Interdisciplinary Studies of Complex Systems
No. 22 (2023) 19–31

https://doi.org/10.31392/iscs.2023.22.019 УДК 510.589:001.18

Forecast method based on factor-time mathematical model

Olexandr Lysenko[1,2], *Irina Alexeeva*[1,3], *Mykola Dieniezhkin*[4,5], *Oleg Semenenko*[4,6], *Igor Gamula*[7]

Метод прогнозування на основі використання факторно-часової математичної моделі

Олександр Лисенко, Ірина Алексеева, Микола Денєжкін, Олег Семененко, Ігор Гамула

Abstract. Authors underline, that traditionally modern methods of forecast are divided into quality & quantity, but last — into casual (incidental) (causative-consequence) methods & methods of time rows analysis [1].
It was determined, that tasks of forecast use methods of time rows analysis in case of availability of greatly quantity of data about real indexes of significance, which is determined in conditions, that observed tendency from past tense is relatively stable. In this case the postulate for quite worthy-positive presentation of future tense is applied.
It was proposed to use the method of forecast, based on factor-time model, in which index of observed tendency is a function of march variables (factors). If it's possible to make inventory succeed connections between factors of casual model enough correctly, then forecast accuracy, which is gotten by using this model could be quite high.

Keywords: casual model, methods of time rows analysis, forecast, algorithm of identification

[1] National technical university of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv polytechnic institute», Kyiv, Ukraine
[2] lysenko.a.i.1952@gmail.com, http://orcid.org/0000-0002-7276-9279
[3] alexir1@ukr.net, http://orcid.org/0000-0002-2878-6514
[4] Central Research Institute of the Armed Forces of Ukraine
[5] denejkin07@ukr.net, https://orcid.org/0000-0003-0918-0880
[6] aosemenenko@ukr.net, https://orcid.org/0000-0001-6477-3414
[7] Dragomanov Ukrainian State University, Kyiv, Ukraine; i.a.gamula@npu.edu.ua, https://orcid.org/0000-0001-7651-3273

Анотація. У статті авторами підкреслено, що традиційно існуючі методи прогнозування поділяють на якісні та кількісні, а останні, у свою чергу, — на каузальні (причинно-наслідкові) методи та методи аналізу часових рядів [1].
Встановлено, що в задачах прогнозування методи аналізу часових рядів використовуються при наявності значної кількості даних стосовно реальних значень показника, який вивчається при умові, що тенденція, яка спостерігається із минулого часу, є відносно стабільною. При цьому приймається постулат про те, що минуле достатньо достовірно репрезентує майбутнє.
Запропоновано використання методу прогнозування, що базується на використанні факторно-часової моделі, в який величина, що прогнозується, є функцією великої кількості змінних (факторів). Якщо зв'язок між факторами, що входять до складу каузальної моделі вдається описати достатньо коректно, то точність прогнозу, що отримується із використанням цієї моделі, може бути досить високою.

Ключові слова: казуальні моделі, метод аналізу часових рядів, прогнозування, алгоритм ідентифікації

Постановка проблеми в загальному вигляді

Чи можна розробити метод, який би поєднав у собі позитивні властивості і методів аналізу часових рядів і каузальних методів.

Пропонується комбінований метод, що базується на використанні прогнозуючої факторно-часової математичної моделі, яка складається із прогнозуючих факторної та часової математичних моделей.

Етапи методу прогнозування на основі використання факторно-часової математичної моделі:

1. Обґрунтування доцільності використання прогнозуючої факторно-часової математичної моделі
2. Збір вихідних даних.
3. Ідентифікація параметрів прогнозуючої факторної математичної моделі.
4. Ідентифікація параметрів прогнозуючої часової математичної моделі.
5. Обчислення прогнозного значення факторів $\hat{X}_1(n+1), ..., \hat{X}_m(n+1)$ із використанням ідентифікованих параметрів прогнозуючої часової математичної моделі.
6. Обчислення прогнозного значення вихідної змінної $\hat{W}(\hat{X}_1(n+1), ..., \hat{X}_m(n+1))$ із використанням ідентифікованих параметрів прогнозуючої факторної математичної моделі.
7. Висновки.

Викладення основного матеріалу (розв'язання проблеми)

Розглянемо математичні моделі, що використовуються у запропонованому методі:

1. Прогнозуюча факторна математична модель

Розглядається прогнозуюча факторна математична модель вигляду

$$W(X_1, X_2, ..., X_n) = A \cdot X_1^{P_1} \cdot X_2^{P_2} ... \cdot X_m^{P_m},$$

де $X_i(i = \overline{1,m})$ — додатні вхідні змінні, за якими обчислюється значення вихідної змінної W; $P_i(i = \overline{1,m})$ та $A > 0$ — сталі в часі параметри, оцінки яких обчислюються за результатом ретроспективної оброки інформації про вхідні змінні.

Прогнозуючий характер факторної математичної моделі полягає в тому, що за прогнозними значеннями $X_i(i = \overline{1,m})$ на момент часу $t = (n + 1) \cdot T_0$, де T_0 — інтервал дискретизації; n — дискретний час, і оцінками параметрів $P_i(i = \overline{1,m})$ та A обчислюється прогнозне значення W.

Для отримання прогнозних значень $X_i(i = \overline{1,m})$ на момент часу $t = (n + 1) \cdot T_0$, тобто $\hat{X}_i(n + 1)$, необхідно скористатись **прогнозуючою часовою математичною моделлю.** Перейдемо до розгляду цієї математичної моделі.

2. Прогнозуюча часова математична модель

Вважаємо, що прогнозуюча часова математична модель зміни в дискретному часі n змінної $X_i(n)$ описується різницевим рівнянням вигляду

$$X_i(n + 1) = a_{i0} \cdot X_i(n) + a_{i1} \cdot X_i(n - 1) + ... + a_{\text{ik}} \cdot X_i(n - k) + b_i, (i = \overline{1,m}),$$

де $a_{\text{ij}}, b_i(i = \overline{1,m}; j = \overline{0,k})$ — сталі в часі параметри, оцінки яких обчислюються за результатом ретроспективної обробки інформації про значення змінної X_i у попередні моменти часу .

Прогнозуючий характер дискретної математичної моделі, що описується різницевим рівнянням, полягає в тому, що за відомими $X_i(n - j), j = \overline{0,k}$ та оцінками параметрів $a_{\text{ij}}, b_i(i = \overline{1,m}; j = \overline{0,k})$ прогнозується значення $\hat{X}_i(n + 1)$, тобто, прогнозне значення $X_i(i = \overline{1,m})$ на момент часу $t = (n + 1) \cdot T_0$.

Підкреслимо, що для виконання процедури прогнозування необхідно знати як параметри факторної, так і часової математичних моделей.

Перейдемо до розгляду алгоритмів ідентифікації (оцінювання) параметрів цих математичних моделей.

3. Ідентифікація параметрів прогнозуючої факторно-часової математичної моделі (обчислення оцінок параметрів моделі)

За звичай для ідентифікації параметрів прогнозуючої факторно-часової математичної моделі використовуються статистичні дані у вигляді масивів істинних значень (помилками вимірів нехтуємо) змінної W та факторів $X_i(i=\overline{1,m})$ за попередній час відповідно $[W(n), W(n-1), ..., W(n-K)]$ та $[X_i(n), X_i(n-1), ..., X_i(n-K)](i=\overline{1,m})$, де $K>>k$ та $K>>m$.

Ідентифікація параметрів прогнозуючої факторної математичної моделі

Виконаємо логарифмування виразів, що використовуються для обчислення W у різні ретроспективні моменти часу та скористаємося операцією псевдообернення прямокутної матриці [2] для ідентифікації (обчислення оцінок) невідомих параметрів:

$$\left.\begin{array}{l} \ln W(n) = \ln A + P_1 \cdot \ln X_1(n) + ... + P_m \cdot \ln X_m(n); \\ \vdots \\ \ln W(n-K) = \ln A + P_1 \cdot \ln X_1(n-K) + ... + P_m \cdot \ln X_m(n-K); \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \ln W(n) = [1 \quad \ln X_1(n) \; ... \; \ln X_m(n)] \cdot [\ln A \quad P_1 \; ... \; P_m]^T; \\ \vdots \\ \ln W(n-K) = [1 \quad \ln X_1(n-K) \; ... \; \ln X_m(n-K)] \cdot [\ln A \quad P_1 \; ... \; P_m]^T; \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \bar{W} = B \cdot \begin{bmatrix} \ln A \\ P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \hat{V} = \left(B^T \cdot B\right)^{-1} B^T \cdot \ln \bar{W},$$

де

$\hat{V} = \left[\ln \hat{A} \quad \hat{P}_1 \; ... \; \hat{P}_m\right]^T$ — вектор, компонентами якого є оцінки невідомих параметрів (**що і треба було отримати**);

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \ln X_1(n) & ... & \ln X_m(n) \\ \vdots & & & \\ 1 & \ln X_1(n-K) & ... & \ln X_m(n-K) \end{bmatrix} = [I \quad \ln \bar{X}_1 \; ... \; \ln \bar{X}_m];$$

$$\ln \bar{X}_1 = \begin{bmatrix} \ln X_1(n) \\ \vdots \\ \ln X_1(n-K) \end{bmatrix}; \quad \ln \bar{X}_m = \begin{bmatrix} \ln X_m(n) \\ \vdots \\ \ln X_m(n-K) \end{bmatrix};$$

$$\ln \bar{W} = \begin{bmatrix} \ln W(n) \\ \vdots \\ \ln W(n-K) \end{bmatrix}.$$

Ідентифікація параметрів прогнозуючої часової математичної моделі

Оцінки параметрів a_{ij}, b_i $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{0,k})$ обчислюються за результатом обробки інформації про значення змінної X_i у попередні моменти часу (ретроспективна обробка інформації):

$$\left.\begin{array}{l} X_i(k+1) = a_{i0} \cdot X_i(k) + a_{i1} \cdot X_i(k-1) + ... + a_{ik} \cdot X_i(0) + b_i, \\ X_i(k+2) = a_{i0} \cdot X_i(k+1) + a_{i1} \cdot X_i(k) + ... + a_{ik} \cdot X_i(1) + b_i, \\ \vdots \\ X_i(K) = a_{i0} \cdot X_i(K-1) + a_{i1} \cdot X_i(K-2) + ... + a_{ik} \cdot X_i(K-k) + b_i, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X_i(k+1) \\ X_i(k+2) \\ \vdots \\ X_i(K) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_i(k) & X_i(k-1) & ... & X_i(0) & 1 \\ X_i(k+1) & X_i(k) & ... & X_i(1) & 1 \\ \vdots & & & & \\ X_i(K) & X_i(K-1) & ... & X_i(K-k) & 1 \end{bmatrix} \cdot [a_{i0} \quad a_{i1} \quad ... \quad a_{ik} \quad b_i]^T$$

$$\Leftrightarrow S_i = \left(D^T \cdot D\right)^{-1} D^T \cdot \bar{X}_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

де $\hat{S}_i = [\hat{a}_{i0} \quad \hat{a}_{i1} \quad ... \quad \hat{a}_{ik} \quad \hat{b}_i]^T$ $(i = \overline{1,m})$ — вектор, що складений із оцінок параметрів прогнозуючої часової математичної моделі (**що і треба було отримати**);

$$\bar{X}_i = [X_i(k+1) \quad X_i(k+2) \quad ... \quad X_i(K)]^T;$$

$$D = \begin{bmatrix} X_i(k) & X_i(k-1) & ... & X_i(0) & 1 \\ X_i(k+1) & X_i(k) & ... & X_i(1) & 1 \\ \vdots & & & & \\ X_i(K) & X_i(K-1) & ... & X_i(K-k) & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Приклад застосування прогнозуючої факторно-часової математичної моделі в задачі макроекономічного прогнозування [3–7]

Реалізація етапів методу

Етап 1. *Розглядається макроекономічна двофакторна математична модель Кобба–Дугласа (математична модель виробничої функції)*

Математична модель Кобба–Дугласа являє собою неокласичну двофакторну математичну модель виробничої функції, яка дозволяє розкрити вплив праці (X_1) та капіталу (X_2) на об'єм виробництва. Зазначені фактори є взаємно підсилюючими (мультиплекативно діючими факторами) і дозволяють прогнозувати об'єм виробництва на значний період при відомих (на цей значний період) значеннях факторів і сталих параметрів математичної моделі.

Математична модель **Кобба–Дугласа** має наступний вигляд:

$$W(X_1, X_2) = A \cdot X_1^{P_1} \cdot X_2^{P_2},$$

де $A > 0$ — виробничій коефіцієнт, що суттєво змінюється при зміні базових технологій (приблизно 25–35 років);

$X_1 > 0, X_2 > 0$ — капітал та праця;

P_1, P_2 — коефіцієнти еластичності об'єму виробництва по затратах капіталу та праці.

На основі аналізу коефіцієнтів еластичності у виробничій функції Кобба–Дугласа можливо виділити наступні різновиди цієї функції:

1) пропорційно зростаючу, коли $P_1 + P_2 = 1$;
2) непропорційно зростаючу, коли$P_1 + P_2 > 1$;
3) спадаючу, коли $P_1 + P_2 < 1$.

Припускаємо, що кожний фактор змінюється в часі у відповідності із дискретною моделлю Самуельсона-Хікса

$$X_i(n+1) = a_{i0} \cdot X_i(n) + a_{i1} \cdot X_i(n-1) + b_i, (i = 1, 2).$$

Етап 2. Збір вихідних даних вже виконано. Скористаємося звітами національної макроекономічної статистики, які представлені масивами даних за попередні 25 років:

```
W=  [51.7963;  46.0291;  43.5084;  39.5077;  39.5531;  39.1720;
     40.4927;  27.0953;  19.5906;  25.9708;  30.6603;  34.5110;
     43.0348;  59.1017;  76.4017;  98.9931;  129.971;  166.084;
     122.264;  152.492;  203.177;  217.014;  223.063;  206.366;
     176.587];

X1= [187.85185185;  159.32203389;  117.50380517;  100.89268387;
     100.62022372;  92.71109723;   88.98876404;   40.54611025;
     29.05361494;   48.54959118;   67.29859444;   69.19660925;
     89.76606281;   123.53002429;  153.39551130;  209.58405354;
     314.06758193;  423.53608633;  231.40225075;  344.86068218;
     469.06064516;  497.85615961;  471.35195825;  458.97401964;
     465.592683123];

X2= [66.678;  70.991;  68.489;  64.697;  63.925;
     63.013;  60.309;  58.616;  62.902;  64.973;
     64.896;  66.579;  67.658;  68.842;  69.936;
     70.218;  72.018;  72.249;  70.552;  70.950;
     71.953;  72.685;  72.359;  72.390;  71.911];
```

де `W`, `X1`= X_1 — вимірюються у млрд. гривень, `X2`= X_2 — вимірюється у тисячах чоловік.

Етап 3. Ідентифікація параметрів двофакторної математичної моделі виробничої функції (математична модель Кобба–Дугласа)

Для ідентифікації компонент вектора параметрів $V = [\ln A P_1 P_2]^T$ використаємо 24 виміри, а останній 25-й вимір залишимо для оцінки точності прогнозування:

Програма для розрахунку оцінок:

```
I=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];

W=  [51.7963;  46.0291;  43.5084;  39.5077;  39.5531;  39.1720;
     40.4927;  27.0953;  19.5906;  25.9708;  30.6603;  34.5110;
     43.0348;  59.1017;  76.4017;  98.9931;  129.971;  166.084;
     122.264;  152.492;  203.177;  217.014;  223.063;  206.366];
```

```
X1= [187.85185185;  159.32203389;  117.50380517;  100.89268387;
     100.62022372;  92.71109723;   88.98876404;   40.54611025;
     29.05361494;   48.54959118;   67.29859444;   69.19660925;
     89.76606281;   123.53002429;  153.39551130;  209.58405354;
     314.06758193;  423.53608633;  231.40225075;  344.86068218;
     469.06064516;  497.85615961;  471.35195825;  458.97401964];

X2= [66.678;  70.991;  68.489;  64.697;  63.925;
     63.013;  60.309;  58.616;  62.902;  64.973;
     64.896;  66.579;  67.658;  68.842;  69.936;
     70.218;  72.018;  72.249;  70.552;  70.950;
     71.953;  72.685;  72.359;  72.390];

B=[I log(X1) log(X2)];
V=[B'*B]∧-1*B'*log(W)
A=exp(V(1))
```

Лістинг

```
I=[1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1;1];

W= [51.7963;  46.0291;  43.5084;  39.5077;  39.5531;  39.1720;
    40.4927;  27.0953;  19.5906;  25.9708;  30.6603;  34.5110;
    43.0348;  59.1017;  76.4017;  98.9931;  129.971;  166.084;
    122.264;  152.492;  203.177;  217.014;  223.063;  206.366];

X1= [187.85185185;  159.32203389;  117.50380517;  100.89268387;
     100.62022372;  92.71109723;   88.98876404;   40.54611025;
     29.05361494;   48.54959118;   67.29859444;   69.19660925;
     89.76606281;   123.53002429;  153.39551130;  209.58405354;
     314.06758193;  423.53608633;  231.40225075;  344.86068218;
     469.06064516;  497.85615961;  471.35195825;  458.97401964];

X2= [66.678;  70.991;  68.489;  64.697;  63.925;
     63.013;  60.309;  58.616;  62.902;  64.973;
     64.896;  66.579;  67.658;  68.842;  69.936;
     70.218;  72.018;  72.249;  70.552;  70.950;
     71.953;  72.685;  72.359;  72.390];

B=[I log(X1) log(X2)];
V=[B'*B]∧-1*B'*log(W)
A=exp(V(1))
V = [-1.1039 0.8859 0.2060]^T
A = 0.3316
```

В результаті розрахунків отримаємо

$$\hat{V} = \left[\ln\{\hat{A}|\ |\hat{P}_1\hat{P}_2\right]^T = [-1.10390.88590.2060]T,$$

тобто, $\hat{A} = \exp(-1.1039) = 0.3316, \hat{P}_1 = 0.8859, \hat{P}_2 = 0.2060.$

Етап 4. Ідентифікація параметрів дискретної моделі Самуельсона–Хікса

$$X_i(n+1) = a_{i0} \cdot X_i(n) + a_{i1} \cdot X_i(n-1) + b_i, (i = 1, 2).$$

Для ідентифікації компонент вектора параметрів $S_i = [a_{i0} a_{i1} b_i]^T (i = 1, 2)$ використаємо 24 виміри, а останній 25-й вимір залишимо для оцінки точності прогнозування.

Формула для оцінювання параметрів має вигляд $S_i = \left(D^T \cdot D\right)^{-1} D^T \cdot \hat{X}_i \ (i = 1, 2)$.

Цій формулі відповідають оператори СКМ MATLAB:

`S1=[D'*D]∧-1*D'*vektorX1` та `S2=[D'*D]∧-1*D'*vektorX2`.

Програма обчислення оцінок (ідентифікації) параметрів дискретної математичної моделі фактору X_1:

```
X1=  [187.85185185;  159.32203389;  117.50380517;  100.89268387;
      100.62022372;  92.71109723;   88.98876404;   40.54611025;
      29.05361494;   48.54959118;   67.29859444;   69.19660925;
      89.76606281;   123.53002429;  153.39551130;  209.58405354;
      314.06758193;  423.53608633;  231.40225075;  344.86068218;
      469.06064516;  497.85615961;  471.35195825;  458.97401964];

for i=1:1:22
X1n1(i)=X1(i);
end
X1n1=X1n1';

for i=2:1:23
X1n2(i-1)=X1(i);
end
X1n2=X1n2';

for i=3:1:24
X1n3(i-2)=X1(i);
end
X1n3=X1n3';

D=[X1n2 X1n1 ones(22,1)];

vektorX1= X1n3;

S1=[D'*D]∧-1*D'*vektorX1.
```

Лістинг результатів ідентифікації

```
X1=  [187.85185185;  159.32203389;  117.50380517;  100.89268387;
      100.62022372;  92.71109723;   88.98876404;   40.54611025;
      29.05361494;   48.54959118;   67.29859444;   69.19660925;
      89.76606281;   123.53002429;  153.39551130;  209.58405354;
      314.06758193;  423.53608633;  231.40225075;  344.86068218;
      469.06064516;  497.85615961;  471.35195825;  458.97401964];

for i=1:1:22
X1n1(i)=X1(i);
end
```

```
X1n1=X1n1';

for i=2:1:23
X1n2(i-1)=X1(i);
end
X1n2=X1n2';

for i=3:1:24
X1n3(i-2)=X1(i);
end
X1n3=X1n3';

D=[X1n2 X1n1 ones(22,1)];
vektorX1= X1n3;
S1=[D'*D]∧-1*D'*vektorX1
S1 =[ 0.9377 0.0383 18.7497],
```

де $\hat{a}_{10} = 0.9377, \hat{a}_{11} = 0.0383, \hat{b}_1 = 18.7597$.

Програма обчислення оцінок (ідентифікації) параметрів дискретної математичної моделі фактору X_2:

X2=	[66.678;	70.991;	68.489;	64.697;	63.925;
	63.013;	60.309;	58.616;	62.902;	64.973;
	64.896;	66.579;	67.658;	68.842;	69.936;
	70.218;	72.018;	72.249;	70.552;	70.950;
	71.953;	72.685;	72.359;	72.390];	

```
for i=1:1:22
X2n1(i)=X2(i);
end
X2n1=X2n1';

for i=2:1:23
X2n2(i-1)=X2(i);
end
X2n2=X2n2';

for i=3:1:24
X2n3(i-2)=X2(i);
end
X2n3=X2n3';

D=[X2n2 X2n1 ones(22,1)];

vektorX2= X2n3;

S2=[D'*D]∧-1*D'*vektorX2.
```

Лістинг результатів ідентифікації

X2=	[66.678;	70.991;	68.489;	64.697;	63.925;
	63.013;	60.309;	58.616;	62.902;	64.973;
	64.896;	66.579;	67.658;	68.842;	69.936;
	70.218;	72.018;	72.249;	70.552;	70.950;
	71.953;	72.685;	72.359;	72.390];	

```
for i=1:1:22
X2n1(i)=X2(i);
end
X2n1=X2n1';

for i=2:1:23
X2n2(i-1)=X2(i);
end
X2n2=X2n2';

for i=3:1:24
X2n3(i-2)=X2(i);
end
X2n3=X2n3';

D=[X2n2 X2n1 ones(22,1)];
vektorX2= X2n3;
S2=[D'*D]∧-1*D'*vektorX2
S2 = [1.1387 -0.2556 7.9096],
```

де $\hat{a}_{20} = 1.1387$, $\hat{a}_{21} = -0.2556$, $\hat{b}_2 = 7.9096$.

Етап 5. Обчислення прогнозного значення факторів $\hat{X}_1(n+1)\hat{X}_2(n+1)$ із використанням ідентифікованих параметрів прогнозуючої часової математичної моделі.

Прогноз $\hat{X}_1(n+1)$:

1) формула для розрахунку

$$\hat{X}_1(n+1) = \hat{a}_{10} \cdot X_1(n) + \hat{a}_{11} \cdot X_1(n-1) + \hat{b}_1;$$

2) оператори СКМ MATLAB

```
S1 =[ 0.9377 0.0383 18.7497];
prognozX1=S1*[X1(24) X1(23) 1]'
```

Лістинг

```
X1=  [187.85185185;  159.32203389;  117.50380517;  100.89268387;
      100.62022372;  92.71109723;   88.98876404;   40.54611025;
      29.05361494;   48.54959118;   67.29859444;   69.19660925;
      89.76606281;   123.53002429;  153.39551130;  209.58405354;
      314.06758193;  423.53608633;  231.40225075;  344.86068218;
      469.06064516;  497.85615961;  471.35195825;  458.97401964];
S1 =[ 0.9377 0.0383 18.7497];
prognozX1=S1*[X1(24) X1(23) 1]'
prognozX1 = 467.1824.
```

Істине значення $X_1(25) = 465.5926$.

Прогноз $\hat{X}_2(n+1)$:

1) формула для розрахунку

$$\hat{X}_2(n+1) = \hat{a}_{20} \cdot X_2(n) + \hat{a}_{21} \cdot X_2(n-1) + \hat{b}_2;$$

2) оператори СКМ MATLAB

```
S2 = [1.1387 -0.2556 7.9096];
prognozX2=S2*[X2(24) X2(23) 1]'
```

Лістинг

X2=	[66.678;	70.991;	68.489;	64.697;	63.925;
	63.013;	60.309;	58.616;	62.902;	64.973;
	64.896;	66.579;	67.658;	68.842;	69.936;
	70.218;	72.018;	72.249;	70.552;	70.950;
	71.953;	72.685;	72.359;	72.390];	

```
S2 = [1.1387 -0.2556 7.9096];
prognozX2=S2*[X2(24) X2(23) 1]'
```

prognozX2 = 71.8451.

Істине значення $X_2(25) = 71.911$.

Етап 6. Обчислимо прогнозне значення вихідної змінної $\hat{W}(\hat{X}_1(n+1),\ \hat{X}_2(n+1))$ із використанням ідентифікованих параметрів прогнозуючої факторної математичної моделі $\hat{A} = \exp(-1.1039\,) = 0.3316$, $\hat{P}_1 = 0.8859$, $\hat{P}_2 = 0.2060$:

1) **формула для розрахунку**

$$\hat{W}(\hat{X}_1(25),\ \hat{X}_2(25)) = \hat{A} \cdot \hat{X}_1^{\hat{P}_1}(25) \cdot \hat{X}_2^{\hat{P}_2}(25) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \hat{W}(\hat{X}_1(25),\ \hat{X}_2(25)) = \exp(\ln \hat{A} + \hat{P}_1 \cdot \ln \hat{X}_1(25) + \hat{P}_2 \cdot \ln \hat{X}_2(25));$$

2) **оператори СКМ MATLAB**

```
prognozX1 = 467.1824
prognozX2 = 71.8451
prognozW=exp([ -1.1039 0.8859 0.2060]
      *[1 log(prognozX1) log( prognozX2)]')
```

Лістинг

```
prognozX1 = 467.1824
prognozX2 = 71.8451
prognozW=exp([ -1.1039 0.8859 0.2060]
      *[1 log(prognozX1) log( prognozX2)]')
prognozX1 = 467.1824;
prognozX2 = 71.8451;
prognozW = 185.3097.
```

Істине значення W дорівнює 176.587.

Етап 7. Висновок

1) На основі використання оцінок коефіцієнтів еластичності у виробничій функції Кобба–Дугласа ($\hat{P}_1 = 0.8859, \hat{P}_2 = 0.2060, \hat{P}_1 + \hat{P}_2 = 0.8859 + 0.2060 = 1.0919$), робимо висновок, що ця функція є пропорційно зростаючою, оскільки $\hat{P}_1 + \hat{P}_2 \approx 1$.
2) В конкретному прикладі відносна помилка часового прогнозування склала менше 1% від останнього виміряного значення відповідного фактору. Помилка факторного прогнозування склала приблизно 2% від останнього виміряного значення вихідної змінної.

Загальний висновок

1) Розрахунки підтвердили стійкість алгоритмів факторно-часового прогнозування.
2) Якщо зменшити кількість ретроспективних даних і використовувати для ідентифікації (оцінювання) параметрів прогнозуючої факторно-часової математичної моделі вихідні дані поруч зліва із поточним моментом часу, то можливо уникнути ефекту згладжування прогнозних значень та точніше ідентифікувати відхилення від усередненого тренду.
3) Прогнозуючі часові математичні моделі являють собою різницеві рівняння, тобто являють собою рекурентні співвідношення, які можна використовувати для прогнозування зміни факторів вперед на будь-яку кількість кроків. Це означає, що на таку ж кількість кроків у перед можна прогнозувати і вихідну змінну.
4) Наведений метод прогнозування можливо ефективно використовувати для прогнозування результатів економічної діяльності великих підприємств.

Література

[1] Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. 2000. Математические методы и модели в управлении. Москва : Дело, 440 с.
[2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва : Наука, 1966.
[3] Перша в Україні науково-практична конференція з економічного прогнозування в нових умовах за ініціативи Інституту економічного прогнозування НАН України.Економіст №5, травень 1998.
[4] Занг В.–Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории : пер. с англ. Москва : Мир, 1999. 335 с.
[5] Барро Р. Дж., Х. Сала-и–Мартин. Экономический рост : пер. с англ. Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2010. 824 с.
[6] Семенов А. С., Ивченко И. Ю. Об одном методе исследования неустойчивости динамической модели Самуэльсона-Хикса. *Причорноморські економічні студії* : зб. наук. праць. Вип. 32. 2018. С. 186–189.
[7] Лисенко О. І., Тачиніна О. М., Алексєєва І. В. 2017. Математичні методи моделювання та оптимізації. Ч. 1. Математичне програмування та дослідження операцій/ підручник. Київ: НАУ, 212 с.
[8] Лисенко О. І. Дєнєжкін М. М., Туровець Ю. С. 2021. Моделювання змін у часі макроекономічних показників ресурсного забезпечення на основі застосування математичної моделі Самуельсона-Хікса : зб. наук. праць. ЦНДІ ЗС України. Київ. № 1 (96). С. 250–259.

References

[1] Shikin E. V., Chkhartishvili A. G. 2000. Matematicheskie metody' i modeli v upravlenii. Moskva : Delo, 440 s.
[2] Gantmakher F. R. Teoriya matricz. Moskva : Nauka, 1966.
[3] Persha v Ukraini naukovo-praktychna konferentsiia z ekonomichnoho prohnozuvannia v novykh umovakh za initsiatyvy Instytutu ekonomichnoho prohnozuvannia NAN Ukrainy.Ekonomist №5, traven 1998.
[4] Zang V.–B. Sinergeticheskaya e'konomika. Vremya i peremeny' v nelinejnoj e'konomicheskoj teorii : per. s angl. Moskva : Mir, 1999. 335 s.
[5] Barro R. Dzh., Kh. Sala i–Martin. E'konomicheskij rost : per. s angl. Moskva : Binom. Laboratoriya znanij, 2010. 824 s.
[6] Semenov A. S., Ivchenko I. Yu. Ob odnom metode issledovaniya neustojchivosti dinamicheskoj modeli Samue'l'sona-Khiksa. Prychornomorski ekonomichni studii : zb. nauk. prats. Vyp. 32. 2018. S. 186–189.
[7] Lysenko O. I., Tachynina O. M., Aleksieieva I. V. 2017. Matematychni metody modeliuvannia ta optymizatsii. Ch. 1. Matematychne prohramuvannia ta doslidzhennia operatsii/ pidruchnyk. Kyiv: NAU, 212 s.
[8] Lysenko O. I. Dieniezhkin M. M., Turovets Yu. S. 2021. Modeliuvannia zmin u chasi makroekonomichnykh pokaznykiv resursnoho zabezpechennia na osnovi zastosuvannia matematychnoi modeli Samuelsona-Khiksa : zb. nauk. prats. TsNDI ZS Ukrainy. Kyiv. № 1 (96). S. 250–259.