УДК 517+511.72+519.21 Задніпряний М.В., Лисенко І.М.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗОБРАЖЕНЬ ЧИСЕЛ ЗНАКОДОДАТНИМИ РЯДАМИ СІЛЬВЕСТЕРА ТА ЗНАКОЗМІННИМИ РЯДАМИ ОСТРОГРАДСЬКОГО

Осуществляется сравнительный анализ геометрий (геометрических свойств цифр, свойств цилиндров, метрических соотношений) двух представлений чисел бесконечными рядами (знакоположительным рядом Сильвестера и знакопеременным рядом Остроград-ского, члены которых являются числами, обратными натуральным).

Вступ. Ще в 1880 році Сільвестер[2] описав один зі способів розвинення дійсних чисел у знакододатні ряди спеціального виду, членами яких є числа, обернені до натуральних.Цим самим була запропонована одна із перших систем зображення дійсних чисел зі нескінченним алфавітом у формі ряду і нульовою надлишковістю, деякий аналог зображення чисел елементарними ланцюговими дробами. Пізніше були обгрунтовані інші, такі як розклади чисел в ряди Люрота, Остроградського-Серпінського-Пірса, Енгеля, Остроградського 2-го виду тощо. Всі вони є моделями дійсного числа, побудованого з натуральних чисел. Геометрично простим і оригінальним зі скінченною надлишковістю і нескінченним алфавітом є Q_∞ - та $\tilde{Q}_\infty$ -зображень дійсних чисел.

Як виявилося, модель дійсного числа у формі ряду Сільвестера має непросту несамоподібну геометрію. Вона має чимало спільного із зображенням чисел знакозмінними рядами Остроградського 2-го виду, а саме: ряд спільних метричних відношень, але має й ряд принципових відмінностей, зокрема топологічного характеру. Ми вбачаємо в даній системі зображення чисел значний потенціал для побудови метричної, фрактальної та ймовірнісної теорії дійсних чисел, для моделювання і дослідження математичних об'єктів зі складною локальною структурою, ряду застосувань у фрактальному аналізі та фрактальній геометрії. З цією метою плануємо вибудувати цілісну теорію зображення чисел рядами Сільвестера, використовуючи ряд плідних ідей, які реалізовувались в дослідженнях згаданих вище систем зображення дісних чисел.

1. Розклад числа в ряд Сільвестера та S-зображення числа

Означення 1.Числовий ряд виду $q_1^{-1}+q_2^{-1}+\ldots+q_n^{-1}+\ldots$, де $q_k\in N$, причому $q_1\geq 2$, $q_{k+1}\geq q_k(q_k-1)+1$,називається *рядом Сільвестера*.

Теорема 1. *Кожне дійсне число $x\in(0,1]$ єдиним чином розкладається в ряд Сільвестера, тобто для довільного $x\in(0,1]$ існує єдина послідовність натуральних чисел (q_k), така, що $q_1\geq 2$, $q_{n+1}\geq q_n(q_n-1)+1$ і*

$$x=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\ldots+\frac{1}{q_n}+\ldots\equiv\Delta^S_{q_1q_2\ldots q_m\ldots}. \tag{1}$$

Означення 2. Розклад (1) числа x можна формально подати у вигляді $\overline{\Delta}^S_{g_1g_2\ldots g_n\ldots}$,де $g_1=q_1-1$, $g_{k+1}=q_{k+1}-q_k(q_k-1)$, $k\in N$. який називатимемо S *-зображенням* числа x

Означення 3.Нехай $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ – фіксований набір натуральних чисел, S *-циліндром рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина

$$\overline{\Delta}^S_{c_1c_2\ldots c_m}=\{x: x=\overline{\Delta}^S_{c_1c_2\ldots c_m q_{m+1}q_{m+2}\ldots}, q_{m+j}\in N\}$$

чисел $x\in(0,1]$, які мають S -зображення, перші m -символів якого співпадають з $c_1,c_2,\ldots,c_m$ відповідно.

Лема 1([5]).*Циліндр* $\overline{\Delta}^S_{d_1d_2\ldots d_m}\equiv\Delta^S_{c_1c_2\ldots c_m}$ *є півінтервалом* $(a,b]$*, де*

$$a=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\ldots+\frac{1}{c_m},\ b=\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\ldots+\frac{1}{c_{m-1}}+\frac{1}{c_m-1}.$$

Циліндричні множини мають наступні властивості:

1. $\overline{\Delta}^S_{c_1\ldots c_n}=\bigcup\limits_{i=c_n(c_n-1)+1}^{\infty}\overline{\Delta}^S_{c_1\ldots c_n i}$;
2. $\inf\overline{\Delta}^S_{c_1\ldots c_n}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{c_i};\ \sup\overline{\Delta}^S_{c_1\ldots c_n}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{c_i}+\frac{1}{c_n-1};\inf\overline{\Delta}^S_{c_1\ldots c_n i}=\sup\overline{\Delta}^S_{c_1\ldots c_n(i+1)}$;
3. $\left|\overline{\Delta}^S_{c_1\ldots c_n}\right|=\frac{1}{c_n(c_n-1)}$;

4. $\dfrac{|\overline{\Delta}^{S}_{c_1\ldots c_n c_{n+1}}|}{|\overline{\Delta}^{S}_{c_1\ldots c_n}|}=\dfrac{c_n(c_n-1)}{c_{n+1}(c_{n+1}-1)}\le\dfrac{1}{c_n(c_n-1)+1}$.

2. Розклад числа в ряд Остроградського 2-го виду та O²-зображення

Означення 4. Числовий ряд виду $q_1^{-1}+q_2^{-1}+\ldots+q_n^{-1}+\ldots$, де q_k – натуральні числа, причому $q_{(k+1)}\ge q_k(q_k+1)\ \forall k\in N$, називається рядом Остроградського 2-го виду.

Теорема 2. Кожне дійсне число $x\in(0,1]$ розкладається в ряд Остроградського 2-го виду, тобто для довільного $x\in(0,1]$ існує скінченний набір $(q_1,q_2,\ldots,q_m)$ абонескінченна послідовність натуральних чисел (q_n) така, що $q_{n+1}\ge q_n(q_n+1)$ і $x=\dfrac{1}{q_1}-\dfrac{1}{q_2}+\dfrac{1}{q_3}-\ldots+\dfrac{(-1)^{m-1}}{q_m}\vee x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n}.$

Розклад числа x в ряд Остроградського 2-го виду символічно записуватимемо $x=O^2(q_1,q_2,\ldots,q_m)$ або $x=O^2(q_1,q_2,\ldots,q_n,\ldots)$. Останні частини двох рівностей називаються O^2*-зображенням* числа x.

Розклад ірраціонального числа x в ряд Остроградського 2-го виду має нескінченну кількість доданків, а раціонально – скінченну.

Кожне раціональне число має рівно два формально різні O^2-зображення: $O^2(q_1,q_2,\ldots,q_{n-1},q_n+1)$ і $O^2(q_1,q_2,\ldots,q_n,q_n(q_n+1))$.

Кожне ірраціональне число має єдине O^2-зображення.

Означення 5. O^2*-циліндром рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$ *називається множина*

$$\Delta^{O^2}_{c_1c_2\ldots c_m}=\{x: x=\Delta^{O^2}_{c_1c_2\ldots c_m q_{m+1}q_{m+2}\ldots},q_{m+j}\in N\}$$

чисел $x\in(0,1]$, які мають O^2-зображення, перші m-символів якого співпадають з $c_1,c_2,\ldots,c_m$ відповідно.

Циліндричні множини мають наступні властивості:

1. $\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n}=\bigcup\limits_{i=c_n(c_n+1)}^{\infty}\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n i}$;

2. $\inf\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}}=\sum\limits_{i=1}^{2m-1}\dfrac{(-1)^{i-1}}{c_i}-\dfrac{1}{c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)};\quad \sup\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}}=\sum\limits_{i=1}^{2m-1}\dfrac{(-1)^{i-1}}{c_i}$;

$\inf\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}}=\sum\limits_{i=1}^{2m}\dfrac{(-1)^{i-1}}{c_i};\quad \sup\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}}=\sum\limits_{i=1}^{2m}\dfrac{(-1)^{i-1}}{c_i}+-\dfrac{1}{c_{2m}(c_{2m}+1)}$;

$\sup\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}i}=\inf\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m-1}(i+1)}$; $\inf\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}i}=\sup\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_{2m}(i+1)}$;

3. $|\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n}|=\dfrac{1}{c_n(c_n+1)}$;

4. $\dfrac{|\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n c_{n+1}}|}{|\Delta^{O^2}_{c_1\ldots c_n}|}=\dfrac{c_n(c_n+1)}{c_{n+1}(c_{n+1}+1)}\le\dfrac{1}{c_n(c_n+1)+1}$.

Означення 6.Якщо $O^2(q_1,q_2,\ldots,q_n,\ldots)$ – зображення числа x, то його зображення у вигляді $x=\overline{O}^2(d_1,d_2,\ldots,d_n,\ldots)$, де $d_1=q_1$, $d_{n+1}=q_{n+1}+1-q_n(q_n+1)$, $n=1,2,\ldots$, називається $\overline{O}^2$*-зображенням*, або *різницевим зображенням* числа x рядом Остроградського 2-го виду.

Зазначимо, що O^2-зображення і S-зображення числа в якості алфавіту використовую множину всіх натуральних чисел, але, у випадку O^2-зображення, другий символ не може набувати значення 1, третій – 1,2,3,4,5 і т.д., у випадку S-зображення перший символ не може набувати значення 1, другий – 1, 2 і т.д., що робить їх «нерівноправними» у вказаному відношенні. Цього недоліку не мають $\overline{O}^2$ - та S -зображення, оскільки кожен із символів, незалежно від значення попереднього може набувати всіх натуральних значень.

3. **Порівняльний аналіз**

1) Різнецеве зображення обох розкладів дозволяє використовувати в якості «алфавіту» множину натуральних чисел.

2) Кожне число інтервала $(0,1)$ єдиним чином розкладається в нескінченний ряд Сільвестера. В ряд Остроградського єдиним чином розкладаються лише ірраціональні числа, а кожне раціональне число має два, формально різних зображення.

3) Кожне число інтервала $(0,1)$ у розкладі в ряд Сільвестера має нескінченну кількість доданків (а зображення – символів). У розкладі в ряд Остроградського нескінченну кількість доданків (а в зображенні – символів)мають лише ірраціональні числа.

4) Довжина циліндра обох розкладів залежить лише від n -го елемента.

5) Обидва зображення мають дуже схожі (навіть близькі) метричні відношення, є визначальними для близькості метричних теорій цих зображень.

6) Основне метричне відношення обох розкладів прямує до нуля при необмеженному зростанні рангу циліндра.

7) Геометрія S -зображення принцопово (топологічно) відрізняється від геометрії O^2 -зображення. Свідченням цього є різниця» властивості 4 пп. 1 та 2.

8) «Близькість» зазначена вище дозволяє сподіватись на глибоку аналогію тополого-метричних і фрактальних теорій вказаних зображень, але їх основою має бути більш детальна розробка основ цих теорій.

Теорема 4.*Нехай* (k_n) – *зростаюча послідовність натуральних чисел,* $c_i \in N$, $\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots} = \left\{ x : g_i(x) = c_{k_i}, i \in N \right\}$, *де* $g_{k_i}(x)$ – k_i*-цифри* S*- та* $\overline{O}^2$*-зображення. Тоді міри Лебега* $\Delta^{k_1 k_2 \ldots k_n \ldots}_{c_1 c_2 \ldots c_n \ldots} = 0$, *якщо* $d_n = k_{n+1} - k_n > 1$ *для нескінченної кількості значень* n.

ЛІТЕРАТУРА:

[1] Erdös P.,Renyi A.,Szüsz P. On Engel's and Sylvester's series // Ann. Sci. Budapest, Sectio Math."– (1)1958. "– P. 7-32.

[2] Sylvester J. J. On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. Journal of Math." – (3)1880. "– P. 332-335.,postscript ibid. 388-389.

[3] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[4] Працьовита І. М. Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-мат. науки. – Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004. – №5. – С. 174-189.

[5] Працьовита І. М. Задніпряний М. В.Ряди Сільвестера та їх застосування // Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – №9. – С. 174-189.

[6] Ремез Е. Я. О математических рукописях академика М. В. Остроградского // Историко-математические исследования, вып. IV. – Москва: Гостехтеориздат, –1951. –С. 9-98.

Зайченко Л. М.

РОЗВИТОК ПОЛІТИКО-ТЕХНОКРАТИЧНИХ ІДЕЙ У І ПОЛОВИНІ ХХ СТОЛІТТЯ

Технократизм рассматривается в контексте взаимообусловленности основных форм политической жизни, техники и науки. Исследуется проблема генезиса концепции политического, анализируется эволюция технократизмаидеи технократии как формы политического управления в первой половине ХХ века.

Як наслідок науково-технічного прогресу та широкомасштабного використання сучасної техніки і новітніх технологій спостерігаємо якісні зрушення у всіх сферах людської життєдіяльності. Розвиток техніки та технології мають значний вплив на формування образу сучасного світу взагалі та політичної парадигми, зокрема.Саме тому актуальності набувають проблеми соціального використання загальнонаукових і вузькопрофесійних знань в політичному і профільному управлінні комплексними справами суспільства, які найбільш повно висвітлюються технократичними концепціями.

За мету даної статті ставиться виявлення характерних особливостей технократичної концепції в залежності від перебігу всесвітньої історико-політичної ситуації 1 половини ХХ століття та через аналіз конкретних постулатів окремих дослідників.

В сучасній науковій літературі поняття «технократія»розглядається, як правило, в потрійному значенні, – теоретичної концепції влади, що має своїм підґрунтям суто науково-технічне знання; моделі державно-політичного устрою суспільства; соціального прошарку носіїв науково-технічного знання, які виконують управлінські, адміністративні та розпорядчі функції в політико-правових формаціях [3;106].

Як бачимо, центральною у зазначених підходах є ідея про можливість ефективного функціонування соціально-політичної організації, що заснована на науковому знанні і управляється носіями такого знання. Ця ідея не нова, вона маєдосить давню традицію в філософсько-політичній літературі. Так, німецький соціолог Р.Маурер зазначав, що певні сутнісні характеристики технократизму як "техніки політичного панування" сформулював ще давньогрецький мислитель Платон у трактатах "Держава" та "Політик"[1,36]. Вінобгрунтовував ідею суспільства, що керується носіями знання – філософами, оскільки лише їм доступне пізнання та розуміння загального блага та шляхів його досягнення.Також першопочатки технократичної концепції управління можна