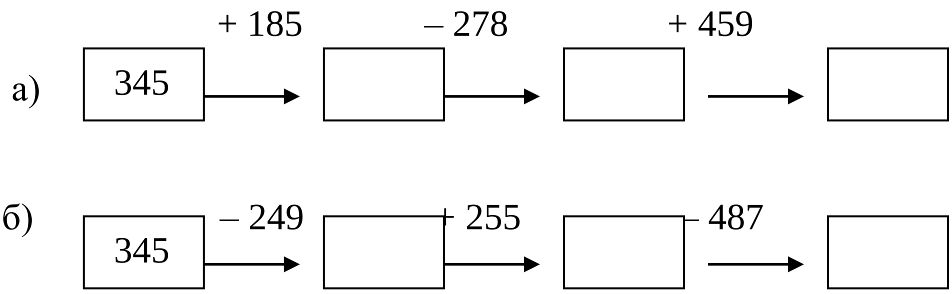
5. Гра «Велогонка»



6. У пачці 25 аркушів паперу червоного кольору, 13 – жовтого кольору і 10 – зеленого. Поясни, що взнаєш, коли знайдеш значення виразів:

25 + 13;   13 + 10;   25 + 10 + 13;   25 – 10;   25 – 13.

7. Знайди значення виразів за наступними програмами:



Формування поняття про вирази на дві дії першого і другого ступеня із застосуванням дужок

Розглядаючи конкретні приклади, треба показати дітям, що у виразах додають або віднімають суму (різницю) чисел, тому суму (різницю) беруть у дужки і спочатку обчислюють значення суми (різниці), а потім уже виконують дію з цим знайденим числом. Наприклад, у виразі 5 + (8 – 6) спочатку знаходимо значення різниці двох чисел 8 і 6, яке дорівнює 2, а потім знаходимо суму – до 5 додаємо 2, дорівнює 7. У виразі 16 – (5 + 3) спочатку обчислюємо суму чисел 5 і 3, яка дорівнює 8, а потім знаходимо значення різниці чисел 16 і 8, що дорівнює 8.

Аналогічно пояснюється матеріал щодо виразів з діями другого ступеня 7 · (9 : 3), або як з діями першого, так і другого ступеня: 80 – (5 · 2); 90 : (15 + 15).

Правило. *У виразах з дужками спочатку обчислюють значення виразу в дужках, а потім обчислення по порядку зліва направо.*

Необхідність введення цього правила обумовлене вивченням властивостей арифметичних дій: сполучної властивості додавання або способів додавання числа до суми і суми до числа, віднімання числа від суми і суми від числа. А далі це правило використовується при вивченні сполучної та розподільної властивостей множення та при діленні суми на число.

Формування умінь застосовувати правило відбувається на основі практичних вправ:

1. Поясни, чим відрізняються вирази в кожному стовпчику:

56 – (8 + 9) – 7	72 : 9 · 3 : 6 : 2
56 – 8 – 9 – 7 + 24	72 : 9 · 3 : (6 : 2) · 7
56 – 8 – 9 – (7 + 24)	72 : 9 · 3 : 6 : 2 · 7

2. Постав дужки так, щоб рівності були істинними:

78 – 60 : 2 + 4 = 13;   78 – 60 : 2 + 4 = 44.

3. Визнач, за яким правилом складені вирази:

7 · 8	8 · 9
700 · 80	800 · 90
(42 : 6) · (32 : 4)	(64 : 8) · (36 : 4)
(4200 : 6) · (320 : 4)	(6400 : 8) · (360 : 4)

4. Виконай дії з іменованими числами:

а) розв'яжи з поясненням:

2 т 3 ц – 8 ц;	400 г · 8
2 м 6 дм – 1 м 50 см;	4 т 8 ц · 6

б) поясни, як виконали віднімання:

3 кг 900 г – 700 г	3 м – 25 см
3 кг – 1 кг 200 г	6 м – 1 м 6 дм

Формування поняття про вирази на дві дії першого і другого ступеня без дужок

Під час розгляду виразів на дві дії першого і другого ступеня без дужок засвоюється правило: у виразах без дужок спочатку виконуються по порядку зліва направо множення і ділення, а потім додавання і віднімання: $40 - 5 \cdot 6$. Також розглядаються випадки, коли знаходження числових значень виразів виконується в порядку слідування дій: $12 : 4 + 7$; $2 \cdot 6 - 3$; $10 : 2 \cdot 8$.

На цьому етапі звертається увага на спосіб називання виразів, наприклад, обчислити суму частки чисел 12 і 4 та числа 7; знайти добуток частки чисел 10 і 2 та числа 8.

Формування умінь знаходити значення виразів відбувається на основі виконання практичних вправ:

1. Запишіть вирази, в яких зменшуване більше, ніж 4023 на …, а від'ємник – будь-яке трицифрове число. Обчисліть значення отриманих виразів.

2. Обчисліть різницю добутку 127 і 6 та числа 700.

3. Складіть вирази і знайдіть їх значення:

   а) від числа 700 відняли добуток чисел 60 і 9;

   б) до добутку чисел 5 і 90 додати добуток чисел 6 і 9;

   в) від добутку чисел 40 і 9 відняти частку чисел 81 і 9.

Формування поняття про вирази на дві і більше дій першого і другого ступенів як з дужками, так і без них

На даному етапі узагальнюється весь попередній сформований матеріал про вирази. Він включає в себе: а) знаходження числових значень виразів на дві дії, яке спирається на знання правила порядку виконання арифметичних дій першого і другого ступенів: $30 - 16 : 4$; $32 : (2 \cdot 4)$; б) знаходження значень виразів на три і більше дій: $9 \cdot 8 + 9 \cdot 7$; $5071 \cdot 17 - 396 : 9 + 49$.

Під час ознайомлення учнів з правилами порядку виконання арифметичних дій (або повторення їх) учитель звертає увагу на чіткий порядок виконання арифметичних дій першого та другого ступеня і практично доводить, що невиконання даних правил призводить до помилкового результату.

Правило. *У виразах без дужок спочатку виконуються по порядку зліва направо множення і ділення, а потім додавання і віднімання.*

Щоб учні засвоїли введені правила, поряд з тренувальними вправами розв'язують вирази на пояснення порядку виконання дій. Також ефективні вправи на пояснення помилок, допущених внаслідок порушення порядку виконання дій. Наприклад, з наведених нижче пар виразів треба виписати лише ті, де обчислення виконано за правилами порядку дій, розглянути вирази в яких допущено помилку та усно пояснити її:

20 + 30 : 5 = 10	42 – 12 : 6 = 40	6 · 5 + 40 : 2 = 50
20 + 30 : 5 = 26	42 – 12 : 6 = 5	6 · 5 + 40 : 2 = 35

Після пояснення помилок можна запропонувати завдання: використовуючи дужки, змінити порядок дій так, щоб вираз мав певне задане значення. Наприклад, щоб перший з наведених виразів мав значення, що дорівнює 10, треба записати його так: (20 + 30) : 5 = 10.

Особливо корисні вправи на обчислення значення виразу, коли доводиться застосовувати всі вивчені правила. Наприклад, учні обчислюють значення виразу 36 : 6 + 3 · 2. Потім за допомогою дужок змінюють порядок дій у ньому:

36 : 6 + (3 · 2); 36 : (6 + 3) · 2; 36 : (6 + 3 · 2); (36 : 6 + 3) · 2, та пояснюють, як змінилося його значення.

Виконуючи такі вправи, учні переконуються в тому, що значення виразу може змінюватися, якщо змінюється порядок дій.

Дедалі вирази ускладнюються і під час їх обчислень треба застосовувати не одне, а два або три правила порядку виконання дій:

1. Знайдіть значення виразів:

90 · 8 – (240 + 170) + 190; 469148 – 148 · 9 + (30101 – 26909);

(6 · 3) + (4 · 7) – (2 · 8); (28 · 57) – (17 · 9) + (4 · 12)

2. Подумайте, чи можна стверджувати, що значення виразів у кожному стовпчику однакові:

56 : 7	54 : 9
7 · 8 : (32 : 4)	9 · 6 : (36 : 4)
(65 – 9) : (24 : 3)	(72 – 18) : (27 : 3)

3. Визначте, які числа потрібно вставити замість зірочки, щоб отримати правильні рівності:

24 + 4 · 3 = * + 24	36 : 6 – * = * – 5
72 – 5 · 3 = 8 · 9 – *	(4 + 2) · 7 = 6 · *
72 + (40 – 4) : 9 = * + 4	* : (9 – 3) · * = 48 : * · 7

4. Виберіть числові вирази, що відповідають кожній схемі і обчисліть їх значення:

а) □ + □ : □ + □ x □ – □

б) □ x □ + (□ – □) – □

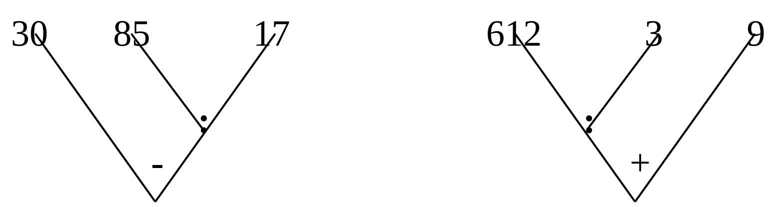
в) □ : □ + □ – □ – (□ + □)

63 : 7 + (20 – 5) – (9 + 6)	(18 + 36) : 9 + 6 · 8 – 50
18 + 36 : 9 + 6 · 8 – 50	63 : 7 + 20 – 5 – (9 + 6)
5 · (4 + 3) + 19 – 10	5 · 4 + (3 + 19) – 10

5. Визначте, чим схожі числові вирази? Чим відрізняються?

98 – (6 · 9 + 8 · 3)   98 – 6 · 9 + 8 · 3

6. Складіть вирази за схемою і знайдіть їх значення:



Розв'язання аналогічних завдань створює умови свідомого застосування вивчених правил.

2.2. Перетворення виразів

Тотожне перетворення виразу – це заміна одного виразу іншим, значення якого дорівнює значенню заданого виразу.

Тотожними називаються такі числові вирази, значення яких рівні.

Наприклад, $(5 + 4) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3$; $6 + 6 + 6 + 6 = 6 \cdot 4$

Учні виконують перетворення числових виразів, спираючись на властивості арифметичних дій та правила: правила додавання суми до числа $a + (b + c)$, віднімання суми від числа $a – (b + c)$, віднімання числа від суми $(a + b) – c$, правила множення суми на число $(a + b) \cdot c$ та інші. Під час вивчення кожного правила учні впевнюються, що у виразах певного виду можна виконувати дії по-різному і числові значення виразу при цьому не змінюються. Наприклад, властивості додавання – переставна властивість: $a + b = b + a$ та сполучна властивість: $(a + b) + c = a + (b + c)$ показують, що значення суми не залежить від порядку доданків та порядку дій. Це дозволяє спрощувати вирази та знаходити їх значення зручним способом:

$(397 + 51) + (249 + 3) = (397 + 3) + (51 + 249) = 400 + 300 = 700$;

$(6 + 3) \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$; $(6 + 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 24 + 12 = 36$.

При формуванні умінь і навичок щодо перетворення виразів знання властивостей арифметичних дій дозволять учням виконувати обчислення зручним способом. У методиці роботи над цим матеріалом пропонуються наступні вправи.

1. Знайди значення виразу зручним способом: $(10 + 7) \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 7 \cdot 5 = 85$.
2. Запиши одним числом: $800 + 30 + 7$; $900 + 10 + 5$; $400 + 9$; $300 + 2$.
3. Запиши суму зручним способом:

   $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18$.
4. Заміни множення додаванням і обчисли вирази:

   $52 \cdot 2$; $137 \cdot 3$; $84 \cdot 2$; $169 \cdot 4$; $170 \cdot 5$; $3015 \cdot 4$.
5. Перевір, чи істинні рівності:

   $13 \cdot 3 = 13 + 13 + 13$; $20 \cdot 5 = 20 + 20 + 20 + 20$
6. Яка буде відповідь, якщо збільшити кожне іменоване число у 10 разів:

30 дм 5 см;   50 кг 20 г;   7 т 250 кг;   2 км 300 м

7. Поясни, як отримали вираз, що записаний справа у кожній рівності:

$4 \cdot 6 \cdot 10 = 40 \cdot 6$ $2 \cdot 8 \cdot 10 = 20 \cdot 8$

$8 \cdot 5 \cdot 10 = 8 \cdot 50$ $5 \cdot 7 \cdot 10 = 7 \cdot 50$

8. Поясни хід знаходження значення виразів

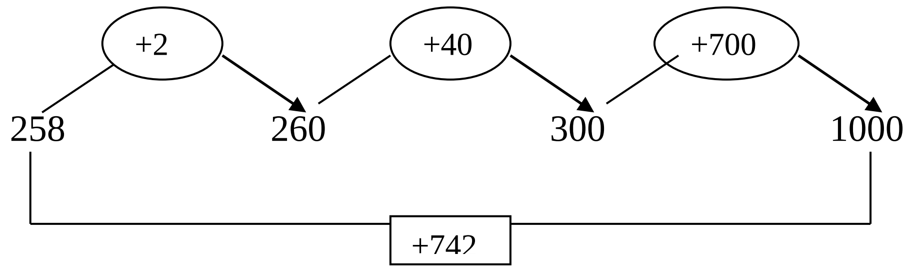
$\boxed{4 \cdot 90}$ $4 \cdot 9 = 36$ $36 \cdot 10 = 3$ $\boxed{360}$

$\boxed{7 \cdot 500}$ …………………… $\boxed{….}$

$\boxed{6 \cdot 80}$ ……………………. $\boxed{….}$

$\boxed{8 \cdot 800}$ ……………………. $\boxed{….}$

9. Знайди свій шлях знаходження значення виразу 258 + 742 = 1000



2.3. Порівняння виразів

Порівняння виразів ґрунтується на умінні учнів порівнювати числа. Виходячи з того, що число є кількісною характеристикою предметної множини, спочатку порівняння чисел відбувається на основі встановлення взаємно однозначної відповідності числа та предметної множини. Наприклад:

- Скільки квадратиків на рисунку? (7).

- Скільки кружечків? (5).

- Яких фігур більше? (Квадратиків).

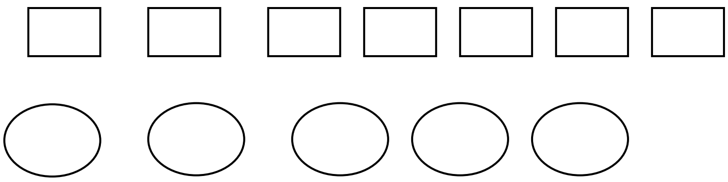
- Яких фігур менше? (Кружечків).

- Яким числом позначили кількість квадратиків? (7).

- Яким числом позначили кількість кружечків? (5).

- Значить 7 більше, ніж 5.

- Запишемо 7 > 5.



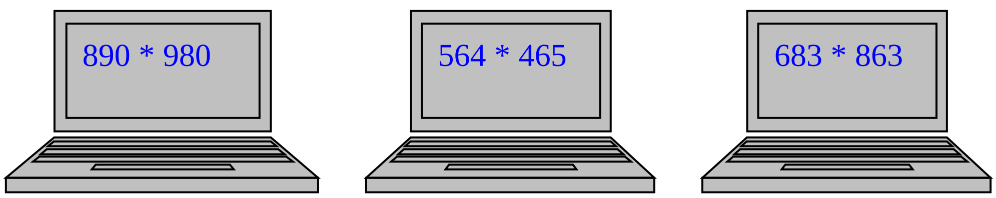
Далі порівнюють числа на основі їх місця в натуральному ряді: 9 менше, ніж 10, бо в натуральному ряді чисел 9 стоїть перед числом 10, або під час лічби число 9 називають перед числом 10. Установлені відношення записують за допомогою знаків «>», «<», «=». Учні виконують вправи на читання і записування рівностей і нерівностей.

При вивченні нумерації чисел у межах 100, 1000, а також нумерації багатоцифрових чисел, числа порівнюють, виходячи з їхнього місця в натуральному ряді, або на підставі розгляду чисел за десятковим складом і порівняння відповідних розрядних чисел, починаючи з вищого. Надалі переходять до порівняння виразів.

1. Поясни спосіб порівняння:

371 < **5**82 ; 2**9**4 > 2**6**3; 15**7** < 15**9**

2. Порівняй числа:



3. Порівняй вирази не обчислюючи їх:

459 – 240 – 148 * 459 – (240 – 148); 156 : 12 * 156 : 13
145 · 3 · 4 * 145 · (3 · 4); 720 : 9 * 720 : 80

4. Замість * постав знаки >, <, =:

8149 * 814 дес. 9 од.
28 сот. 5 од. * 2806
1047 * 10 сот. 47 од.

5. Порівняй іменовані числа:

8000 кг * 8 т 5 км 240 м * 524 м
350 кг * 3 ц 3 год 12 хв * 190 хв
7 т 120 кг * 71200 кг 6 кг 49 г * 6 кг 48 г

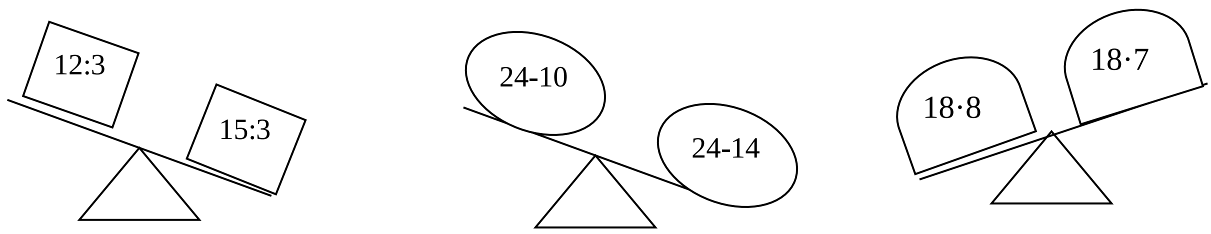
6. Визнач, яку цифру замінено зірочкою?

7*57 < 7864; 542* < 5429; 25*6 < 2542; 4*8 < 469.

7. Підбери та запиши пропущені числа.

800 < 875 < 900 ….. < 1240 < …..
….. < 1350 < ….. ….. < 1780 < …..

8. Визнач ті числові терези, які показують неправильне порівняння.



Виконання завдань на порівняння виразів та чисел і виразів у концентрах 10, 100, 1000 та багатоцифрових чисел сприяє: а) формуванню понять про рівності і нерівності; б) засвоєнню знань про нумерацію й арифметичні дії; в) формуванню обчислювальних навичок.

2.4. Розв'язання задач складанням числових виразів

Закріпленню поняття виразу сприяє запровадження розв'язання задач складанням виразу. Після засвоєння учнями змісту задачі та встановлення шляхів її розв'язання визначають дії, які потрібні для її розв'язання, встановлюють послідовність дій. Вираз, складений для першої дії, буде одним з компонентів другої дії; другий вираз (ускладнений) буде одним з компонентів третьої дії і т.д. У результаті дістають числовий вираз, який відображає весь хід розбору задачі і показує послідовність дій для її розв'язування.

Задача. На одній тарілці було 12 помідорів, а на другій – 9. За сніданком діти з'їли 8 помідорів. Скільки помідорів залишилося?

Розв'яжи задачу, користуючись схемою: $(\square + \square) - \square$

Етапи розв'язування задач способом складання виразу:

Підготовча робота.

Підготовка учнів до розв'язування задач способом складання виразу спрямована на виконання ними завдань, основна мета яких полягає не у знаходженні числового результату, а у складанні числових виразів, а також у тлумаченні (аналізі) готових виразів, складених за змістом задачі. Складаючи числові вирази за умовою задачі, учні вчаться записувати деяку життєву ситуацію математичною мовою. Оскільки числовий результат знаходити не треба, то увага дітей зосереджується саме на послідовному складанні виразу.

На початковому етапі складають здебільшого вирази на одну дію. Мета цього етапу – розвинути вміння учнів синтезувати два числа і визначити дію відповідно до запитання. Розглянемо приклад.

Задача. У юннатів було 12 сірих і 4 білих кролі.

Використовуючи ці числа і знак дії, запишіть виразом, скільки всього кролів було в юннатів. Знаходити значення виразу не треба.

Відповідь. 12 + 4 (кролів).

Пояснення складених виразів, використовується вчителями як вид творчої роботи. Зразки завдань такого виду:

1. Рибалка спіймав 7 окунів і 5 карасів. На юшку він використав 8 рибин. Про що дізнаємося, обчисливши вирази: 7 + 5; 7 – 5; (7 + 5) – 8?

2. Прочитайте задачі і знайдіть для кожної вираз, за допомогою якого вона розв'язується.

а) У сувої було 13 м тканини. Відрізали 7 м тканини, а потій ще 5 м. Скільки метрів тканини залишилось у сувої?

б) Потрібно заправити пальним 13 колісних і 7 гусеничних тракторів. Заправили 5 тракторів. Скільки тракторів залишилося заправити?

13 – (7 – 5);   (13 + 7) – 5;   (13 – 7) – 5.

Ознайомлення учнів зі способом послідовного складання виразу для розв'язання задачі.

Задача. У їдальні було 6 банок томатного соку по 3 л кожна. На обід витратили 12 л соку. Скільки літрів соку залишилося в їдальні?

- Скільки літрів соку було в їдальні? 3 · 6 (літрів).
- Скільки літрів соку витратили? (12 л).
- Стало соку більше чи менше? (Менше).
- Запишемо вираз: (3 · 6) – 12
- Знаходимо значення виразу: (3 · 6) – 12 = 6 (л).

Відповідь: 6 л соку залишилося в їдальні.

У навчанні дітей розв'язувати задачі складанням виразу допомагають як короткий запис, так і схеми розв'язування задачі.

Задача. На першій тарілці було 12 помідорів, а на другій – 9. За сніданком діти з'їли 8 помідорів. Скільки помідорів залишилося?

Розв'яжіть задачу, користуючись коротким записом та схемою:

Було – 12 п. і 9 п.
З'їли – 8 п.
Залишилося - ?

$$(\triangle + \triangle) - \triangle$$

На етапі закріплення умінь розв'язування задач складанням виразу діти розв'язують задачі як за допомогою вчителя, так і самостійно. Приклади складених задач різних видів.

Задача. Туристи за перший день проїхали 270 км, за другий – на 10 км більше, ніж за перший, а за третій – на 20 км менше, ніж за другий. Який шлях проїхали туристи за третій день?

Задача. Першого дня на виставку живопису прийшло 320 людей. Це на 100 менше, ніж другого дня. Скільки всього людей відвідало за два дні виставку живопису?

Задача. До крамниці привезли 180 кг динь і 300 кг кавунів. За день продали 200 кг цих плодів. Скільки кілограмів плодів залишилось у крамниці?

Задача. У парку висадили 120 беріз, ялин – на 90 більше, а сосен – стільки, скільки беріз і ялин разом. Скільки всього дерев висадили?

Задача. Скільки виразів однакової складності обчислять Олег і Катруся разом за 1 хв, якщо Олег за 5 хв обчислює 15 виразів, а Катруся за 8 хв – 16 виразів?

Задача. П'ять хлібних дерев можуть прогодувати протягом року 15 людей. У селищі 75 людей. Скільки хлібних дерев потрібно селищу?

Задача. 4 кіоски розвезли 8 ц динь, порівну в кожний. Кавунів в один кіоск завозили на 3 ц більше, ніж динь. Скільки кавунів завезли в 3 кіоски?

Задача. Троє вишивальниць за 4 тижні вишили 24 пасхальні рушнички. Скільки пасхальних рушничків вишивала за один тиждень одна вишивальниця, якщо продуктивність у них була однакова?

III. БУКВЕНІ ВИРАЗИ. ВИРАЗИ ІЗ ЗМІННОЮ

Математичний вираз, в якому число позначено буквою, називається буквеним виразом. Буквені вирази наряду з числами мають змінні, які позначають буквами. Замість букви у математичному виразі можна поставити будь-яке число, тож, букву у виразі називають – ***змінною.*** Використання буквеної символіки являє собою абстрагування від конкретних кількісних характеристик, які учень достатньо легко може уявити собі. Наприклад:

Задача. У клітці 2 білих зайчика і 3 сірих. Скільки всього зайчиків у клітці? Конкретну кількість зайчиків можна представити на моделі, в якій множина конкретних об'єктів (палички, кружечки білі і сірі) замінюється їхньою чисельністю і отримується конкретна чисельність шляхом об'єднання цих множин через виконання дії додавання: 2 + 3 отримуємо 5 зайчиків усього.

Ця ж ситуація виконується в буквеному вигляді: уявіть, що у клітці c білих зайчика і b сірих. Скільки всього зайчиків у клітці? У цьому разі розв'язання задачі (сума) записується буквеним виразом: $c + b$, смисл якого не співвідноситься з конкретними числами. Цей вираз є кількісним описом змісту ситуації об'єднання двох множин, які не мають спільних елементів. Тож, виконуючи дію додавання, отримуємо відповідь $c + b = a$. Значення a залежить від числових значень букв c *і* b.

Під час опрацювання буквених виразів у дітей формуються поняття змінної, рівняння, нерівності. Вирази можуть мати одну букву або дві і більше. Змінна у виразі може приймати одне або декілька значень. Наприклад, знайти значення виразу: а + 4, при а = 6; а = 14; а = 48. Під час обчислення отриманих виразів на основі певних міркувань діти доходять висновку, що кожне значення змінної змінює значення суми. Аналіз отриманих значень суми підводить учнів до висновку: чим більше значення одного з доданків, при постійному значенні другого, тим більше значення суми.

Інший приклад: знайди значення виразів: 24 : k і k · 8, якщо k = 1, k = 3, k = 6, k = 8. Аналіз отриманих часток – 24, 8, 4, 3 підводить дитину до висновку: у разі збільшення значення дільника, при незмінному діленому, значення частки зменшується. Аналіз отриманих добутків: 8, 24, 48, 64 дозволить учневі прийти до висновку – якщо збільшити один множник при незмінному другому, то збільшується значення добутку.

Розглянемо випадки коли вирази вміщують дві букви. Наприклад, обчисли значення виразів c + f і c – f, якщо c = 47, f = 62; c = 149, f = 85. Для обчислення значень виразів задані значення змінних по черзі підставляють у даний вираз. Завдання має на меті підвести учнів до розуміння можливості змінних значень компонентів дій, у даному випадку дій додавання і віднімання. Зазначимо, що букви можуть мати будь-які значення, але слід звертати увагу на область допустимих значень змінних. Наприклад, у виразі c – f, змінна *c* може приймати будь-яке значення, а змінна *f* може приймати значення які менше або дорівнюють *c*. Для виразів які побудовані на діях множення і додавання, обмежень для значень невідомих немає. А для виразів, які побудовані на діях ділення і віднімання обмеження є. Стосовно ділення, то пропонуються значення діленого і дільника, які дають значення частки без остачі. Аналіз наведених прикладів показує, що буквена символіка використовується як засіб узагальнення знань і уявлень дітей про кількісні відношення об'єктів оточуючого світу та про властивості арифметичних дій, що сприяє формуванню узагальнених уявлень дітей про поняття «кількість» та смисл арифметичних дій.

Різновиди завдань та вправ на закріплення матеріалу.

1. Якщо у виразах одна й та ж змінна зустрічається два або більше разів, то при знаходженні значення виразу замість змінної треба підставляти одне й те ж число. Знайдіть значення виразів, якщо a = 12.

a + (a + 25); (a + a) : 4; a : 4 + a.

2. Обчисліть суму чисел a і b, якщо a = 37, b = 44; a = 85, b = 12.

3. Знайди значення виразу 240 + a · 25 , при a = 7; a = 10; a = 20.

4. Перевір, чи істинні рівності: a · 5 = a + a + a + a + a.

5. Заміни дію множення додаванням: c · 7; 8 · f; 9 · d.

6. Запиши рівності у вигляді добутку:

$7 \cdot a - 2 \cdot a$; $251 \cdot a - 103 \cdot a$; $8 \cdot a - 3 \cdot a$.

7. Зменшуване k, а від'ємник виражений часткою чисел b і 10. Знайдіть значення різниці, якщо $k = 200$, $b = 180$.

8. Знайди невідоме число і зроби перевірку:

$72 = 9 \cdot a$ $72 = c : 2$ $81 = 162 : m$

$72 = b \cdot 24$ $72 = 72 : k$ $81 = r : 1$

9. Який вираз можна назвати сумою?

а) $300 + 40 \cdot 5$;   б) $(300 + 40) : 20$;   в) $k + d$.

10. Способи знаходження периметра прямокутника записати всіма можливими видами: $(a + b) \cdot 2$; $a \cdot 2 + b \cdot 2$; $a + a + b + b$. Знайти значення периметра, якщо $a = 5$, $b = 3$.

11. Встанови знак дії та знайди невідомий компонент: 8 Δ □ = 2;   6 Δ □ = 9

12. Розв'язування задач з буквеними даними:

а) Купили d кг апельсинів, а мандаринів – у 3 рази менше. Що позначає кожний вираз?   1) $d : 3$;   2) $d + d : 3$;   3) $d - d : 3$.

б) Склади задачу на множення:

1) Було b…, в кожному по h …Скільки всього?

2) У одного хлопчика – b …, у другого – в h разів більше. Скільки … у другого хлопчика?

в) З однієї грядки зібрали 6 гарбузів, а з другої – d гарбузів. Усі гарбузи склали у 2 ящики, порівну в кожний. Скільки гарбузів клали в один ящик?

г) У магазині було h кг бананів. Продали b кг. Скільки кілограмів бананів залишилося? Склади до задачі вираз. Знайди його значення, якщо:

$h = 385$, $b = 160$; $h = 400$, $b = 132$.

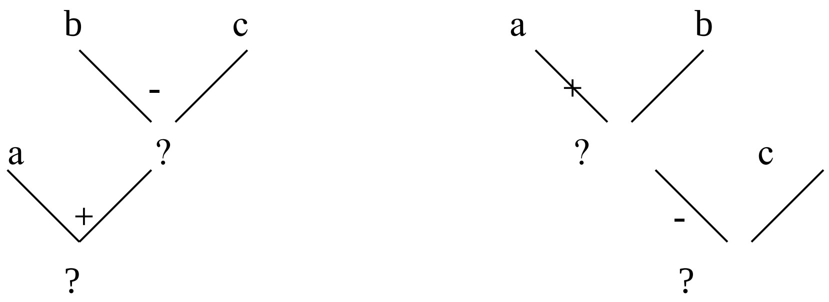
д) Сторона квадрата а см. Склади вираз для знаходження периметра квадрата. Знайди значення виразу при а = 7 дм 8 см.

Аналізують такі задачі так само, як задачі з числовими даними. До таких задач можна давати додаткове завдання, наприклад, усно обчислити відповідь, якщо а дорівнює 4; $b = 6$; $d = 9$ тощо.

Задачі з буквеними даними допомагають учням глибше усвідомити процес розв'язування задач та значення букви як змінної, сприяють умінню складати і записувати розв'язки задач виразом.

13. Користуючись схемами, запиши вирази, в яких:

$a = 28 \cdot 370, \quad b = 35778, \quad c = 782$



14. Використання буквеної символіки для узагальнення знань.

Конкретною базою для використання буквеної символіки як засобу узагальнення є знання про арифметичні дії і ті знання, які формуються на їх основі. До них належать поняття про арифметичні дії, їхні властивості, закони, про зв'язок між компонентами і результатами дій тощо. Наприклад:

$a + b = b + a$ – переставна властивість додавання;

$a + (b + c) = (a + b) + c$ – додавання числа до суми;

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ – множення числа на суму;

$P = (a + b) \cdot 2; \quad P = a \cdot 2 + b \cdot 2; \quad P = a + a + b + b$ – знаходження периметру прямокутника;

$a : 1 = a ; \quad a : a = 1; \ a \cdot 0 = 0$ – особливі випадки множення і ділення;

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ – множення числа на добуток двох чисел.

15. Сформулюй властивості множення і ділення, що записані рівностями.

$(a : b) : c = a : (b \cdot c) \qquad a : (b : c) = (a : b) \cdot c$

$(a \cdot b) : c = b \cdot (a : c) \qquad (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$

Узагальнююча роль буквеної символіки робить її сильним апаратом формування узагальнюючих уявлень і способів дій з виразами. У зв'язку з цим, активне оперування алгебраїчними поняттями є важливою складовою математики, оскільки формується і розвивається у дітей теоретичний стиль мислення.

Використання букв для запису властивостей арифметичних дій запроваджується в процесі вивчення дій в концентрі «Багатоцифрові числа». У більш систематизованому вигляді з цією метою буквена символіка подана в матеріалах для повторення в кінці року. В обох випадках буквені записи подаються після словесного формулювання властивостей. Це означає, що буквені записи виступають не як вищий рівень узагальнення, а як лаконічний засіб унаочнення властивостей. У підручнику в буквеному записі подаються такі властивості:

$a + b = b + a$ – переставний закон додавання;

$a + b + c = a + (b + c)$ – сполучний закон додавання;

$a - (b + c)$, $(a - b) - c$ – записи про властивість різниці, пов'язаної з різними способами обчислення зазначених виразів;

$a \cdot b = b \cdot a$ – переставний закон множення;

$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – сполучний закон множення;

$(a + b + c) \cdot k = a \cdot k + b \cdot k + c \cdot k$ – розподільний закон множення відносно додавання;

$c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$ – розподільний закон множення відносно віднімання.

З основними властивостями арифметичних дій в практичному плані учні зустрічаються неодноразово, тому їх буквене узагальнення не викликає утруднень. Проте слід мати на увазі, що в кінці навчального року матеріал подається в довідково-описовому вигляді. Це матеріал для побудови вчителем зв'язної розповіді. Його не варто пропонувати учням для заучування.

IV. ЧИСЛОВІ РІВНОСТІ ТА НЕРІВНОСТІ

Одними з ключових алгебраїчних понять, з якими знайомляться молодші школярі, є числові рівності та нерівності. Запис будь-яких двох чисел або двох виразів, з'єднаних знаком «=», називають **рівністю.** Процес порівняння чисел і виразів та позначення відношення між ними за допомогою знаків порівняння приводить до отримання нерівностей. Запис будь-яких двох чисел або двох виразів, з'єднаних одним із знаків «<», «>», називають **нерівністю.** Рівності і нерівності можуть бути істинними і хибними (правильними і неправильними). Наприклад, рівність $5 \cdot 5 = 25$ – істинна (правильна). А рівність $a + 4 = 9$ правильна тільки при $a = 5$ і неправильна при інших значеннях a. Нерівності також можуть бути правильними та неправильними. Наприклад, правильними є нерівності: $15 > 4$, $0 < 7$; а нерівності: $12 < 9$, $7 > 15$ є неправильними.

Виконання завдань у межах цієї теми має на меті сформувати у молодших школярів поняття про відношення «більше», «менше», «дорівнює». Смисл розв'язання будь-якого виразу полягає в тому, щоб знайти таке значення виразу, яке б обертало його в істинну рівність або нерівність. Логіка розгортання запропонованого навчального матеріалу полягає:

- у порівнянні конкретних множин;
- у порівнянні двох предметних множин;
- в осмисленні кількісної характеристики кожної із предметних множин;
- у фіксації способу вираження кількісної характеристики предметної множини числом;
- у порівнянні числових характеристик кожної множини (порівняння чисел), а в подальшому – порівняння чисел і виразу, порівняння двох виразів та узагальнення результатів порівняння.

Порівняння чисел відбувається **двома способами**:

- безпосереднє сприйняття кількості об'єктів кожної множини з наступним порівнянням чисел, які є кількісною характеристикою кожної із множин;

- встановлення взаємно однозначної відповідності між елементами множин, що порівнюються.

У основі виконання завдань лежить практична діяльність учнів. Порівняння множин предметів можна перевести на мову математики за допомогою знаків «>», «<», «=». Для закріплення уміння правильно використовувати знаки відношень і записи результатів порівняння чисел та виразів пропонуємо наступні різноманітні завдання.

1. Підбери числа так, щоб записи були правильними: $\square > \square \quad \square \qquad \square$
Способом підбору учень знаходить числа і перевіряє істинність нерівностей.

2. Числові нерівності отримуємо при порівнянні чисел та числових виразів і числа. Постав знаки порівняння таким чином, щоб отримали правильні нерівності:

* …** ; 99 … *8 ; 2* … 26; *2 … *4

У процесі виконання цього завдання учні міркують так: будь-яке одноцифрове число менше за будь-яке двоцифрове число, тож у випадку * …** слід поставити знак «менше» * <**. У другому випадку – найбільше двоцифрове число в натуральному ряду чисел – це число 99. Тож, воно більше будь-якого іншого двоцифрового числа, значить 99 > *8.

Здійснюючи вибір потрібного знака відношення для третього випадку, міркування можуть бути такими: цифра, що закрита зірочкою, у значній мірі впливає на вибір знаку порівняння. Якщо у випадку 2* … 26 замість зірочки поставити цифру більшу, ніж 6, то слід використати знак >, а якщо замість зірочки поставити цифру 6, то слід використати знак =, а якщо ми поставимо знак <, то за зірочкою ховається одна із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5. Аналогічне пояснення і для останнього випадку *2 … *4.

Під час порівняння виразу і числа пояснення може бути аналогічним. Замість зірочки постав > < =: 5 + 1 * 8; 6 – 3 * 4; 7 + 3 * 9; 10 – 2 * 7.

Формування уявлень про істинні та хибні рівності та нерівності на основі використання правил порівняння закріплюється й у наступних вправах:

3. Не розв'язуючи, доведіть що: 8 · 4 < 8 · 5.

4. Які з наведених рівностей та нерівностей правильні, а які неправильні.

35 : 5 = 6	64 · 306 = 306 · 64
27 = 3 · 9	84 – 35 < 84 – 45
18760 > 18670	75 · 30 > 75 · 20
91 < 91	90 – 27 > 90 – 17

5. Завдання на картках.

Завдання № 1

Постав знаки "<", ">", "=" так, щоб отримали правильні записи:

9 м 3 дм … 93 дм	5 дм 4 см … 54 дм
7 дм 6 см … 76 см	38 м 3 дм … 39 м
62 см … 6 м 2 см	74 дм …8 м

Завдання № 2

Не обчислюючи значення виразів, постав знак "<", ">" або "=" так, щоб отримали правильні нерівності:

7 · 6 … 7 · 8	7 · 6 + 7 … 7 · 8 + 7
8 · 7 … 6 · 7	7 · 3 + 7 … 7 · 6 — 7
7 · 5 + 7 + 7 … 7 · 8	7 · 4 — 7 … 7 · 4 + 7

6. Перевір, чи істинні нерівності:

45 – 18 < 42; 50 – 8 < 58 – 10; 27 + 15 > 32; 64 – 7 > 64 – 9

7. Випиши істинні рівності і нерівності:

9 дес. 9 од. > 100; 5 см 6 мм = 65 мм; 69 + 8 = 77; 90 – 7 < 89

8. Які знаки дій треба підставити замість *, щоб рівність була істинною?

5 * (5 * 5 * 5) * 5 = 6

9. Знайди числа, які відповідають даним нерівностям:

487100 >…< 487069 69004 >…< 69000

35999 >…< 35888 15692 >…< 15602

10. Постав знаки < ,> ,=

(3 · 10000) + (6 · 1000) + (5 · 100) + (2 · 10) * 36529

457249 * (5 · 10000) + (7 · 1000) + (2 · 100) + (4 · 10)

(8 · 1000) + (4 · 100) + (2 · 10) + 4 * 8424

11. Встав пропущені числа. Порівняй будь-які пари чисел.

770500	……	780000	……	785000	……

12. Порівняй: 834 $\square$ 843 ; 586 – 214 $\square$ 586 ; 719 – 38 $\square$ 717 – 308

13. Чи можна стверджувати, що завжди буде істинна нерівність:

($\square$ $\square$ · 5 > ($\square$ + $\square$ 0 ? Чому ?

14. Запиши у вигляді рівностей:

а) число 26 більше 10 на 6;

б) число 29 менше 30 на 1;

в) число 30 більше 10 у 3 рази;

г) число 50 менше 100 у 2 рази.

15. Порівняйте:

63 : 7	7 · 8
– 5	– 6
· 8	: 10
+ 16	+ 25
: 6	: 6
+ 2	+ 2
: 5	· 2
________	________

V. НЕРІВНОСТІ ІЗ ЗМІННОЮ

У початковому курсі математики наряду з числовими рівностями та нерівностями розглядають нерівності із змінною. **Змінна** – це місце, на яке можна підставити допустимі значення (із області визначення змінної).

Нерівності із змінною – це предикат і тому самий елементарний спосіб їх розв'язання – спосіб підбору.

Предикат (від лат. praedicatum – сказане). У математичній логіці предикат розуміють як пропозиційну функцію, тобто як функцію, що визначена на певній предметній області і значеннями якої є висловлювання або їхні істиннісні значення.

Для формування поняття нерівності із змінною пропонуються такі види вправ: таблиці з пустими місцями, задачі з недостаючими числовими даними, знаходження значення із змінною. Оскільки робота в початковому курсі математики спрямована в основному на формування поняття «змінна», то основний спосіб розв'язання нерівностей із змінною – спосіб підбору.

Розглянемо послідовність формування у дітей поняття про нерівності із змінною.

Нерівності із змінною у початкових класах спочатку розглядають як нерівності з «віконечками»:

$\square > 0$; $6 + 4 > \square$ $7 + \square < 10$.

Учням пропонується підібрати таке число, яке треба вставити у «віконечко» (квадратик), щоб дістати правильний запис. Під час виконання таких вправ учитель спонукає дітей до того, щоб вони підставляли різні числа. Назвавши кілька чисел, корисно узагальнити спостереження.

У подальшому змінну позначають буквою. Наприклад, розглядають нерівність $x + 3 < 10$ та способом добору знаходять, при яких значеннях букви x значення суми $x + 3$ менше 10. Спочатку в кожному такому завданні дається ряд чисел – значень змінної – 2, 3, 4, 5, 6, 7. Учні підставляють значення букви у вираз, обчислюють значення виразу і порівнюють його із заданим числом. Під час опрацювання вибирають такі значення змінної, при яких задана нерівність буде правильною.

Пізніше у вправах з нерівностями значення змінної не даються, учні самостійно добирають їх. Наприклад, $7 \cdot k < 70$. Спочатку встановлюють, при якому значенні k цей добуток дорівнює 70 (при $k = 10$). Щоб добуток був менший від 70, треба множник k взяти меншим від 10. Учні підставляють числа 9, 8, 7, 6 і т. д. до нуля, обчислюють і порівнюють знайдені значення виразу із заданим (70) і називають відповідь.

Вправи та завдання щодо формування поняття нерівності із змінною.

1. З чисел 65, 70, 75, 80 випишіть ті значення b, за яких нерівність $b - 65 < 8$ буде істинною.

2. Знайди всі значення змінної, за яких нерівність $k - 20 < 8$ буде істинною.

3. Підбери такі значення змінної a, при яких нерівності будуть істинними:

$5 \cdot a < 20$; $685 - a > 680$; $a + 290 < 300 - 6$;

$a - 180 < 96 : 16$. $a + 369 > 371$ $200 \cdot a < 4500$

4. Чи буде число **6** розв'язком наступних нерівностей:

а) $15 + x > 40$; в) $54 : c > 1$; д) $a + a < 20$;

б) $2 + y < 96$; г) $48 - p < 39$; е) $0 : b > 5$?

5. Із чисел, які задовольняють нерівність $q < 21$, запиши ті, які:

а) закінчуються цифрою 8;

б) закінчуються цифрою 0;

в) діляться на 3.

6. При яких значеннях змінної ***a*** буде істинною нерівність **a + 26 < 30** ?

Розв'язати цю нерівність можна способом підбору.

a	**a + 26**	**a + 26 < 30**	**Так. Ні.**
0	26	26 < 30	Так
1	27	27 < 30	Так
2	28	28 < 30	Так
3	29	29 < 30	Так
4	30	30 < 30	Ні

Під час опрацювання таких алгебраїчних понять, як рівності, нерівності та нерівності із змінною, у процесі виконання завдань в учнів формуються наступні навчальні уміння, навички та способи дій:

- орієнтація на аналіз відповідності результатів щодо вимог конкретного навчального завдання;
- уміння самостійно знаходити декілька варіантів розв'язання навчального завдання;
- уміння розпізнавати способи і результати дій;
- уміння самостійно виконувати емпіричні узагальнення та найпростіші теоретичні узагальнення на основі аналізу алгебраїчних об'єктів;
- здійснювати вибір раціональних способів дій на основі аналізу конкретних умов.

Логіка розгляду навчальних тем щодо рівностей та нерівностей як числових, так і буквених припускає розгляд спочатку рівностей, а потім нерівностей. Оскільки поняття нерівності розглядається як явище протилежне рівності, тому первинним є поняття рівності, а нерівність є похідною.

VI. РІВНЯННЯ

Рівняння – це рівність двох виразів, з яких хоча б один має змінну	=	**Рівняння** – це рівність, яка виконується лише при певному значенні букви

Рівняння визначається з позиції форми запису. Рівняння – є рівність, яка підпорядкована вказаним правилом запису, має букву, значення якої треба знайти

Розв'язати рівняння – це означає знайти невідоме число (невідому величину). Якщо підставити його в рівняння замість букви, то отримаємо правильну (істину) числову рівність.

У курсі математики початкових класів рівняння розглядається як рівність двох виразів, з яких хоча б один має змінну та розв'язується на основі правила взаємозв'язку між компонентами і результатами арифметичних дій. З метою формування в учнів поняття про рівняння необхідно навчати їх відрізняти рівняння від інших математичних виразів, знаходити область визначення і множину значень змінних, які містить рівняння, розв'язувати різні види рівнянь, використовувати рівняння при розв'язанні задач, застосовуючи при цьому підручники, посібники, ілюстративні таблиці, схеми, графи, тощо.

На підготовчому етапі до введення перших рівнянь під час вивчення додавання і віднімання в межах 10 учні засвоюють зв'язок між сумою і доданками. Проведемо гру «Відгадай число». Маринка задумала число, коли до нього додати 3, одержимо 9. Яке число задумала Маринка? $\boxed{} + 3 = 9$

Бесіда. Число яке задумала Маринка можна підібрати. Підбираємо число, до нього додаємо 3, одержимо 9. Записуємо підібране число 6 у віконечко.

Крім того, до цього часу діти оволодівають уміннями порівнювати вираз і число і дістають перші уявлення про числові рівності виду:

$$7 + 3 = 10; \quad 9 = 6 + 3.$$

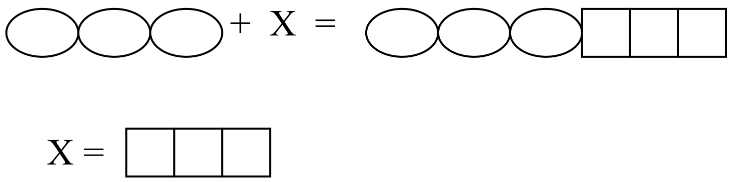
Великого значення мають вправи на знаходження пропущеного числа в рівностях виду: $4 + \square = 7$; $5 - \square = 2$.

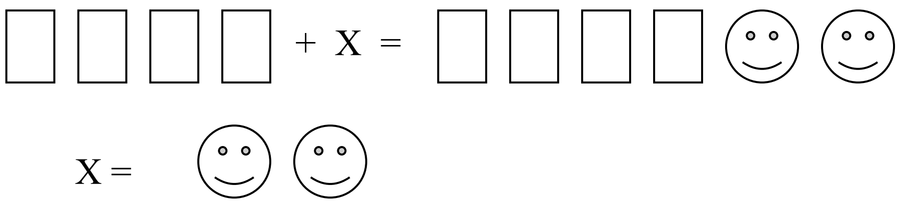
З рівнянням учнів доцільно **ознайомити** під час розв'язування задачі з абстрактними числами, наприклад, до невідомого числа додали 5 і дістали 9. Знайти невідоме число. З умовою задачі складають вираз з невідомим числом, який можна записати так: $\square + 5 = 9$. Потім учитель пояснює, що в математиці прийнято позначати невідомі числа латинськими буквами. Пропонує позначити невідоме число замість «віконечка» латинською буквою $\boldsymbol{x}$ і прочитати вираз (суму): $x + 5 = 9$. Який доданок суми невідомий? Перший. Як знайти невідомий перший доданок? Треба від суми 9 відняти відомий другий доданок 5.

Далі діти вчаться записувати рівняння:

$$x + 5 = 9$$
$$x = 9 - 5$$
$$x = \underline{4}$$
$$4 + 5 = 9$$

Під час ознайомлення молодших школярів з рівнянням доцільно виконувати наступні вправи, які підвищують інтерес до теми:

1. 

2. 

3. ПАРА + Х = ПАРАСОЛЬКА

Х = СОЛЬКА

4. БАЛКОН – Х = БАЛ

Х = КОН

5. Х + УС = ГРАДУС

Х = ГРАД

На етапі первинного ознайомлення з рівняннями доцільно пропонувати завдання, які наряду з формуванням уміння розв'язувати рівняння дозволяють здійснювати прийоми розумових дій – аналізу, синтезу, класифікації тощо. Наприклад, розподіліть дані математичні вирази на групи:

$$4 + 6 = 10;\ \ 13 - x = 7;\ \ 74 = 74;\ \ c : 40 - 18 = 85;\ \ 60 - 32 = 28.$$

- На скільки груп можна розділити дані математичні вирази? (На дві групи).

- За якою ознакою ви розподілили їх на дві групи? (Одні математичні вирази вміщують змінну, а інші – ні).

- Чи можна стверджувати, що рівність $4 + 6 = 10$ є істинною? (Так).

- Чи можна стверджувати, що рівність $13 - x = 7$ є правильною або неправильною? (Ні, поки не знайдемо значення змінної).

- При яких значеннях *x* рівність $13 - x = 7$ буде правильною? (При значенні $x = 6$, рівність буде істинною).

Потім можна пояснити: число, яке при підстановці в рівняння замість змінної, обертає його в правильну рівність, називається коренем рівняння.

Корінь рівняння – це таке значення букви, при якому рівняння обертається в числову рівність

- Знайдіть корінь рівняння $x + 3 = 8$; доведіть, що це так.

- Яке з чисел 8, 4, 2 є коренем рівняння $t + 3 = 7$.

- Знайдіть серед наступних виразів рівняння, прочитайте їх та розв'яжіть:

$$4 + 5;\ \ y - 6 = 12;\ \ 9 \cdot 3 + 8;\ \ k : 2 = 8;\ \ 19 - 15;\ \ h \cdot 5 = 35.$$

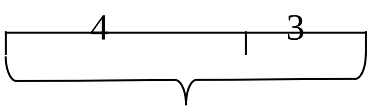
- Чи має корінь рівняння $25 + y = 9$?

Виконуючи подібні завдання, учні приходять до висновку, що рівняння можуть мати лише один корінь або не мати їх зовсім.

У початкових класах у процесі опрацювання рівнянь закріплюються правила взаємозв'язку цілого та його частин, сторін прямокутника та його площі, формуються обчислювальні навички та розуміння зв'язку між компонентами і результатами арифметичних дій додавання, віднімання, множення і ділення, закріплюється порядок арифметичних дій, формується уміння розв'язувати текстові задачі за допомогою рівнянь, відбувається розвиток правильної математичної мови, а також, завдяки роботі над рівняннями урізноманітнюються види навчальних та творчих завдань. Розв'язання рівнянь закріплюють обчислювальні навички, а також допомагають засвоїти арифметичні знання. Так, наприклад, розв'язуючи рівняння виду: $9 + x = 9$; $7 – x = 7$; $8 \cdot x = 8$; $8 \cdot x = 0$ учні закріплюють знання особливих випадків обчислень.

Розглянемо спосіб розв'язання рівнянь, який оснований на відношенні цілого та його частин, що широко представлений у програмі Л. Петерсон. Для того щоб розв'язати рівняння цим способом, достатньо визначити спочатку по схемі, а потім і по формулі, чим є невідома величина – частиною чи цілим. Якщо невідома величина є цілим, то для її знаходження треба додати відомі частини, а якщо невідома частина, то для її знаходження треба відняти від цілого відому частину. Це доцільно показати на схематизованому моделюванні:

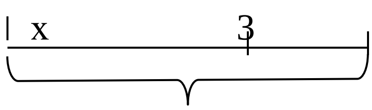
I додан. II додан.



7

сума (ціле)

I додан. II додан.



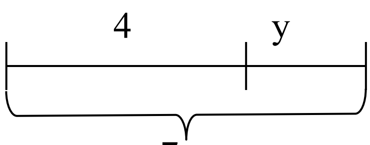
7

сума

$x + 3 = 7$

$x = 7 – 3$

$x = 4$

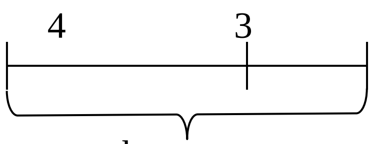


7

$4 + y = 7$

$y = 7 – 4$

$y = 3$



b

$4 + 3 = b$

$b = 7$

Спосіб розв'язання рівнянь на основі розуміння зв'язку між компонентами та результатами арифметичних дій полягає у наступному: щоб розв'язати рівняння встановлюємо невідомий компонент, згадуємо правило знаходження певного компонента по відомому іншому та результату дії. Потім виконуємо дію за визначеним правилом.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ
(на прикладі знаходження невідомого зменшуваного)

1. Запишіть рівняння	$x - 4 = 6$
2. Назвіть компоненти	зменшуване, від'ємник, різниця
3. Назвіть, що відомо	від'ємник 4, різниця 6.
4. Назвіть, що невідомо	зменшуване
5. Згадай правило	Щоб знайти невідоме зменшуване треба до різниці додати від'ємник
6. Запишіть	$x = 6 + 4$
7. Обчисліть	$x = 10$
8. Перевірка	У запис рівняння замість x запиши число, яке обчислили: $10 - 4 = 6$
9. Перевірка	Обчисли, чому дорівнює ліва частина, чи дорівнює вона правій частині? 6=6
10. Відповідь:	$x = 10$

Аналогічно з діями множення і ділення. Наприклад, $x : 8 = 17$; у рівнянні невідоме ділене. Щоб знайти ділене, треба частку помножити на дільник:

$$x = 17 \cdot 8;$$
$$x = 136.$$

З метою підсилення ефективності навчання, та урізноманітнення розв'язання рівнянь цим способом, пропонуємо під час знаходження невідомого компонента користуватися прийомом заміни даного рівняння рівнозначним йому. Наприклад, опорою цьому може бути така схема:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\cdot 6"] & 30 \arrow[l, bend left, ": 6"] \end{tikzcd}$$

$x \cdot 6 = 30$

$x = 30 : 6$

$x = 5;$

$5 \cdot 6 = 30$

Схему можна дещо ускладнити. Склади рівняння за схемою. Чому дорівнює *x*?

$$\begin{tikzcd} \boxed{x} \arrow[r, shift left, "+5"] & \boxed{} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "-9"] & \boxed{} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "+11"] & \boxed{48} \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

$x + 5 – 9 + 11 = 48$

$x = 48 – 11 + 9 – 5$

$x = \boxed{}$

Методика вивчення рівнянь полягає у пред'явленні алгоритму вирішення таких рівнянь і розборі декількох типових прикладів. Зазначений алгоритм формується далеко не відразу. Перед цим розбирається кілька прикладів, причому мета розгляду полягає у виділенні послідовності дій потрібних для опису алгоритму операцій.

Після того, як школярі навчилися розв'язувати прості рівняння, знайомляться з розв'язуванням складних виду: (54 + 12) – x = 37, де відомий компонент представлений виразом. Розв'язання таких рівнянь теж виконується на основі взаємозв'язку між компонентами та результатами арифметичних дій. Далі рівняння ускладнюються тим, що один із компонентів є виразом, який включає невідоме число, наприклад, 75 – (x + 6) = 35

$x + 6 = 75 – 35$

$x + 6 = 40$

$x = 40 – 6$

$x = 34$

Розв'язання рівнянь такого виду вимагає подвійного використання правила знаходження невідомих компонентів.

Однією із основних складових роботи над рівнянням є його перевірка. Доцільно сформувати в учнів уміння виконувати її спочатку письмово, а потів усно. Усвідомити послідовність дій, які виконуються під час перевірки, допоможе простий алгоритм: підставляємо знайдене значення в умову рівняння; обчислюємо рівність; порівнюємо праву і ліву частини.

Під час розв'язання рівняння виду: $19 + 19 + 19 = 19 \cdot x$ можна змінити ліву частину на основі знань конкретного смислу дії множення. Аналізуючи вид рівняння, знаходимо раціональний спосіб його розв'язання, який полягає в заміні суми однакових доданків дією множення: $19 + 19 + 19 = 19 \cdot 3$, потім порівнюємо ліву і праву його частини: $19 \cdot 3 = 19 \cdot x$; робимо висновок, що цей вид рівняння можна розв'язати на основі конкретного смислу множення. Реалізація даного способу формує в учнів уміння аналізувати записане рівняння і забезпечує умови для подальшого розв'язання більш складних рівнянь.

Наступне завдання: не виконуючи обчислень, знайди значення *x:*

$5000 + 600 + x + 4 = 5674$; $4000 + x + 30 + 2 = 4032$.

Це завдання орієнтує учнів на аналіз запропонованих рівнянь, на порівняння їх лівої і правої частин. У результаті учні доходять висновку, що число, яке подане в правій частині рівняння, записане в лівій частині в вигляді суми розрядних доданків. І це дозволяє їм знайти корінь рівняння.

Під час повторення множення на 10, 100, 1000 можна запропонувати розв'язати наступні рівняння:

$73 \cdot x = 730$; $x \cdot 100 = 5300$; $149 \cdot 1000 = 149000$.

Аналізуючи ліву і праву частини рівняння, діти згадують правила множення на 10, 100, 1000 і не обчислюючи, знаходять корінь рівняння.

Далі розв'язують рівняння, в яких невідомий компонент є буквений вираз:

а) $5x – 10 = 290$

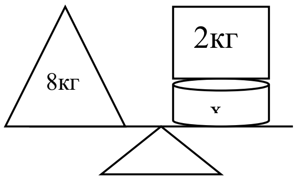
б) $5 \cdot (x – 10) = 290$

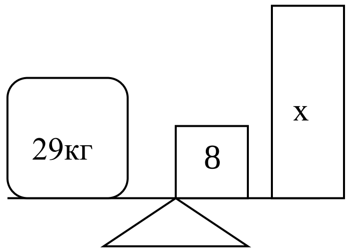
в) $(10838 – x) : 342 = 31$

г) 150 – x : 2 = 140

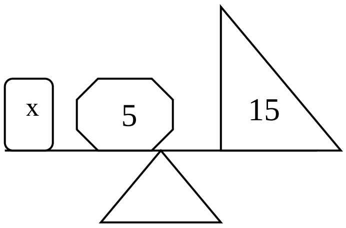
Вправи на закріплення.

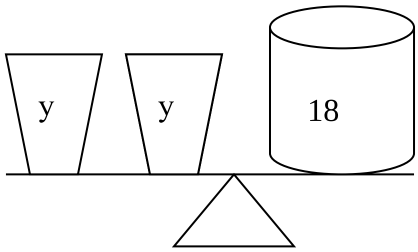
1) Ваги урівноважені, чому дорівнює *x* ?





2) За малюнком склади рівняння.





3) Які із поданих значень є коренем рівнянь:

48 : x = 3

а) 16 б) 45 в) 51 г) 144

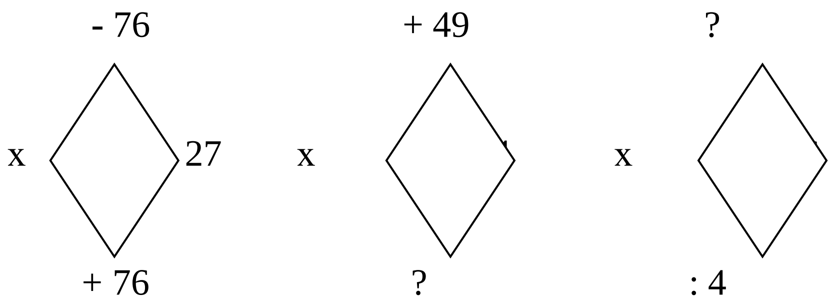
7 · x = 105

а) 735 б) 15 в) 112 г) 98

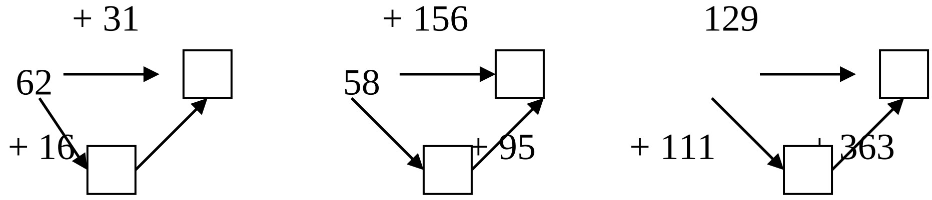
x : 4 = 16

а) 4 б) 12 в) 20 г) 64

4) Склади рівняння по схемі і розв'яжи їх.



5) Склади рівняння і розв'яжи їх.



6) Визнач порядок дій: а + 240 : 3 = 500

7) Гра: «Розплутай клубок»

□ + 9 = ○

11 – △ = 5

○ – 8 = △

Розглянемо приклади розв'язання рівнянь через гру. Перша умова: «Задумали 2 числа. Перше більше другого у 6 разів. Які числа задумали, якщо їхня сума дорівнює – 56?» Під час розв'язання міркування може бути таким: менше із задуманих чисел ми позначимо – *x*, тоді інше число дорівнює $6 \cdot x$. Сума цих чисел $6 \cdot x + x = 56$. Отримали рівняння. На основі правила взаємозв'язку між компонентами та результатом дії множення розв'язуємо його:

$$7 \cdot x = 56;$$

$$x = 56 : 7;$$

$$x = 8.$$

Ми отримали менше із задуманих чисел. За умовою друге число в 6 разів більше, тож $8 \cdot 6 = 48$. Отримали друге задумане число. Перевіримо: $48 + 8 = 56$. Запишемо відповідь: задумали числа 8 і 48.

Друга умова: «Задумали 2 числа. Перше більше другого в 5 разів. Які числа задумали, якщо їхня різниця дорівнює 56?» Розв'язуючи, міркуємо: менше із задуманих чисел ми позначимо – *x*, тоді інше число дорівнює $5 \cdot x$. Записуємо різницю цих чисел: $5 \cdot x – x = 56$; отримали рівняння. Розв'язуємо його:

$4 \cdot x = 56;$

$x = 56 : 4;$

$x = 14$

14 – це менше із задуманих чисел. За умовою друге число в 5 разів більше, тож $14 \cdot 5 = 70$. Отримали друге задумане число. Перевіряємо: $70 - 14 = 56$. Відповідь: задумали 70 і 14.

6.1. Способи складання і розв'язування рівнянь

Складання рівнянь за виразами

А. Пряма форма

X < 7 на 3 (?)

Міркування: якщо «на ... менше» – знаходимо менше число відніманням, ставимо знак мінус (–). Ми знаємо, що дією віднімання знаходимо від'ємник та невідомий доданок. Далі учні складають та розв'язують два рівняння.

$x - 3 = 7$	$7 - x = 3$
$x = 7 - 3$	$x = 7 - 3$
$x = 4$	$x = 4$
$4 + 3 = 7$	$7 - 4 = 3$

Б. Непряма форма

8 > X на 4 (?).

Міркування. Якщо 8 > *x* на 4, то *x* буде менше 8 на 4. А ми знаємо, що «на ... менше» – відповідає арифметичній дії віднімання (–). Ми знаємо, що відніманням знаходять від'ємник та один із доданків. Тепер складаємо та розв'язуємо два рівняння.

$8 - x = 4$	$x + 4 = 8$
$x = 8 - 4$	$x = 8 - 4$
$x = 4$	$x = 4$
$8 - 4 = 4$	$4 + 4 = 8$

Розв'язування подібних рівнянь відбувається на основі взаємозв'язків між компонентами та результатами арифметичних дій. Але можливі й інші способи розв'язання рівнянь. Наприклад, рівняння (а + 14) – 7 = 13 можна розв'язати такими різними способами:

1. (а + 14) – 7 = 13
   а + 14 = 13 + 7
   а + 14 = 20
   а = 20 – 14
   а = 6

2. (а + 14) – 7 = 13
   а + (14 – 7) = 13
   а + 7 = 13
   а = 13 – 7
   а = 6

У першому випадку розв'язання спирається на взаємозв'язок між компонентами та результатами арифметичних дій додавання і віднімання. Спочатку знаходимо зменшуване, а потім перший доданок. А у другому – на першому етапі розв'язання використовується один із способів віднімання числа від суми, а потім використовується взаємозв'язок між компонентами та результатом арифметичної дій додавання – знаходження невідомого доданка.

Складання рівнянь за допомогою використання основних властивостей рівностей

Спочатку цим способом розв'язуються прості рівняння, які можна розв'язати і іншими знайомими дітям способами. Наприклад,

х – 5 = 90
х = 90 + 5
<u>х = 95</u>
95 – 5 = 90
90 = 90

Далі рівняння ускладнюються.

Завдання. Прочитай рівняння. Чим воно цікаве? Розв'яжи його різними способами.

а – <u>**76**</u> = 90 – <u>**76**</u>

Спочатку його можна розв'язати на основі зведення ускладненого рівняння до простого. Але розглянемо інший спосіб. У рівнянні і зліва, і справа однаковий від'ємник, тому для розв'язання скористаємося властивістю рівності:

обидві частини рівняння представлено різницею; значення цих різниць рівні; оскільки в обох різницях однакові від'ємники, то і зменшувані теж однакові. Отже*,* a = 90.

Але головна мета при цьому – показати дітям рівняння, які неможливо розв'язати на основі взаємозв'язку між компонентами дій. Прикладом є рівняння, в яких невідоме число знаходиться в обох частинах:

$$15 \cdot x - 9 = 3x + 27$$

Можливе завдання і такого характеру, як поступове ускладнення одного і того ж рівняння **$y + 7 = 13$:**

$y + (5+2) = 13$;

$y + 7 = 22 - 9$;

$3y - 2y + 7 = 13$;

$9y + 7 = 8y + 13$.

У такій роботі над рівняннями необхідно постійно мати на увазі, що основне завдання опрацювання рівнянь – не формування навичок їх розв'язування, а усвідомлення загального шляху перетворення від складного до простого.

Складання рівнянь за текстовим описом

Склади відповідні рівняння, розв'яжи їх.

1. До числа 24 додали невідоме число й одержали суму чисел 24 і 28. Знайди невідоме число.

2. До добутку 6 і 4 додали невідоме число й одержали число 36. Знайди невідоме число.

Зразок міркування.

1. Позначаю невідоме число змінною b. До числа 24 додаю b й одержую суму 24 і 28. Записую рівняння: $24 + b = 24 + 28$. Це рівняння доцільно розв'язувати на основі властивості рівності. І зліва, і справа записано суму. Ці суми рівні. Оскільки перші доданки у них рівні, то й другі доданки також рівні. Отже, $b = 28$.

2. Позначаю невідоме число змінною k. До добутку чисел 6 і 4 ($6 \cdot 4$) додаю k ($6 \cdot 4 + k$) й після знаку рівності записую число, яке отримали, – 36. Вийшло рівняння: $6 \cdot 4 + k = 36$. Розв'язую його зведенням ускладненого рівняння до простого: $24 + k = 36$;

$k = 36 – 24$;

$k = 12$.

Вправи на закріплення:

а) Із якого числа треба відняти 482, щоб отримати 218?

б) Яке число треба збільшити на 357, щоб отримати 600?

в) На скільки треба зменшити число 820, щоб отримати 525?

Для ефективного запам'ятовування послідовності роботи над рівняннями можна запропонувати наступну покрокову інструкцію.

Інструкція

1 крок

Попросіть учня записати рівняння і прочитати його. При читанні невідомих, що містяться у рівнянні, в початкових класах використовуються назви букв латинського алфавіту.

2 крок

Задайте питання: «Що потрібно знайти у рівнянні 5 + х = 7?» Учень має відповісти, що позначає невідоме в рівнянні: потрібно знайти другий невідомий доданок; у рівнянні 5 · х = 10 – потрібно знайти другий невідомий множитель; у рівнянні х – 3 = 7 – потрібно знайти невідоме зменшуване; у рівнянні 10 – х = 3 – потрібно знайти невідомий від'ємник; у рівнянні х : 3 = 5 – потрібно знайти невідоме ділене; у рівнянні 15 : х = 3 – потрібно знайти невідомий дільник.

3 крок

Попросіть учня згадати правило, необхідне для пошуку невідомого компонента, про яке йдеться в рівнянні. Наприклад, для того щоб знайти невідомий доданок, потрібно від суми відняти відомий доданок; для того щоб знайти невідомий дільник, треба ділене розділити на частку. Ці правила є показниками зв'язку між компонентами арифметичних дій та результатом. Вивчають їх раніше на уроках математики. Регулярно перевіряйте у дитини міцність їх засвоєння!

4 крок

Якщо дитині важко з формулюванням правила, разом з ним знайдіть потрібне формулювання в довідкових матеріалах наприкінці підручника математики (або на тій сторінці, де воно розміщене). Учень має прочитати правило і завчити його.

5 крок

Підставте разом з учнем дані з рівняння у формулювання правила. Наприклад, при розв'язанні рівняння $x - 3 = 7$, повна відповідь має бути такою: «У рівнянні $x - 3 = 7$ невідоме зменшуване. Для того щоб знайти невідоме зменшуване, треба до від'ємника додати різницю. До від'ємника 3 додаю різницю 7, отримую 10. Значить $x = 10$».

6 крок

Проконтролюйте запис розв'язання рівняння:

$$x - 3 = 7;$$
$$x = 3 + 7;$$
$$x = 10$$

7 крок

Потім потрібно виконати перевірку правильності розв'язання рівняння. Учень підставляє знайдене число в умову рівняння. Далі необхідно порахувати, скільки вийде в лівій і правій частинах рівняння і порівняти ці числа. Якщо числа рівні – рівняння розв'язанне вірно. Якщо ні, то потрібно шукати помилку в міркуваннях або обчисленнях.

$$10 - 3 = 7;$$
$$7 = 7.$$

Рівняння розв'язане вірно.

Корисна порада

Підручник математики містить всю необхідну теоретичну інформацію. Маєте навчити дитину знаходити її і вміти користуватися нею.

6.2. Тотожні перетворення рівнянь

Опрацювання такого виду завдань може бути побудована таким чином. Учням пропонуються рівняння виду:

$(x + 324) + 541 = 976;$ $(x + 324) + 342 = 777;$

$(x + 324) + 124 = 559;$ $(x + 324) + 221 = 656.$

У цих рівняннях перший доданок однаковий (x + 324), а другі доданки представлені різними числами.

Перший спосіб. Учитель пропонує порівняти рівняння і встановити чи рівні у них корні. Аналізуючи ці рівняння, учні приходять до висновку, що корні рівнянь рівні. Далі пояснюють, що у всіх випадках перший доданок, представлений у вигляді $x + 324$, дорівнює одному і тому ж числу, яке дорівнює 435. Це число є різницею суми і другого доданка (976 – 541 = 435; 777 – 324 = 435; 559 – 124 = 435; 656 – 221 = 435). Таким чином, отримуємо просте рівняння $x + 324 = 435$; $x = 435 – 324$; $x = 111$.

Другий спосіб. Пропонується використати сполучний закон додавання і на його основі об'єднати в групу відомі доданки, що після знаходження значення їх суми дозволить отримати теж просте рівняння. Послідовність розв'язання рівняння в цьому випадку має вид:

$$x + (324 + 541) = 976;$$
$$x + 865 = 976;$$
$$x = 976 – 865;$$
$$x = 111.$$

Важливим спрямуванням роботи з рівняннями на даному етапі є усвідомлення послідовного покрокового спрощення рівняння за рахунок виконання тотожних перетворень.

6.3. Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь

Для ефективного розв'язання задач рівнянням доцільно дотримуватися вимог до їх змісту: задача повинна мати реальний практичний зміст; відповідати чинній програмі з математики; методи і способи, що використовуються для розв'язання задачі, повинні бути знайомі дітям; зміст задачі повинен викликати в учнів пізнавальний інтерес; числові дані повинні відповідати існуючим на практиці і бути реальними.

Завданнями задачного етапу в роботі з рівняннями є показ практичної спрямованості алгебраїчного матеріалу. На цьому етапі розглядаються різноманітні підходи до навчання молодших школярів розв'язання текстових задач за допомогою рівнянь. Необхідною вимогою до формування уміння розв'язувати задачі за допомогою рівнянь (алгебраїчним способом) є уміння складати вирази за умовами задач.

У питаннях, які пов'язані з повторенням відомих учням способів дій, можна назвати співвідношення вербальних, схематичних і символічних моделей, оволодіння якими має важливе значення в підготовці учнів до розв'язування задач способом складання рівнянь. З цією метою доцільно запропонувати наступні завдання:

1. Для першого ознайомлення з розв'язуванням задач складанням рівнянь доцільно взяти спочатку абстрактну задачу, а потім сюжетну.

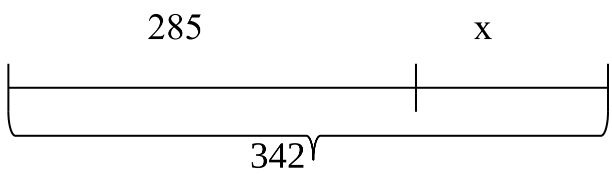
Абстрактна задача

Невідоме число збільшили на 12 і дістали 36. Знайди невідоме число.
За цією умовою склади і розв’яжи рівняння.

Сюжетна задача

Михайлик і Андрійко знайшли 10 грибів. Михайлик знайшов 6 грибів. Скільки грибів знайшов Андрійко?

2. Вибери задачі, яким відповідає подана схема, склади рівняння і розв'яжи їх.



а) В одному пансіонаті відпочивало 342 особи, в другому – 285. Скільки всього відпочиваючих у двох пансіонатах?

б) В одному пансіонаті 285 відпочиваючих, в другому на 342 особи більше. Скільки відпочиваючих у другому пансіонаті?

в) В червні в пансіонаті відпочивало 285 осіб, а в липні – 342. На скільки менше відпочиваючих було в червні, ніж в липні?

г) У двох пансіонатах відпочивало 342 особи. Скільки осіб відпочивало в другому пансіонаті, якщо в першому їх було 285?

д) У червні в пансіонаті відпочивало 342 особи. Із них 285 дорослих, а останні – діти. Скільки дітей відпочивало в пансіонаті?

Спосіб розв'язання задач за допомогою складання рівнянь називають алгебраїчним. Ознайомлення учнів із розв'язуванням простих, а потім складених задач способом складання рівнянь має свою послідовність її можна представити як пам'ятку.

1. Прочитай задачу і уяви те, про що в ній говориться.

2. Поясни, що позначають числа задачі.

3. Поясни, що є шуканим – невідомим у задачі.

4. Познач невідоме число буквою, наприклад – *x*.

5. Виділи зв'язки невідомого з іншими числовими даними задачі. Склади рівняння.

6. Розв’яжи рівняння (розв'язування отриманого рівняння не пов'язується з умовою задачі) і зроби перевірку.

7. Осмислення отриманого результату і формулювання відповіді задачі.

Спочатку розглядаємо просту задачу. Наприклад, «У автобусі їхали 18 пасажирів. На зупинці увійшли ще декілька пасажирів і в ньому стало 34 пасажири. Скільки пасажирів увійшло в автобус на зупинці?» Складаємо коротку умову задачі. Вона може бути такою:

Їхали – 18 пас.

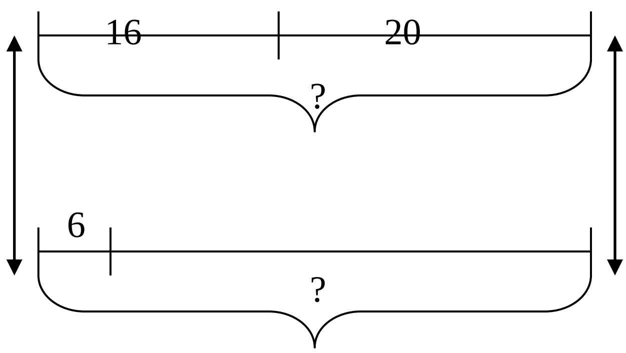
Увійшли – x пас.

Стало – 34 пас.

У даному випадку через x позначили кількість пасажирів, які увійшли в автобус на зупинці. Складаємо рівняння: $18 + x = 34$, воно позначає суму. Щоб розв'язати його, треба знайти числове значення другого невідомого доданка. Користуємося правилом: щоб знайти невідомий доданок, треба від суми відняти відомий доданок. Тож, $x = 34 – 18$. Виконуємо обчислення і отримуємо: $x = 16$. Формулюємо відповідь: 16 пасажирів зайшли в автобус на зупинці.

Далі розглядаємо складені задачі. Наприклад, «Учні збирали макулатуру. Дівчата принесли 16 кг, а хлопчики – 20 кг. Усю макулатуру розклали в коробки, по 6 кг у кожну. Скільки коробок з макулатурою одержали?»

Умову задачі проілюструємо графічно:



Спочатку аналізуючи, розбиваємо задачу на прості задачі; визначаємо порядок їх розв'язування; складаємо план розв'язування; записуємо розв'язання задачі двома способами – по діях і виразом.

Потім обговорюємо алгебраїчний спосіб розв'язання задачі. Шукане число позначаємо змінною x; з'ясовуємо зв'язки між шуканим і числовими даними; складаємо рівняння; розв'язуємо рівняння на основі правила взаємозв'язку між компонентами та результатом дії множення.

Порівнюємо розв'язування задачі арифметичним та алгебраїчним способом

Арифметичний спосіб	Алгебраїчний спосіб
1) 16 + 20 = 36 (кг) – усього макулатури зібрали; 2) 36 : 6 = 6 (кор.) або (16 + 20) : 6 = 6 (кор.) Відповідь: 6 коробок одержали.	Нехай x – загальна кількість коробок з макулатурою, тоді всього зібрали (6 · x) кг макулатури; за умовою задачі всього принесли (16 + 20) кг макулатури. Отже: 6 · x = 16 + 20 6 · x = 36 x = 36 : 6 x = 6

З метою закріплення алгебраїчного способу розв'язування складених задач варто запропонувати учням розв'язувати різні їх види.

Наприклад, «За 1 кг цукерок і 4 кг печива заплатили 172 грн. Скільки коштує 1 кг печива, якщо воно дешевше 1 кг цукерок на 22 грн?»

Розв'язання: 1 кг п. + 4 кг ц. = 172 грн. Позначимо за *x* – ціну цукерок, тоді (*x* – 22) – ціна печива. Складаємо рівняння:

x + 4 · (x – 22) = 172 і розв'язуємо його:

x + 4 · x – 88 = 172;

5 · x = 172 + 88;

5 · x = 260;

x = 260 : 5;

x = 52 – знайшли ціну цукерок, то ціна печива складає: 52 – 22 = 30 (грн.). Робимо перевірку: 52 + (30 · 4) = 172. Записуємо відповідь: 30 грн. коштує 1 кг печива.

Щоб підготувати дітей до вибору найраціональніших прийомів складання рівнянь, корисно пропонувати їм складати за умовою задачі різні рівняння.

Наприклад, під час опрацювання складених задач, в яких дано різницю і кратне відношення, можна скласти декілька рівнянь.

Задача. «У шкільному шаховому гуртку було 24 хлопчики і кілька дівчаток. Коли прийняли ще 5 дівчаток, то їх стало на 8 менше, ніж хлопчиків. Скільки дівчаток було в гуртку спочатку?»

Позначимо число дівчаток, які були в гуртку спочатку, буквою x. Тоді можна визначити, скільки дівчаток стало в гуртку – (x + 5). Знаючи, що дівчаток стало на 8 менше, ніж хлопчиків, можна скласти рівняння:

$(x + 5) + 8 = 24$, або $x + 5 = 24 – 8$, або $24 – (x + 5) = 8$.

Щоб візуалізувати умову задачі та взаємозв'язки між даними та шуканим, доцільно скласти таблицю:

Було	Прийняли	Стало
Хлопчиків – 24 Дівчаток – x	– 5	24 x + 5, на 8 менше

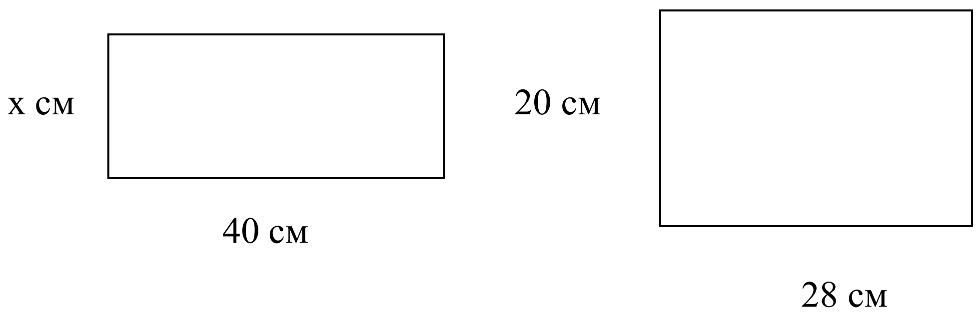
Далі учні аналізують та розв'язують рівняння.

При розв'язуванні задач способом складання рівнянь можна використовувати задачі, які учні вже розв'язували арифметичним способом. Для цього виконують такі завдання:

а) На 9 машинах доставили 47700 кг зерна. Скільки зерна можуть перевезти 12 таких машин?

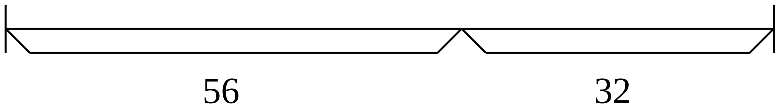
$x : 12 = 47700 : 9$

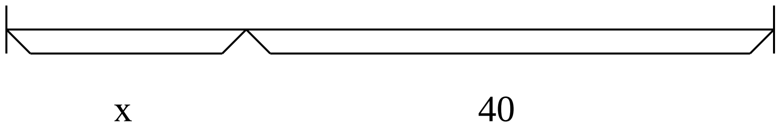
б) По даному рисунку придумай задачу, яку можна записати рівнянням: $40 \cdot x = 28 \cdot 20$



в) Поясни, чому даній схемі відповідає рівняння:

$x + 40 = 56 + 32$





г) Чарівник закрив у ящику 5 пляшок фанти. Коли він відкрив, у ящику була лише одна пляшка. Скільки пляшок фанти зникло? Розв'яжи задачу рівнянням. $5 - x = 1$

VII. ФУНКЦІОНАЛЬНА ПРОПЕДЕВТИКА У ПОЧАТКОВИХ КЛАСАХ

Поняття функціональної залежності – одне із основних понять математики. Процес формування поняття функції довготривалий, тому і починається він з першого класу. Хоча визначення поняття функції у початковому курсі математики не дається, але програмою передбачено багато прикладів, за допомогою яких пояснюється залежність значень однієї величини від іншої.

Термін **функція** походить від латинського слова, яке означає – *виконання, звершення.* **Функція** – це величина, яка змінюється зі зміною незалежної змінної величини (аргументу).

Наприклад, зміна суми залежить від зміни кожного доданка, зміна різниці – від зменшуваного та від'ємника, площа поверхні квадрата залежить від його сторони тощо. Подібних прикладів можна навести багато. Для науки важливо вміти досліджувати такі відповідності. Їх називають **функціональними співвідношеннями**, або функціями.

Якщо кожному значенню змінної ***x*** з деякої множини **М** відповідає одне значення змінної ***y***, то змінну ***y*** називають функцією від ***x***. Змінну ***x*** у цьому випадку називають ***аргументом даної функції***, множину **М** – ***областю визначення функції***, а відповідність між ***x*** та ***y*** – ***функціональною відповідністю***. Аргумент ще називають ***незалежною змінною***, а функцію – ***залежною змінною***, тому що значення функції залежить від значення аргументу.

У початкових класах функціональна пропедевтика передбачає підготовку учнів до вивчення систематичного курсу в старших класах. Термін **функціональна залежність** вживають у вузькому розумінні – як зв'язок між змінними величинами. **Функціональна пропедевтика** як складова алгебраїчної пропедевтики – це підготовча робота, спрямована на формування поняття функції, способів її задання, властивостей окремих видів функцій.

У шкільному курсі математики основну увагу приділяють числовим функціям, оскільки математичні знання є інструментарієм для багатьох природничих наук, де числові функції використовують як засіб кількісного опису різних залежностей між величинами.

Учні початкової школи на уроках математики мають справу з такими видами функціональної залежності:

- лінійна;
- прямо пропорційна;
- обернено пропорційна.

Вони виявляються через спостереження за такими залежностями:

1. ***Залежність результатів арифметичних дій від зміни одного з компонентів за сталого іншого.***

У лінійній залежності перебувають один з доданків і сума за сталого другого доданка; зменшуване й різниця за сталого від'ємника; від'ємник і різниця за незмінного зменшуваного. У прямо пропорційній залежності – один з множників і добуток за сталого другого множника; ділене й частка за незмінного дільника. В обернено пропорційній – дільник і частка за незмінного діленого.

2. ***Залежність значення виразу від значення змінної.***

3. ***Залежність між значеннями певної трійки (без використання відповідних термінів) взаємопов'язаних величин:***

- загальної довжини, довжини одного відрізка, кількості відрізків;
- загальної маси, маси одного предмета, кількості предметів;
- загальної місткості, місткості однієї посудини, кількості посудин;
- вартості, ціни, кількості;
- загальної витрати матеріалу, витрати матеріалу на один виріб, кількості виробів;
- загального виробітку, продуктивності праці, часу роботи;
- периметра і сторони квадрата;
- швидкості об'єкта, часу і пройденого шляху (відстані) за рівномірного прямолінійного руху;
- площі прямокутника й довжини однієї зі сторін,
- маси зібраного врожаю, урожайності, площі поля.

Залежно від того, яка з величин у трійці стала, то інші перебувають у прямо-пропорційній або обернено-пропорційній залежності.

Ціна	·	**Кількість**	=	**Вартість**
Довжина 1 відрізка	·	Кількість відрізків	=	Загальна довжина
Маса 1 предмета	·	Кількість предметів	=	Загальна маса
Місткість 1 посудини	·	Кількість посудин	=	Загальна місткість
Витрата матеріалу на 1 виріб	·	Кількість виробів	=	Загальна витрата матеріалу
Продуктивність праці	·	Час роботи	=	Загальна виконана робота
Швидкість	·	Час	=	Відстань
Довжина прямокутника	·	Ширина прямокутника	=	Площа прямокутника
Урожайність	·	Площа поля	=	Маса зібраного врожаю

7.1. Лінійна залежність

Уперше з лінійною залежністю ознайомлюємо учнів при складанні таблиць додавання і віднімання без переходу через десяток. На цьому етапі слід звернути увагу дітей на те, як змінюється сума залежно від зміни одного з доданків та як залежить різниця від зміни зменшуваного. Після складання кожної з таблиць додавання доцільно провести бесіду, в ході якої виявляються такі залежності.

1 + 5 = 6
2 + 5 = 7
3 + 5 = 8
4 + 5 = 9
5 + 5 = 10

Орієнтовний зміст бесіди

- Яким є перший доданок у кожній рівності? (Збільшується на 1).

- Яким є другий доданок у кожній рівності? (Однаковим, тобто незмінним).

- Якою є сума у кожній рівності? (Збільшується на 1).

Учитель підводить учнів до висновку:

Якщо один з доданків збільшити (зменшити) на кілька одиниць, то і сума збільшиться (зменшиться) на стільки ж одиниць.

На прикладі таблиці додавання 5 видно, що перший доданок є незалежною змінною x, сума – залежною змінною y, $k = 1$, $b = 5$. Отже, матимемо формулу лінійної залежності $y = kx + b$. Для даного випадку залежності цю формулу в основній школі учні запишуть у вигляді:

$$y = x + 5$$

Щоб показати учням, що перший доданок теж може бути незмінним, варто запропонувати заповнити таблицю, у якій за відомими значеннями змінних a та b треба знайти їхню суму, і зробити висновок.

a	22	22	22	22	22	22
b	13	15	17	19	21	23
$a + b$	35	37	39	41	43	45

$$y = 22 + x$$

Після складання таблиць віднімання бесіду з формування уявлень про функціональну залежність проводимо аналогічно.

6 – 5 = 1
7 – 5 = 2
8 – 5 = 3
9 – 5 = 4
10 – 5 = 5

Орієнтовний зміст бесіди

- Яким є зменшуване у кожній рівності? (Збільшується на 1).
- Яким є від'ємник у кожній рівності? (Однаковим, тобто незмінним).
- Якою є різниця у кожній рівності? (Збільшується на 1).

Учні доходять висновку.

Якщо зменшуване збільшити (зменшити) на кілька одиниць, то і різниця збільшиться (зменшиться) на стільки ж одиниць.

Таблиці додавання і віднімання дуже добре унаочнюють зв'язок між компонентами і результатом дій, допомагають сформулювати висновки про залежність результату від зміни одного з компонентів за сталого іншого.

Лінійною залежністю також виражається характер зміни різниці залежно від зміни від'ємника за незмінного зменшуваного.

Учитель має продемонструвати відповідну таблицю і провести бесіду.

Орієнтовний зміст бесіди

- Яким є зменшуване у кожній рівності? (Однаковим, тобто незмінним).
- Яким є від'ємник у кожній рівності? (Збільшується на 1).
- Якою є різниця у кожній рівності? (Зменшується на 1).

a	35	35	35	35	35	35
b	10	11	12	13	14	15
$a - b$	25	24	23	22	21	20

Учні доходять висновку.

Якщо від'ємник збільшити (зменшити) на кілька одиниць за незмінного зменшуваного, то різниця зменшиться (збільшиться) на стільки ж одиниць.

У майбутньому цю залежність учні можуть подати у вигляді формули:

$$y = 35 - x$$

У підручниках з математики для початкових класів подано низку завдань, що також дають змогу формувати в учнів уявлення про лінійну залежність.

Вправи та завдання на знаходження значень виразів із змінною

1. Знайти значення виразів $7 \cdot a + 18$; $9 \cdot a - 41$, якщо $a = 4, 5, 8$.

Зразок запису у зошитах.

Якщо $a = 4$, то $7 \cdot a + 18 = 7 \cdot 4 + 18 = 46$.

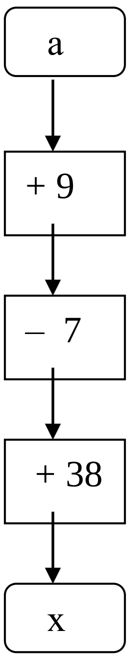
2. Заповнити таблицю.

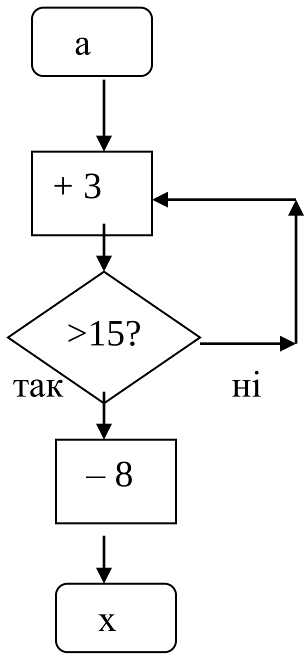
a	3	6	9	12	15	18
100-2a						
5 a + 8						

3. Знайти значення виразу: 3 · *x* + 7, якщо *x* набуває значень парних чисел. Побудувати таблицю і записати у ній значення змінної *x* і значення виразу: 3 · *x* + 7.

x	2	4	6	8	10	12
3 · x+7						

4. Знайди значення *x*





a	5	12	20
x			

a	5	12	20
x			

5. Зважаючи на вік дітей, вправи на функціональну залежність можна пропонувати в ігровій формі. Наприклад: «Антоша і Гоша грали в таку гру: по черзі записували числа у ряди, причому Гоша повинен по одному і тому ж правилу відповідати на хід Антоші».

Антоша	9	3	5	10	7	11	**x**
Гоша	7	1	3				**y**

- Які числа повинен записувати Гоша у вільні клітинки?

У цій вправі виконується функція $\boldsymbol{y} = x - 2$

6. Корисними вправами та завданнями по формуванню функціонального мислення, які використовуються в практиці навчання математики молодших школярів, є «лабіринти», «цікаві квадрати», «магічні квадрати» тощо. Необхідність виконання таких завдань відбувається в плані строгої логіки. Наприклад: «Впишіть у вільні клітинки числа так, щоб отримали «магічний квадрат».

	4	
	20	
16	36	

Починати слід з визначення постійної квадрату (в даному випадку – сума чисел середнього стовпчика). Отримуємо 36 + 20 + 4 = 60. Користуючись функцією $y = 60 - (x + a)$, послідовно знаходимо всі числа, яких не вистачає у клітинках, як по горизонталі, так по вертикалі і по діагоналі.

Уявлення про лінійну залежність між величинами можна формувати під час розв'язування всіх простих **задач** на дії першого ступеня. Учні розглядають також складені задачі на дві дії з лінійною залежністю.

Задача.

Для школи придбали 15 підручників за ціною 40 грн та енциклопедію за 92 грн. Яка вартість покупки?

	Ціна	Кількість	Вартість
Підручники	40 грн	15	?
Енциклопедія	92 грн	1	

Методичну роботу над задачею слід організувати таким чином.

І. Ознайомлення зі змістом задачі

- Що купували? (Підручники та енциклопедію).
- Про які величини йдеться в задачі? (Про ціну, кількість, вартість).
- Що означає число 15? (Кількість підручників, які купили).
- Що означає число 40 грн? (Ціна підручника).
- Скільки коштує енциклопедія? (92 грн).
- Яке запитання задачі? (Яка вартість покупки?).

ІІ. Пошук плану розв 'язання задачі

- Що треба знати, щоб дати відповідь на запитання задачі? (Скільки коштують підручники та енциклопедія).
- Що з цього відомо? (Скільки коштує енциклопедія).
- Що невідомо? (Скільки коштують підручники).
- Що треба знати, щоб визначити вартість підручників? (Ціну підручників та їхню кількість).
- Якою дією будемо знаходити вартість? (Множення).
- А потім дією додавання знайдемо вартість всієї покупки.

ІІІ. Розв'язання

1) $40 \cdot 15 = 600$ (грн) – вартість підручників.
2) $600 + 92 = 692$ (грн).

Виразом задачу можна розв'язати так:

$40 \cdot 15 + 92 = 692$ (грн).

Відповідь: 692 гривні вартість покупки.

IV. Опрацювання задачі після її розв'язання

Варто запропонувати учням розглянути кілька варіантів покупки:

- Яка буде вартість покупки, якщо придбати 5 підручників та енциклопедію? (292 грн).

- А якщо купили 10 підручників та енциклопедію? (492 грн).

- Якщо придбали 20 підручників та енциклопедію? (892 грн).

Змінюючи значення кількості, демонструємо, що є незалежна змінна x, вартість усієї покупки – залежна змінна y, ціна підручників, яка залишається сталою в задачі, – коефіцієнт пропорційності k ; $b = 92$.

Тоді формулу лінійної залежності на основі цієї задачі учні в середній школі записуватимуть у такому вигляді: $y = 40x + 92$

7.2. Прямо-пропорційна залежність

Вивчаючи таблиці множення, звертаємо увагу на характер зміни добутку залежно від зміни одного з множників. Після складання кожної з таблиць доцільно проводити бесіду.

Орієнтовний зміст бесіди

- Яким є перший множник у кожній рівності? (Однаковим, тобто незмінним, сталим).

- Яким є другий множник у кожній рівності? (Збільшується на 1).

- Яким є добуток у кожній рівності? (Збільшується на одне й те саме число).

Звертаємо увагу учнів на ті рівності з таблиці множення, які допомагають зробити висновок.

Якщо один з множників збільшити (зменшити) у кілька разів, то й добуток збільшиться (зменшиться) у стільки ж разів.

Аби сформувати уявлення про прямо пропорційну залежність, варто запропонувати учням виконати завдання за таблицями.

Завдання. Заповніть таблицю. Порівняйте перші множники і добутки. Зробіть висновок.

a	3	6	9	12	15	18
b	2	2	2	2	2	2
$a \cdot b$	6	12	18	24	30	36

Аби підвести учнів до висновку, учитель проводить бесіду.

- Яким є другий множник? (Однаковим, тобто сталим).

- Як змінився перший множник у першій та другій колонках? (Збільшився у 2 рази).

- Як при цьому змінився добуток? (Теж збільшився у 2 рази).

- Як змінився перший множник у першій та четвертій колонках? (Збільшився у 4 рази).

- Як при цьому змінився добуток? (Теж збільшився у 4 рази).

На основі виконаного завдання формулюють висновок.

Якщо перший множник збільшити (зменшити) у кілька разів за сталого другого множника, то й добуток чисел збільшиться (зменшиться) у стільки ж разів.

У процесі вивчення таблиць ділення вчитель має привернути увагу до залежності частки від зміни діленого за сталого дільника.

Завдання. Заповніть таблицю. Зробіть висновок.

a	8	16	24	32
b	4	4	4	4
$a : b$	2	4	6	8

Орієнтовний зміст бесіди

- Яким є дільник? (Однаковим, тобто сталим).

- Як змінилося ділене в першій та другій колонках? (Збільшилося у 2 рази).

- Як при цьому змінилася частка? (Теж збільшилася у 2 рази).

- Як змінилося ділене в першій та третій колонках? (Збільшилося у 3 рази).

- Як при цьому змінилася частка? (Теж збільшилася у 3 рази).

- Як змінилося ділене у четвертій та другій колонках? (Зменшилося у 2 рази).

- Як при цьому змінилася частка? (Теж зменшилася у 2 рази).

Підсумовуючи виконане завдання, учні формулюють висновок.

Якщо ділене збільшити (зменшити) у кілька разів за незмінного дільника, то частка збільшиться (зменшиться) у стільки ж разів.

Після вивчення випадків позатабличного множення і ділення доцільно теж пропонувати дітям виконати завдання аналогічного характеру.

Як бачимо, завдання за таблицями не лише сприяють удосконаленню обчислювальних навичок, а є також ефективним засобом функціональної пропедевтики.

Таким самим ефективним матеріалом для розкриття змісту функціональної залежності між величинами є задачі. Розглянемо задачі на знаходження четвертого пропорційного. Задачі цього виду розв'язують двома способами: спосіб зведення до одиниці (знаходження значення сталої величини) та способом відношень.

Задача.

За 5 однакових порцій морозива заплатили 30 грн. Скільки гривень треба заплатити за 10 таких порцій морозива?

Ціна	Кількість	Вартість
Одна-	5	30 грн
кова	10	?

I. Ознайомлення зі змістом задачі

- Про які величини йдеться в задачі? (Про ціну, кількість, вартість).

- Що означає число 5? (Кількість порцій морозива, яке купили першого разу).

- Що означає число 30 грн? (Вартість п'яти порцій морозива).

- Скільки порцій морозива придбають другого разу? (10).

- Що означає «таких самих»? (Ціна порції морозива однакова).

- Яке запитання задачі? (Скільки гривень треба заплатити за 10 таких самих порцій морозива?).

І спосіб (спосіб зведення до одиниці)

ІІ. Пошук плану розв’язання задачі

- Що треба знати, аби дати відповідь на запитання задачі? (Ціну і кількість порцій морозива які купуватимуть другого разу).

- Що з цього відомо? (Кількість порцій).

- Що невідомо? (Ціна порції).

- Якою є ціна морозива за умовою задачі? (Однаковою. Тобто ціна – це стала величина в даній задачі).

- А ми можемо її знайти? (Так).

- Як? (Вартість морозива, придбаного першого разу, поділити на кількість порцій).

- Тепер можна дати відповідь на запитання задачі? (Так).

- Ціну порції морозива помножити на кількість.

ІІІ. Розв'язання

1) 30 : 5 = 6 (грн.) – ціна морозива.

2) 6 · 10 = 60 (грн.).

Відповідь: 60 гривень треба заплатити за 10 порцій морозива.

IV. Опрацювання задачі після її розв'язання

Варто запропонувати учням розглянути кілька варіантів покупки:

- Скільки гривень треба було б заплатити за 15 (20, 25) таких самих порцій морозива? (90 грн., 120 грн., 150 грн.).

Змінюючи значення кількості, демонструємо, що це незалежна змінна x, вартість – залежна змінна y, ціна – коефіцієнт пропорційності k. Формулу прямо пропорційної залежності на основі цієї задачі учні в середній школі записуватимуть у такому вигляді: $y = 6 \cdot x$

Пізніше, коли вводяться задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношення, учні розкривають цю властивість прямо пропорційної залежності: зі збільшенням (зменшенням) значення незалежної змінної у декілька разів відповідні значення залежної змінної збільшуються (зменшуються) у стільки ж разів. Це дає змогу за відповідно дібраних числових значень величин (що прямо пропорційно залежні одна від одної) у задачах вказаного типу розв'язувати їх двома способами.

II спосіб (спосіб відношення)

1. Пошук плану розв'язання задачі

- Скільки разів по 5 порцій морозива вміщується у 10 порціях? (2 рази).

- Як ми про це дізналися? (10 : 5).

- Як другого разу змінилась кількість морозива? (Збільшилась у 2 рази).

- Як, на вашу думку, зміниться вартість морозива при покупці другого разу? (Вартість теж збільшиться у 2 рази).

II. Розв'язання

1) 10 : 5 = 2 (р.) – у стільки більша кількість порцій морозива.

2) 30 · 2 = 60 (грн.).

Відповідь: 60 гривень треба заплатити за 10 таких самих порцій морозива.

При розв'язуванні задач з іншими трійками величин аналогічно показуємо прямо пропорційну залежність між величинами. Наприклад, під час ознайомлення учнів з периметром квадратва доречно буде показати прямо пропорційну залежкість між стороною і периметром квадрата.

Завдання

Знайдіть периметр квадрата, якщо довжина його сторони дорівнює 4 см; 8 см, 12 см. Порівняйте значення довжини його сторони і периметра.

Орієнтовний зміст бесіди

- Як змінюється значення довжини квадрата? (Збільшується).

- У скільки разів, якщо порівнювати з першим значенням? (У 2 рази; у 3 рази).

- Як змінюється значення периметра квадрата? (Збільшується).

- У скільки разів, якщо порівнювати з першим значенням? (У 2 рази; у 3 рази).

У результаті такого аналізу учні помічають, що у скільки разів збільшилась довжина сторони квадрата, у стільки разів збільшився і його периметр.

7.3. Обернено-пропорційна залежність

Під час складання таблиць ділення учні можуть простежити, що дільник і частка за сталого діленого перебувають в обернено пропорційній залежності. Виконуючи завдання за таблицями, молодші школярі остаточно переконуються у такій залежності й формулюють відповідний висновок.

a	48	48	48	48
b	2	4	6	8
a : b	24	12	8	6

Орієнтовний зміст бесіди

- Яким є ділене? (Однаковим, тобто сталим).

- Як змінився дільник у першій та другій колонках? (Збільшився у 2 рази).

- Як при цьому змінилася частка? (Зменшилася у 2 рази).

- Як змінився дільник у другій та четвертій колонках? (Збільшився у 2 рази).

- Як при цьому змінилася частка? (Зменшилася у 2 рази).

- Як змінився дільник у третій та першій колонках? (Зменшився у 3 рази).

- Як при цьому змінилася частка? (Збільшилася у 3 рази).

Під керівництвом педагога учні формулюють висновок.

Якщо дільник збільшити (зменшити) у кілька разів за незмінного діленого, то частка зменшиться (збільшиться) у стільки ж разів.

Розглянемо роботу над задачею, у якій величини перебувають в обернено пропорційній залежності.

Задача

Придбали 10 пеналів за ціною 35 грн. Скільки наборів ручок можна придбати за ті самі гроші, якщо ціна набору 5 грн.?

Ціна	Кількість	Вартість
35 грн	10 пеналів	одна
5 грн	? наборів	кова

I. Ознайомлення зі змістом задачі

- Про які величини йдеться в задачі? (Про ціну, кількість, вартість).

- Що означає число 35 грн.? (Ціна пенала).

- Що означає число 10? (Кількість пеналів).

- Яка ціна набору ручок? (5грн).

- Що означає «придбали за ті самі гроші»? (Вартість пеналів та наборів ручок однакова).

- Яке запитання задачі? (Скільки наборів ручок можна придбати за ті ж самі гроші, якщо ціна набору 5 грн.?).

І спосіб (спосіб зведення до одиниці)

II. Пошук плану розв'язання задачі

- Що треба знати, аби дати відповідь на питання задачі? (Ціну набору ручок і вартість придбаних наборів).

- Що з цього відомо? (Ціна набору ручок).

- Що невідомо? (Вартість придбаних наборів).

- Скільки заплатили за набори ручок за умовою задачі? (Стільки ж, як і за пенали. Тобто вартість – незмінна величина в даній задачі).

- Чи можемо ми її знайти? (Так).

- Як? (Ціну пеналів помножити на їхню кількість).

- Тепер можна дати відповідь на запитання задачі? (Так).

- Як? (Вартість поділити на ціну набору ручок).

III. Розв'язання

1) $35 \cdot 10 = 350$ (грн) – вартість.

2) $350 : 5 = 70$ (н.).

Відповідь: 70 наборів ручок можна придбати за ті самі гроші, якщо ціна набору складає 5 грн.

Переконатися у правильності своїх припущень щодо залежності між величинами, про які йдеться в задачі, учні зможуть, якщо розглянуть кілька варіантів покупки.

IV. Опрацювання задачі після її розв'язання

- Яку кількість наборів можна буде придбати, якщо їхня ціна складатиме 7 грн.? 70 грн.? (50 наборів, 5 наборів).

Змінюючи значення ціни, демонструємо, що це незалежна змінна *x*, а кількість – залежна змінна *y*, вартість покупки – стала величина, тобто коефіцієнт пропорційності *k*. Тоді формулу обернено пропорційної залежності на основі цієї задачі учні в середній школі записуватимуть так:

$$y = 350 : x$$

Згодом, розв'язуючи задачі на знаходження четвертого пропорційного способом відношення, учні послуговуються виведеною властивістю оберненої пропорційності.

Якщо значення незалежної змінної збільшується (зменшується) у кілька разів, то відповідні значення залежної змінної зменшуються (збільшуються) у стільки ж разів.

II спосіб (спосіб відношення)

I. Пошук плану розв язання задачі

- Як змінилася ціна покупки? (Зменшилась).

- У скільки разів? (У 7 разів).

- Як ми про це дізналися? (35 : 5).

- Якою, на вашу думку, буде кількість наборів ручок відносно кількості пеналів? (Збільшиться у 7 разів).

II. Розв 'язання

1) 35 : 5 = 7 (р.) – у стільки менша ціна набору.

2) 10 · 7 = 70 (н.).

Відповідь: 70 наборів ручок можна придбати за ті самі гроші, якщо ціна набору складає 5 грн.

Тож, на основі розв'язування задач на знаходження четвертого пропорційного, на пропорційне ділення, на знаходження числа за двома різницями у дітей формується уявлення про **пряму та обернену пропорційну залежність**. У ході аналізу та розв'язання таких задач в учнів мають бути сформовані чіткі уявлення про характер тих взаємозв'язків між величинами, на основі яких розв'язується задача. Зміст початкового курсу математики містить багатий матеріал, на основі якого можна формувати базові уявлення про функцію, способи її завдання та властивості. Системна підготовка учнів у початковій школі допоможе їм здобувати міцні знання в майбутньому та використовувати їх у практичній діяльності.

VIII. ІСТОРИЧНІ ДОВІДКИ

Включення історико-математичного матеріалу на уроках математики у початкових класах має відповідати наступним положенням:

- включення елементів історії в курс математики має відбуватися у відповідності з метою та завданнями освітнього процесу і змістом матеріалу, який вивчається на уроці;
- необхідно демонструвати учням взаємозв'язок розвитку математичної науки з практичною діяльністю людей протягом багатьох століть. Постійний розвиток науки і техніки дає можливість математиці розв'язувати нові проблеми, створювати нові методи розв'язування задач, які постійно збагачують математику;
- під час використання історичних відомостей у процесі навчання дітей математики необхідно застосовувати різноманітні форми й види організації діяльності школярів на уроці, які сприяють активізації пізнавального інтересу учнів, створюють проблемні ситуації, мотивують до вивчення математичного матеріалу.

Використання історичних матеріалів з математики при вивченні учнями молодших класів алгебраїчного матеріалу може відбуватися методом бесіди. Але термін «бесіда» слід розуміти як повідомлення певного факту із історії математики, який може відбуватися у вигляді розповіді вчителя, розгляд і пояснення рисунка, короткого зауваження, аналізу задачі, презентацією, що супроводжується історичною довідкою. Такі повідомлення можуть бути під рубрикою «Дізнайтеся більше», «Це цікаво», «А заєте що…» та ін.

Мета введення елементів історії алгебри в початковий курс:

- підвищення інтересу учнів до вивчення алгебраїчного матеріалу та поглиблення розуміння ними вивчення фактичного матеріалу;
- розширення розумового кругозору учнів та підвищення їхньої загальної культури;
- знайомство із життям та діяльністю видатних математиків-алгебраїстів.

Ознайомлення учнів з історичним матеріалом означає продумане, планомірне використання на уроках історичних фактів та їх тісне сплетіння з систематичним вивченням алгебраїчного матеріалу за програмою. Для цього найкраще підходять уроки узагальнення та систематизації математичних знань.

Історія окремих символів

Цифри

Для позначення цифр у країнах з ієрогліфічною писемністю (Давній Єгипет, Китай) використовувалися особливі ієрогліфи, а в країнах з фонетичним алфавітом для цього спочатку використовувалися букви, часто з спеціальними помітками. Побудовані таким чином римські цифри використовують і в наш час. В Індії з VI ст. до н.е. було введено особливі знаки для кожної цифри від 1 до 9. Дещо видозміненими, ці знаки стали сучасними цифрами.

Групування цифр у багатоцифрових числах зручна для їхньої швидкої оцінки та порівняння. Рекомендації з цього приводу було зроблено італійським математиком Леонардо Пізанським (Фібоначчі, 1170 – 1250) у першому виданні його праці «Книга абака» (1202), де він радив помічати сотні, сотні тисяч і т.д. штрихом зверху, і одночасно помічати тисячі, мільйони, мільярди і т. д. штрихом знизу. У другому виданні «Книги абаку» (1228) Фібоначчі було дано дещо інші рекомендації: помічати трійки цифр дужками зверху, наприклад: число 678 935 284 мало таке позначення:

$$\overset{\frown}{678}\ \overset{\frown}{935}\ \overset{\frown}{284}$$

Знаки

Знаки + «**плюс**» і – «**мінус**» придумали у німецькій математичній школі «коссістів» (алгебраїстів). Уперше вони використовуються у підручнику німецького математика Йоганна Відмана (Johannes Widmann, 1460 – 1505) «Швидка і приємна лічба для всіх торговців» (1489). До цього часу додавання позначали буквою p (plus) або латинським словом *et* (сполучник «і»), а віднімання – буквою m (minus).

Знак **множення** у вигляді косого хрестика ввів у 1631 році англійський математик Уільям Отред (William Oughtred, 1575 – 1660). Причиною такого вибору в якості знака множення стала розповсюджена у ті роки схема перехресного множення коротких чисел (одноцифрових, двоцифрових). Німецький математик Готфрід Лейбніц (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 – 1716) у кінці XVII ст. замінив хрестик на точку, щоб не плутати з буквою *x*. До нього така символіка зустрічається у працях німецького математика Регіомонтана (справжнє ім'я Йоганн Мюллер, Johannes Müller, 1436 – 1476) і англійського математика Томаса Херріота (Thomas Harriot, 1560 – 1621). Але у працях багатьох математиків, починаючи з давньогрецького математика Діофанта Олександрійського (III ст.), який нерідко згадувався як «батько алгебри», замість знака множення просто записували операнди підряд: **ab** = a · b. Особливо зручним цей компактний запис виявився для перетворення буквених виразів.

У давнину в якості знака **ділення** використовувалася горизонтальна риска дробу. У середньовічній Європі ділення часто позначали буквою D. Англійський математик Вільям Отред (William Oughtred, 1575 – 1660) запропонував косу риску або знак правої круглої дужки. Таке позначення зустрічається і у німецького математика М. Штифеля (Michael Stifel, 1487 – 1567). Конструкція 8)24 означає ділення 24 на 8. Ділення двокрапками став позначати з 1684 року Лейбніц. В Англії та Америці отримав розповсюдження символ ÷ (обелюс), який запропонував у 1659 році швейцарський математик Йоганн Ран (Johann Heinrich Rahn, 1622 – 1676) у своїй книзі «Teutsche Algebra». Раніше такий символ використовував французький математик А. Жирар (Albert Girard, 1595 – 1632) як синонім мінуса.

Знак **рівності «=»** увів англійський учений Роберт Рекорд (Robert Recorde, 1510 – 1558) у 1557 р. у науковій праці «The Whetstone of Witte», яку вважають початком розвитку алгебри в Англії. До нього в математиці користувалися іншими знаками рівності. Так, давньогрецький математик Діофант відношення рівності позначав літерою «ι», яка є першою буквою грецького слова «ιōος» –

рівний. Індійські та арабські математики, а також більшість європейських, найчастіше, аж до XVII століття, рівність позначали словесно «est egale», Р. Бомбеллі (1572 р.) позначав рівність буквою «a», котра є першою в латинському слові «aequalis» – рівний.

Знаки **«>» і «<»** ввів англійський математик Томас Герріот (Thomas Harriot, 1560 – 1621) у своїй науковій праці «Застосування аналітичного мистецтва до розв'язування алгебраїчних рівнянь», виданій посмертно 1631 року. До нього писали словами: більше, менше.

Дужки

У давнину замість дужок використовувалися горизонтальні риски, що проводилася над/під виразом, який треба було заключити в дужки. **Підкреслення** використовувалося у деяких манускриптах французького математика Н. Шюке (Nicolas Chuquet, 1445 – 1488), автора праці «Наука про числа в трьох частинах» («Triparty en la science des nombres», 1484), італійського математика Р. Бомбеллі (Rafael Bombelli, 1526 – 1572), автора «L'Algebra» складеної в 1560 р. Але одночасно Бомбеллі використовував у якості початкової дужки кут у вигляді букви L, а в якості кінцевої – цю ж саму букву тільки у перевернутому вигляді.

Надкреслення використовували: голандський математик Франс ван Схотен (Frans van Shouten, 1615 – 1660), італійський математик Б. Кавальєрі (Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598 – 1647) та ін. Надкреслення отримало широке розповсюдження в Англії, зокрема його використовував Ньютон.

Круглі дужки з'явилися у XV ст. у працях німецького математика М. Штифеля, також в італійського математика Н. Тартальї (Niccolò Tartaglia, 1499 – 1557) та інших. У кінці XV ст. у свїх працях Ф. Вієт (François Viète, seigneur de la Bigotière, 1540 – 1603) започаткував фігурні дужки. Однак протягом XVII ст. продовжували вживати не дужки, а горизонтальні риски, що проводилася над/під виразом.

Активно почали використовувати дужки на сторінках математичних видань лише в кінці XVII ст. завдяки Лейбніцу, а у подальшому Ейлеру

(Leonhard Euler, 1707 – 1783), який і ввів термін «дужки», що походить від німецького слова Klammer – дужки.

Алгебра

Алгебра складалася в недрах арифметики, від якої вона довгий час не відділялася. В рамках арифметики давні вавілоняни, єгиптяни, китайці та греки застосовували окремі алгебраїчні символи та способи розв'язування задач. Особливий розвиток алгебри отримав в Давній Індії, а у IX—XV ст. у країнах ісламу, в тому числі і в Середній Азії.

У першій половині IX ст. Мухаммед ібн-Муса ал-Хорезмі написав арабською мовою алгебраїчний трактат «Китаб ал-джабра і ва-л-мукабали». Це перший у світі самостійний твір з алгебри. Від слова у назві книги «ал-джабр», яке позначає один із алгебраїчних прийомів, пішло слово «алгебра». Ал-Хорезмі був перший учений, який відділив алгебру від арифметики і розглядав її як окрему частину математики. Алгебру ал-Хорезмі в латинському перекладі вивчали європейці протягом XII—XVI ст. Подальший розвиток алгебри пов'язаний з іменами європейських учених Н. Тартальї, Дж. Кардано, Р. Бомбеллі, Ф. Вієта, Р. Декарта, І. Ньютона, Л. Ейлера, Н. Лобачевского та інших. Зокрема у навчальній алгебраїчній літературі XVIII ст. одне із основних місць займає «Універсальна арифметика» Л.Ейлера, яка написана у Петербурзі в 1767 р. У подальшому всі підручники елементарної алгебри складалися за зразком цієї книги.

Із історії алгебраїчних виразів

Букви та різноманітні математичні знаки стали використовуватися не зразу, а в результаті довгого розвитку математичної науки. До XV ст. всі величини та дії, умови та відповіді виражалися тільки словами. Алгебру тих часів називали риторичною, тобто словесною. Лише в другій половині XV ст. у деяких країнах Європи було введено перші алгебраїчні символи та започатковано використання букв.

Творцем сучасної буквеної символіки є французький математик Франсуа Вієт. До XVI в. виклад алгебри велося в основному словесно. Літерні позначення та математичні знаки з'являлися поступово. Рішучий крок у використанні символіки алгебри був зроблений в XVI ст., коли французький математик Франсуа Вієт і його сучасники стали застосовувати літери для позначення не тільки невідомих (що робилося і раніше), але і будь-яких чисел. Однак ця символіка ще відрізнялася від сучасної. Так, Вієт для позначення *невідомого числа* застосовував букву **N** (Numerus-число), для *квадрата і куба невідомого* букви **Q** (Quadratus - квадрат) і **C** (Cubus - куб).

Поступово створення алгебраїчної символіки відбувалося в Італії, Германії, Франції, Англії і, в основному, було завершено в XVII ст. Однак лише в першій половині XVIII ст. установилася загальноприйнята система знаків у алгебрі.

IX. ЛОГІКО-ДИДАКТИЧНИЙ АНАЛІЗ НАВЧАЛЬНОЇ ТЕМИ

Майбутній учитель початкових класів повинен уявити навчальний процес як логічно-дидактичну структуру. Вона являє собою низку уроків, які розбиваються на групи по числу мікро цілей. Кожній мікро цілі співвідноситься певна група уроків, на яких, по-перше, повинна бути досягнута мікро ціль, по-друге, це програма поступового розвитку мислення дитини, пам'яті, мови, уваги, інтересу до математики. Для цього студенти вчаться складати ***технологічні карти*** – що є основою проєкту майбутнього навчального процесу в класі. У технологічній карті цілісно, ємко, представлені головні параметри навчального процесу, які забезпечують успіх навчання.

У оволодінні конструюванням технологічної карти у майбутніх вчителів початкових класів формується нове педагогічне мислення: чіткість, структурованість, ясність методичної мови, з'являється обумовленість норм методичних завдань. Формується методичне бачення всього навчального процесу під час вивчення певної теми, розділу, або навчального процесу на весь рік.

Основний об'єкт технологічної карти – це навчальна тема. Тривалість теми має різні часові відрізки – уроки – від мінімальної кількості уроків – 2-4, до максимальної – 10-20, або від одного до декількох. Саме у такій структурній системі уроків найбільш рел'єфно проявляються логічні та методичні закономірності навчального процесу.

У проєктуванні цілей до алгебраїчної теми, то їх може бути декілька – від трьох до 5-6 мікроцілей. Студенти вчаться формулювати цілі за такими формами, що суголосні з державними вимогами до рівня загальноосвітньої підготовки учнів початкових класів, наприклад, *утворює, називає, читає, записує, порівнює* числа в межах 100; *розуміє* сутність арифметичних дій; встановлює взаємозв'язки між діями додавання, віднімання, множення і ділення; *володіє* обчислювальними навичками усного додавання і віднімання в межах 100; *використовує* в обчисленнях залежність результатів множення й ділення від зміни одного з компонентів; *планує* послідовність виконання арифметичних дій; *перевіряє* правильність виконання додавання і віднімання вивченими способами; *читає і записує* математичні вирази: сума і різниця; *обчислює* значення виразів на 1 – 2 дії; *встановлює відношення* рівності й нерівності між числами й числовими виразами; *знаходить* значення числового виразу та буквеного виразу із заданим значенням букви; *встановлює залежності* між компонентами і результатом арифметичнодії; *застосовує правило* порядку виконання дій у виразах без дужок та з дужками тощо.

До кожної теми складається загальна логіко-дидактична структура всієї алгебраїчної теми, яка, у свою чергу, складається з набору технологічних карт послідовних уроків цієї теми. Таких карт може бути різна кількість, це залежить від наповнення кількістю уроків теми.

До структури кожного уроку розробляються в залежності від мети, система навчальних задач, вправ, прикладів, схем, таблиць, які націлені на ефективне розв'язання завдань та вимог державного стандарту НУШ, проєктування системи уроків, скоординованих з домашньою навчальною роботою.

Логіко-дидактичний аналіз – один із інструментів формування і розвитку професійно значущих умінь майбутнього вчителя початкових класів. З позицій проведення логіко-дидактичного аналізу здобувачі повинні навчитися:

а) систематизувати структуру змісту курсу математики в цілому;

б) осмислювати логіку побудови основних змістових ліній і тем курсу математики початкової школи;

в) аналізувати особливості процесу опанування фахових умінь і навичок; формування комплексу загальних та спеціальних компетенцій з певних математичних розділів, враховуючи систему та технологію навчання.

Навчальна тема в нашому розумінні – це завершений у математичному та дидактичному відношенні фрагмент навчального курсу математики, одиниця навчального матеріалу, яка дозволяє:

а) розкривати логічну і математичну організацію і трактовку взаємопов'язаних між собою питань;

б) з'ясовувати рівень строгості математичних фактів;

в) чітко виділяти мету вивчення окремих математичних питань;

г) визначати можливі варіанти засобів навчання;

д) продумувати систему контролю та оцінки завершеної системи знань і умінь учнів.

Мета логіко-математичного аналізу полягає у встановленні змісту і логічній організації навчального матеріалу. **Завданнями** логіко-математичного аналізу є:

- визначити основний (головний) спосіб логічної організації завершеного фрагменту навчального алгебраїчного матеріалу, тобто на якій основі будується ознайомлення, вивчення та осмислення алгебраїчного матеріалу: на змістовній, на дедуктивній або комбінованій;
- встановити, які алгебраїчні поняття вводяться через опис, яким із них дається строге визначення, яка логічна структура їх визначень;
- встановити які алгебраїчні твердження доводяться, який рівень строгості доведень, який метод доведень використовується, які вводяться для ілюстрації, які твердження вводяться через задачі;
- виділити які алгоритми і правила дій включає в себе алгебраїчний матеріал, розгорнути правила в повні алгоритми;
- виділити загальні математичні методи і прийоми, знайомство або оволодіння якими здійснюється при вивченні алгебраїчної пропедевтики;
- виділити опорний, основний та допоміжний алгебраїчний матеріал (як за підручником, так і за додатковою інформацією);
- провести аналіз алгебраїчних задач та завдань що вміщені в підручнику;
- встановити внутрішньопредметні та міжпредметні зв'язки;
- встановити інтеграційні зв'язки;
- продумати різні варіанти контролю.

Мета методичного аналізу полягає у проєктуванні, відборі та розробці дидактичного забезпечення завершеного фрагменту навчального матеріалу. **Завданнями** методичного аналізу є:

- правильно сформулювати мету вивчення алгебраїчної тематики у відповідності з особливостями учнів молодших класів;

- скоректувати (адаптувати) рівень науковості і строгості вивчення теоретичного алгебраїчного матеріалу теми;

- виділити шляхи, засоби, способи впливу на мотивацію вивчення молодшими школярами алгебраїчних понять;

- визначити та обґрунтувати засоби забезпечення наочності та доступності даного навчального матеріалу;

- виділити обов'язкову групу завдань для засвоєння опорних знань та умінь алгебраїчної пропедевтики;

- відібрати та обґрунтувати прийоми і методи навчання, враховуючи варіативність при необхідності;

- підібрати або розробити самостійно засоби контролю засвоєння основного алгебраїчного матеріалу та рівня оволодіння навчально-пізнавальними діями;

- підібрати форми організації диференціації і індивідуалізації навчання алгебраїчного матеріалу;

- підібрати форми організації інтеграції з іншими галузями.

Рекомендації щодо здійснення логіко-дидактичного аналізу завершеного фрагменту навчального матеріалу.

1. Відповідно до Державного стандарту початкової математичної освіти слід розуміти, що в ньому зафіксовано основним чином освітні аспекти цілей та завдань. Розвивальні та виховні аспекти визначаються суто вчителем згідно особливостей теми уроку або педагогічної ситуації.

2. Для забезпечення позитивної мотивації навчання важливо показати:

- можливе практичне застосування знань та умінь, якими молодші школярі оволодіють у процесі вивчення алгебраїчного матеріалу;

- цікаві факти з історії розвитку, становлення та використання алгебраїчних знань та умінь;

- нестандартні, цікаві завдання, задачі у віршованій формі, логічні завдання, головоломки, запропонувати дітям зробити власну наочність до теми тощо.

Для цього пропонуємо скористатися науково-популярними, науково-методичними спеціальними журналами для вчителів початкових класів, різноманітними методичними посібниками, матеріалами шкільних порталів мережі Інтернет тощо.

3. Важливо зрозуміти, що призначення такого матеріалу – розширення математичного кругозору, і що рівень оволодіння цим матеріалом відрізняється від рівня оволодіння основним алгебраїчним матеріалом.

4. Великий пласт в математичному матеріалі складають задачі. Аналізуючи задачний матеріал необхідно відповісти на ряд важливих питань:

- яка кількість задач сприяє розкриттю, конкретизації та поглибленню основного алгебраїчного матеріалу?

- як згруповано задачі у відповідності з викладом основного матеріалу (всі типи в одній групі, чи перемежовуються з задачами на повторення, чи в логічній послідовності)?

- чи можливо виділити багатофункціональні задачі?

- чи достатньо задач для формування певних знань та умінь, які визначені навчальною програмою, чи може їх не достає, або, навпаки, подано надмірна кількість?

- чи існують задачі на формування мотивації або такі, які показують прикладний характер математичних (алгебраїчних) знань та умінь?

- чи є задачі на формування навичок математичної діяльності: навчання пошуку розв'язання, на формування евристичних прийомів діяльності, проєктивної, творчої, дослідницької діяльності тощо?

Результатом аналізу задач повинна скластися певна система обов'язкових задач для розв'язування в процесі вивчення алгебраїчного матеріалу за певною темою.

Пропонуємо зробити логіко-дидактичний аналіз певної теми за однією із поданих таблиць:

Таблиця 1

Навчальна тема	Мета	Найважливіші поняття	Методичні рекомендації

Таблиця 2

Навчальна тема	Діяльність учнів	Діяльність учителя	Завдання для учнів, виконання яких сприяє досягненню запланованих результатів	Заплановані результати

Таблиця 3

Навчальна тема	Мета і завдання	Заплановані результати	Значення матеріалу для школярів	Методи навчання	Форми організації навчальної діяльності	Прийоми діяльності вчителя	Організація діяльності учнів	Розвиток умінь учнів	Основні поняття та терміни

X. ПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яким чином учитель формує поняття в учнів про числові і буквені вирази?

2. Проаналізуйте методику ознайомлення учнів початкових класів з числовими рівностями і нерівностями, а також порівнянням іменованих чисел.

3. Поясніть методику роботи над найпростішими рівняннями:

($x + 5 = 8$; $x – 3 = 7$; $5 – x = 2$).

4. На що має звернути увагу вчитель при розв'язанні найпростіших рівнянь?

5. Поясніть методику роботи над рівнянням виду: $(15 – x) + 25 = 32$.

6. Яке місце рівнянь при розв’язанні задач в початкових классах.

7. Наведіть приклад задачі та розв'яжіть її, склавши рівняння.

8. Складіть фрагмент уроку на тему: «Поняття про рівності».

9. Розкрийте методику роботи над задачею: «На 5 костюмів витратили 15 метрів тканини. Скільки можна пошити костюмів з ***k*** м тканини?» Складіть вираз, а потім обчисліть його значення, якщо ***k*** = 45. Розкрийте поступове складання виразу з поясненням.

10. Проаналізуйте послідовність алгебраїчного матеріалу представленого у підручнику 1 класу (Автор підручника за вибором студента).

11. Проаналізуйте послідовність алгебраїчного матеріалу представленого у підручнику 2 класу (Автор підручника за вибором студента).

12. Проаналізуйте послідовність алгебраїчного матеріалу представленого у підручнику 3 класу (Автор підручника за вибором студента).

13. Проаналізуйте послідовність алгебраїчного матеріалу представленого у підручнику 4 класу (Автор підручника за вибором студента).

14. Які основні вимоги щодо вивчення алгебраїчного матеріалу у програмах НУШ1 і НУШ2. Які є відмінності.

15. Розв'яжіть нерівності: $x + 37 < 54$; $x – 4 > 10$; $x \cdot 4 > 16$; $64 : x > 16$ та поясніть розв’язання нерівностей трьома способами. Обґрунтуйте кожний спосіб розв’язання. Побудуйте схеми до даних нерівностей.

16. Готуємося до конференції. Розглянути публікації з журналів та газет: «Учитель початкової школи», «Початкова школа», «Початкова освіта», «Розкажи онуку», «Математика в школах України», «Математика в школі», «Освіта», «Рідна школа», «Початкове навчання та виховання» щодо висвітлення актуальних проблем алгебраїчної пропедевтики в початкових класах. Форми роботи: вивчення досвіду роботи вчителів-практиків щодо методики вивчення алгебраїчного матеріалу в початкових класах; обговорення повідомлень; конспект основних положень; тези статті; тези виступу на конференції; фото та відео матеріали.

17. Опрацювання визначень. Пригадайте головне:

1. Що називають числовим виразом? Наведіть приклади.
2. Що називають значенням числового виразу?
3. Що називають числовою рівністю? Наведіть приклади.
4. Що називають числовою нерівністю? Наведіть приклади.
5. Як записують подвійну нерівність?
6. Як порівняти багатоцифрові натуральні числа?

18. Користуючись програмою з математики для початкової школи визначте: якими знаннями про натуральне число мають оволодіти учні наприкінці навчання у початковій школі?

19. Користуючись схемою аналізу натурального числа, проаналізуйте числа:

а) 252 436;   б) 17 502 127.

20. Познайомтесь із змістом програми з математики для 5 класу. Визначте основні теоретичні питання алгебраїчної пропедевтики та шляхи наступності в їх вивченні між початковою школою та середньою.

21. Зробіть логіко-дидактичний аналіз теми: «Вивчення числових та буквенних виразів» по класах.

22. Зробіть логіко-дидактичний аналіз теми: «Вивчення рівностей та нерівностей» по класах.

23. Розкрийте методику ознайомлення дітей із рівняннями.

24. Розкрийте методику ознайомлення учнів з виразами із змінною.

25. Розкрийте історичні довідки щодо виникнення алгебраїчних понять. Хто з видатних вчених математиків займався теорією алгебри?

26. Складіть узагальнюючу бесіду для учнів 4 класу з теми: «Рівняння».

27. Підберіть матеріал до бесіди по одній із тем для позакласного заняття: а) система числення; б) цікаві вправи під час вивчення рівнянь; в) історія виникнення математичних знаків; г) на вибір студента.

28. Розкрийте послідовність функціональної пропедевтики в початкових класах.

29. Поясніть спосіб складання рівнянь за допомогою використання основних властивостей рівностей.

30. Доведіть, що числа можна додавати в будь якому порядку.

31. Наведіть систему вправ щодо застосування правила порядку виконання дій під час обчислення виразів з діями першого і другого ступеня.

32. Наведіть систему вправ щодо застосування правила порядку виконання дій під час обчислення виразів з дужками.

33. Розкрийте методику ознайомлення дітей з розв'язуванням текстових задач за допомогою складання рівняння.

34. Розкрийте особливості тотожних перетворень рівностей, рівнянь.

35. Виконайте логіко-дидактичний аналіз теми: «Лінійна залежність».

36. Виконайте логіко-дидактичний аналіз теми: «Прямо пропорційна залежність».

37. Виконайте логіко-дидактичний аналіз теми: «Обернено пропорційна залежність».

38. Поміркуйте та розкрийте творчу особистість майбутнього вчителя початкової школи щодо сучасного викладання математики.

39. Назвіть методи навчання функціональної пропедевтики. Прослідкуйте ступінь використання кожного методу на різних етапах вивчення цієї лінії.

40. Розкрийте послідовність етапів роботи по формуванню алгебраїчних понять у початкових класах.

41. Які професійні компетенції формуєте під час вивчення теми: «Рівняння»? Заповніть таблицю.

Поняття	Уміння
Вивчення поняття рівняння. 1. Мета…	1.Уміння визначати мету вивчення зазначеного поняття. 2. Уміння мотивувати учнів. 3. Уміння визначати навчальні завдання. 4. Уміння аналізувати урок з урахуванням його цілей. 5. Уміння робити логіко-математичний аналіз визначення поняття, що вивчається. 6. Уміння робити логіко-дидактичний аналіз завершеної теми навчального матеріалу за підручником. 7. Уміння підбирати завдання, вправи, задачі для повноцінного формування зазначеного поняття. 8. Уміння формувати повноцінні обчислювальні навички та структури правильного запису. 9. Уміння підбирати засоби навчання зазначеного поняття. 10. Уміння організовувати самостійну роботу учнів щодо вивчення зазначеного поняття. 11. Уміння складати питання для контролю. 12. Уміння узагальнювати та робити висновки щодо формування зазначеного поняття. 13. Уміння робити самоаналіз уроку (теми) щодо сформованості зазначеного поняття.

42. Розробіть фрагменти уроків по ознайомленню молодших школярів із алгебраїчними поняттями (вираз, рівність, нерівність, рівняння) за роками навчання.

43. Підберіть з підручників математики 1-4 кл. систему завдань (підготовка, ознайомлення, закріплення) по формуванню у молодших школярів алгебраїчної компетенції.

44. Наведіть приклади завдань із підручників математики, на яких можна проілюструвати види функціональної залежності: лінійної, прямо-пропорційної і обернено-пропорційної.

45. Розробіть методичну послідовність роботи над числовими виразами: формування уявлень про найпростіші вирази та введення виразів на дві дії; вирази на дві дії першого ступеня із застосуванням дужок; вирази на дві дії першого і другого ступенів, знаходження числових значень яких спирається на правила порядку виконання арифметичних дій.

46. Скласти завдання для підсумкового тестового контролю з метою перевірки очікуваних результатів навчання учнів 4 класу змістової лінії «Вирази, рівності, нерівності».

47. Підготуйте методичний огляд публікацій на тему «Пропедевтика алгебри в початкових класах».

48. Зробіть рецензію на наукову статтю вчителів-практиків щодо формування алгебраїчних понять у початкових класах (стаття на вибір студентів). Складіть бібліографічний покажчик статей для використання у подальшій професійній діяльності.

49. Здійсніть порівняльний аналіз алгебраїчного змісту навчання у різних навчальних програмах освітньої галузі «Математика».

50. Назвіть основні етапи Вашої траєкторії вивчення теми: «Елементи алгебри у початкових класах». Виявіть досягнуті Вами на кожному етапі результати. Проаналізуйте засоби, які Ви застосовували для їх досягнення.

51. Визначіть значення проведення пропедевтичної роботи з алгебри в початковій школі.

Тестові завдання

1. Від чого залежить назва числового виразу?

а) від дії, яка виконується першою;
б) від дії, яка виконується в дужках;
в) від дії, яка виконується останньою;
г) від відповіді, яку одержали.

2. Які із перерахованих нижче тем не відносяться до алгебраїчної пропедевтики?

а) вирази – числові і буквені;
б) рівності, нерівності;
в) функціональна залежність;
г) фігури на площині та їх властивості.

3. Вкажіть з чого починається знайомство з рівняннями у початковій школі?

а) заповнюючи порожні клітинки у виразах;
б) деякі числа замінюють буквами;
в) вивчають правила взаємозв'язку між компонентами та результатом арифметичних дій;
г) розв'язують вирази на основі вивчених правил.

4. Якими методами розв'язують нерівності у початковій школі?

а) підбору;
б) зведенням до одиниці;
в) на основі властивостей арифметичних дій;
г) на основі властивостей нерівностей.

5. У курсі методики навчання математики початкової школи алгебраїчний матеріал розглядаються у такій послідовності:

а) Числові вирази. Числові рівності, нерівності. Рівняння. Нерівності із змінною. Формування уявлень учнів про функціональну залежність.

б) Числові вирази. Числові рівності, нерівності. Вирази із змінною. Рівняння. Нерівності із змінною. Формування уявлень учнів про функціональну залежність.

в) Числові вирази. Числові рівності, нерівності. Вирази із змінною. Рівняння. Формування уявлень учнів про функціональну залежність.

г) Числові вирази. Числові рівності, нерівності. Вирази із змінною. Рівняння. Нерівності із змінною.

6. Рівняння в початковому курсі математики трактується як:

а) числовий вираз, що має букву;

б) рівність двох виразів, з яких хоча б один має змінну;

в) рівність, що має букву;

г) рівність, яка виконується лише при певному значенні букви.

7. У який період відбувається первинне ознайомлення учнів із відношеннями «більше», «менше», «дорівнює»?

а) у концентрі «Десяток»;

б) у концентрі «Сотня»;

в) у дочисловий період;

г) після ознайомлення з числами першого десятку.

8. До простих задач, що пов'язані з поняттям різницевого чи кратного відношення двох чисел відносяться …

а) на ділення на вміщення;

б) на збільшення чи зменшення числа на кілька одиниць (у прямій і непрямій формі);

в) на збільшення чи зменшення числа в кілька разів (у прямій і непрямій формі);

г) на знаходження четвертого пропорційного.

9. Які види задач відносяться до типових?

а) на різницеве порівняння;

б) на знаходження четвертого пропорційного способом зведення до одиниці;

в) на збільшення чи зменшення числа в кілька разів (у прямій і непрямій формі);

г) на знаходження числа за двома різницями.

10. Доберіть до кожного виразу, що є розв'язком наступної задачі, назву відповідного способу її розв'язання. Задача: «У перший день магазином продано 5 кг цукерок, що були упаковані в 10 однакових коробках. На другий день – 30 таких самих коробок із такими ж цукерками. Скільки кілограмів цукерок продано у другий день?»

1. 30 : (10 : 5).	А. Спосіб відношень
2. 5 x (30 : 10).	Б. Спосіб зведення до одиниці.
3. (5000 : 10) x 30.	В. Спосіб пропорційного ділення.

11. Доберіть до кожної групи прикладів, відповідну мету, яку ставить вчитель.

1. Чим схожі й чим відрізняються числа у кожній парі:
   54 і 154; 28 і 128; 67 і 167; 99 і 199.
2. Запиши всі трицифрові числа за допомогою цифр 6 і 8. Скільки таких чисел можна записати?
3. Які цифри можна поставити замість зірочки, щоб отримати вірні нерівності: *35 > 435; 6** > 6*4; 547 < *47.

А. Навчити учнів порівнювати трицифрові числа.

Б. Навчити учнів записувати трицифрові числа.

В. Навчити учнів визначати ознаки при порівнянні.

12. Який матеріал у початковому навчанні математики є основним?

а) арифметичний;

б) алгебраїчний;

в) геометричний;

г) величини.

13. Яка характерна особливість типових задач?

а) 4 дії;

б) стала величина;

в) 2 дії;

г) 3 дії.

14. Якою дією знаходять сталу величину при розв'язуванні типових задач?

а) множенням;

б) відніманням;

в) діленням;

г) додаванням.

15. У якому класі виділено в окрему тему алгебраїчний матеріал?

а) 2 клас;

б) 4 клас;

в) не виділено взагалі.

16. Яким виразам знаходять сталу величину в задачах на знаходження невідомого за двома різницями?

а) а : в;

б) а: (в - с);

в) а · в.

17. Які задачі найдоцільніше в початкових класах розв'язати алгебраїчним способом?

а) на знаходження невідомого множника;

б) на кратне порівняння;

в) на різницеве порівняння;

г) на зменшення в кілька разів.

XI. СЛОВНИК АЛГЕБРАЇЧНИХ ТЕРМІНІВ І ПОНЯТЬ

Алгебра – (від араб. аль-джабр, аль-габр) розділ математики, в якому вивчають дії над величинами незалежно від їхніх числових значень. Основний зміст алгебри – методи розв'язування алгебраїчних рівнянь.

Буквений вираз – запис, складений із букв, чисел, знаків арифметичних дій і дужок. Буквений вираз може мати кілька значень, які залежать від значення букв, які входять до виразу.

Заміна змінної – операція, результатом якої є математичний вираз з іншою змінною, еквівалентний даному.

Значення функції – значення залежної змінної при певному значенні аргумента.

Корінь рівняння – це значення невідомого, яке перетворює рівняння на правильну рівність.

Лінійна залежність – залежність, яка може бути виражена за допомогою лінійної функції.

Математичний вираз – фраза, яка записана за допомогою чисел, знаків і букв.

Математичні компетентності НУШ – виявлення простих математичних залежностей у навколишньому світі; моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичних відношень та вимірювань; усвідомлення ролі математичних знань та вмінь в особистому і суспільному житті людини.

Нерівність – два вирази, поєднані знаком нерівності.

Нерівність зі змінною – два вирази зі змінною (невідомим), між якими стоїть один зі знаків нерівності: > (більше), < (менше), ≥ (більше або дорівнює; не менше); ≤ (менше або дорівнює; не більше).

Обернена залежність – залежність, за якою збільшення однієї величини призводить до зменшення іншої пропорційно (або навпаки).

Порівняти два натуральних числа – означає з'ясувати, яке з них більше, а яке – менше.

Пропедевтика – (грец. προπαιδέυω попередньо вивчаю) – попередній вступний курс, систематично викладений у стислій та елементарній формі.

Рівняння – це рівність, яка виконується лише при певному значенні букви.

Рівняння – рівнясть, яка містить невідоме.

Рівняння із двома змінними – рівність, яка містить дві змінні**.**

Розв'язати нерівність з однією змінною – знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Розв'язати рівняння – знайти його корені або довести, що їх немає.

Розв'язок нерівності з однією змінною – значення змінної, яке перетворює нерівність на правильну числову нерівність.

Розв'язок рівняння – значення змінної, при підстановці якого в рівняння одержують правильну числову рівність.

Строгі нерівності – два вирази, які сполучені знаком > або <.

Теорія чисел – наука про властивості цілих чисел.

Тотожне перетворення алгебраїчного виразу – заміна цього виразу іншим, тотожно рівним йому. Спростити алгебраїчний вираз – означає замінити його на тотожно рівний, але найпростіший за записом. Як видно з означення, спрощення алгебраїчного виразу є тотожним перетворенням. Два вирази називаються тотожно рівними, якщо при будь-яких допустимих значеннях букв відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному.

Функцією називають залежність між змінними ***x*** та ***y***, при якій кожному значенню ***x*** відповідає єдине значення змінної ***y*.**

Функціональна залежність – залежність, яка може бути виражена за допомогою функції.

Функціональна пропедевтика як складова алгебраїчної пропедевтики – це підготовча робота, спрямована на формування поняття функції, способів її задання, властивостей окремих видів функцій.

Числовий вираз – запис, складений із чисел, знаків арифметичних дій і дужок. Числовий вираз має лише одне значення.

Числова нерівність – якщо обидві частини нерівності – числа.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. М.: Издательство ЛКИ, 2008. 248 с.

2. Бевз В.Г., Васильєва Д.В. Математика: підручники для 1-4 кл. Київ: Освіта, 2019.

3. Богданович М.В., Лишенко Г.П. Пропедевтика алгебри та геометрії в початковій школі. Посібник для вчителя. Київ: Генеза, 2011. 208 с.

4. Богданович М.В., Козак М.В., Король Я.А. Методика викладання математики в початкових класах : навч. посіб. Тернопіль, Навчальна книга Богдан, 2006. 336 с.

5. Будна Н.О. Математика: підручники для 1-4 кл. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2019.

6. Гісь О.М., Філяк І.В. Математика: підручники для 1-4 кл. Харків: Ранок, 2019.

7. Глейзер Г. И. История математики в школе: IV—VI кл. Пособие для учителей. Москва: Просвещение, 1981. 239 с.

8. Дичко Н.Д. Конструювання та використання диференційованих завдань на етапі ознайомлення з розв'язуванням складених рівнянь. *Розкажіть онуку.* 2003. № 14. С. 40 – 41.

9. Довженко К. Пропедевтика вивчення алгебри. *Початкова освіта*. 2013. № 12. С. 4 – 7.

10. Дудко Л. Розвязування задач з пропорційними величинами. *Початкова школа*. 2006. № 11. С.14 – 17.

11. Дудко Л. Розвязування задач з пропорційними величинами. *Початкова школа.* 2007. № 9 – 10. С.16 – 17, 26 – 27.

12. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А. П. Юшкевича. В 3-х тт. Т. 1. История математики с древнейших времен до начала Нового времени. М., 1970.

13. Кіщук Н. Дроби як функціональні відношення та їх вивчення у початковій школі на образно-графічному рівні. *Початкова школа*. 2019. № 12. С. 35 – 41.

14. Коваль Л. В., Скворцова С. О. Методика навчання математики: теорія і практика: Підручник. Харків: ЧП «Принт-Лідер», 2011. 414 с.

15. Кольяк Н. Практичне засвоєння елементів алгебри. *Початкова освіта*. 2013. № 12. С. 8 – 14.

16. Корчевська О. П. Навчаємо математики. Методика обчислень. 1-4 класи. Тернопіль : Мандрівець, 2009. 156 с.

17. Корчевська О. П. Навчаємо математики. Методика роботи над задачами. Тернопіль : Мандрівець, 2008. 160 с.

18. Кошелев А. Л. Формулирование определений математических понятий при помощи процедуры описания / Наука и образование в современном мире: международная научно-практическая конференция [20 декабря 2012] Калининград, Щецин: Материалы – Калининград: Смартбукс; Szczecin (Polska), 2012. С. 205–207.

19. Ляшова Н. Основні методичні питання вивчення елементів алгебри в початкових класах. Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 17. *Теорія і практика навчання та виховання*. Вип. 28 : зб. наукових праць. К. : Вид-во НПУ Драгоманова, 2017. С. 99 –104.

20. Ляшова Н. Особливості процесу формування умінь розв'язувати рівняння на початковому етапі навчання математики. *Актуальні питання сучасних педагогічних та психологічних наук.* Одеса: ГО «Південна фундація педагогіки», 2016. С.100 –103.

21. Марушенко Л. Ю. Функциональный подход к решению текстовых задач на прямо пропорциональную зависимость. *Начальная школа*. 2007. № 7. С. 44 – 48.

22. Манкевич Р. История математики. От счетных палочек до бессчетных вселенных / Пер. с англ. Степанова А. Н. Москва: Ломоносовъ, 2011. 256 с.

23. Монахов В.М. Технологические основы проектирования и конструирования ученого процесса. Волгоград. Перемена, 1995.

24. Налесная С.Л. Методика формирования учебных действий в процессе изучения математических понятий: монография. Таганрог: ТГПИ им. А. П. Чехова, 2013. 100 с.

25. Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI – XVII вв. Москва: Наука, 1979. 208 с.

26. Пензай Л. І. Додавання та віднімання чисел частинами. Інтегрований урок математики та економіки у 1 класі. *Початкове навчання та виховання*. 2017. № 6 . С. 2 – 5.

27. Сарієнко В., Чайченко В. Особливості вивчення властивостей геометричних фігур у початкових класах. *Початкова школа*. 2017. № 5. С. 15 – 19.

28. Скворцова С. Прецікаві, хоч незвичні, методи алгебраїчні. *Учитель початкової школи.* 2015. № 2. С. 16 – 20.

29. Скворцова С. О. Онопрієнко О.В. Математика: підручники для 1 – 4 кл. Харків: Вид-во «Ранок», 2019.

30. Теоретические и методические основы изучения математики в начальной школе /под ред. Тихоненко А.В. Ростов н/Д: Феникс, 2008. 349 с.

31. Тершукова Е. И. Развитие познавательных компетенций через различные виды упражнений на уроках математики в начальной школе. *Молодой ученый*. 2016. № 5-6. С. 96 – 99.

32. Типові освітні програми для закладів загальної середньої освіти. 1-4 класи /укладач А. В. Лотоцька. Харків: Вид-во «Ранок», 2020. 392 с.

33. Ушаков Р. П. Шукаймо область значень функції. *Математика в школах України*. 2007, № 28.

34. Харік О. Ю. Про деякі нестандартні методи розв'язування рівнянь. *Математика в школах України*. 2008, № 3, 4. С. 195-196.

35. Шиян Т. Агрегация и скобки в математике нового времени: введение в логико-семиотический анализ. *Докса*. 2015. Вип. 2 (24). С. 202 – 213.

36. Шиян Т. А. Семиотический анализ логико-математической символики. (О синонимии, полисемии, омонимии, антонимии, конверсии) Vox: *Электронный философский журнал*. Вып. 9 (декабрь 2010). URL: http://voxjournal.org/html/issues/vox9/134 (данные на 23.02.2021).

37. Шупер Т. Функціональна пропедевтика: формуємо уявлення про сталі й змінні величини, про залежність між величинами. *Учитель початкової школи.* 2017. № 5. С. 8 – 14.

38. Шупер Т. Компонування – основа цілісного і ґрунтовного засвоєння знань. Укрупнення дидактичних одиниць у початковому курсі математики. *Учитель початкової школи*. 2017. № 9. С. 12 – 19.

39. Щербан Т. Д., Щербан Г. В. Вивчення елементів алгебри в початковій школі: Навчальний посібник. Київ : Кондор-Видавництво, 2015. 278 с.

40. Щербан Г. В. Методика розв'язування рівнянь і нерівностей в початковому курсі математики. Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів. Мукачево : МДУ, 2016. 56 с.

41. Merzbach U.C., Boyer C.B. A History of Mathematics. Wiley, 2011. 688 p.

ДОДАТКИ

Додаток А.

Програма нормативної навчальної дисципліни
«Математика»

освітнього рівня бакалавр
галузі знань 01 Освіта
спеціальності 013 Початкова освіта

Тематичний план
Модуль V. Рівняння. Нерівності. Функції.

У змісті нормативної навчальної дисципліни «Математика» для бакалаврів спеціальності «Початкова освіта» передбачено міждисциплінарні зв'язки з методикою викладання математичної освітньої галузі в початковій школі. Програма навчальної дисципліни включає змістовий модуль «Рівняння. Нерівності. Функції», у якому вивчаються такі теми:

Тема 1. Вирази.

Числові вирази. Числові рівності та нерівності. Вирази зі змінною. Тотожні перетворення виразів.

Тема 2. Рівняння, нерівності та їх системи.

Рівняння з однією змінною. Нерівності з однією змінною. Рівняння з двома змінними. Рівняння лінії. Рівняння кола, прямої. Системи рівнянь з двома змінними, способи їх розв'язування. Системи і сукупності нерівностей з однією змінною. Нерівності та системи нерівностей з двома змінними; графічний спосіб їх розв'язування.

Тема 3. Функції.

Числова функція, її властивості. Функція, обернена до даної. Лінійна функція. Пряма, обернена пропорційність. Квадратична функція. Операції над функціями та графіками. Перетворення графіків / побудова графіка функції $y = A f(ax + b) + B$, де A, B, a, b – сталі, $A \neq 0, b \neq 0$, за графіком $y = f(x)$ /.

Додаток Б.

Програма нормативної навчальної дисципліни
«Методика навчання освітньої галузі «Математика»
освітнього рівня бакалавр
галузі знань 01 Освіта
спеціальності 013 Початкова освіта

Тематичний план

Модуль V. Пропедевтичні курси початкової математичної освіти

Змістовий модуль 1. Пропедевтика алгебри в початкових класах

1. Сучасні підходи до вивчення алгебраїчного матеріалу в новій українській школі.
2. Формування й розвиток в учнів понять про числові та буквені вирази, рівності й нерівності. Ознайомлення з розв'язуванням задач, складанням числових виразів.
3. Формування в учнів поняття про рівняння з однією змінною. Особливості формування вмінь учнів розв'язувати рівняння з однією змінною на одну-дві дії на основі взаємозв'язку між компонентами й результатами дій. Методика ознайомлення учнів з розв'язанням задач складанням рівнянь.
4. Формування поняття про нерівності з однією змінною. Особливості формування вмінь учнів розв'язувати прості нерівності способом добору.
5. Формування в учнів поняття про функціональну залежність.
6. Особливості застосування сучасних методів, засобів та технологій під час опрацювання алгебраїчного матеріалу на уроках математики в початковій школі.

Реалізація мети і завдань початкового курсу математики здійснюється за змістовими лініями. Змістова лінія **«Вирази, рівності, нерівності»** спрямована на формування в учнів уявлень про математичні вирази – числові та зі змінною; рівності і рівняння; числові нерівності та нерівності зі змінною; про залежність результату арифметичної дії від зміни одного з її компонентів. Ця змістова лінія є пропедевтичною до вивчення алгебраїчного матеріалу.

Знак равенства «=» впервые применил британец Роберт Рекорд в 1557-м году