Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

На правах рукопису

ЛІПІНСЬКА Алла Володимирівна

УДК 373.5.016:004:519.2

КОМП’ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВАНА МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИКИ В ОСНОВНІЙ ТА СТАРШІЙ ШКОЛІ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник:
Жалдак Мирослав Іванович,
дійсний член НАПН України,
доктор педагогічних наук,
професор

Київ – 2010

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Математизація науки в цілому, зростання ролі стохастичних методів у всіх галузях діяльності людини, реформи середньої та вищої освіти, дидактичні вимоги, складнощі в засвоєнні стохастичних уявлень, недостатня кількість досліджень у даній галузі, дають підстави стверджувати, що існує актуальна проблема розробки теоретичних основ і практичних шляхів побудови та проектування сучасної методичної системи стохастичної підготовки учнів в основній та старшій школі.

Необхідність вивчення елементів стохастики Б.В. Гнєденко [85-89] пояснював тим, що стохастичні поняття, методи та ідеї, що на них ґрунтуються, вже давно широко застосовують в різних галузях науки та в практичній діяльності. Сучасний етап розвитку шкільної освіти характеризується інтенсивним реформуванням існуючої системи навчання в усіх напрямках. Питання, пов'язані з навчанням елементів стохастики, знайшли своє відображення в працях багатьох вчених та педагогів, зокрема, А.А. Боровкова [34-35], Б.В. Гнєденка [85-89], М.І. Жалдака [122-133], А.М. Колмогорова [170-173], Г.О. Михаліна [122; 127; 130-133; 224], А. Плоцкі [254-258], Ю.В. Прохорова, Ю.А. Розанова [271], Б.А. Севастьянова [292] та ін.

Однак навчання елементів стохастики в основній та старшій школі в Україні досі не було представлено в цілісному вигляді, відчувається недостатня кількість методичних розробок, в яких би розглядали особливості підготовки учнів зі стохастики. Дослідження свідчать про низький рівень стохастичної культури вчителів математики та школярів та недостатню зацікавленість у вивченні елементів стохастики взагалі. Разом з тим можна стверджувати, що зараз в теорії педагогіки та методики навчання математики склалися певні передумови, врахування яких уможливлює підхід до вирішення даної проблеми.

Сучасне життя поставило перед суспільством першочергові завдання: особливу увагу приділити використанню комп'ютерної техніки в навчальному процесі, міжпредметним зв'язкам та зв'язкам науки з практикою та виробництвом. Бурхливий розвиток комп'ютерної техніки, прикладної та теоретичної математики спричинює відповідальність науково-педагогічних кадрів за реалізацію реформи загальної середньої освіти та професійної школи, за вирішення питань про те, що і як потрібно змінити, щоб привести систему освіти у відповідність до вимог сьогодення.

Вирішення цих завдань без сумніву повинне включати в себе вивчення елементів стохастики учнями як старшої, так і основної школи. Справді, майже всі галузі діяльності людини та суспільства в цілому нерозривно пов'язані з випадковими явищами, що підпорядковані певним закономірностям. Завдання якісної підготовки кваліфікованих фахівців, що поставлені в Національній Доктрині розвитку освіти в Україні у XXI ст. [245], та нагальні проблеми навчальних закладів, пов'язані зі складним періодом їх трансформації, вимагають подальшої орієнтації процесу навчання на використання комп'ютерної техніки та інформаційно-комунікаційних технологій для підвищення ефективності процесу навчання.

Не лише в науці, але і в житті з усіма його різноманітними проявами – телефонний зв'язок, військова справа, охорона здоров'я, страхування, промислове виробництво, сільське господарство, транспорт, демографія тощо – люди постійно мають справу з процесами та явищами, що підпорядковані стохастичним законам, з необхідністю враховувати ці закони та використовувати для розв'язування практичних проблем.

Елементи стохастики – відносно нова складова шкільної математичної освіти, в навчанні якої ще не напрацьовано достатньо досвіду; відчувається нестача методичної літератури для вчителів; існує необхідність популяризації знань елементів стохастики серед школярів; підготовки підручників, посібників і збірників задач.

На думку президента НАПН України В.Г. Кременя «введення стохастичної лінії сприятиме розвитку саме тих якостей мислення, що є необхідними для нормальної соціалізації молоді у ринкових умовах і відповідає світовим освітнім стандартам» [179].

Як показує практика, з елементами стохастики необхідно знайомити школярів при вивченні ряду предметів, а не лише на уроках математики. Міжпредметні зв'язки математики та фізики, математики та біології тощо, засновані на стохастичному підході, виявляються двосторонніми: з одного боку, в фізиці, біології є багато прикладів випадкових явищ і достатній вихідний матеріал для навчання елементів стохастики. З іншого боку, ці дисципліни не можуть обійтися без використання елементів стохастики для розкриття та вивчення своїх власних законів.

Дослідження, пов'язані з використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі в основній та старшій школі, започатковано в роботах Б.В. Гнєденка [85-89], Ю.В. Горошка [96-97; 125; 129], А.П. Єршова [118-120], М.І. Жалдака [122-133], В.І. Клочка [164-165], А.М. Колмогорова [170-173], Н.В. Морзе [231], Ю.І. Машбиця [215-219], В.М. Монахова [226-229], А.В. Пенькова [251], С.А. Ракова [275-277], Ю.В. Триуса [200; 323-326] та ін.

Проблеми використання систем комп'ютерної математики у навчанні математики в основній та старшій школі досліджували Ю.В. Горошко [96-97; 125; 129], М.І. Жалдак [122-133], О.Б. Жильцов [134-135], Т.В. Зайцева [140], В.І. Клочко [164-165], Т.П. Кобильник [166], Ю.Г. Лотюк [199], С.А. Раков [275-277], Ю.В. Триус [200; 323-326] та інші.

Значна та постійна увага проблемам навчання стохастики в основній та старшій школі приділялася і приділяється Б.В. Гнєденком [85-89], М.І. Жалдаком [122-133], А.М. Колмогоровим [170-173], Г.О. Михаліним [122; 127; 130-133; 224], О.Я. Хінчиним [85] та іншими.

Рівень стохастичної підготовки учнів повинен уможливлювати створення та впровадження нових комп'ютерно-орієнтованих педагогічних технологій навчального призначення, забезпечити учням можливість у подальшому краще засвоїти програму вищих навчальних закладів з теорії ймовірностей та математичної статистики, сформувати теоретичне підґрунтя для професійної діяльності.

Актуальність окреслених вище проблем, їх недостатня розробленість в теорії та практиці навчання в основній та старшій школі зумовили вибір теми дисертаційного дослідження «**Комп'ютерно-орієнтована методична система навчання елементів стохастики в основній та старшій школі».**

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконано відповідно до тематичного плану наукових досліджень Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, а також пов'язане з комплексною програмою «Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання природничих дисциплін в середніх загальноосвітніх та вищих педагогічних навчальних закладах» (код державної реєстрації 0101U002751), що входить до тематичного плану наукових досліджень Інституту інформатики Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Тему дисертації затверджено на засіданні Вченої Ради НПУ імені М.П. Драгоманова (протокол №7 від 29.01.2004) і погоджено в Міжвідомчій раді з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні (протокол №9 від 23.11.2004).

Об'єктом дослідження є процес навчання елементів стохастики в шкільному курсі математики в умовах інформатизації та реформування системи шкільної освіти.

Предметом дослідження є методична система навчання елементів стохастики учнів основної та старшої школи в умовах широкого використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

Мета дослідження полягає в розробці основних компонентів комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики в основній та старшій школі.

Гіпотеза дослідження. Навчання елементів стохастики (а не окремо елементів теорії ймовірностей і окремо елементів математичної статистики) з педагогічно виваженим використанням в навчальному процесі засобів сучасних ІКТ буде сприяти інтенсифікації процесу навчання та застосуванню основних понять і методів стохастики при розгляді проблем більшості предметів, що вивчають в школі. Наслідком цього буде підвищення навчально-пізнавальної активності учнів, покращення підготовки за умови, що вивчення елементів стохастики буде базуватися на комп'ютерно-орієнтованій методичній системі навчання.

У відповідності до мети та гіпотези дослідження були визначені такі **завдання дослідження**:

- вивчити та узагальнити вітчизняний і зарубіжний досвід навчання елементів стохастики в основній та старшій школі;
- з'ясувати рівень відображення в програмах середньої школи змістової лінії стохастики та визначити її наповнення, дослідити знання та вміння, якими повинні оволодіти школярі в умовах обов'язкового вивчення елементів стохастики;
- розробити основні компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання учнів елементів стохастики;
- дослідити внутріпредметні та міжпредметні зв'язки елементів стохастики з різними змістовими лініями математики (зокрема, геометрії, алгебри і початків аналізу), фізики, біології та ін.;
- провести експериментальну перевірку ефективності розроблених компонентів комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики в основній та старшій школі й дослідне впровадження підготовлених навчально-методичних матеріалів.

Для розв'язування поставлених завдань використано комплекс **методів дослідження**: *теоретичні методи:* системний аналіз філософської, педагогічної, психологічної, методичної літератури з теми дослідження (1.1 – 1.5 (тут і далі – підрозділи дисертації)); аналіз навчальних програм, навчальних посібників, методичних рекомендацій, існуючих програмних засобів для навчання елементів стохастики (1.3, 2.6); синтез, порівняння, моделювання, узагальнення (1.3, 1.5, 2.1-2.5); *діагностичні методи:* психолого-діагностичне анкетування, бесіди з вчителями та учнями (2.7); *обсерваційні методи:* аналіз продуктів педагогічної діяльності (дослідження діяльності вчителів і навчальної діяльності учнів) з метою вивчення сучасного стану проблеми використання ІКТ при навчанні стохастики (2.6); спостереження за навчальним процесом у школах (2.7); *емпіричні методи:* збирання емпіричного матеріалу (бесіди, анкетування), спостереження, вивчення й узагальнення передового педагогічного досвіду з метою вивчення стану проблеми на практиці (1.1, 2.7); *експериментальні методи:* статистичний аналіз результатів проведеного дослідження, який здійснено за допомогою методів кількісного опрацювання отриманих даних із забезпеченням вірогідності результатів експерименту (2.7); опис процесу дослідження та узагальнення результатів експерименту (2.7).

Названі методи взаємодоповнюють один одного і їх використання забезпечує можливість комплексного пізнання предмета дослідження.

Теоретико-методологічною основою дослідження є основні положення теорії пізнання та логіки науки, системного підходу та моделювання; нова парадигма освіти в умовах національного відродження держави, основні положення Законів України «Про Вищу освіту», «Про загальну середню освіту», «Про освіту», «Про Національну програму інформатизації», Державної програми «Вчитель», Державної національної програми «Освіта. Україна XXI століття», Національної доктрини розвитку освіти в Україні у XXI столітті. Психолого-педагогічну основу дослідження складають: концепція розвиваючого навчання, диференційованого навчання, теорія поетапного формування розумових дій.

Наукова новизна дослідження полягає:

- у розробленні та впровадженні в практику основних компонентів комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики;

- у виявленні внутріпредметних і міжпредметних зв'язків елементів стохастики з іншими розділами математики та іншими предметами, зокрема, геометрією, фізикою, біологією тощо;
- в уточненні змісту стохастичної підготовки учнів;
- у визначенні місця інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні елементів стохастики.

Практичне значення дослідження полягає:

- у впровадженні експериментальної програми з елементів стохастики в курс математики основної та старшої школи;
- в розробленні методичних рекомендацій стосовно педагогічно виваженого використання програмних засобів вчителями математики й учнями загальноосвітніх шкіл при навчанні елементів стохастики,
- у впровадженні сучасного понятійного апарату, вихідних принципів, положень і вимог навчання елементів стохастики в школі в сучасних умовах;
- у цілісності підходу до підготовки учнів зі стохастики в школі з урахуванням сучасних вимог;
- у розробленні диференційованої системи задач зі стохастики.

Особистий внесок здобувача полягає в обґрунтуванні доцільності та можливості навчання елементів стохастики в школі; у розробленні основних компонентів комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики в основній та старшій школі та відповідного навчально-методичного забезпечення; розробленні системи задач зі стохастики; ідеях щодо використання педагогічних програмних засобів у процесі навчання стохастики у межах дослідження; особистому впровадженні результатів дослідження в навчальний процес шкіл.

Обґрунтованість і вірогідність результатів дослідження забезпечується його науковими та методологічними основами; використанням методів дослідження, відповідних меті, гіпотезі та завданням;

системним аналізом теоретичного та емпіричного матеріалу; результатами проведеного педагогічного експерименту, опрацьованими за допомогою статистичних методів та впровадженням розроблених в ході дослідження компонентів комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики у навчальний процес, аналізом власного досвіду роботи на посадах вчителя школи та викладача університету.

Апробацію та впровадження результатів дослідження здійснено в середніх загальноосвітніх школах №248, №293 міста Києва. Результати дослідження доповідалися й обговорювалися на засіданнях Всеукраїнських науково-методичних семінарів з проблем методики навчання математики та інформатики при кафедрі математики, теорії та методики навчання математики та в Інституті інформатики НПУ імені М.П. Драгоманова, на педагогічних радах в школах №248 (довідка №34 від 2.03.2010), №293 (довідка №18 від 18.05.2010), в загальноосвітніх навчальних закладах Богуславського району Київської області (довідка №275 від 18.05.2010) та в Богуславському гуманітарному коледжі ім. І.С.Нечуя-Левицького (довідка №184 від 11.05.2010).

Результати дослідження були висвітлені в повідомленнях на міжнародній науково-технічній конференції «Проблеми підготовки та перепідготовки фахівців у сфері інформаційних технологій» (м. Київ-Севастополь, 2006, 2007 рр.); Всеукраїнській науково-практичній конференції «Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці» (м. Луганськ, 2006 р.); науковій конференції «Інформаційні технології в системі підготовки фахівців у вищій школі» (м. Київ, 2006 р.); на Всеукраїнському науково-методичному семінарі з питань використання засобів сучасних інформаційних технологій в навчальному процесі (м. Київ, НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007 р.); шляхом публікації результатів дослідження (7 статей у фахових виданнях).

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковано в 11 працях (всі є одноосібними). Серед них – 4 у збірниках наукових праць [185, 187, 188, 193], 3 – в науково-методичних журналах [186, 194, 195], 4 – тези та матеріали конференцій [189, 190, 191, 192].

Структура та обсяг дисертації. Робота складається зі вступу, двох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел з 379 найменувань, розміщених на 35 сторінках, додатків на 23 сторінках. Загальний обсяг дисертації 262 сторінки, з яких 201 сторінка основного тексту. Робота містить 44 таблиці та 51 рисунок.

РОЗДІЛ І
ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ПЕРЕДУМОВИ НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИКИ В СУЧАСНІЙ УКРАЇНСЬКІЙ ШКОЛІ

1.1. Психологічні основи навчання елементів стохастики в школі з використанням ІКТ

Мислення школяра, як показують дослідження психологів, зокрема С.Л. Рубінштейна [289], на першій стадії навчання носить наочно-образний характер. При оперуванні конкретним змістом (фігурами, моделями, знаками) процес мислення учнів протікає легше й успішніше, ніж при роботі з абстрактними поняттями, що є характерним для словесно-логічної форми мислення. Не останню роль у розвитку мислення відіграє використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі.

Мислення людини підпорядковане особливим закономірностям, які вивчає психологія. Можна сказати, що навчання людини елементів стохастики є за своєю суттю подвійним процесом: навчають стохастики та навчають мислити. Тому природно, що при цьому необхідно враховувати як фактори, пов'язані зі стохастикою (теореми, логіку доведень тощо), так і фактори, пов'язані з мисленням людини (характер і особливості розумової діяльності та всього, що впливає на розумовий і фізичний розвиток людини). Не враховувати їх означало б при вирішенні завдань навчання виключати з розгляду саму людину, яку навчають. У цій подвійності процесу навчання, де в один вузол пов'язано питання спеціальної науки та питання психології, і полягає вся складність проблем методики навчання та вся їх різноманітність.

Однак зараз в навчанні часто вбачають перед собою не стільки реального учня, яким він є, з його пам'яттю та знаннями, можливостями та інтересами, скільки говорять про те, яким учень повинен бути, що він повинен знати, що він повинен пам'ятати тощо. А між тим живе та вчиться не «уявний», а реальний учень, зі своїми проблемами та потребами, перевагами та недоліками, бажаннями та настроями. Як показує практика, саме ці психологічні фактори визначальним чином впливають на засвоєння навчального матеріалу.

Продуктивне мислення учня не постійне. В першу чергу воно залежить від того, як учень ставиться до навчання, чи цікавиться ним, чи розуміє його необхідність. Учні, як правило, засвоюють краще знання, отримані з бажанням, ніж знання, що насильно «втиснуті» у свідомість. Разом з тим один і той самий учень міркує швидко чи повільно, точно чи неточно, логічно чи нелогічно не лише в залежності від здібностей, але і в залежності від його фізичного та психічного стану, чи не стомлений, чи добре налаштований, чи спокійний, чи схвильований, чи впевнений у собі, який у нього настрій тощо [115, с.96].

Збільшення розумового навантаження на уроках математики змушує задумуватися над тим, як підтримувати інтерес учнів до предмету, що вивчається, та активність учнів протягом всього уроку. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні якраз і уможливлює створення ситуацій, що стимулюють інтерес і допитливість дитини протягом досить тривалого часу.

В школі використання ІКТ забезпечує можливість учню, якого навчають з використанням комп’ютера, самому обирати доступну йому швидкість отримання та засвоєння матеріалу. В цьому полягає головна перевага використання комп’ютера в процесі навчання. В залежності від повноти й обґрунтованості відповіді на контрольні питання може бути запропоновано необхідну підказку чи зміну темпу навчання.

Доцільно застосовувати інформаційно-комунікаційні технології у наступних випадках: тестування для перевірки якості засвоєння матеріалу, виконання тренувальних вправ для відпрацювання елементарних навичок і вмінь після вивчення теми, використання навчальних програм при роботі з учнями, що не виявляють особливого зацікавлення у вивченні математики, у яких застосування комп’ютера звичайно значно підвищує інтерес до процесу навчання, в режимі самонавчання, для унаочнення навчального матеріалу, для полегшення рутинних громіздких обчислень тощо.

Коливання в оцінці проблеми індивідуальних відмінностей в навчанні визначають, як відомо, вихідними методологічними установками спеціалістів. Значимою її вважають психологи, які пов'язують основні недоліки в пізнавальній діяльності школярів з їхніми індивідуальними особливостями. В цьому випадку шлях підвищення ефективності навчання вбачають в урахуванні цих особливостей [216, с.130].

Ю.І. Машбиць [215-219] виділяє три групи психолого-педагогічних проблем, що обумовлюють задачі ефективного використання комп'ютерів в навчальному процесі. Розглянемо їх стосовно навчання елементів стохастики в основній та старшій школі.

Перша група проблем пов'язана з розробкою теоретичних основ навчання: необхідність вирішення теоретичних проблем не всіма усвідомлена, досить часто в основі навчальних програм лежить особистий досвід вчителя, інтуїтивне уявлення та евристичні принципи, які є малоефективними. Це повною мірою стосується і стохастичної лінії, оскільки вона є відносно новою в шкільних програмах з математики і при її навчанні більшість вчителів орієнтуються на «ту стохастику», яку свого часу вони самі вивчали під час навчання у вищому навчальному закладі.

При аналізі проблем першої групи спочатку необхідно з'ясувати, яким вимогам повинна задовольняти теорія навчання.

Потрібне не лише засвоєння вже відомого в галузі навчання з комп'ютерною підтримкою, але і дослідження фундаментальних проблем отримання нових знань, пов'язаних зі специфікою психологічних механізмів навчального впливу, структури, способів управління навчальною діяльністю в умовах навчання з використанням комп'ютера.

Друга група проблем пов'язана з розробкою комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання, тобто методів, засобів і прийомів, які пов'язали б психологічні та педагогічні теорії з теорією та практикою навчання, уможливили б ефективне їх використання при вирішенні конкретних педагогічних задач, що виникають у навчальному процесі.

Серед великої кількості комп'ютерних програм (Excel, Mathcad, Matlab, DERIVE, GRAN1, Advanced Grapher, DG (динамічна геометрія) тощо), розроблених для розв'язування з використанням комп'ютера математичних задач різних типів і рівнів складності найдоцільнішими вважають програмні засоби, що розраховані на учнів середніх навчальних закладів, які лише почали вивчати математику. Їх використання, як правило, не потребує надто потужних комп'ютерів з великими об'ємами запам'ятовуючих пристроїв та швидкодією, високими вимогами до знань і умінь учнів з інформатики, комп'ютерної техніки, програмування, за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів загальноосвітніх шкіл. Серед названих програм найпридатнішою для навчання елементів стохастики є програма GRAN1 – досить проста у використанні, оснащена зручним інтерфейсом, максимально наближеним до найпопулярніших програм загального призначення (текстових і графічних редакторів, електронних таблиць, систем управління базами даних), контекстно-залежною допомогою.

У межах вказаної групи проблем виникає чимало специфічних завдань, пов'язаних з необхідністю уточнення способів використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі, педагогічно виваженого поєднання комп'ютерно-орієнтованих і традиційних технологій навчання, індивідуального навчання тощо.

Слід визначити, зокрема, педагогічно доцільний і виважений час роботи учнів за комп'ютером.

При розгляді другої групи проблем слід мати на увазі, що технологія навчання є ланкою, що пов'язує теорію навчання та його практичну реалізацію. Вона являє собою проекцію теорії навчання на діяльність вчителя та учнів [216, с.5].

До цієї групи слід віднести також проблеми визначення способів використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі, ролі вчителя в реалізації тієї чи іншої методичної системи навчання, і проблеми, що виникають при роботі учня за комп'ютером, а також особливості цієї роботи. Слід зауважити, що використання ІКТ привносить принципові зміни не лише в методи, форми, але і в зміст навчання, оскільки при їх використанні інакше відбувається процес навчання того чи іншого предмету.

Третя група проблем пов'язана з проектуванням комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання. Проектування слід розглядати як складову загальної дослідної стратегії, що передбачає вирішення питань теорії та технології проектування в комплексі з дослідженнями теорії та технології навчання з використанням інформаційно-комунікаційних технологій.

Проблеми, віднесені до третьої групи, без перебільшення можна вважати основною ланкою в інформатизації навчального процесу. Саме тут знаходять своє практичне застосування теорія та технологія навчання [216, с.6]. Також до психологічних проблем роботи учня за комп'ютером можна віднести:

а) змістові аспекти навчання,

б) організацію процесу навчання,

в) лінгвістичні аспекти (вибір мови, побудова текстів повідомлень, їх форма, розмір тощо),

г) модальність (тип подання повідомлень і відповідей учнів) [216, с.120].

В умовах використання комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання виникають якісно нові вимоги до вирішення основних проблем педагогіки, психології та дидактики.

Застосування ІКТ в процесі навчання уможливлює вирішення проблем диференціації та індивідуалізації навчання в умовах класно-урочної системи організації навчального процесу. Цього досягають здійсненням опосередкованого через комп'ютер індивідуального зворотного зв'язку учня з вчителем, який передбачив відповідні завдання в залежності від успіхів і типових помилок, що припускає окремий учень. Досить важливим при навчанні елементів стохастики є те, що використання комп'ютера звільняє учня від громіздких обчислень, виконання яких «ручними засобами» викликає негативне ставлення учнів до цього розділу математики. Крім того, є можливість вивчати матеріал наочніше, з використанням графіків, діаграм, таблиць, що завжди викликає підвищену зацікавленість учнів.

Всі групи описаних вище проблем пов'язані між собою.

Роль вчителя при використанні ІКТ не зменшується, а навпаки зростає за рахунок того, що вдається розв'язати набагато більше задач і розглянути різних питань, в зв'язку з чим у учнів може виникнути набагато більше запитань, які вони повинні з'ясувати разом з вчителем, вчитель при цьому повинен надавати набагато більше пояснень, ніж при традиційних методах навчання, інтенсифікується спілкування учнів і вчителя та учнів між собою, разом з тим роль вчителя при поточному контролі за ефективністю навчання кожного учня в більшості змінюється, він отримує можливість більше уваги приділяти індивідуальному навчанню. Учні привчаються до самостійності.

Важливим елементом навчання з використанням комп'ютера є така організація навчання, при якій є можливість стимулювати розвиток мислення. Розв'язування задач, що пов'язані з вирішенням проблемних ситуацій, повинні сприяти активному використанню отриманих знань при вирішенні різноманітних завдань в нових умовах.

На різних етапах розвитку комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання на передній план виступають різні проблеми. Сьогодні значної уваги вимагають не лише традиційні проблеми психології, педагогіки, дидактики, методики навчання, а й такі, як обґрунтування педагогічно виваженого та доцільного застосування сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, особливостей уваги учнів, засвоєння ними знань і вмінь, проблеми створення ефективних комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання, в межах яких вивчення та вирішення традиційних психологічних проблем виконує лише допоміжну функцію, тобто уможливлює уточнення ефективності тієї чи іншої навчальної системи, а не особливостей уваги чи мислення учнів в умовах використання комп’ютерно-орієнтованих систем навчання, тим більше, що ці особливості значною мірою визначають переваги чи недоліки доцільності використання в дослідженнях комп’ютерних систем навчального призначення [216, с.4].

Використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі має наступні переваги.

По-перше, використання комп’ютера розширює можливості подання навчального матеріалу. Застосовування кольору, графіки, анімації позитивно впливає на процес навчання.

По-друге, використання комп’ютера сприяє посиленню мотивації навчання (заохочення правильних відповідей учнів, що не завжди можна робити з різних причин при використанні традиційних технологій навчання); є можливість опрацювання повторно тих тем, які конкретний учень засвоїв на недостатньому рівні; відчувається певна новизна в такому навчанні, комп’ютерні програми обов’язково оснащені підказками, що надає учневі деяке відчуття впевненості, можливості звернутися за довідкою. Все це позитивно мотивує навчання. Використання комп’ютера уможливлює усунення важливих причин негативного ставлення до навчання – неуспіх, обумовлений значними прогалинами в знаннях, нерозумінням суті проблем.

По-третє, при використанні комп’ютера, можна активно залучати учнів до навчального процесу, оскільки далеко не всі учні дома опрацьовують теоретичний матеріал, окремі вже знають певні теми та розділи, інші взагалі не розуміють того, про що розповідає вчитель, треті «загубили нитку міркувань» вчителя, четверті відволіклися під час пояснення тощо. Досить важливою перевагою використання ІКТ є орієнтація на кожного учня особисто, а не на «середнього», як це зазвичай робиться в школі при традиційній класно-урочній системі, при якій часто навіть здібні учні втрачають інтерес до навчання.

По-четверте, є можливість розширити набори навчальних задач, які можна доповнювати, ускладнювати, комбінувати, інтегрувати.

По-п'яте, використання інформаційно-комунікаційних технологій уможливлює якісні зміни в управлінні навчально-пізнавальною діяльністю учнів та її контролюванні, використання різноманітних тестових завдань сприяє тому, що опитування проводиться з різних тем, на різних рівнях складності. І учні вже впевнені, що вчитель об'єктивно виставив їм ту чи іншу оцінку, оскільки отримують її «від комп'ютера», який є безпристрасним.

Нарешті, є можливість «зняти психологічний бар'єр», пов'язаний з острахом не розв'язати задачу перед аудиторією. Проходить відчуття невпевненості, оскільки більшість задач учень здатний розв'язати, адже будь-яка комп'ютерна програма навчального призначення оснащена досить широкою системою підказок та допомогою. Результати видно одразу, і до того ж кожен учень має можливість отримувати оцінку на кожному уроці.

А.П. Єршов [118, с.20-21], С.Клепко [162, с.36-37] та Ю.І. Машбиць [218, с.51-52] зазначають ще деякі можливості підвищення ефективності процесу навчання з використанням ІКТ:

- новизну роботи за комп'ютером, що викликає в учнів підвищений інтерес до роботи з ним і посилює мотивацію учіння;
- можливість інтеграції знань, що уможливлює здійснення ефективного взаємопроникнення навчальних предметів;
- використання комп'ютера учнями відкриває їм доступ до раніше недоступних відомостей, уможливлює їх отримання негайно;
- забезпечується активне включення учнів у навчальний процес, з'являється можливість зосереджувати увагу на найважливіших аспектах матеріалу, що вивчається;
- використання комп'ютера уможливлює забезпечення різного ступеня детермінації управління навчальною діяльністю, передавання управління самим учням, здійснення гнучкішої стратегії навчання.

Дійсна індивідуалізація навчання з комп'ютерною підтримкою може бути досягнута лише при рефлексивному управлінні навчальною діяльністю. Таке управління неможливо здійснити без врахування індивідуальних особливостей учня, тому на сьогодні основними вимогами до системи індивідуального навчання є:

- валідність – необхідно враховувати ті індивідуальні особливості учня, які є суттєвими для досягнення намічених навчальних цілей, причому не лише найближчих, але й віддалених;
- адекватність – необхідність розрізняти стійкі та ситуативні індивідуальні особливості кожного учня;
- динамічність – за мірою накопичення даних про учня необхідно уточнювати особливості роботи з ним [216, с.132].

Суттєвими умовами ефективності використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі В.А. Борисов [33, с.103-104] називає: відповідність мети розвитку особистості учня (інтелектуальна, емоційна, фізична сторони); можливості для розвитку, орієнтація на нові досягнення в науці та техніці; сучасність змісту; суспільно корисна спрямованість діяльності школярів; сполучення індивідуальних, групових і колективних форм; відповідність видів роботи та вікових інтересів; наявність перспектив.

І.Д. Демакова та М.С. Жамкочьян [106, с.16-17] виділяють чотири основні групи умов ефективності використання ІКТ в навчально-виховному процесі:

1) забезпечення розвитку самостійності школярів: зручний інтерфейс програм, наявність остаточного результату, можливість обрати мову навчання, результати на проміжних стадіях навчання;
2) забезпечення самореалізації;
3) забезпечення формування пізнавальної та соціальної активності як провідних особистісних характеристик учня в умовах використання

інформаційно-комунікаційних технологій; варіативність програм, доступ до баз даних;

4) забезпечення гармонійного розвитку особистості учня; співвідношення образного та логічного компонентів, емоційного та раціонального в організації комп'ютеризованого навчання, рівня пізнавальної потреби та можливостей її реалізації.

Зміст математичних дисциплін характеризують їх особливості, що належним чином впливає і на їх місце в структурі навчального процесу, і на психологічне забезпечення засвоєння математичних знань, зокрема стохастики [296]:

- високий рівень узагальнення та абстрагування,
- тісний взаємозв'язок між усіма елементами знань,
- значна кількість термінів і понять,
- домінування дедуктивних умовиводів, логічного обґрунтування, постійне включення аналітико-синтетичних функцій мислення,
- загальне домінування розвивальних функцій над освітніми під час навчання елементів стохастики,
- велика роль математичних знань і навичок для успішного подальшого просування в навчанні різних дисциплін, зокрема, інформатики, фізики, біології, економіки тощо.

Звісно, в умовах колективного навчання реалізувати повністю розвивальні можливості навчання елементів стохастики є непростою справою, оскільки кожен учень за своїми здібностями є неповторним і вимагає індивідуального підходу у навчанні, з іншого боку учень найкраще розвивається в інтелектуальному середовищі, яке формується під час навчання певної групи учнів. Отже, поєднання індивідуальних і групових форм навчання допоможе якнайкраще досягти навчально-розвивальних цілей.

Складні математичні конструкції, якими є поняття та їх властивості, можна вивчати за різними ступенями складності [296].

Перший ступінь – на рівні терміну, тобто вводять новий термін, яким називають дане поняття, його етимологічну сутність, а зміст його пояснюють на конкретних прикладах.

Другий ступінь – це, коли роботу над терміном поєднують з визначенням суттєвих ознак поняття, але саме означення не формулюють.

Третій ступінь засвоєння поняття полягає в тому, що на основі розуміння та встановлення суттєвих ознак даного поняття строго означають поняття, причому для глибокого засвоєння використовують триєдину форму його подання: словесну, аналітичну, графічну.

Всі ці особливості повною мірою є застосовними до стохастики, адже деякі учні не розуміють, де елементи стохастики можна застосувати, навіщо вивчати відповідні поняття й означення. Тому саме при їх навчанні важливо реалізувати всі переваги навчання з використанням інформаційно-комунікаційних технологій та розв’язування за їх допомогою практично значимих задач і вправ.

1.2. Історія становлення стохастики та навчання елементів стохастики у школі

Розвиток стохастичних ідей розпочався за найдавніших часів. Його дослідженням займалися багато видатних вчених, які виділили в цьому розвитку п’ять основних періодів.

Кожен з цих періодів визначають обсягом накопичених знань зі стохастики, що знаходяться в тісному зв’язку з практичними потребами та рівнем розвитку науки в певну історичну епоху. Розглянемо їх детальніше.

1. Передісторія розвитку теорії ймовірностей (від найдавніших часів до кінця XVI ст.). Елементарні задачі, які пізніше були віднесені до стохастики, ставили та розв’язували ще в часи стародавніх Єгипту та Риму. До того, як випадкові події стали предметом вивчення математики, в Давньому Вавилоні та Греції вважали, що вони залежать від волі богів.

Збирання статистичних даних, що стосуються населення, проводили давно. Відомо, що в 2238 році до нашої ери в Китаї при імператорі Яо було проведено перепис населення. Переписування населення проводили і в стародавніх Єгипті, Ірані, Римській імперії; відомі переписи у Київській Русі. Вже в середні віки вимірювання різноманітних характеристик тих чи інших об'єктів навколишнього світу стали розглядати як метод наукового пізнання.

При переписі населення в Давньому Китаї, Ірані, Римській імперії було помічено, що незалежно від того, що кількість дівчаток і хлопчиків в окремій сім'ї може дуже різнитися, взагалі в суспільстві це співвідношення майже вирівнюється, тобто кількість дівчаток і хлопчиків майже однакові [89].

В цей період стохастичні ідеї ще не отримують статусу науки, але відбувається активне накопичення фактичного матеріалу. Такі математики як Лука Пачолі (1445-1514), Н. Тарталья (1500-1557), Д. Кардано (1501-1576) формулюють деякі ймовірнісні задачі, пов'язані з азартними іграми та страхуванням, а також роблять спроби їх розв'язування [163].

Цей період закінчується працями Д.Кардано «Книга про гру в кості», Н.Тарталья «Загальний трактат про число та міру», Г.Галілея «Про випадання очок при грі у кості» та ін. У цих працях вже фігурує поняття ймовірності, використовують і теорему про ймовірність добутку незалежних подій, висловлюють деякі міркування щодо так званого закону великих чисел [203].

І сьогодні є актуальним афоризм Г. Галілея (1564-1642): «Вимірюй все, що вимірюється, й зроби невимірне вимірним» [342].

Таким чином вже у XVI ст. були зроблені перші спроби розв'язувати задачі ймовірнісного характеру [89].

2. Період формування перших наукових ймовірнісних принципів (XVII ст.). Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності серед масових випадкових явищ, тобто явищ, прояви яких не можна передбачити заздалегідь. Зародження цієї науки відносять до середини XVII ст. Історично вона виникла з потреб розв'язування задач, пов'язаних з поширеними в ту епоху азартними іграми, в яких, як відомо, велику роль відіграє випадок.

Вже з кінця XVII ст. безпосередньо практичне застосування ймовірнісних методів знайшло відображення в страховій справі [330].

Означений період пов’язаний з іменами таких видатних вчених, як П. Ферма (1601-1665), Х. Гюйгенс (1629-1695), Б. Паскаль (1623-1662), Я. Бернуллі (1654-1705) та інші, які заклали науковий фундамент теорії ймовірностей та встановили нові можливості для її застосування та напрямки розвитку. Були сформовані певні ймовірнісні поняття, теореми та закони (математичне сподівання, теореми про ймовірності суми та добутку подій, поняття залежних та незалежних подій). Також в цей же період було відкрито найпростіший варіант закону великих чисел – закон Я. Бернуллі та ін. [163]. Я.Бернуллі написав книгу «Мистецтво припущень», де, зокрема, наводить так звані біноміальний розподіл ймовірностей та закон великих чисел. В цьому ж трактаті з’явилося вперше класичне означення ймовірності (в недосконалому вигляді) [358].

Гюйгенс видав у 1657 році перший трактат з теорії ймовірностей «Про розрахунки в азартних іграх». Важко не погодитися зі словами Гюйгенса про азартні ігри: «Я вважаю, що при уважному вивченні предмету читач помітить, що має справу не лише з грою, але й що тут закладено основи дуже цікавої та глибокої теорії», оскільки на сьогодні відомо дуже багато прикладів застосування стохастики до теорії азартних ігор [89].

Наступні кроки у розвитку теорії ймовірностей та математичної статистики пов’язані з іменами голландського математика Я. де Вітта (1625-1672) та англійського математика Е. Галлея (1656-1742), які переймалися питаннями страхування та склали перші таблиці народжуваності та смертності відповідно у 1671 та 1693 роках [203].

Більшість дослідників, зокрема Г. Крамер [178], вважають, що сучасна стохастика бере свій початок з відомого листування Б.Паскаля і П. Ферма у другій половині XVII ст. В своєму листуванні вони дійшли висновку, що задачу оцінювання щасливих ставок в азартних іграх можна було б звести до задач математичної теорії комбінацій і розміщень. Від цього листування до наших часів «дійшли» чотири листи П.Ферма (без дати, 9 серпня, 29 серпня, 25 вересня 1654 року) та три листи Б.Паскаля (29 липня, 24 серпня, 27 жовтня 1654 року). Перший лист Б.Паскаля, на жаль, було втрачено. Поштовхом до появи інтересу Б.Паскаля були його розмови з придворним французького королівського двору – шевальє де Мере (1607-1648), який поцікавився у Б. Паскаля: «Скільки разів треба підкинути 2 гральні кості, щоб кількість випадків випадання хоча б один раз двох шісток була більша, ніж кількість випадків, коли при одному підкиданні не з'являються дві шістки одночасно? Як розділити ставку між гравцями, якщо вони припинили гру, не набравши необхідної для виграшу кількості очок?»

Класичне означення ймовірності було підготовлене дослідженнями Джона Граунта (1620-1674) і Уільяма Петті (1623-1687), результати яких переконливо показали переваги поняття відносної частоти перед поняттям абсолютної частоти появи події в серії випробувань [358].

Дослідження Д. Граунта, У. Петті, які вивчали демографічні процеси, одночасно закладаючи основи математичної статистики мали значний вплив на розвиток поняття ймовірності. Цими дослідженнями фактично було завершено другий етап розвитку теорії ймовірностей, в якому саме поняття ймовірності так і не було введено [89].

3. Період виникнення теорії ймовірностей як науки (з початку XVII ст. до першої чверті XIX ст.). Означений період розвитку теорії ймовірностей характеризують справді науковими досягненнями: доведення перших граничних теорем; винайдення методу найменших квадратів; формули Т. Байєса (1702-1764); задачі Ж. де Бюффона (1707-1788) та ін.

П.Лаплас видав у 1812 році монументальну працю «Аналітична теорія ймовірностей», а у 1814 році – популярну книгу «Філософське дослідження відносно ймовірностей». П. Лаплас першим ввів поняття «класичної ймовірності». У своїх працях він докладно розглядав азартні ігри, «геометричну ймовірність», теорему Бернуллі та її зв'язок з нормальним розподілом ймовірностей, теорію найменших квадратів тощо. Слід підкреслити, що тільки праці П.Лапласа уможливили широке застосування науково обґрунтованих методів теорії ймовірностей. Більше того, багато пізніших результатів, нібито відкритих іншими математиками, можна знайти саме у працях П.Лапласа [203].

Однак стохастичне дослідження не було тільки описовим. Воно включало також висновки. Наприклад, було необхідно з'ясувати властивості таких величин, як середнє значення та дисперсія, щоб оцінити співвідношення між цими величинами та досліджуваним набором даних. Аналогічна, але складніша задача виникає при перевірці гіпотез, що виявляють, наприклад, випадки, коли коефіцієнт кореляції значно відрізняється від нуля. Перевірка гіпотез вимагала відповідної статистичної теорії, і така теорія була розвинута з теорії ймовірностей П. Лапласа. Застосування теорії П. Лапласа в задачах статистичного виведення призвело до ряду складних проблем, що виявили недосконалість лапласівського способу приписування ймовірностей на апріорній основі. Для багатьох стало очевидним, що метод П. Лапласа позбавлено строгості, і тому була прийнята спроба знайти об'єктивніший метод приписування ймовірностей подіям. Завдяки роботам К. Пірсона, Р. Фішера, Ю. Неймана ця спроба призвела до виникнення школи статистичної ортодоксії, що заснована на частотній інтерпретації ймовірності [115, с.46].

Під впливом П. Лапласа відомий бельгійський статистик А. Кетле (1796-1874) вважав математичними ймовірностями міру схильності до злочинів, до одруження тощо, а в якості основної задачі дослідження статистики висував виявлення характеру «середньої людини». В цілому кількість робіт, присвячених необґрунтованим застосуванням стохастики до життя суспільства, зростає. Це призвело до того, що в середині XIX ст. означена наука зайшла майже в глухий кут, оскільки не були коректно з'ясовані галузі та межі застосування стохастики; навіть почала поширюватися думка, що означена наука взагалі не має ніякого відношення ні до природознавства, ні до математики [163].

Л. Ейлер зробив значний внесок у застосування теорії ймовірностей в демографії. Він фактично започаткував основи сучасної демографії [303].

Серед перших книг з теорії ймовірностей доцільно також відмітити «Вчення про випадок», яку написав у 1716 році французький математик Абрахам де Муавр (1667-1754). У 1733 році А. де Муавр знайшов функцію нормального розподілу як наближення біноміального розподілу.

О. Коші (1789-1857) вивчав статистику фізики, проблему про збіжність розподілу ймовірностей нормованих і центрованих сум до нормального розподілу при необмеженому збільшенні кількості доданків [89].

Отже, якщо на початку виникнення теорії ймовірностей вивчали задачі, що стосувалися ігор і лотерей, то з плином часу та з розвитком природознавства та техніки, галузі застосування теорії ймовірностей ставали все ширшими та серйознішими [330].

Для всього XVIII та початку XIX ст. характерний бурхливий розвиток теорії ймовірностей і захоплюються нею скрізь. Але приблизно в 20-30-ті роки XIX ст. в Західній Європі це захоплення змінилося розчаруванням та скептицизмом, на теорію ймовірностей почали дивитися як на науку сумнівну, навряд чи гідну серйозного вивчення [334].

4. Період найважливіших наукових досягнень (з другої чверті XIX ст. – до початку XX ст.). Специфіка теорії ймовірностей – тісний зв’язок з суспільною практикою, рушієм розвитку теорії ймовірностей були не так внутрішні проблеми науки, як зовнішні чинники та практичні задачі. Так, наприклад, стимулом до розвитку теорії ймовірностей в XIX ст. слугували проблеми створення єдиної теорії похибок спостережень і вимірювань (астрономія, фізика, геодезія), теорії стрільби, демографії.

Розвиток статистичної механіки поруч зі стохастикою та теоретичною фізикою поклав початок тривалому та дуже плідному взаємопроникненню фізичної та математичної теорій. Дещо пізніше розвиток генетики та теорії наслідування Г. Менделя дали значний поштовх математичному розвитку стохастики, оскільки по суті своїй ці проблеми виявилися стохастичними.

У фундаментальній праці В.Я. Буняковського «Основи математичної теорії ймовірностей» окрім суто математичних задач була розв'язана також задача стосовно формування російської термінології, яка залишилася майже незмінною до наших часів.

Праці М.В. Остроградського з теорії ймовірностей були присвячені розв'язуванню важливих практичних задач. Вчений стверджував: «необхідно теорію ймовірностей не лише викладати, як науку абстрактну, а й переходити якомога частіше до різноманітних її застосувань».

Четвертий період розвитку теорії ймовірностей було ознаменовано тріумфом Петербурзької математичної школи, провідна роль в якій належить П.Л. Чебишову (1821-1894), а також його учням, зокрема А.А. Маркову (1856-1922), А.М. Ляпунову (1857-1918), Г.Ф. Вороному (1868-1908) та ін.

Основних питань, якими займався П.Л. Чебишов в теорії ймовірностей, було два: закон великих чисел і гранична теорема для сум незалежних випадкових величин. Це були центральні питання теорії ймовірностей. Від їх розв'язання залежав подальший шлях розвитку теорії ймовірностей. Наукові дослідження з цих питань продовжив учень П.Л. Чебишова – А.А. Марков, а далі й А.М. Ляпунов, який, не принижуючи досягнень попередників, вважав, що їх висновки потребують доповнень через свою складність та громіздкість. А.М. Ляпунову з цих центральних питань теорії ймовірностей вдалося отримати загальніші результати, ніж П.Л. Чебишову та А.А. Маркову. Роль П.Л. Чебишова в четвертий період розвитку теорії ймовірностей підкреслював О.Я. Хінчин: починаючи з другої половини XIX сторіччя Росія була «єдиною країною, в якій математичні основи теорії ймовірностей культивували з тією серйозністю, якої заслуговувала ця наука за своєю видатною роллю в природознавстві та техніці. Цим своїм виключним положенням російська теорія ймовірностей повністю зобов'язана роботам П.Л. Чебишова» [89].

На думку видатного російського математика А.М. Колмогорова (1903-1987) завдяки П.Л. Чебишову була створена російська математична школа, яка стала найкращою в світі у багатьох розділах математики, зокрема й у теорії ймовірностей [171].

Книга А.А. Маркова «Числення ймовірностей», перше видання якої відбулося у 1900 році, а четверте – у 1924 році, протягом багатьох років була найкращою серед тих, за якими навчалися російські математики. У цій книзі, зокрема, було розкрито, у якому розумінні статистична ймовірність $P_n^*(A)$ близька до ймовірності $P(A)$ при великих n: ймовірність значного відхилення $P_n^*(A)$ від $P(A)$ є близькою до нуля, проте це не означає, що значні відхилення неможливі при великих n. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} P_n^*(A) \neq P(A)$ у класичному розумінні границі послідовності [213].

Але при всій своїй прогресивності Петербурзькій школі була властива деяка обмеженість: П.Л. Чебишов та його учні часто холодно та скептично ставилися до важливих досягнень західноєвропейських математиків цього періоду, таких як А.Кетле, Ж.Б'єнеме (1796-1878), Ф.Гальтон (1822-1911), К.Пірсон (1857-1936) та А.Пуанкаре (1854-1912), що дещо гальмувало розвиток науки [163].

Величезні досягнення у теорії ймовірностей майже не застосовують у математичній статистиці наприкінці XIX ст. Це, зокрема, видно з важливих праць бельгійського математика А.Кетле та англійських математиків Ф.Гальтона та К.Пірсона. Наприклад, К.Пірсон запропонував групу розподілів, використання яких уможливлює апроксимацію різноманітних неперервних розподілів, що зустрічаються і в практичному аспекті [89].

Наприкінці XIX ст. французький математик Ж. Бертран (1822-1900) навів ряд парадоксів, пов'язаних з теорією ймовірностей, а видатний французький математик А.Пуанкаре узагальнив ці парадокси, які підкреслювали нечіткість та неточність деяких означень понять теорії ймовірностей, а отже перед науковцями постала необхідність відповідних уточнень. Зробити це стало можливим завдяки аксіоматичному методу, який на початку XX ст. пронизує багато галузей математики [203].

5. Період аксіоматичної побудови теорії ймовірностей (початок XX ст.). Розвиток стохастичних ідей на початку XX ст. «наштовхнувся» на об'єктивну необхідність чіткішого та строгого ставлення до основних понять теорії ймовірностей. Постала необхідність виділення первинних понять, а також установлення логічності, несуперечливості та послідовності висновків. Тобто назріли передумови створення аксіоматичних основ теорії ймовірностей. Необхідність аксіоматичного методу можна розглядати в двох аспектах: зовнішньому та внутрішньому. Зовнішній аспект полягає в тому, що поширення набули науково необґрунтовані, хибні стохастичні висновки та їх застосування.

Яскравим прикладом зазначеного є книги, публікації та виступи ректора Московського університету з 1883 року, а з 1915 року члена Ради Міністерства народної освіти Росії П.А. Некрасова (1853-1924). Проти його поглядів на теорію ймовірностей, виступали А.М. Ляпунов, А.А. Марков, В.А. Стєклов та інші вчені того періоду [212].

У 10-20-х роках XX ст. характер досліджень у теорії ймовірностей багато в чому визначився ідеями теорії множин і теорії функцій. Виявилося, що можна встановити глибокі аналогії між основними поняттями теорії множин і метричної теорії функцій, з одного боку, і основних понять теорії ймовірностей – з іншого. Так, були встановлені аналогії між мірою множини та ймовірністю події, інтегралом і математичним сподіванням.

Вперше такі ідеї стали проникати в теорію ймовірностей завдяки французькому математику Емілю Борелю (1871-1956), починаючи з 1905 року. На базі цих ідей польський математик А.Ломницький (1881-1941) побудував варіант теоретико-множинної аксіоматики теорії ймовірностей. У 1925 році з'явилася ґрунтовна книга Поля Леві «Числення ймовірностей». У ній зроблено спробу відійти від традиційної системи подання матеріалу. У цій книзі теорія ймовірностей пов'язана з теорією множин і теорією міри, хоча й без посилань на статтю А. Ломницького, яку було опубліковано на два роки раніше [358].

У своїй книзі «Ймовірність та вірогідність» (1950 рік) Е. Борель підіймає досить принципові та важливі питання теорії ймовірностей, які не містять ніяких необґрунтованих застосувань, оскільки вже в цей час теорія ймовірностей стала повноправною математичною дисципліною [163].

Перші кроки в побудові аксіоматичних основ теорії ймовірностей зробив Д. Гільберт (1862-1943). У 1900 році він відніс створення аксіоматики теорії ймовірностей до однієї з нерозв'язних проблем. Р. Мізес (1883-1958) побудував підхід до побудови теорії ймовірностей на основі статистичних частот (його вважають засновником частотної концепції в теорії ймовірностей).

В кінці 20-х – початку 30-х років XX ст. розвиток фізики, теорії зв'язку й інших галузей інженерної справи призвів до необхідності створення математичних методів, які б уможливили вивчення випадкових функцій від одного або кількох аргументів.

В метеорології потрібно було вивчати зміну швидкості та напрямку вітру в часі та в просторі. В іхтіології переймалися питанням про щільність мікроорганізмів в шарі води та в часі. В теорії телефонного зв'язку слід було встановити закономірності утворення черг на з'єднання та зміну тривалості очікування абонентом з'єднання в залежності від завантаження мережі. В фізиці вивчали процеси дифузії як процеси проникнення молекул з двох чи кількох середовищ. З позицій теорії ймовірностей дифузію вивчав М.Планк (1858-1947) [89].

На початку XX ст. у США й у всіх західноєвропейських країнах виникли урядові статистичні бюро, які проводили переписування населення та готували результати їх опрацювання до публікації.

Ставало неможливим користуватися невизначеними поняттями та здійснювати важливі наукові та практичні розрахунки без строгої математичної теорії. І така теорія була створена значною мірою завдяки зусиллям А.М. Колмогорова (1903-1987), О.Я. Хінчина (1894-1959), Є.Є. Слуцького (1880-1948) та інших математиків. Глибокі теоретико-функціональні основи для побудови теорії ймовірностей закладені А.М. Колмогоровим в його знаменитій монографії «Основні поняття теорії ймовірностей» [173].

Завдяки аксіоматиці А.М. Колмогорова, з наукових досліджень якого фактично почала своє існування московська школа теорії ймовірностей, математична статистика та теорія ймовірностей остаточно набули статусу математичних дисциплін.

В означеній школі, починаючи з 20-х років XX ст., характер досліджень з теорії ймовірностей в багатьох випадках визначався ідеями теорії множин та теорії функцій. В результаті цих досліджень було виявлено, що між основними поняттями теорії ймовірностей та між основними поняттями теорії множин та теорії функцій можливо встановити певні аналогії. Причому, за словами Б.В. Гнєденка, ці аналогії між настільки, здавалося б, різними галузями науки уможливили інше висвітлення логічних основ теорії ймовірностей, збагачення її змісту новими постановками задач і методами досліджень, а також доведення до логічного завершення розв'язування «класичних задач».

Справді, саме завдяки застосуванню в теорії ймовірностей теоретико-множинних методів А.М. Колмогоровим у 1926 році була доведена теорема, якою була розв'язана одна з центральних проблем теорії ймовірностей – проблема закону великих чисел.

А у 1933 році з'явилася книга А.М. Колмогорова «Основні поняття теорії ймовірностей» [173], яка містила глибокий аналіз вище зазначених аналогій: між мірою множин та ймовірністю подій; інтегралом та математичним сподіванням; ортогональністю функцій та незалежністю випадкових величин, а також шість аксіом теорії ймовірностей, які зараз відомі будь-якому фахівцеві з теорії ймовірностей і навіть початківцю в різноманітних їх інтерпретаціях. Різні теореми про ймовірність були зведені

А.М. Колмогоровим в єдину аксіоматичну систему, яка і складає основу сучасної стохастики. В своїх роботах [170-173] він відмічав, що стохастика посідає в ряді наук особливе становище, оскільки випадкові явища, що припускають оцінку їх ймовірності, можна зустріти як в галузі механічних, фізичних, хімічних, так і біологічних, і соціальних явищ. В зв'язку з цим стохастика застосовна майже до будь-якої галузі реального світу. Але її не можна віднести до «чистої» математики, оскільки основні її поняття не належать до неї. Широка застосовність стохастичних моделей[1] та методів забезпечує особливу привабливість стохастики, хоча і має певні складності при її використанні. Саме на цьому етапі теорія ймовірностей від напівмістичних міркувань 20-х років перейшла в сучасний стан процвітання.

За останні 90 років теорія ймовірностей перетворилася у струнку математичну дисципліну з власними проблемами та методами доведення [334]. Великі досягнення у теорії ймовірностей та математичної статистики на цьому етапі мали також російські математики О.Я.Хінчин, Є.Є.Слуцький, Б.В. Гнєденко та багато інших, а також українські математики Й.І. Гіхман (1918-1985), Ю.М. Єрмольєв (1936), І.М. Коваленко (1935), В.С. Королюк (1925), В.С. Михалевич (1930-1994), А.В. Скороход (1930), А.Ф.Турбін (1940), М.Й. Ядренко (1932-2005) та інші [122, с.6].

У 1938 році, коли О.Я. Хінчин став керівником фізико-математичної секції навчально-методичної ради та кабінету математики, він зосередив свою увагу на наступній проблемі: включення в шкільну програму елементів теорії ймовірностей. Важливість цієї проблеми полягає в тому, що для сучасної науки та більшості напрямків практичної діяльності зараз характерний стохастичний підхід. Якщо говорити про фізику, хімію, біологію, екологію, то в них стохастичні концепції стали домінуючими. Така ж ситуація склалася і в інших галузях знань. Створюється таке враження, що маса людей, в тому числі далеких від науки та її досліджень, потребує знання

---

[1] *Стохастична модель* — математична модель, в якій параметри, умови функціонування та характеристики стану модельованого об'єкта подані випадковими величинами та пов'язані стохастичними (випадковими, нерегулярними) залежностями, або вихідні дані подані випадковими величинами.

елементів стохастики, стохастичних поглядів на оточуючі явища, а тому опанування цими знаннями бажано починати ще у школі [115, с.28].

Проаналізуємо, яким чином відбувалося впровадження в освіту стохастичних ідей у нашій країні та в деяких інших європейських країнах.

Зрозуміло, що розвиток теорії ймовірностей як науки та розширення галузей її застосувань не могло не вплинути на її формування як навчального предмету. Почалося таке формування ще на початку XIX ст. з вищої школи.

Так, зокрема в Росії, в 1829-1830 навчальному році магістр філософії З. Ревковський (1807-1893) у Вільнюському університеті вперше починає читати факультативний курс з теорії ймовірностей. Причому збереглася програма та пояснювальна записка до неї, які детально описані в праці Д.Е. Майстрова [203].

Означена програма була віддана на відгук М.В. Остроградському. Зробивши кілька конструктивних зауважень до програми, він в цілому робить висновок, що академія наук надала б послугу вельми корисну та варту першого вченого прошарку в державі, якщо б використала всі свої зусилля з введення викладання обчислень ймовірностей у всіх вітчизняних університетах і навіть у гімназіях, щоб початки цієї науки заздалегідь фіксувалися у головах учнів. Тобто, на дивлячись на те, що в середню освіту стохастичні ідеї прийшли лише на початку XX ст., думка про означене впровадження зародилася майже на сто років раніше. Не набагато пізніше, в 1837 році було розпочато лекції з теорії ймовірностей і в Петербурзькому університеті В.А. Анкуровича, якого з 1850 року по 1860 рік замінив В.Я. Буняковський, який, не дивлячись на деякі помилки в своїх висновках, відіграв велику роль саме в поширенні теорії ймовірностей як навчальної дисципліни та збудженні інтересу до неї як в Росії, так і за її межами.

У 1850 році А.Ю. Давидов (1823-1885) розпочав навчання теорії ймовірностей в Московському університеті, програма якого описана в уже зазначеній праці Д.Е. Майстрова. А вже починаючи з 60-х років XIX ст. теорії ймовірностей навчали в багатьох університетах такі видатні математики, як П.Л. Чебишов (Петербурзький університет з 1861 року), а потім його учні А.А. Марков та О.М. Ляпунов; Е. Кеммер (1810-1893) (Берлінський університет) та ін.

Як тільки стохастичні ідеї остаточно укорінилися у вищій освіті, почалося їх поступове впровадження і в середню освіту [163]. Необхідність навчання елементів стохастики у шкільному курсі математики була усвідомлена у вітчизняній освіті понад 100 років тому, а у більшості розвинених країн ця необхідність вже реалізована. Давно усвідомлено, що ця змістова лінія, насамперед, має загальнокультурне, загальноосвітнє значення. Її вивчення відіграє важливу роль у розвитку мислення учнів. Зокрема, її призначення – розвивати такий спеціальний тип мислення, як стохастичне[2], яке необхідне сучасній людині як для соціального, так і для професійного становлення. Навчання будь-якого розділу математики сприяє розумовому розвитку учнів, прищеплює їм навички логічного мислення.

Так, наприкінці XIX ст. програми та підручники для середніх навчальних закладів в багатьох країнах Західної Європи (за виключенням Франції) містять в невеликому обсязі елементи стохастики. А до початку XX ст. вже склалася традиційна система, центральним розділом якої були елементи теорії ймовірностей. Із теорії ймовірностей розглядали, як правило, поняття випадкової події, поняття ймовірності, теореми про ймовірності суми та добутку подій, математичне сподівання, біноміальний розподіл, закон великих чисел. Практичне ж значення автори підручників та програм того часу вбачали, головним чином, у застосуванні теорії ймовірностей в галузях азартних ігор та страхування.

В Росії перші спроби введення в невеликому обсязі елементів стохастики зафіксовано в підручниках алгебри Н.Т. Щєглова (1800-1870) та К.Д. Краєвича (1833-1892). А вже на початку XX ст. в Росії було розпочато

[2] Стохастичне мислення – процес опосередкованого, предметного відображення у мозку людини сутності понять і законів стохастики; вміння робити висновки на основі наявних стохастичних (випадкових) даних керуючись міркуваннями.

рух за реформу середньої математичної освіти, де й було підняте питання про внесення в шкільну програму деяких понять теорії ймовірностей.

П.А. Некрасов та П.С. Фролов розробляють проект такого внесення, який викликає жваву полеміку у науковому світі. Це питання було широко обговорене на I і II Всеросійських з’їздах викладачів математики. Академія наук створює спеціальну комісію, якій доручено винести рішення з цього питання.

За пропозицією таких вчених, як А.А. Марков, К.А. Поссе та інших, які вбачали помилковість деяких ідей П.А. Некрасова, означений проект було відхилено. Після певного доопрацювання основних засад впровадження елементів стохастики в середню освіту в 1914 році Міністерство торгівлі та промисловості Росії затверджує програму з теорії ймовірностей для комерційних училищ, а в 1915 році з’являються два відповідних підручники.

На цьому етапі в країнах Західної Європи також відбувається реформістський рух в шкільній математичній освіті. Після чого було удосконалено шкільні програми з огляду на впровадження стохастичного мислення (тут уже з’являється поняття статистичної ймовірності). Втіленню подальших планів реорганізації шкільної математичної освіти стала на заваді Перша світова війна. Після її закінчення спроби формування стохастичної культури періодично повторювали, але вони носили епізодичний характер. Це й не дивно з огляду як на історію суспільства взагалі, так і на історію самої теорії ймовірностей (період становлення аксіоматики) [163].

Другий період реформістського руху в шкільній математиці було розпочато наприкінці 50-х років XX ст., а підійшов він до свого завершення в кінці 60-х років XX ст. Означена реформа однозначно оцінювала елементи стохастики як необхідну ланку в шкільних математичних курсах [163].

Досвід навчання в школі основ теорії ймовірностей в період реформи 60-70-х років XX ст. на формальному рівні дав в основному негативні результати, що призвело до вилучення цього розділу зі шкільної програми. Матеріал виявився надзвичайно складним і погано засвоюваним учнями. До того ж неодноразово проведені дослідження знань учнів старших математичних класів, знайомих з «класичною ймовірнісною моделлю», показали, наскільки мало ці знання сприяють розвитку ймовірнісної інтуїції та спростовують традиційні ймовірнісні забобони.

Елементи стохастики намагалися ввести у вітчизняну школу протягом XIX-XX століть. Але кожного разу ці спроби закінчувалися невдачею. Математики та психологи намагалися пояснювати ці невдачі по-різному. Д.В. Маневич, наприклад, стверджує, що ймовірнісні поняття викликають відчуття протесту через те, що вони нестійкі як опорні образи мислення [210]. Таким чином у процесі навчання основ науки виникає необхідність у висвітленні відповідного історичного періоду в аспекті розгляду тих проблем, що спонукали розширення арсеналу понять і методів дослідження в теорії ймовірностей, що уможливлює застосування історичних фактів на практичних заняттях, причому не в розріз з основною метою уроку. Мається на увазі розв'язування історичних задач, які розв'язували відомі вчені-математики. Таке розв'язування слугує ілюстрацією теоретичних положень, які розглядають на уроці та несуть певне історичне навантаження.

1.3. Сучасний стан навчання елементів стохастики в шкільному курсі математики

Проблема навчання елементів стохастики в основній та старшій школі не є новою. Її порушували неодноразово, зокрема, на Міжнародному симпозіумі з навчання математики в школі, що проходив в 1962 році у Будапешті. У висновках та рекомендаціях до цього симпозіуму відмічається, що можливість різних інтерпретацій математичних положень (полівалентність математики) повинна бути повністю з'ясована засобом різноманітних конкретних застосувань. Це положення залишилося актуальним і на сучасному етапі розвитку шкільної освіти. Причому особливого значення воно набуло при розгляданні його через призму сучасної профільної диференціації шкільної математичної освіти.

Стохастику вивчають у багатьох середніх спеціальних та вищих навчальних закладах. За введення стохастичного матеріалу в програму середньої загальноосвітньої школи виступали відомі математики та педагоги Б.В. Гнєденко [85-89], М.І. Жалдак [122-133], А.М. Колмогоров [169-173], Г.О. Михалін [122; 127; 130-133; 224], А. Плоцкі [254-258], О.Я. Хінчин [85], М.Й. Ядренко [78; 112] та ін.

Розвинене суспільство ставить до фахівців досить високі вимоги, що стосуються вміння оцінювати шанси, аналізувати випадкові явища, прогнозувати розвиток ситуації, висувати гіпотези та приймати рішення в ситуаціях невизначеності. Оволодіння методами статистичного аналізу будь-яких суспільних явищ і процесів є невід'ємним елементом підготовки висококваліфікованих фахівців [198].

Стохастика — розділ математики, в якому розглядають математичні методи систематизації, опрацювання та використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. Згідно з програмами, затвердженими Міністерством освіти і науки України, вивчення елементів стохастики в шкільному курсі математики розпочалося факультативно у 1968 році [86; 169], а введено у програму загальноосвітньої школи у 1996 році.

Для навчання елементів стохастики в загальноосвітніх навчальних закладах сьогодні відводять 2-3 години в 6 класі на теми «Випадкова подія. Ймовірність випадкової події», 7-8 годин у 9 класі на теми «Випадкова подія. Ймовірність випадкової події. Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Середнє значення», 20 годин у 11 класі на теми «Елементарна подія. Множина елементарних подій. Операції над подіями. Геометрична й алгебраїчна інтерпретація операцій над подіями. Сумісні та несумісні події. Сума, добуток, різниця подій. Поняття ймовірностей випадкової події. Обчислення ймовірностей, випадкових подій. Гіпотеза, експеримент. Поняття про математичне сподівання. Умовні ймовірності. Формула повної ймовірності. Залежні та незалежні події. Ймовірність добутку та сум подій. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Закон великих чисел.

Статистичні оцінки розсіювання ймовірностей: дисперсія, середнє квадратичне відхилення, довірчий інтервал. Математичне сподівання, дисперсія та коефіцієнт ризику» [267; 270].

Вивчення елементів стохастики має важливе загальноосвітнє значення, оскільки сприяє підвищенню загальнокультурних компетентностей учнів, готує школярів до сприйняття різноманітних відомостей з галузі соціології, економіки, демографії, психології, страхування, які широко представлені в засобах масового інформування. *Головною метою навчання елементів стохастики* в школі є формування в учнів навичок первинного опрацювання статистичних даних, аналіз кількісних характеристик різноманітних випадкових явищ.

У наш час стохастика швидко проникає в усі галузі науки, техніки та виробництва, відіграє важливу роль при розв'язуванні багатьох проблем прикладного характеру, тому навчання елементів стохастики має неабияке методологічне значення.

Навчання елементів стохастики розширює межі пізнання, відкриває нові закономірності у світі випадкових явищ. Основними цілями впровадження елементів стохастики у шкільну програму є формування стохастичного мислення, розвиток ймовірнісної інтуїції, вміння аналізувати випадкові явища, оцінювати шанси, прогнозувати розвиток ситуації, аналізувати емпіричні дані тощо [56].

Опитування вчителів шкіл показали, що деякі з них з різних причин не володіють стохастичними методами, специфікою ймовірнісних суджень і прогнозів. Однак зрозуміло, що кожен математик повинен познайомитися не лише з елементами стохастики, але і з основними її розділами, стохастичними методами тощо. Навчання при цьому повинне бути здійснене не на інтуїтивному рівні, а доведене до сучасного формалізованого вигляду.

Вихід в світ статей в журналі «Математика в школі» [127; 130] та посібника для вчителів з елементів стохастики М.І. Жалдака та Г.О. Михаліна [131], а також дисертаційних досліджень Т.М. Задорожньої

[139], Г.В. Лиходєєвої [197], О.В. Трунової [328], О.В. Шавальової [347] та інших, свідчить про те, що не дивлячись на тривалі та гарячі дискусії про чергову модернізацію школи, про зміст нових освітніх стандартів, введення стохастичної лінії в шкільну математичну освіту вже стало реальністю. У дисертаційних дослідженнях доводять доцільність навчання елементів стохастики в середніх загальноосвітніх та фізико-математичних класах, а також пропонують різноманітні підходи до побудови методичної системи впровадження стохастичної лінії в шкільну математику.

Проведений аналіз шкільних підручників з математики для 6, 9 та 11 класів дає підстави стверджувати, що навчанню елементів стохастики приділено не дуже багато уваги.

У підручнику «Математика» А.Г. Мерзляка, В.Б. Полонського, М.С. Якіра для 6 класу [221] розглянуто поняття події, її ймовірності, малоймовірної, вірогідної, неможливої події. Наведено історичну довідку про українських та радянських фундаторів стохастики.

Вправи у підручнику присвячені наступним питанням:

- навести приклади випадкових подій (вірогідних, неможливих, рівноймовірних);
- обчислити ймовірності;
- знайти кількість тих чи інших предметів, якщо відома ймовірність їх діставання.

У підручнику «Алгебра» Г.П. Бевз та В.Г. Бевз для 9 класу [21] на думку самих авторів, тема про випадкові події та ймовірність повторює дещо з того, що учні вже вивчали в 6 класі, але розширює й уточнює теоретичний матеріал. Учні мають можливість ознайомитися з поняттями «ймовірнісний експеримент», «подія», «ймовірність події», «відносна частота появи події», «елементарна подія», «простір елементарних подій», а також розглянуто найважливіші властивості ймовірності випадкової події. І все ж таки тут лише здійснюється попереднє (пропедевтичне) ознайомлення учнів з матеріалом про ймовірності, який вони вивчатимуть у старших класах [22].

У параграфі про математичну статистику введено поняття вибірки, частотної таблиці, моди, медіани, середнього значення, вибірки, гістограми.

Завдання підручника зводяться до наступних:

- з'ясувати вид події (неможлива, достовірна, випадкова);
- знайти ймовірність події;
- описати простір елементарних подій;
- знайти відносну частоту;
- дослідити розподіл;
- вказати центральні тенденції вибірки;
- побудувати гістограму;
- побудувати кругову та стовпчасту діаграму;
- скласти частотну таблицю.

У підручнику для 11 класу (одинадцятирічної школи) М.І.Шкіля, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук [354] теорія ймовірностей вивчається окремо від елементів статистики, що є методично недоцільним і складним для сприйняття цього матеріалу учнями.

Вправи зводяться до наступних:

- визначити ймовірності різних подій;
- знайти ймовірності суми та добутку подій;
- побудувати полігон частот за даними варіаційного ряду;
- побудувати дискретний варіаційний ряд;
- побудувати гістограму;
- знайти міри центральних тенденцій.

Отже, завдання зводяться до відтворення основних понять статистики. Необхідно доповнити ці завдання такими, виконання яких потребуватиме:

- тлумачення практичного змісту статистичних характеристик, що вивчають;
- виявлення вміння проводити необхідні міркування та робити певні висновки на основі статистичних даних.

Щодо задач з теорії ймовірностей, то більшість з них зводиться до використання так званого «класичного означення» ймовірності та комбінаторних методів обчислення, тобто ґрунтуються на підході, який тривалий час критикується в психолого-педагогічній, методичній та науковій літературі, зокрема М.І. Жалдаком та Г.О. Михаліним [122-133].

Аналіз деяких українських, російських і білоруських підручників подано у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Аналіз деяких шкільних підручників з математики

Підручник	кількість задач	% від загальної кількості задач	кількість годин	% від загальної кількості годин	теоретичний матеріал, сторінок	% від загального обсягу сторінок
Мерзляк А.Г., Якір М.С., Полонський В.Б. Математика – 6 клас [221]	26 з 1423	2%	2-3 з 70	4%	5 з 275	2%
Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра – 9 клас [21]	64 з 1149	5%	5-6 з 70	8%	27 з 272	10%
Мерзляк А.Г., Якір М.С., Полонський В.Б. Алгебра – 9 клас [222]	34 з 320	11%	5-6 з 70	8%	22 з 312	7%
Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М. Алгебра – 9 клас [183]	0 з 1059	0%	0 з 70	0%	0 з 237	0%
Мальований Ю.І., Литвиненко Г.М., Возняк Г.М. Алгебра – 9 клас [209]	36 з 706	5%	5-6 з 70	8%	34 з 279	12%
Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу – 10-11 класи [354]	51 з 4510	1%	16 з 70	22%	59 з 576	10%

Продовж. табл. 1.1

Підручник	кількість задач	% від загальної кількості задач	кількість годин	% від загальної кількості годин	теоретичний матеріал, сторінок	% від загального обсягу сторінок
Шнеперман Л.Б., Кузнєцова Е.П. Алгебра – 10 клас [7]	30 з 641	5%	0 з 70	0%	7 з 261	3%
Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудніцин Ю.П. Алгебра і початки математичного аналізу – 10-11 клас [5]	0 з 1147	0%	6 з 82	7%	0 з 345	0%
Алімов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. Алгебра і початки аналізу – 10-11 класи [6]	0 з 1451	0%	6 з 82	7%	0 з 355	0%
Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра і початки математичного аналізу – 10 клас [8; 9]	30 з 1944	2%	6 з 82	7%	14 з 416	3%
Мордкович А.Г. Алгебра і початки математичного аналізу – 10-11 класи [10; 11]	48 з 1405	3%	6 з 82	7%	12 з 390	3%
Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра і початки математичного аналізу – 11 клас [12; 13]	82 з 1507	5%	6 з 82	7%	40 з 280	14%
Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра – 9 клас [14]	0 з 1374	0%	0 з 82	0%	0 з 191	0%

Враховуючи недостатню кількість навчальних годин, що відведені на вивчення цієї теми, доцільно рекомендувати застосування персональних комп’ютерів при розв’язуванні задач зі стохастики. Розвиток інформаційно-комунікаційних технологій уможливлює використання комп’ютера як засобу активізації навчального процесу, сучасне джерело навчальних і наукових відомостей при навчанні будь-якого предмета [198].

Для цього слід активізувати життєвий досвід учнів, розглянути історію розвитку стохастики, її застосування, значення в період дедалі зростаючого потоку наукових та технічних даних, а також міжпредметні зв'язки [56]. Адже, з точки зору психологічних передумов, попередній досвід учнів, як життєвий, так і отриманий при вивченні шкільного курсу математики, забезпечують належні умови для успішного формування математичних понять [299, с.62].

Минуло біля 15 років з того часу, як до шкільних програм вітчизняної загальноосвітньої школи ввійшло навчання елементів стохастики. Разом з тим усвідомлення результатів впровадження нової змістової лінії, розроблення стратегії та тактики подальшої роботи щодо її вдосконалення є актуальним методичним завданням і сьогодні [41].

Вивчення елементів стохастики донедавна відбувалося лише в 11 класі за програмою, затвердженою Міністерством освіти і науки України у 1996 р. В тій самій програмі передбачено деяке ознайомлення з описовою статистикою у 9 класі.

Згідно з програмою з математики (2001 р.) для класів фізико-математичного профілю, навчання елементів стохастики було передбачено у 9 – 10 класах [268].

У Державному стандарті базової і повної середньої освіти, затвердженому у 2004 р. [108], передбачено навчання елементів стохастики як в основній, так і в старшій школі.

У програмі з математики [270] для 12-річної школи, затвердженої Міністерством освіти і науки України, пояснювальна записка містить вказівку про доцільність навчання елементів стохастики. У змісті математичної освіти 6 класу передбачено вивчення змістової лінії: початки теорії ймовірностей та елементи статистики. У змісті матеріалу для 9 класу

— «Випадкова подія. Ймовірність випадкової події. Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Середнє значення».

Програма передбачає, що учень 6 класу «описує поняття ймовірності випадкової події; розв'язує вправи, що передбачають побудову та аналіз стовпчастих діаграм, аналіз кругових діаграм, розв'язує задачі ймовірнісного характеру», учень 9 класу «наводить приклади: випадкових подій; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків; описує поняття: випадкова подія, ймовірність випадкової події, частота, середнє значення статистичних вимірювань; розв'язує задачі, що передбачають: знаходження ймовірності випадкової події, подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків, знаходження середнього значення».

У «Програмі зовнішнього незалежного оцінювання з математики. 2009 рік» [269] зазначено, що учні повинні знати: класичне означення ймовірності події, найпростіші випадки підрахунку ймовірностей подій, означення статистичних характеристик рядів даних (розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення випадкової величини) та вміти обчислювати в простіших випадках ймовірності випадкових подій; застосовувати правила обчислення ймовірностей суми та добутку подій у процесі розв'язування нескладних задач; обчислювати статистичні характеристики рядів даних (розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення випадкової величини)

У завданнях зовнішнього незалежного оцінювання щорічно обов'язково міститься хоча б одне завдання (у 2010 році – запропоновано 3 завдання розумної складності з вибором правильної відповіді, що становить 8,3% від кількості завдань, причому одне завдання на знання та розуміння, а два – на застосування знань і вмінь у типових і змінених ситуаціях) стохастичного характеру і це, безумовно, позитивно впливає на ставлення вчителів та учнів до вивчення відповідного розділу [148-150].

Багато публікацій формують думку про те, що елементи стохастики, що вивчають в школі, являють дещо спрощений курс теорії ймовірностей і математичної статистики для вищих навчальних закладів як за змістом, так і за методикою навчання. Однак доцільно зауважити, що спроби подавати в школі матеріал так, як це робиться в підручниках для вищих навчальних закладів, вже закінчилися невдачею в середині 70-х років минулого століття, коли навчання початків математичного аналізу здійснювали лише за рахунок спрощення підручників для вищих навчальних закладів.

Розробити методику навчання елементів стохастики можна лише за умови розробки та реалізації довгострокової виваженої комплексної програми їх впровадження в школу. Зокрема, можна запропонувати такий порядок вивчення:

- (5-6 класи): формування на інтуїтивному рівні поняття випадкової події, порівняння шансів настання тих чи інших подій на основі інтуїтивних міркувань, на статистичній основі, за допомогою геометричних міркувань; збирання, реєстрація статистичних даних, подання їх у вигляді діаграм, таблиць; читання таблиць і діаграм; проведення статистичних експериментів і спостережень;
- (7-9 класи): формування поняття випадкового експерименту і випробування та їх результати, випадкової події; обчислення статистичних ймовірностей настання випадкових подій; первинне опрацювання й аналіз статистичних даних; графічне подання розподілів статистичних ймовірностей; вибіркові характеристики (середнє арифметичне, мода, медіана тощо);
- (10-11 класи): формування на вищому рівні поняття випадкового експерименту і випробування та їх результати, випадкова подія; операції над подіями та їх основні властивості; статистична ймовірність події та її основні властивості; статистичні ймовірності суми та добутку подій, незалежність подій. Дискретний і неперервний розподіли статистичних ймовірностей; числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей; поняття випадкової величини; поняття про закон великих чисел.

Вивчаючи стохастику, учень пізнає, як застосовувати прийоми логічного мислення до тих випадків, коли доводиться мати справу з невизначеністю. Введення нової змістової лінії покликане сформувати розуміння детермінованості та випадковості, допомогти усвідомити, що багато законів природи та суспільства мають ймовірнісний характер, що багато реальних явищ і процесів описують стохастичними моделями.

Вивчення ймовірності, за словами А. Реньї [280], «сприятливо позначається на характері учнів, наприклад, розвиває сміливість, оскільки уможливлює розуміння того, що при певних обставинах невдачі можна просто віднести до випадковості і, отже, зазнавши невдачу, аж ніяк не слід відмовлятися від боротьби за досягнення поставленої мети».

Уявлення про зв'язок випадкового та необхідного, про стохастичні та динамічні закономірності є обов'язковим елементом загальної освіти сучасної людини. Між тим деякі вчителі, і, як наслідок, і учні шкіл володіють елементами стохастики на недостатньо високому рівні. Тому особливої значимості набуває проблема дослідження прикладної спрямованості елементів стохастики у середній загальноосвітній школі.

Проблеми удосконалення науково-теоретичної та практичної підготовки учнів є одними з найактуальніших у світовій та вітчизняній школі. Останніми роками у зв'язку з кардинальними соціально-економічними змінами, що відбулися в нашій країні, виникла об'єктивна необхідність внесення істотних коректив у вітчизняну систему середньої освіти. Традиційна система через значну інерційність виявилася неадекватною тій економічній ситуації, що склалася, і вимагає від системи освіти значно більшого динамізму та гнучкості.

Реформа середньої та вищої школи передбачає нову освітню парадигму, для якої характерні такі пріоритети, як науковість, фундаментальність, цілісність, диференціація, гуманізація, гуманітаризація, особистісно-орієнтована організація навчального процесу [137].

На сьогодні в професійно-педагогічній підготовці вчителя математики великого значення набуває виховання у нього високого рівня стохастичної культури. На думку Б.В. Гнєденка [85-89] сьогодні в науці фундаментального значення набуває поняття випадкового. Особливо назріла необхідність введення в шкільну програму елементів науки про випадкові явища (і відповідної підготовки вчителя), і це викликано не лише вимогами наукового та практичного порядку, але і чисто методологічними міркуваннями.

Поняття стохастичної культури включає*:*

1. Володіння тезаурусом теорії ймовірностей і математичної статистики (базовими поняттями, категоріями, судженнями тощо);
2. Знання основних правил, законів і закономірностей, притаманних стохастичним (випадковим) явищам;
3. Вміння застосовувати ці правила при розв'язуванні задач зі стохастики;
4. Знання ймовірінсних схем і моделей дослідження стохастичних явищ і процесів;
5. Потреба активно використовувати інформаційно-комунікаційні технології при навчанні елементів стохастики.

Передбачена в державному освітньому стандарті [108] стохастична підготовка вчителя уможливлює повною мірою розв'язання поставленої проблеми формування у нього стохастичного мислення, високого рівня стохастичної культури, оскільки навчання елементів стохастики у вищих педагогічних навчальних закладах знаходиться на доволі високому рівні.

Прикладами застосування елементів стохастики у повсякденному житті може слугувати випуск того чи іншого розміру взуття, одягу, вибору майбутньої професії, коли доводиться оцінювати статистичні дані, що носять певною мірою випадковий характер. Стохастичне мислення необхідне людині і для професійного становлення. Б.В. Гнєденко [85-89] писав, що сучасне природознавство виходить із положення, відповідно до якого всі явища природи мають статистичний характер і її закони можуть отримати повне та точне формулювання. А масові явища описують стохастичними методами, їх застосовують для дослідження соціальних і економічних явищ, в астрономії, фізиці, біології, психології, мовознавстві тощо, на їх основі досліджують різноманітні явища — від явищ, що відбуваються в атомах, до явищ у людському суспільстві.

Не випадково у розвинених країнах з елементами стохастики учнів ознайомлюють з перших років перебування в школі та протягом усього навчання використовують стохастичні методи до аналізу поширених явищ, які трапляються у повсякденному житті. У більшості країн світу тему «Аналіз даних» починають вивчати вже у початковій школі і продовжують до кінця навчання, завершуючи її вивченням елементів математичної статистики. Наприклад, у французьких школах почали включати в програми з математики елементи стохастики з 1956 р., в Японії з 1958 [309; 374; 378; 379].

Ще одна тенденція пов'язана з формуванням дослідницьких навичок у навчанні. Формування дослідницьких умінь потребує певного досвіду в проведенні експериментів, опрацювання результатів спостережень, дослідів. Стохастична лінія, як ніяка інша, придатна для цих цілей [41].

У дослідженнях психолога Ж. Піаже [262] показано, що учні молодших та середніх класів за природою погано пристосовані до ймовірнісної оцінки, до усвідомлення та правильної інтерпретації статистичних даних. Результати цих та інших досліджень недвозначно говорять про те, що навіть гарне знання та розуміння інших розділів математики саме собою не забезпечує розвинення стохастичного мислення. Для цього потрібна систематична та цілеспрямована робота.

Однією з основних проблем дидактики є з'ясування ролі задач у навчанні та форм їх подання учням. Розв'язування задач – це основна діяльність учнів, яких навчають математики, в результаті якої відбувається розвиток математичного мислення. Образ математики та відношення учня до неї формують перш за все при розв'язуванні задач.

Для підтримання інтересу до будь-якої задачі необхідно, щоб її зміст був наочним, коротким, доступним для розуміння, доцільним і цікавим, в результаті чого вдається підвищити інтерес учнів до математики, як навчальної дисципліни, і збільшити ефективність засвоєння матеріалу, що вивчається. При цьому необхідно пам'ятати, що формування матеріалу повинне відповідати рівню підготовленості та можливостям учнів: якщо перед учнем поставити задачу, розв'язати яку він не може, то це викликатиме у нього стан напруженої ситуації, і як наслідок – негативне ставлення до даного розділу математики.

Отже, навчання стохастики здійснює безпосередній вплив на формування, розвиток та удосконалення мислення учнів. Крім того, добре відомо, що принципові ідеї виключно добре, швидко та міцно засвоюються в молодшому шкільному віці. Наукові положення, уявлення про які не були отримані в шкільному віці, для багатьох так і залишаються навічно «недоступними». Б.В. Гнєденко [85-89] вважав, що з елементами стохастичного мислення необхідно починати знайомити ще в школі, ненав'язливо, в ряді предметів, а не лише в курсі математики.

Особистість формують в основному в шкільному віці, і школа зобов'язана виховувати самостійність у кожного учня в процесі його навчально-пізнавальної діяльності. Якщо учень, за словами Л.М. Толстого, в школі не навчиться сам творити, то в житті він завжди буде лише копіювати, наслідувати. Навчально-пізнавальну діяльність школяра слід вважати творчою, якщо вона суб'єктивно нова за способом діяльності або за результатом [115, с.72].

Навчання веде за собою розвиток, збуджує та викликає дозріваючі функції дитячого розуму, що формується. Програма та методи навчання стохастики повинні відповідати не лише вже досягнутому розумовому рівню, але і «зоні найближчого розвитку дитини». Таку зону, за словами Л.С.Виготського [74-75], визначають розходженнями між рівнями задач, доступних дитині, для вирішення самостійно та за допомогою дорослих.

У процесі навчання елементів стохастики учнів включають у розв'язування нових для них проблем і тим самим створюють суперечності між потенційно заданими рівнями необхідних для їх розв'язування операцій і вже реально досягнутими рівнями. Ці внутрішні суперечності, за словами Г.С. Костюка [71; 266], є рушійною силою розумового розвитку. Від того, в якому ступені вироблення нових операцій вирішує суперечності, залежить реальне просування учнів в розвитку стохастичного мислення. Навчання успішно сприяє цьому, якщо створюються відповідні заходи, мобілізуються сили учнів для подолання тих труднощів, що виникають і формуються необхідні мотиви. Ведучи за собою розвиток, навчання саме спирається на його досягнення, знаходить в ньому ресурси для реалізації намічених цілей.

Дедуктивний тип умовиводів найчастіше використовують при аналізі стохастичних явищ і поданні здобутих результатів. Подібно до того, як в стохастичних відкриттях головну роль відіграє індукція, так і індуктивний метод поруч з аналізом повинен бути головним методом розв'язування задач і з'ясування різного роду проблем. Дотепер навчання в основному йшло у такому порядку: 1) спочатку вчитель пояснює новий матеріал, дає означення, формулює теорему, 2) потім дає дедуктивне обґрунтування теоретичного матеріалу, 3) якщо час дозволяє, то разом з учнями застосовує теоретичний матеріал, теореми до розв'язування деяких задач і до окремих прикладів.

При подібному ході навчання не враховуються історичний та природний хід розвитку стохастики, і немає нічого дивного, що знаходиться стільки людей, нездатних засвоювати стохастику таким протиприродним способом [115, с.78].

Щоб полегшити учням засвоєння елементів стохастики, потрібно облишити протиприродні методи її подання та піти шляхом її природного розвитку. Тому при навчанні треба домагатися того, щоб учні, коли можливо, самі, «своїм розумом» доходили до відкриття нових фактів, тверджень, відомих теорем (звичайно, у співпраці з вчителем), чого можна досягти лише за допомогою індукції й аналогії. Як відомо, П. Ферма і інші математики відкривали свої теореми спочатку на окремих випадках чи наштовхувалися на них при розв'язуванні практичних задач. Тому, щоб підвести учнів до відкриття якоїсь теореми, найкраще – дати учням кілька простих, але характерних задач, бажано прикладного характеру, розв'язуючи які, вони могли б самі «підійти» до формулювання потрібної теореми. Може трапитися, що учні не зможуть одразу помітити, що їм потрібно, і тому може знадобитися допомога вчителя і велика кількість прикладів і задач, перш ніж учні здогадаються про існування закономірності. І тільки після цього можна приступати до строгого, тобто дедуктивного виведення теореми.

Навчання математики А. Плоцкі [254-258] розуміє як специфічну інтелектуальну діяльність, як становлення та відкриття знань заново під керівництвом учителя – «режисера й організатора» процесу пізнання світу учнями. Вчитель є помічником і одночасно інспектором, що контролює навчально-пізнавальну діяльність учнів.

Задачі, що пропонують учням, та способи їх розв'язування повинні ілюструвати певну «філософію» навчання елементів стохастики. Учень, досліджуючи нематематичну проблему, формулює різні питання та задачі, потім подає їх мовою математики для того, щоб розв'язати їх математичними методами, а потім інтерпретувати розв'язок з врахуванням реальної проблеми, поставленої на початку. Розв'язуючи на уроці математики ці проблеми та математичні задачі, що є їх моделями, можна разом з учнями розглядати не лише стохастичні поняття, але і стохастичні методи, причому як нові математичні засоби (інструменти) розв'язування конкретних задач.

Стохастичні задачі виступають як новий елемент математичної освіти. Справді важливою рисою сучасних реформ в галузі навчання математики є:

- чітке відокремлення розрахунків від того, що в дійсності називають математикою,
- ширший погляд на роль математики в формуванні інтелекту людини та її особистості.

Одночасно з включенням стохастичних ідей в «математику для всіх» виникло питання про форму та зміст задач зі стохастики, а також їх використання для активізації математичної діяльності учня. Це питання стає важливим у зв'язку з поширенням невдалих (з точки зору дидактики математики) зразків таких задач в різноманітних збірниках задач зі стохастики (підготовлених для вищих навчальних закладів і поширюваних серед школярів). Ось приклади таких задач:

1. На поличці в випадковому порядку розставлено 40 книг, серед яких знаходиться тритомник Т.Г. Шевченка. Знайти ймовірність того, що ці три томи стоять в порядку зростання зліва направо.

2. За круглим столом розсаджують у випадковому порядку 2n гостей (n жінок і n чоловіків). Яка ймовірність того, що кожен чоловік сидітиме між двома жінками.

3. В залі кінотеатру в перших двох рядах, кожен з яких складається з n крісел, сидить n людей. Знайти ймовірність наступних подій: в першому ряду двоє людей не сидять поруч; в першому ряду кожен має рівно одного сусіда.

4. На столі лежать десять карток з літерами: М, М, А, А, А, Т, Т, И, К, Е. Яка ймовірність того, що дитина (яка ще не знає абетки) складе з них слово МАТЕМАТИКА.

Традиційно задачі в шкільних підручниках розв'язують в «класичній моделі», при цьому акцент робиться в основному на обчислення, які часто спираються на комбінаторику. Однак світ випадковостей – це не лише світ випробувань, всі результати яких рівноймовірні, тому не доцільно використовувати лише «класичну модель», тим більше «класичне означення» ймовірності, яке є некоректним, а його використання суперечить дидактичним принципам науковості, свідомого навчання і т.д. (див. с. 111). Більшість задач за допомогою «класичних моделей» розв'язати неможливо. Тому необхідно вивчати різні способи та засоби побудови ймовірнісних моделей. Вміло дібрані та розв'язані задачі є «сировиною» для відкриття стохастичних понять і методів, стимулом активізації різноманітних форм математичної діяльності учнів. Тим самим вміння розв'язувати задачі є елементом освіченості.

Звернемо увагу на деякі форми активізації математичної діяльності, що створюються на фоні розв'язування стохастичних задач, а саме на формулюванні математичних проблем на фоні реальної, нематематичної ситуації, раціональне конструювання питань. Джерелом багатьох задач є нематематичні ситуації. Вирішення проблеми починається з її подання мовою математики, з формулювання певних математичних задач.

Формулювання математичної задачі буде першим і важливим етапом розв'язування «нематематичних» проблем. Таким чином, автором багатьох стохастичних задач буде учень [115, с.82].

Одним з важливих об'єктів математичної діяльності (і математичного мислення) є процес побудови математичної моделі, добре пристосованої до даного фрагменту дійсності (процес математизації).

Раціональна діяльність сучасної людини в реальному світі можлива завдяки постійному спрощенню, нехтуванню неістотними аспектами ситуації, виділенню з множини різноманітних відомостей істотних з даної точки зору, та залишення поза увагою другорядних властивостей і фактів, а значить, завдяки постійній схематизації дійсності [115, с.83].

Випадкові експерименти, моделі яких складають предмет стохастики, є для учня конкретними експериментами, тобто об'єктами реального світу. Учень підкидає конкретну монету, в іграх користується конкретним гральним кубиком, по телевізору бачить в дії конкретну машину для проведення тиражу лотереї. Шляхи від цих випробувань до їх стохастичних моделей різноманітні. При доборі кожного з них в математичну діяльність учня можна вводити специфічні елементи, що слугуватиме частиною процесу формування основних понять стохастики.

Важливим кроком при розв'язуванні задач є побудова моделі. При такому підході можна запропонувати різні засоби, за допомогою яких будують ці моделі (класифікація статистичних даних, діаграма, рисунок, схема тощо). Припустимо, що в задачі потрібно побудувати стохастичну модель задачі про підкидання п’яти монет (як результат такого випробування розглядають кількість цифр, що випали), щоб прийняти раціональне рішення.

Можна на уроці послатися на статистичні дані й організувати збирання даних. Важливим засобом математизації є так звана імітаційна схема. Використання «математичних окулярів» при побудові стохастичних моделей сприяє виявленню в деяких ситуаціях способів імітації випадкового випробування за допомогою таких типових для світу випадковостей пристроїв, як монета, кубики, урни з кульками, генератори випадкових чисел (спеціальні комп’ютерні програми) тощо.

Аналіз емпіричних фактів, про які тут іде мова, може стимулювати:

- відкритий на уроці факт, що у половини класів даної школи виявилися два учні, у яких день народження співпадає (класні журнали можна використати як дидактичний засіб в навчанні елементів стохастики),
- часте випадання сусідніх чисел серед тих, що випали в тиражі гри лото «Забава»,
- чіткі відмінності в частотах перемог двох гравців в грі «цифра і два герби – два герби і цифра», якщо намагатися спочатку оцінити шанси стохастичним шляхом,
- не часте випадання всіх різних чисел при підкиданні шести кубиків, на гранях яких нанесено числа від одного до шести.

В багатьох ситуаціях треба знайти способи раціоналізації поведінки, в тому числі і діяльності, що стосується збирання статистичних даних, випадкового вибору елемента з певної множини.

Спрощення міркувань за допомогою переходу до іншої моделі, зведення заданих проблем до вже вирішених – цю форму активізації математичної діяльності учнів розуміють завдяки відкриттю факту, що одне випадкове випробування можна імітувати іншим [115, с.88].

Цінність стохастичних задач визначається не стільки тим апаратом, який використовують при їх розв'язуванні, скільки можливостями продемонструвати процес застосування математики для розв'язування різних проблем. Розв'язування цих задач повинне знайомити учнів з реальними застосуваннями стохастичних ідей і методів, а також допомогти в організації специфічної діяльності, необхідної в процесі застосування знань з математики. Однак багато задач не є задачами прикладного характеру.

Реальні задачі прикладного характеру в шкільній математиці зустрічаються рідко, оскільки етап формалізації (побудова математичної моделі нематематичної ситуації) вимагає знань і математичної культури. Тому виникла проблема добору задач прикладного характеру, які можна використовувати при навчанні елементів стохастики. В дидактиці математики прийнято пояснювати суть застосування математики для розв'язування прикладних проблем на прикладах задач.

При розв'язуванні задач зі стохастики малюнок можна застосовувати як зручний засіб математизації та аргументації. Зокрема, при навчанні елементів стохастики бажано використовувати різноманітні схеми, графіки, діаграми тощо.

Вміння розв'язувати задачі зі стохастики є елементом математичної освіти школяра. З використанням цих задач можна реалізовувати внутріпредметні та міжпредметні зв'язки математики, забезпечувати можливість посилити міжпредметні зв'язки за допомогою застосування методів з різних галузей знань [115, с.93].

Навчання стохастики, формування відповідного типу мислення має відбуватися неперервно. Зрозуміло, щоб сформувати стохастичну культуру, недостатньо виділити на вивчення елементів стохастики в школі 16 або навіть 20 годин. Зауважимо, що в Росії на це відводять по 34 години у кожному класі, починаючи з 7-го [329].

Забезпечення цілісності освіти є однією з найважливіших вимог до її модернізації. Ця вимога передбачає встановлення тісних міжпредметних і внутріпредметних зв’язків. Повноцінне введення змістової лінії виправдане лише в тому випадку, коли вона органічно поєднуватиметься з уже існуючими. Стохастична змістова лінія має такий потенціал. Але сам собою цей потенціал ніколи не реалізується. Для цього потрібно докладати відповідні зусилля. Майже всі змістові лінії курсу математики знаходять застосування при навчанні стохастики [41].

Успіх введення змістової лінії стохастики в більшості залежить від того, чи буде її матеріал в подальшому застосовуватися в таких шкільних предметах, як фізика, хімія, біологія, історія, географія тощо. Але важливим є і зворотній зв’язок, тобто, чи буде матеріал з цих дисциплін використовуватися на уроках зі стохастики для вивчення нових понять, фактів, оволодіння новими методами, ілюстрацією матеріалу, джерелом побудови стохастичних моделей тощо.

Наведемо кілька прикладів, в яких покажемо природність і корисність міжпредметних зв’язків (докладніше це питання буде розглянуто в п. 1.4): у курсі фізики вивчають броунівський рух, при цьому з фундаментального закону для випадкових явищ — закону великих чисел — випливає закон Клапейрона.

У законі великих чисел стверджується, що спільний вплив багатьох випадкових факторів виявляється майже сталим, чим закладене обґрунтування багатьох законів фізики, економіки та інших явищ масового характеру.

В курсі біології стохастичні поняття з’являються при вивченні елементів генетики. Ймовірнісний характер має механізм передавання спадкових ознак від покоління до покоління. Стохастичну основу мають закони Г. Менделя [138, с.191], яку відмітив свого часу ще А.М. Колмогоров [172] (закон одноманітності першого покоління гібридів, закон розщеплення та закон незалежного комбінування ознак).

Перелік подібних прикладів можна продовжувати. Зрозуміло, що для свідомого засвоєння наведеного матеріалу школярі, а тим більше вчителі суміжних предметів, мають оволодіти відповідними стохастичними поняттями, методами та фактами. З іншого боку, вчитель математики повинен також ознайомитися з застосуваннями елементів стохастики в інших шкільних предметах, використовувати їх на уроках математики, зокрема для демонстрації прикладного характеру елементів стохастики, реалізації внутріпредметних і міжпредметних зв'язків.

Спіральний характер нової змістової лінії означає, що до головних понять, фактів і методів (випадковий експеримент, випадкова подія, незалежність випадкових подій, статистична ймовірність, розподіли статистичних ймовірностей, їх числові характеристики, випадкова величина тощо) слід повертатися неодноразово, на вищих рівнях, спираючись на вже сформовані поняття, збільшуючи складність задач, підвищуючи рівень обґрунтованості, використовуючи нові методи щодо розв'язування різноманітних завдань.

Щодо знань, вмінь та навичок, якими повинен оволодіти сучасний учень в процесі вивчення елементів стохастики, то вони є такими:

- проводити нескладні опитування, спостереження, збирати статистичні дані з подальшою їх систематизацією;
- зображати результати експериментів, спостережень, опитувань у вигляді таблиць, графіків, діаграм тощо;
- вміти інтерпретувати таблиці, схеми, діаграми, графіки, в яких подано статистичні дані;
- обчислювати та застосовувати різні вибіркові характеристики;
- застосовувати стохастичні моделі у найпростіших випадках для оцінювання шансів в іграх, ризику, прийняття рішень в тих ситуаціях, що залежать від випадку.

Діяльнісний підхід до навчання означає, що навчання стохастики повинне бути активним. Цілком можна віднести до навчання стохастики слова А.А. Столяра [293]: «Навчання математичної діяльності є активним навчанням математики. Це означає, що ми повинні навчати учнів не просто заучувати готовий матеріал, а відкривати математичні істини (відкривати для себе те, що вже відкрито в науці), логічно організовувати добутий дослідним шляхом математичний матеріал і, нарешті, застосовувати теорію в різних конкретних ситуаціях».

Мислення й активність учня спрямовані на постановку питань, гіпотез, на їх перевірку на практиці доступними йому математичними засобами. Однак, доцільно зважувати й на те, що дитина може помилятися, сумніватися та завданням вчителя тут буде вміти підштовхнути до правильного висновку, переконати, пояснити на конкретних прикладах [41].

1.4. Про значення елементів стохастики в природничій і гуманітарній освіті школяра та при вивченні оточуючої дійсності

Сучасною тенденцією вдосконалювання змісту шкільної освіти є гуманітаризація, що передбачає інтеграцію різноманітних знань про людину, її мислення, про природу та суспільство, отриманих при вивченні різних навчальних предметів, у єдину наукову картину світу [94].

Вчителям математики часто доводиться чути критичні зауваження своїх колег щодо недостатнього володіння учнями необхідними на даний момент математичними знаннями, вміннями та навичками для навчання інших шкільних предметів. Успішність розв’язання цієї проблеми визначають не тільки педагогічною майстерністю вчителя, а й взаємоузгодженістю програм навчальних предметів і змістовим наповненням підручників з математики.

Для того, щоб навчання стохастики довести до необхідного рівня, необхідно забезпечити належні умови для розвитку розумових здібностей учнів. Однією з таких умов є позитивна мотивація навчання. Важливого значення при цьому надають застосуванню знань, вмінь і навичок, що формуються при навчанні інших розділів математики та інших предметів.

Включення до програми шкільного курсу нових питань елементів стохастики розширює сферу застосування математики, що корисно як для навчання самої дисципліни, в якій використовують математичні методи, так і для навчання математики в цілому. Однак таке включення повинне забезпечувати не лише різнобічний математичний розвиток школярів, але й підвищувати їхню пізнавальну активність і самостійність, а це, в свою чергу, забезпечить можливість отримати сучасніше уявлення про традиційний зміст шкільного курсу математики та використовувати найсучасніші методи для вивчення традиційних розділів математики.

У втіленні ідей інтеграції у шкільній освіті вирішального значення зараз набуває встановлення міжпредметних (міждисциплінарних, міжнаукових та міжтемних) зв'язків.

Багато вчених вбачають у міжпредметних зв'язках засіб формування гнучкої та продуктивної системи знань і узагальнених способів дій та вмінь. Вони підкреслюють, що джерела утворення міжпредметних асоціацій знаходяться не лише всередині навчальних предметів, але й окремі поняття, задачі також є джерелами міжпредметних асоціацій, а встановлення зв'язків – необхідна психолого-педагогічна передумова для формування цілісної системи знань учнів [224].

Міжпредметні зв'язки являють собою відображення в змісті навчальних дисциплін тих діалектичних взаємозв'язків, які об'єктивно діють в природі і які вивчають сучасні науки, тому їх слід розглядати як еквівалент міжнаукових зв'язків.

По відношенню до процесу навчання міжпредметні зв'язки виступають як важлива дидактична умова, що сприяє не лише підвищенню науковості та доступності навчання, але й значному посиленню пізнавальної діяльності учнів, покращенню якості їхніх знань, уможливлює ефективний розвиток наукових поглядів і переконань учнів.

Разом з тим використання міжпредметних зв'язків передбачає і відповідні організаційні заходи, реалізація яких забезпечує можливість економніше в часі визначати структуру навчальних планів, програм, підручників, що сприяє раціоналізації навчального процесу в цілому [220, с.28]. Міжпредметні зв'язки – це зв'язки між структурними елементами змісту навчального предмету, виражені у поняттях, фактах, закономірностях, законах, теоріях, концепціях.

Проблемі міжпредметних зв'язків у сучасній освіті приділена надзвичайна увага. Актуальність міжпредметних зв'язків обумовлена тим, що сучасний розвиток науки характеризує інтеграція економічних, природничих, суспільних, технічних та наукових знань.

Проблемою вивчення міжпредметних зв'язків займалися Н. Вагіна [53], Т. Війчук [66-69], Н.В. Глотов, О.В. Глотова [81], Ю.В. Горошко [96-97], М.І.Жалдак [122-133], І.Звєрєв [146], В.М. Кедров [155], Г. Корінь [177], Г.С. Костюк [71; 266], П.Г.Кулагін [182], В.Н.Максимова [208], Г.О.Михалін [127; 130-133; 224], А.В. Скороход [297-298; 304], З.І. Слєпкань [299-300], М.Й. Ядренко [78; 112] та інші.

Міжпредметні зв'язки (табл. 1.2) входять як необхідний компонент до змісту дидактичного принципу системності навчання, що є загальновизнаним принципом вітчизняної дидактики, докладна характеристика якого дана М.І. Болдиревим [28], М.К. Гончаровим [95], Б.П. Єсиповим [265]:

Таблиця 1.2

Ознаки та функції міжпредметних зв'язків

Характерні ознаки міжпредметних зв'язків	Дидактичні функції міжпредметних зв'язків
Системоутворення (системоутворюючі зв'язки)	Сприяють координації навчального матеріалу та надають йому узагальнюючої направленості
Дія в часі (хронологічні зв'язки)	Забезпечують учням пізнавальний елемент діалектики природи
Передавання відомостей учням (інформаційні зв'язки)	Стимулюють розвиток і узагальнюють знання учнів

В.М. Кедров [155] і П.Г. Кулагін [182] так класифікували міжпредметні зв'язки:

- зв'язки між окремими предметами, що стосуються змісту навчального матеріалу,
- зв'язки між знаннями окремих предметів, що стосуються способів діяльності учнів,
- зв'язки між знаннями окремих предметів, що стосуються формування мотивів навчання.

Забезпечення учнів мотиваційним фактором міжпредметного змісту матеріалу, на якому вводять стохастичні поняття, можна здійснювати такими прийомами:

- використання побутового (життєвого) досвіду учнів та застосування його до розв'язування стохастичних задач,
- наведення прикладів задач, для розв'язування яких необхідне знання елементів стохастики,
- зацікавленість учнів історією розв'язування стохастичних задач, що уможливлює простеження розв'язування тієї чи іншої задачі в різні періоди розвитку стохастики (відомими вченими).

Міжпредметні зв'язки стохастики можуть бути продемонстровані такою схемою (рис. 1.1):

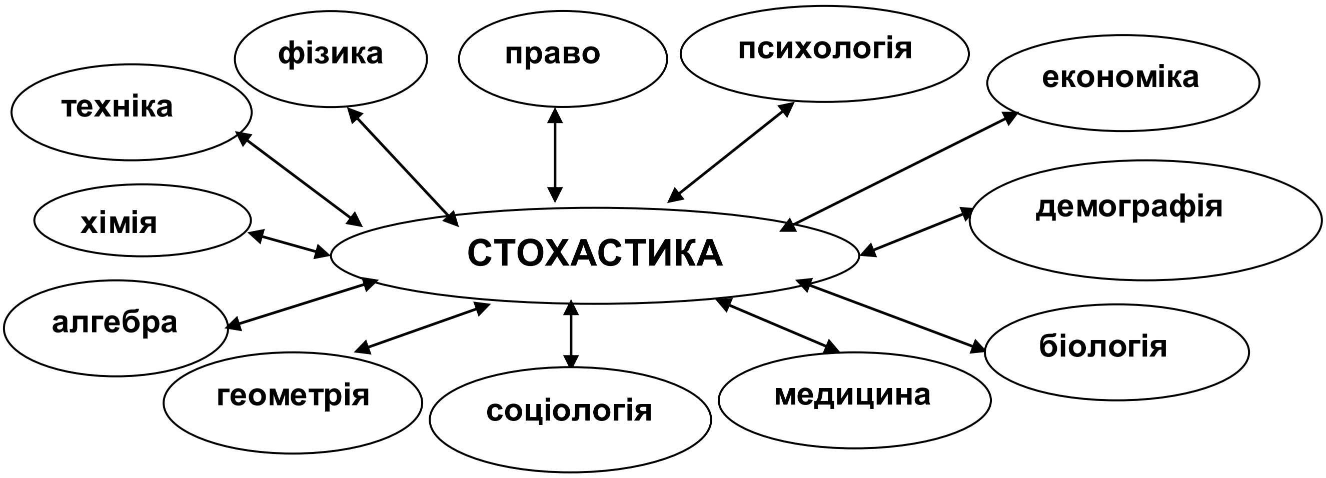


Рис. 1.1. Міжпредметні зв'язки стохастики

Ідея введення елементів стохастики у шкільний курс математики була активно підтримана не лише вченими-математиками, педагогами, а і вчителями природничих дисциплін, насамперед, фізики, хімії, біології.

Знання елементів стохастики необхідні лікарям, психологам, економістам, юристам, геологам, філологам, страхувальникам, історикам, педагогам, соціологам та ін.

Встановлення зв'язків між математикою та спорідненими предметами (фізика, хімія, біологія, географія, трудове навчання, економіка, інформатика тощо) спрямоване на забезпечення учнів системою політехнічних знань. Реалізацію цих зв'язків передусім здійснюють шляхом включення до курсу математики навчального матеріалу, необхідного для засвоєння інших предметів природничо-математичного циклу, а також за допомогою безпосереднього використання математичних ідей, методів і математичного апарату під час розв'язування різноманітних задач, що виникають при навчанні вище названих дисциплін. Достатньо уваги з боку вчителів необхідно приділяти моментам, розгляд яких забезпечує можливість учням зрозуміти, як математичні задачі виникають на ґрунті задач з інших предметів і як методи розв'язування цих математичних задач можна використовувати в ході розв'язування нематематичних задач [300].

Учитель математики повинен розуміти, що в ідеалі бажано, щоб учень отримав уявлення про елементи стохастики (випадкові події, розподіли статистичних ймовірностей та їх характеристики тощо) не тільки на уроках математики, а й фізики, ботаніки, зоології, хімії та літератури.

Своєчасне оволодіння математичним апаратом уможливлює підготовку учнів до вивчення фізики, хімії, біології з застосуванням математичних методів і з позицій сучасної математичної теорії [220, с.26].

Серед внутріпредметних математичних зв'язків слід особливу увагу приділяти зв'язкам стохастики з планіметрією та стереометрією, адже можна відмітити майже дослівне співпадання означень довжини відрізка, градусної міри кута, площі плоскої фігури та об'єму просторового тіла (за О.В. Погорєловим) та ймовірнісної міри (ймовірності), якою є, зокрема, і статистична ймовірність, оскільки задовольняє всі вимоги, які висувають до ймовірнісної міри [132].

Справді, основні стохастичні поняття є аналогічними багатьом математичним поняттям, які добре знайомі більшості учнів. Тому при вивченні елементів стохастики доцільним є використання методу аналогій, що уможливлює впізнавання в абсолютно нових для учнів фактах добре відомих, які вони опанували раніше.

Серед міжпредметних зв’язків стохастики у системі навчальних дисциплін слід особливо зазначити зв’язки з фізикою, оскільки, як відомо, зв’язки між математикою та фізикою різноманітні та постійні.

Відомо, що сучасна фізика тісно пов’язана з математикою і, навпаки, багато фізичних ідей, понять, законів та теорій покладають в основу змісту математики та формулюють у вигляді математичних тверджень.

В результаті аналізу математичної та фізичної наукової літератури, програм, підручників, методичних посібників і інших методичних джерел з методики навчання математики та фізики, вивчення досвіду роботи школи, а також власного досвіду навчання математики, виявлено можливості вдосконалення міжпредметних зв’язків шкільних курсів математики та фізики і внутріпредметних зв’язків самої математики, різних її розділів.

Процес встановлення міжпредметних зв’язків полягає не лише в тому, що при навчанні одного навчального предмету використовують відомості, засвоєні при вивченні іншого, хоча і це має місце. Мова йде про глибші зв’язки між навчальними предметами, коли вони разом слугують утворенню у школярів загальних, синтезованих понять, вмінь і навичок. Необхідно, щоб один предмет, «підхопивши естафету», розвивав деякі поняття або ідеї, і в новому, збагаченому та перетвореному вигляді, передавав ці відомості в суміжні дисципліни [220, с.62].

Як показує практика, навчання фізики нерідко ставить певні задачі перед математикою в галузі формування понять, що тільки входять в діючу шкільну програму. Вивчення цих питань в фізиці робить певний внесок і в математичну підготовку учнів у вказаних галузях знань. Зокрема, введення елементів стохастики забезпечить можливість по-новому подати такі розділи фізики, як, наприклад, обчислення середніх величин, маси тіла, центра мас тощо [69].

При аналізі програм і навчально-методичної літератури виявлено ряд труднощів, що виникають при реалізації міжпредметних зв’язків стохастики та фізики. Вони полягають в наступному:

- на уроках математики в учнів не завжди вчасно формують поняття, необхідні для вивчення курсу фізики; навчання фізики в ряді випадків «забігає вперед», але нерідко не використовує і наявні можливості;
- при навчанні стохастики не використовують поняття, сформовані при вивченні фізики (наприклад, маси тіла, центра мас, які також є мірами множин точок та характеристиками розподілів цих мір (щільність, центр мас тощо)).

Ознайомившись з поняттям середнього арифметичного у 5 класі, учні майже не використовують це поняття у подальшому в математиці. Під час вивчення інших предметів шкільного курсу, зокрема, фізики, дуже часто використовують лише формулу середнього арифметичного. Цілісне поняття можна сформувати в учнів лише за умови використання результатів аналізу стохастичних спостережень.

Прикладом використання моди у фізиці може бути така ситуація, коли потрібно швидко оцінити результати експерименту, для чого необхідно знати середній показник отриманих результатів, обчислення ж середнього арифметичного займе багато часу. Також використовують для визначення середніх значень і моду [66].

Актуалізувавши відомості з фізики про броунівський рух та його відкриття Робертом Броуном (1773-1858), можна акцентувати увагу учнів на результатах простого досліду про краплю чорнила на змоченому водою шматочку скла. Розповзання плями — це не що інше, як нескінченний хаотичний рух молекул. У результаті зіткнення вони змінюють напрям руху. Незважаючи на випадковість їх водяних шляхів, можна простежити закономірність: частинки найчастіше групуються в центральній частині, і лише окремі виходять за межі.

Без спеціальних оптичних приладів неможливо простежити, а тим більше передбачити рух окремої частинки, оскільки він складний і випадковий [56]. Тому можна запропонувати вчителю показати невеличкий відеоролик (тривалість трохи більше хвилини), який можна знайти на сайтах http://www.youtube.com/watch?v=2Vdjin734gE або http://smotri.com/video/view/?id=v933690cba (рис. 1.2).

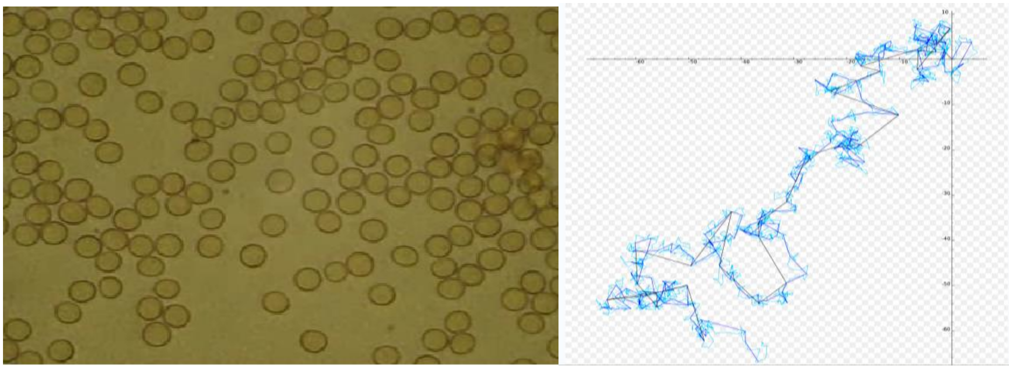


Рис. 1.2. Випадкове блукання точки

Спробуємо математизувати цю реальну ситуацію. Як математичну модель випадкового блукання точки розглянемо набір випадкових чисел (тонку плівку води розглядатимемо як площину). З метою економії часу можна використати інформаційно-комунікаційні технології [176].

Математична модель, незважаючи на спрощення, цілком відповідно відображає випадковість у блуканні частинок. Це допоможе учням зрозуміти, що результати деяких досліджень можна передбачити, використовуючи засоби стохастики. Окрім того, це забезпечить можливість підкреслити зв’язок фізики з математикою [56].

Середнє арифметичне дуже часто використовують у шкільному курсі фізики як для опрацювання результатів експериментів, так і для виведення формул для обчислення значень фізичних величин. У табл. 1.3 наведено, у зв’язку з якими фізичними поняттями використовують середнє арифметичне та середнє зважене (Механіка – 9 клас) [66].

Таблиця 1.3

Фізичні величини, для обчислення

яких використовують середні значення

Фізична величина	Формула обчислення фізичної величини
Середня швидкість рівномірного руху	$v_{ap}=\frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{n}$
Середня швидкість нерівномірного руху	$v_{ap}=\frac{v_1t_1+v_2t_2+\ldots+v_nt_n}{t_1+t_2+\ldots+t_n}$
Центр ваги	$x=\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}$
Центр мас	$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_ix_i}{m_1+m_2+\ldots+m_i}$
Середня сила пружності	$F_n=\frac{F_1+F_2}{2}$

Вивчення елементів стохастики уможливлює широке використання міжпредметних зв’язків і у класах фізико-математичного профілю, де є доцільним використання статистичного матеріалу, отриманого учнями на лабораторних роботах з фізики, роботах-практикумах.

Зв’язки стохастики з іншими предметами можна реалізовувати у формі інтегрованих уроків, зокрема, доцільно провести інтегроване заняття з фізики та математики на теми «Розподіл молекул за швидкістю та побудова гістограм», «Випадкові похибки вимірювань», «Дисперсія розподілів статистичних ймовірностей» [66].

Вивчення елементів стохастики розкриває широкі можливості для встановлення як внутріпредметних, так і міжпредметних зв’язків, зокрема, однаковість формул для обчислення мас тіл (при заданій густині речовини) та статистичної ймовірності (при заданій щільності розподілу), координат центру мас (однорідного чи неоднорідного) стержня та координат центра розсіювання статистичних ймовірностей (з рівномірним чи нерівномірним їх розподілом), координати центра системи мас точок і координати центра розсіювання статистичних ймовірностей при їх дискретному (рівномірному чи нерівномірному) розподілі, площі криволінійної трапеції під графіком функції *f(x)=0* над відрізком *[a,b]* і статистична ймовірність потрапляння на відрізок *[a,b]* при заданій щільності *f(x)* неперервного (як рівномірного, так і нерівномірного) розподілу статистичних ймовірностей тощо [122, с.216].

На уроках фізики та хімії бажано сформувати в учнів уявлення про те, що найпростіші положення, факти, закони науки про випадкові явища допоможуть відкрити важливі закономірності хаотичного руху величезних скупчень молекул, у яких вплив окремої молекули дуже малий. До таких закономірностей належать, зокрема, закони Бойля-Маріотта та Гей-Люссака. Вони не носять характеру абсолютної істини – зі зменшенням кількості молекул спостерігають відхилення від цих закономірностей. Характер цих відхилень також описано за допомогою методів стохастики.

На уроках ботаніки та зоології бажано сформувати в учнів уявлення про стохастичні закономірності розподілу властивостей особин одного і того самого виду та віку: зріст, тривалість життя, вага тощо [68].

Всім, хто мріє стати біологом, необхідно навчатися елементів стохастики, оскільки вона є базою для вивчення біометрії – статистичного методу досліджень в біології.

Часто можна почути, що ми живемо у детерміністсько-ймовірнісному світі. Коли мова йде про живу природу, ймовірнісний аспект посилюється. Насправді, живе на будь-якому рівні органічного життя (клітинного, організменного, популяційного, біогеоцентричного) представлено навіть не складними, а надскладними системами. А сучасна математика та біологія точно свідчать, що складне схоже на випадкове. Іншими словами, поведінку складних і надскладних систем зручно досліджувати методами стохастики.

При вивченні теми «Мінливість» обговорюють поняття «мутації» та «модифікації». Мутації характеризують як рідкісні випадкові події. Тема «Модифікаційна мінливість» вимагає знання властивостей розподілу статистичних ймовірностей.

До сучасної шкільної програми з біології (11 клас) давно ввійшли елементи генетики. Поняття стохастики лежать в основі цієї науки. Такі питання загальної біології, як питання популяцій, закон Харді-Вайнберга, еволюція шляхом природного відбору, форми відбору, не можуть бути зрозумілими без уявлень про стохастичні поняття та закони.

Статистичні ймовірності використовують при встановленні закону розщеплення ознак Г.Менделя. При вивченні явища зчепленого успадкування використовують формулу статистичної ймовірності добутку подій та статистичної ймовірності суми подій. Для дослідження мінливості ознаки складають варіаційний ряд: впорядкований набір числових показників проявів певної ознаки (варіант), розташованих у порядку їхнього зростання чи спадання. Йдеться про розмах варіаційного ряду як про «розмах модифікаційної мінливості», будують полігон частот, який називають варіаційною кривою. Однак у біології дають трактування всіх зазначених понять на інтуїтивному рівні, математичні означення цих понять відсутні, оскільки даний розділ загальної біології (за одинадцятирічною програмою) вивчають у першому півріччі 11 класу [138, с.191], а елементи стохастики — у другому. Така неузгодженість викликає надзвичайні складнощі при вивченні розділу «Спадковість та мінливість організмів», і більшість школярів називає його найскладнішим у шкільному курсі біології [317].

А деякі механізми спадковості, які вивчає генетика, повністю вкладаються в стохастичні схеми. Зокрема, відомі дослідження Г.Менделя, які докладно проаналізовані в шкільному підручнику з біології [81].

Розглянемо дослідження, що обумовлює II закон Г.Менделя. На його останньому етапі Г.Мендель сіяв насіння гороху жовтого кольору, з них виростали рослини як з жовтим, так і з зеленим насінням. Причому співвідношення кількості рослин з жовтим насінням до кількості рослин з зеленим насінням було близьке до співвідношення 3:1. Дослідження повторювали багаторазово та це співвідношення завжди залишалося. Сучасна генетика дає наступне пояснення цього результату. Колір насіння рослини визначають парою генів, які воно отримало по одному від кожного з батьків. В дослідженні Г.Мендель вивчав рослини, що мали гени двох типів *А* (жовте насіння) – домінантна ознака та *а* (зелене насіння) – рецесивна ознака.

Це означає, що якщо у рослини є пара генів *Аа*, *аА* або *АА*, то вона має жовте насіння, якщо *аа* – зелене. Можливі чотири комбінації генів: *АА, Аа, аА, аа* (перший ген батьківський, другий – материнський). Всі ці чотири комбінації генів рівноможливі. З них 3 будуть мати жовте насіння, 1 – зелене.

Базується на визначенні статистичної ймовірності та докладно описане дослідження, що підтверджує ІІІ закон Г.Менделя (*А* – жовте насіння, *а* – зелене насіння, *В* – гладке насіння, *в* – зморщене насіння). Тут можливі такі комбінації генів: *ААВВ, АаВВ, аАВВ, ааВВ, ААВв, АаВв, аАВв, ааВв, ААвВ, АавВ, аАвВ, аавВ, ААвв, Аавв, аАвв, аавв* (9 – жовті гладкі, 3 – жовті зморщені, 3 – зелені гладкі, 1 – зелені зморщені). Співвідношення 9:3:3:1. Цим дослідженням Мендель довів незалежність наслідування ознак. Це дослідження можна використати в якості прикладу при вивченні незалежних випадкових подій.

В генетиці є й інші явища, що досліджують методами стохастики, наприклад, неповне домінування. В підручнику з біології для 10-11 класів М.Є. Кучеренка, Ю.Г. Вервеса, П.Г. Балана [138, с.191] проаналізовано приклад наслідування кольору квіток у рослини «Нічна красуня» (*АА* – червона, *Аа*, *аА* – рожева, *аа* – біла). Коли саджають рожеві рослини, співвідношення появи червоних, рожевих і білих: 1:2:1. Отже формування комбінації генів, що визначають ті чи інші спадкові ознаки, можна трактувати як випадкове, а це означає, що закони спадковості мають ймовірнісний характер. Звичайно введення в шкільний курс математики елементів стохастики буде сприяти усвідомленню сприйняття відомих біологічних законів. А підручник з біології буде, в свою чергу, демонструвати використання законів математики в біології, зміцнюючи тим самим міжпредметні зв’язки [92].

При вивченні шкільного курсу біології у розділі «Спадковість та мінливість організмів» на інтуїтивному рівні школярів знайомлять з багатьма стохастичними поняттями. На прикладі решітки Пеннета[3] (рис. 1.3) — з поняттям простору елементарних подій [317].

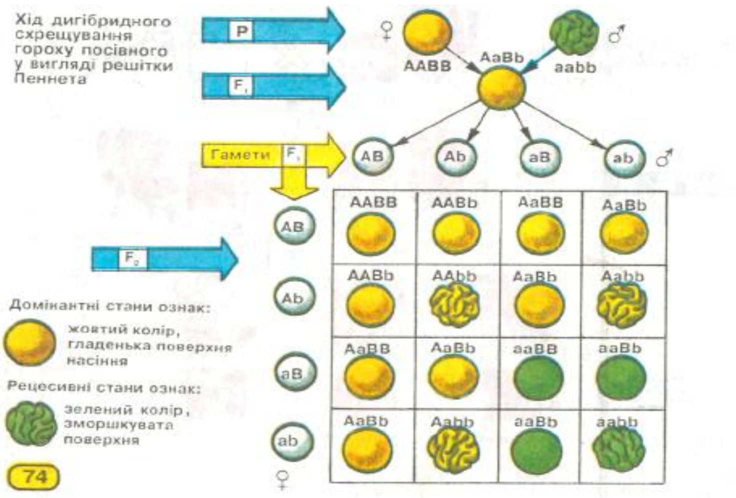


Рис. 1.3. Решітка Пеннета ([138, с. 194])

Вивчення нормального розподілу ймовірностей, як правило, розпочинають з ілюстрації знайомого зі шкільного підручника біології малюнка [138, с.229], де розкладені за зростанням у рядок листки з лавровишні; побудована емпірична крива розподілу. Відомий голландський математик Ван дер Варден пригадує: «Одного разу, коли я був ще дитиною, батько привів мене на околицю міста, де на березі річки росли осокори, та наказав мені зірвати навмання близько сотні листків. Повернувшись додому, після відбору листочків з пошкодженими кінчиками у нас залишилося 89 цілих листочків, ми розклали їх у рядок «за зростанням», як вояків. Потім батько провів через кінчики листків криву і сказав: «Це і є крива Кетле[4]. Дивлячись на неї, ти бачиш, що посередність завжди складає більшість, і лише деякі піднімаються вище чи залишаються знизу» [54, с.84]. Ці слова є чудовим доповненням до цього малюнку (рис. 1.4).

На уроках математики учнів можна познайомити з застосуванням стохастичних методів у гуманітарних науках, розглянути історію

[3] Решітка Пеннета – двовимірна таблиця для визначення поєднання алелей, що походять з генотипів батьків і поєднуються при злитті материнської та батьківської гамет. Запропонована Р. Пеннетом в 1906 році.
[4] Крива Кетле – один зі способів подання нормального чи гаусового розподілу.

розшифровки давньоєгипетської ієрогліфічної писемності та вавілонського клинопису текстів, проблеми автоматичного перекладу з однієї мови на іншу, розшифровки закодованих текстів, статистичних особливостей мови окремих письменників тощо [224].

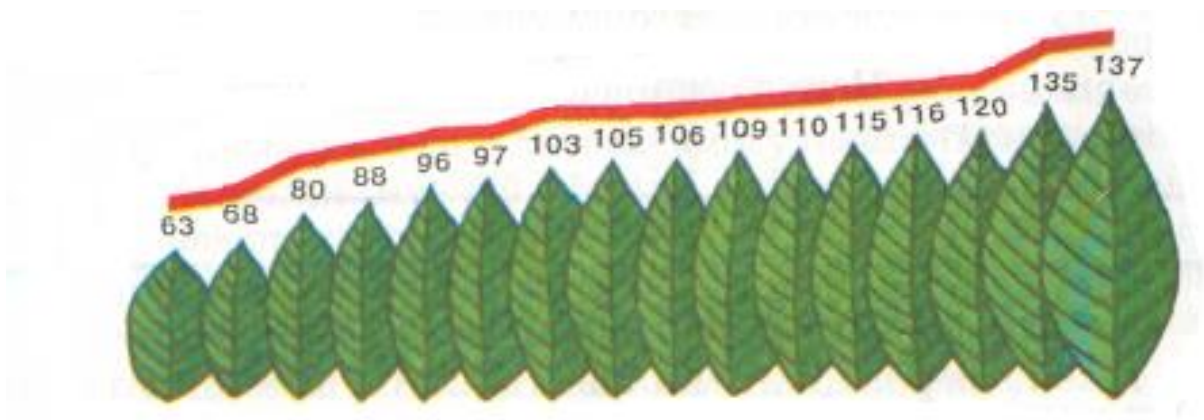


Рис. 1.4. Варіаційний ряд листків лавровишні ([138, с.229])

У формуванні наукового світогляду та прикладних умінь учнів провідна роль зв’язків стохастики зі спорідненими навчальними предметами є загальновизнаною, однак у контексті проблем інтеграції різнорідних знань набуває актуальності реалізація тих зв’язків, що існують між стохастикою та предметами гуманітарного циклу [146].

Одразу зазначимо, що специфіка цих зв’язків полягає в тому, що часто вони мають опосередкований характер, і навіть досвідченим учителям буває складно визначити шляхи їх можливої реалізації. Ефективність значною мірою залежить від координації знань учнів з різних навчальних дисциплін та наявності єдиного підходу до трактування тих чи інших наукових понять, ідей, методів, фактів, процесів і явищ та врахування часу їх вивчення [53].

Стохастичні методи використовують і в археології для визначення дати захоронення, розкодування записів, зроблених мовою стародавніх цивілізацій, у мовознавстві – для визначення інформативності мови окремих письменників і поетів, виявлення літературних підробок.

У психології та педагогіці – для опрацювання результатів масових досліджень, в економіці – планування й аналіз виробництва, у виробництві – під час перевірки якості продукції тощо.

На жаль використання стохастичних понять на уроках математики дуже часто припиняється разом із завершенням вивчення даної теми, тому під час повторення інших тем математики доцільно включати завдання, які б містили стохастичні поняття та методи [67].

Міжпредметні зв'язки стохастики з іншими шкільними предметами можна реалізовувати у двох напрямах:

- природничі та гуманітарні науки виступають джерелом задач для стохастики;
- стохастичні методи стають у нагоді при дослідженні різноманітних явищ у природничих та гуманітарних науках.

Внутріпредметні зв'язки в процесі навчання елементів стохастики можуть бути логіко-математичного та методологічного характеру. Логіко-математичні зв'язки є доволі глибокими зв'язками, які випливають з логіки та змісту елементів стохастики, на їх основі в подальшому будують вивчення матеріалу. Методичні зв'язки виконують суто дидактичні функції та можуть бути реалізовані з метою ілюстрації, порівняння, співставлення, протиставлення тощо [26].

Налагодження зв'язків, особливо логіко-математичних, між різними розділами та темами в процесі навчання математики до сьогодні реалізовано дуже мало та має не систематичний, а фрагментарний характер. Це одна з причин того, що сьогодні більшість учнів середніх навчальних закладів сприймають математику не як єдину цілісну теорію, а як збірник мало пов'язаних між собою фактів, рекомендацій, задач. Це повною мірою стосується і елементів стохастики. Учень, як правило, зберігає в пам'яті знання у вигляді тематичних блоків і краще буде засвоювати матеріал з курсу математики, якщо окремі блоки (розділи, теми) цього курсу подаватимуться йому як пов'язані між собою блоки навчального матеріалу. Фрагменти навчального матеріалу, зв'язки між якими учень не відчуває, не осмислює, запам'ятовуються гірше. Міжтемні зв'язки слід віднести до внутріпредметних, в основному, логіко-математичного характеру, але які можуть виконувати функції методичних зв'язків [26].

В освітньому стандарті донедавна розглядали елементи стохастики лише в класах і школах з поглибленим навчанням математики, на сучасному етапі вони стали базовими знаннями для учнів і загальноосвітніх шкіл [108].

На навчання елементів стохастики з програмами дванадцятирічної школи відводять близько 30 годин (у 6-х, 9-х і 11-х класах). Зрозуміло, що за цей час ґрунтовно оволодіти знаннями й особливо відповідними вміннями та навичками розв'язування задач з цієї теми практично неможливо, тому важливо правильно оцінити, які знання та способи діяльності потрібні сучасній людині у повсякденному житті та діяльності, що з них буде потрібне для вивчення інших шкільних предметів, для продовження освіти, для розвитку інтелекту учня. Необхідно потурбуватися також про те, щоб змістове наповнення сучасної програми з математики органічного поєднувало елементи стохастики з традиційними змістовими лініями та сприяло розвитку міжпредметних та міжтемних зв'язків.

Передбачений програмами [267; 270] обсяг матеріалу з елементів стохастики є недостатнім, і якщо зміст програми не доповнити, то вони так і будуть існувати для багатьох, як додаткова, зайва частина, яка в кращому випадку є своєрідним протиприродним продовженням комбінаторики або аналізом статистичних даних [327]. Однак ще А. Реньї [280-281] зазначав, що стохастика знаходить застосування у повсякденному житті, науці, техніці.

Розв'язування задач значною мірою підсилює бачення міжпредметних зв'язків. Тому доцільно навести перелік задач, які доцільно розглянути на уроках математики для демонстрації цих зв'язків з різними навчальними дисциплінами, зокрема, з геометрією, алгеброю, мовознавством тощо.

На уроках можна запропонувати учням розв'язати такі задачі:

1. Ряд методів комп'ютерної діагностики захворювань базується на використанні формули Байєса. Спершу на основі статистичного аналізу великої кількості історій хвороб з підтвердженим діагнозом визначають

статистичні ймовірності прояву різних симптомів при різних захворюваннях. Потім ці дані вносять до запам'ятовуючих пристроїв комп'ютера і на їх основі оцінюють ймовірності появи певних хвороб за наявної сукупності симптомів у даного пацієнта, встановлюють діагноз або роблять висновок про необхідність додаткових досліджень, аналізів тощо. Припустимо, що у деякого пацієнта симптоматика з статистичною ймовірністю $p(A)=0,8$ вказує на захворювання *A* і з статистичною ймовірністю $p(B)=0,6$ — на захворювання *B*. Проведено додаткове дослідження на виявлення симптому *C*, який спостерігають у 90 % пацієнтів з хворобою *A* та у 10 % — з хворобою *B*. У пацієнта симптом виявлено. Чому дорівнює статистична ймовірність наявності захворювання *A*? [317].

2. За статистичними даними, в середньому один із 700 хлопчиків народжується із зайвою У-хромосомою. У таких дітей агресивна поведінка зустрічається у 20 разів частіше, ніж у звичайних. Припустимо, хлопчик має агресивну поведінку. Чому дорівнює статистична ймовірність того, що у нього є зайва У-хромосома?

3. У розвинених країнах статистична ймовірність захворювання на туберкульоз (визначена за результатами обстежень) дорівнює 0,04%. Припустимо, обстежували 20 000 людей за допомогою тесту, який виявляє захворювання у 95% хворих на туберкульоз і у 5% здорових людей. У якої кількості людей з даної вибірки найчастіше був туберкульоз? У якої кількості людей найчастіше тест виявляв туберкульоз? У якої кількості хворих людей найчастіше туберкульоз не було виявлено? Чому дорівнює статистична ймовірність того, що не було пропущено жодного хворого на туберкульоз?

4. В популяції зустрічається три генотипи *AA, Aa, aa.* Частка особин типу *AA* дорівнює *x*, частка особин типу *Aa – 2y*, а частка особин типу *aa – z,* тобто структура популяції є такою: *AA– x, Aa– 2y, aa– z*. Знайти статистичну ймовірність того, що обраний навмання ген є домінантним та статистичну ймовірність того, що такий ген є рецесивним. Записати структуру популяції потомства. Отриманий результат свідчить, що з другого покоління

встановлюється стаціонарна структура популяції. Цей факт називають законом Харді, він є узагальненням другого закону Г.Менделя [316].

5. На основі семестрових оцінок учнів класу з математики (11, 10, 7, 5, 8, 5, 6, 4, 9, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 8, 9, 6, 5, 8, 9, 11, 10, 6, 7, 8, 7, 7, 8, 6, 5) скласти частотну таблицю і побудувати стовпчасту діаграму, а також поміркувати, яка з числових характеристик розподілу частот (мода, медіана чи середнє арифметичне) найкраще характеризують успішність у цьому семестрі.

6. Замок на скрині можна відчинити за допомогою числового коду. Допоможіть відкрити замок, якщо в печері, поруч зі скринею було знайдено набір чисел: 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 9, 9, і підказку: перше з чисел коду є медіаною, друге – модою, третє – середнім арифметичним, а четверте – число з найменшою частотою.

7. Відомо, що «о» – найпоширеніша літера в україномовних текстах. Прочитати уривок.

ОСОБЛИВОСТІ УКРАЇНСЬКИХ РІК

Українські ріки мають такі чотири особливості. Перша – неоднакова висота берегів. Коли плисти Дніпром униз на південь, то праворуч берег високий, крутий, а лівий берег – низький. Високі праві береги мають також Дон, Донець та інші ріки, що течуть на південь. Друга особливість – це глибокі, вузькі і стрімкі розколини – долини рік. Третя особливість – пороги. Це скелі, що виступають з води на всю ширину ріки. Найбільші пороги були на Дніпрі. Четверта особливість – лимани. Лимани – це затоплені долини рік у місці, де вони входять у приморську смугу. Найбільший з усіх – Дніпро-Бузький лиман. Лимани – це особливість тільки українських чорноморських рік, ніде більше лиманів немає.

Завдання: а) побудувати полігон відносних частот появи кожної голосної у цьому уривку;

б) порівняти відносну частоту входження в текст голосних «о», «а», «у»,

в) чи можна стверджувати, що літера «о» – найпоширеніша літера в україномовних текстах, проаналізувавши лише цей уривок?

8. Які літери – голосні чи приголосні – зустрічаються частіше в кожному з уривків віршів?

1) Найпрекрасніша мати щаслива,
Найсолодші кохані вуста,
Найчистіша душа незрадлива,
Найскладніша людина проста.

Василь Симоненко

2) Снежинки падали с небес
В таком случайном беспорядке,
А улеглись постелью гладкой,
И строго окаймили лес.

С. Я. Маршак

Завдання: а) порівняйте частоту появи голосних і приголосних в наведених віршах. Чи можна говорити про частоту появи цих літер в українській і російській мовах, проаналізувавши тільки ці уривки?

б) побудуйте полігон відносних частот появи голосних та приголосних в українському тексті й окремо в російському. Порівняйте їх.

Методи стохастики знаходять все ширше застосування в різних галузях науки. На думку відомого математика Б.В. Гнєденка, «теорія ймовірностей є одним із найефективніших засобів кількісного дослідження різноманітних явищ в природі та суспільстві. Ця теорія надає досліднику не тільки й не стільки обчислювальний апарат пізнання, скільки найширші концепції, що уможливлює знаходження порядку та закономірностей там, де класичний детерміністичний підхід є безсилим» [89]. Стохастичні методи поряд з іншими математичними, фізичними та хімічними методами стали потужним інструментом сучасної медицини, їх широко використовують як у наукових розробках, в організації охорони здоров’я, так і в клінічній практиці: при розробці методів медичної діагностики, в теорії епідемій, імунології, медичній генетиці, у плануванні та розробці методів медичного експерименту, при тестуванні лікарських препаратів тощо [317].

При вивченні дискретних розподілів статистичних ймовірностей як ситуаційну можна розглянути задачу, що базується на методиці, запропонованій Р. Дорфманом під час другої світової війни: припустимо, великій кількості людей n потрібно зробити аналіз крові на певне захворювання. Яким чином можна провести значне за кількістю дослідження з максимальною економією часу та препаратів?

Для загального розвитку учнів можна повідомити, що застосовуючи розроблений Р. Дорфманом підхід, можна зменшити кількість потрібних для повного обстеження аналізів на 80%. Інколи вдається створити на уроці творчу атмосферу, що заохочує учнів до дискусії, можливості висловити власні міркування, знання. Проаналізувавши запропоновані варіанти, доцільно розглянути методику Р. Дорфмана, в якій він запропонував утворити групи по k осіб (як правило, обирався окремий військовий підрозділ). Проби крові людей з однаковою групою змішували й аналізували суміш. Якщо результат негативний, то одного аналізу було достатньо для k осіб. Якщо ж він позитивний, то кров кожного з k людей потрібно дослідити окремо і для k людей необхідно виконати $k + 1$ аналіз [334].

Через використання міжпредметних зв’язків можна продемонструвати учням сфери застосування стохастичних методів дослідження та тим самим виконати одне з найважливіших завдань навчання та виховання – формування світогляду учня.

1.5. Зарубіжний досвід навчання елементів стохастики в школі

У наш час елементи стохастики є теоретичною основою багатьох економічних, соціологічних, спеціальних дисциплін, вони знаходять широке застосування в багатьох галузях діяльності людини: в техніці, біології, фізиці, хімії, військовій справі тощо. Тому в школах різних країн світу починають приділяти стохастиці все більше уваги.

Для того, щоб оцінити необхідність включення стохастики в сучасну математичну освіту, розглянемо історію навчання її елементів в школах різних країн світу.

Починаючи з другої половини XIX ст. Росія була «єдиною країною, в якій основи стохастики культивували з тією серйозністю, якої заслуговував цей розділ математики за своєю видатною роллю в природничих, суспільних і технічних науках. Цим своїм виключним правом «російська» стохастика повністю зобов'язана роботам П.Л. Чебишова». Тим більше, що саме в цей період були значно розширені межі застосування стохастичних ідей, зокрема, в статистичній фізиці, виникнення якої пов'язано з іменами таких видатних фізиків-теоретиків як Л.Больцман (1844-1906), Д.Максвел (1831-1879) та Д. Ґіббс (1839-1903). Причому, як вважав Больцман, статистичні методи є застосовними не лише в молекулярно-кінетичній теорії, а й при вивченні електромагнітних хвиль. Больцман розвивав статистичні уявлення в фізиці, об'єктивно підготувавши фундамент для виникнення квантової теорії [163].

Р.Мізес, який очолював свого часу Інститут прикладної математики в США, засновник частотної концепції в теорії ймовірностей, вважав, що стохастика не є математичною дисципліною, що це лише дисципліна, яка широко використовує математичні методи. Він формулював дві основні аксіоми стохастики, але не надавав їм значення аксіом математичної теорії, а розглядав як властивості колективу – основного поняття в своїй частотній теорії. В цій теорії ймовірність втрачає свій зміст об'єктивної числової характеристики реальних явищ. Цим же шляхом – шляхом суб'єктивного тлумачення теорії ймовірностей – пішов і італійський математик Бруно де Фінетті та деякі інші послідовники Р.Мізеса. Але усі ці спроби в свій час зазнали критики, зокрема зі сторони Б.В. Гнєденка та О.Я. Хінчина [163].

З другої чверті XIX ст. Росія міцно посідала перше місце в Європі за рівнем розвитку науково обґрунтованих стохастичних ідей. Цікаво відмітити, що вже протягом багатьох останніх років країни Європи, США, Японія [309; 369-379] та деякі інші в обов'язковий компонент шкільного курсу математики включають не лише окремі питання стохастики (які пов'язані в цілісну змістову лінію), але й окремі розділи теорії ймовірностей та математичної статистики.

У Франції в галузі освіти дуже часто відбуваються різноманітні реорганізації. Кожен міністр освіти докорінно змінює чинні програми. Свого часу прихильники реформ синтезували абстрактний підхід Бурбакі, розвивали застосування математики, збільшували значення стохастики в програмах старших класів.

Доцільно також зазначити, що стохастика складає майже половину шкільного курсу математики в старших класах Великобританії. В підручнику «Алгебра і геометрія» випускного класу подані основи теорії ймовірностей, а саме: позакласно за допомогою комп'ютерних розрахунків експериментально учні встановлюють характеристики розподілу простих чисел [356].

У США шкільні вчителі періодично проходять тестування, традиційно в тесті 21 питання (приблизно 7% з яких – питання зі стохастики). Процес отримання ліцензії на освітню діяльність в школі починається, як правило, з того, що пошукач складає серію тестів. Однією з найпоширеніших тестових серій є «Праксин». В ній математична частина подана наступним чином:

Математика – 1 (базовий тест) – 25% питань з вищої математики (зокрема, математичний аналіз, функції однієї змінної, абстрактна та лінійна алгебра, дискретна та комплексна математика, стохастика).

Математика – 2 (тест підвищеної складності) – питання зі стохастики, математичних доведень, методики навчання математики, моделей і проблем, загальної математики (ймовірнісні теореми, середні значення, міри, центральні тенденції, стандартне відхилення, елементарні розподіли, властивості нормального розподілу) [288].

В тесті можна зустріти задачі приблизно такого змісту:

Задача 1. Розподіл відносних частот екзаменаційних оцінок 500 абітурієнтів з середнім значенням 70 і стандартним відхиленням 10 (оцінки мають такі межі: оцінка А – більше 86, оцінка В – від 81 до 86, оцінка С – від 60 до 80, оцінка D – від 53 до 59, оцінка Е – менше 53).

Скільки студентів приблизно отримали оцінку, більшу за С.

A. 50
B. 80
C. 100
D. 120
E. 160

Задача 2. Якщо учень намагається навмання відповідати на 20 альтернативних питань тесту типу «правильно – неправильно», то яка ймовірність того, що всі відповіді будуть правильні.

A. 0
B. $\frac{1}{2^{20}}$
C. $\frac{1}{20}$
D. $\frac{1}{2}$

Процес введення стохастичної лінії свого часу відбувався і в старших класах реальних училищ Німеччини, в сьомих класах реальних училищ та гімназій Австрії тощо. Однак, втіленню подальших планів реорганізації шкільної математичної освіти стала на заваді Перша світова війна.

В естонських школах в 20-х роках XX ст. продовжували реформування шкільної математики. Поряд з питаннями аналітичної геометрії та математичного аналізу в програми ввійшли також і елементи стохастики. Спочатку було більше уваги приділено теорії ймовірностей. А починаючи з 1921 року, зросло значення математичної статистики, яке набуло своєї кульмінації в кінці 30-х років.

Другий період реформаторського руху в шкільній математиці розпочався наприкінці 50-х років, а підійшов до свого завершення в кінці 60-х років XX ст. Означена реформа однозначно оцінювала елементи стохастики як необхідну змістову лінію в шкільних математичних курсах, однак об’єм питань, що пропонували для включення до програми за цими розділами, були дуже різними та коливалися від найпростіших основних понять і фактів до складних та об’ємних курсів. Різним був також і методологічний підхід до побудови курсів стохастики. Так, в багатьох країнах елементи стохастики включені до обов'язкової програми. Включенням одного з цих розділів обмежилися лише деякі країни [163].

В окремих країнах (колишня Західна Німеччина та Данія) питання зі стохастики пропонували вивчати на вибір, а в інших (зокрема, колишні СРСР та Східна Німеччина) означені питання включали лише до факультативних курсів [373].

Так в нашій країні факультативний курс теорії ймовірностей та математичної статистики в школах почали вивчати вперше в 1966-1967 навчальному році [86; 169].

Об'єм та зміст шкільного курсу стохастики сильно коливався. Так, наприклад, в школах 3-го ступеня (9-11 класи) В'єтнаму учнів знайомлять лише з початками теорії ймовірностей у вигляді бесіди.

В колишній Югославії доходили до правил обчислення ймовірностей сум та добутків подій. В Швеції та Голландії до вивчення основних понять додають також розгляд біноміального та нормального розподілів ймовірностей. Ще більший об'єм курсу теорії ймовірностей передбачено в програмах шкільної математики в Японії, Бельгії, США та Великобританії [309; 371; 372; 374; 378; 379], де передбачали навіть можливість ознайомлення учнів з аксіоматичною побудовою теорії ймовірностей.

На сучасному етапі в країнах Західної Європи також відбувається реформаторський рух в шкільній математичній освіті, під час якого намагаються удосконалити шкільні програми з огляду на розвиток стохастичного мислення (з'являється поняття статистичної ймовірності).

Програма з математики для японської молодшої середньої школи передбачає ознайомлення учнів з однією з основних характеристик розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини – математичне сподівання. Основну увагу акцентують на його змісті та знаходженні в простих випадках, наприклад, у випадку з лотерейними білетами.

В курсі теорії ймовірностей учнів знайомлять лише з найнеобхіднішими початковими знаннями. При цьому пояснюють їх в основному на конкретних прикладах. Але в той же час роблять кілька старанно продуманих і дібраних змістових наголосів, що зосереджує увагу школярів на найістотніших теоретичних установках, основних ідеях та законах науки. Це доцільно, хоча на перший погляд пам’ять учнів перевантажують теоретичними відомостями, але їх знайомлять лише з правильними концепціями тієї чи іншої науки та готують тим самим до сприйняття в майбутньому складнішого матеріалу [309; 374; 378; 379].

При розгляданні окремих питань стосовно навчання елементів стохастики в японських школах можна відмітити, що важливою й істотною є спроба японських педагогів ознайомити членів суспільства зі стохастичними закономірностями ще в шкільному віці (у досить юному), що позитивно впливає на формування їхнього загального наукового світогляду.

Учні японських шкіл повинні:

- навчитися збирати та систематизувати статистичні дані у відповідності з певними цілями, розуміти зміст таблиці розподілу частот, гістограм, відносної частоти та кумулятивної частоти;
- розуміти зміст середнього значення, моди, медіани;
- удосконалювати вміння послідовно класифікувати та систематизувати зібрані статистичні дані;
- вміти розкривати зміст основних характеристик величин;
- вміти розкривати зміст поняття статистичної ймовірності.

Велику увагу при навчанні стохастики приділяють прикладам, що мають практичне значення. Крім того можна спостерігати спроби тісніше пов’язати стохастику з теорією пізнання. Учнів привчають до розуміння того, що сліпе застосування стохастичних принципів (таких, як «малоймовірні події», «практично неможливо») може привести до хибних висновків. У них виховують недовіру до збігів, вміння свідомо підходити до оцінки ймовірності подій, що трапляються у повсякденному житті [309].

Зокрема, в японських шкільних програмах розглядають наступні питання [309; 374; 378; 379]:

а) принцип поділу даних на групи та використання при цьому необхідної термінології;

б) гістограма та крива розподілу частот;

в) зміст відносної частоти;

г) крива розподілу частот і типи розподілів;

д) зміст кумулятивної частоти, її таблиці та графіки.

е) зміст репрезентативних значень;

є) зміст середнього значення, його знаходження за допомогою таблиць розподілу частот;

ж) зміст та обчислення моди та медіани;

з) вміння правильно використовувати середнє значення, моду та медіану у відповідності з особливостями кожної з цих величин.

При цьому рекомендують наводити якомога більше прикладів з оточуючого середовища та повсякденної практики.

При навчанні елементарного курсу теорії ймовірностей японські педагоги надають великого значення знаходженню ймовірності. При цьому розглядають два методи, відповідно до двох означень ймовірності:

а) з одного боку ймовірність розглядають як міру появи події;

б) з іншого боку як відношення кількості шансів, які сприяють події, до загальної кількості рівноможливих шансів (що фактично є «класичним означенням» ймовірності, «бездумне» використання якого широко критикують в сучасній методичній літературі, зокрема, М.І. Жалдак, Г.О. Михалін [122-133], Д.Е. Майстров [203-204] та ін.).

При вивченні теорії ймовірностей необхідно базуватися на конкретних даних з реальної дійсності, а також тих даних, які потім можуть знадобитися в практичній, професійній діяльності випускників школи. Увагу доцільно акцентувати також на застосуванні комп’ютера при потребі робити статистичні висновки [309].

В багатьох країнах, зокрема, в Голландії, Великобританії, Румунії та колишніх республіках Югославії шкільна програма зі стохастики містить, як правило, поняття випадкової величини та статистичної сукупності, подання статистичних даних табличним та графічним способами, середні показники розсіювання. В Бельгії навіть розглядають елементи лінійної кореляції.

Міжнародне дослідження з тенденцій розвитку математичної та природничої освіти учнів 4-х і 8-х класів. TIMSS 2007 є четвертим циклом досліджень якості математичної та природничої освіти, яке проводиться кожні 4 роки, в ньому взяли участь майже 425 тис. школярів із 59 країн (представники 37 країн і 7 окремих регіонів – в дослідженні для учнів четвертих класів і 50 країн і 7 регіонів – для учнів восьмих класів). Уперше брали участь українські школярі, які посіли 26 місце серед учнів 4-х класів і 19 – серед восьмикласників [364; 365; 366]. За визначенням організаторів дослідження складовими математичної грамотності є не лише вміння аналізувати й інтерпретувати кількісні дані, але й подавати їх у вигляді таблиць, графіків, діаграм, розв'язувати завдання, пов'язані з аналізом даних і обчисленням ймовірностей [39]. До речі, одне з тематичних завдань цього дослідження для учнів класів з поглибленим вивченням математики було зі стохастики.

Серед головних причин не включення елементів стохастики до обов'язкових шкільних програм другого етапу реформування шкільної освіти, називали, зокрема, такі:

1) перевантаженість програм з математики;

2) недостатня підготовленість вчителів до навчання означених питань;

3) відсутність початків диференціального та інтегрального числення в шкільній математиці;

4) важкість переходу від детерміністського методу аналізу різних явищ, які нав'язують в школі протягом перших років навчання, до стохастичних;

5) брак навчального часу не забезпечує можливості учневі набути необхідних практичних навичок в розв'язуванні стохастичних задач, а значить впоратися з великим обсягом зовсім нових для нього понять.

Якщо ж порівняти ці проблеми з сучасними проблемами впровадження елементів стохастики під час третього реформаторського періоду (кінець 90-х рр. ХХ ст. – початок ХХІ ст.), то можна зазначити, що перший та третій чинники тепер вдалося усунути. Але замість них сучасна реформа висунула нові проблеми, пов’язані з процесами інтеграції та диференціації навчання.

На жаль, досі недостатньо розроблено методичну систему навчання елементів стохастики: часто одні підручники суперечать іншим, можна спостерігати «строкатість» в термінології (наприклад, вірогідну подію називають ще достовірною [222, с.175]), майже відсутні відповідні методичні посібники для вчителів (одним із винятків є посібник для вчителів «Елементи стохастики з комп’ютерною підтримкою» М.І. Жалдака та Г.О. Михаліна [131], останнє видання – 2006 року) та збірки задач [133].

В Росії пропонують вивчати початкові відомості зі стохастики в 7 класі. Подання матеріалу починають на інтуїтивному рівні з введення поняття випадкової події, випадкового експерименту та відносної частоти випадкової події. Наводять прості приклади, в яких кількість можливих подій невідома.

Зміст середнього арифметичного, моди, медіани пояснюють на прикладах. Учні повинні знати відповідні означення, навчитися знаходити ці характеристики в нескладних випадках, розуміти їх практичний зміст в конкретних ситуаціях [205].

В даній темі учні вперше зустрічають подання результатів досліджень у вигляді таблиці частот чи відносних частот. За таблицею частот учні повинні навчитися знаходити статистичні характеристики (середнє арифметичне, моду, розмах, медіану).

Ю.Н. Тюрін, А.А. Макаров і ін. [329] зазначають, що в Росії уроки зі стохастики у 7-8 класах забезпечують можливість вчителю повернутися до вивчення важливих об’єктів – відсотків і частин. Також регулярне вивчення властивостей функцій в 7-8 класах перетворюється у вивчення моделей, зміст яких вже відомий і зрозумілий завдяки урокам статистики. Наголошують вони і на тому, що при викладенні цього матеріалу в 7 класі слід уникати формалізму, не використовувати змінних з індексами, формальних визначень і доведень. Властивості середнього та дисперсії винесені в окремі параграфи в якості додаткового матеріалу.

У 8 класі дано початкові відомості про збирання та групування статистичних даних, про найважливіший у статистиці вибірковий метод дослідження, а також про табличну та графічну форми подання результатів аналізу статистичних даних [307].

В посібнику [205] найбільший об'єм матеріалу заплановано для навчання в 9 класі. В курсі 9 класу розглядають питання про наочне подання результатів аналізу статистичних даних; дискретних розподілів частот, які можна задавати на множинах результатів випробувань, вивчених учнями в 7-8 класах. Цей матеріал має важливе загальноосвітнє значення, оскільки з різними видами наочної інтерпретації результатів статистичних досліджень постійно доводиться мати справу в різноманітних ситуаціях [206].

До середнього значення та дисперсії набору чисел повертаються при вивченні числових характеристик дискретної випадкової величини — її математичного сподівання та дисперсії. Це матеріал 9-11 класів, де описані раніше числові характеристики отримують математичне трактування при вивченні випадкових величин. Учні повинні знати та розуміти, що основним способом визначення ймовірностей події у змістовних прикладах на практиці є частотний підхід [329].

В російському стандарті основної загальної освіти з математики [307] розглядають наступні питання: статистичні дані, подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків, середні результати вимірювання, поняття про статистичний висновок на основі вибірки, поняття та приклади випадкових подій, ймовірність, частота подій, рівноможливі події, підрахунок ймовірності подій, уявлення про геометричну ймовірність.

За освітніми стандартами [308] учні російських шкіл повинні вміти:

- опрацьовувати статистичні дані, подані у вигляді таблиць, діаграм, графіків,
- складати таблиці, будувати діаграми, графіки,
- обчислювати середні значення результатів вимірювання,
- знаходити частоту подій, використовуючи власні спостереження та готові статистичні дані,
- знаходити ймовірність випадкових подій в найпростіших випадках,
- аналізувати реальні числові дані, подані у вигляді діаграм, графіків, таблиць,
- порівнювати шанси настання випадкових подій, оцінювати ймовірності випадкових подій,
- на практиці співставляти моделі в реальній ситуації,
- розуміти статистичні твердження.

У Польщі своє місце в навчанні знайшли імітація випадкових подій, евристичні методи розв'язування задач, ігри та педагогічні програмні засоби для комп'ютерної підтримки навчання математики, в тому числі й елементів стохастики. Зміни в змісті навчання стосуються, насамперед, введення елементів теорії графів, комбінаторики, теорії кодування, теорії ймовірностей і математичної статистики, чисельних методів математики, теорії алгоритмів, математичної логіки. Польські математики вважають, що стохастиці можна надати новий дидактичний вимір, показати методи збирання й опрацювання даних на основі широкої візуалізації [301].

Отже, елементи стохастики методисти більшості країн світу розглядають як розділ прикладної математики з характерними для неї прийомами та методами.

Вивчення характеру явищ та процесів, які моделюють в курсі стохастики, висуває стохастичну змістову лінію шкільного курсу математики на особливе місце. Як свідчить досвід, вчителі зазнають певних (інколи значних) труднощів в роботі з цим розділом математики. Це пов'язано як з навчальним матеріалом, підготовленістю вчителів до його подання, так і з недостатньою кількістю методичних розробок щодо вивчення елементів стохастики в школі.

В Україні педагогічні дослідження зі стохастики представлені ще недостатньо: в основному досліджуються методичні проблеми, пов'язані з навчанням елементів стохастики в школі, оскільки відчувається гостра недостатність методичних розробок та задачного матеріалу, що заважає навчанню елементів стохастики на належному рівні.

Висновки до першого розділу

Ледве не кожен в повсякденному житті зустрічається з проблемами, які в більшості своїй пов'язані з аналізом впливу випадкових факторів і вимагають прийняття рішення в ситуаціях, що мають ймовірнісну основу. В зв'язку з цим необхідною умовою плідної роботи в багатьох галузях людської діяльності стала наявність стохастичних знань і уявлень.

Ознайомлення з основними поняттями стохастики необхідне для того, щоб людина могла пізнавати оточуючий світ. Навчання будь-якого розділу математики сприяє розумовому розвитку учнів, оскільки прищеплює навички логічного мислення, оперувати чітко визначеними поняттями. Це стосується і елементів стохастики. Однак навчання «законів випадку» відіграє дещо більшу роль і виходить за межі традиційного навчання. Вивчаючи елементи стохастики, учень дізнається, як застосовувати прийоми логічного мислення в тих випадках, коли доводиться мати справу з невизначеністю.

Вивчення елементів стохастики має важливе загальноосвітнє значення, оскільки сприяє підвищенню загальнокультурних компетентностей учнів, готує школярів до сприйняття різноманітних відомостей з галузі соціології, економіки, демографії, психології, страхування, які широко представлені в засобах масового інформування.

Прикладом застосування елементів стохастики на практиці може слугувати вибір найдоцільнішої форми страхування, виграшу в лотереї, різноманітних соціологічних та політичних досліджень. При плануванні сімейного бюджету або поїздки за кордон часто доводиться оцінювати витрати, що носять певною мірою випадковий характер. Ці приклади показують, що ознайомлення з елементами стохастики необхідне кожному.

Серед внутріпредметних математичних зв’язків слід особливу увагу приділяти зв’язкам стохастики з планіметрією та стереометрією, адже можна відмітити майже дослівне співпадання означень довжини відрізка, градусної міри кута, площі плоскої фігури та об’єму просторового тіла (за О.В. Погорєловим) та ймовірнісної міри (ймовірності), якою є, зокрема, і статистична ймовірність, оскільки задовольняє всі вимоги, які висувають до ймовірнісної міри.

Оскільки елементи стохастики відносно нова складова шкільної математики, і на сьогодні ще немає достатнього досвіду навчання цього предмету, то звичайно відчувається нестача методичної літератури для вчителів, збірників відповідних задач і вправ; існує необхідність популяризації знань елементів стохастики серед школярів.

Впроваджуючи стохастичну лінію в сучасну шкільну математичну освіту, з огляду на історичний аспект розвитку стохастики та зокрема методичних систем її навчання, необхідно:

1) враховувати, що процес формування стохастичного мислення, значно довший, ніж запам’ятовування окремих фактів, тобто навчання елементів стохастики повинне відбуватися шляхом накопичення знань, умінь та навичок. При вирішенні цієї проблеми можуть стати корисними сучасні інформаційно-комунікаційні технології, використання яких розширює можливості подання навчального матеріалу та розширення набору навчальних задач, які можна доповнювати, ускладнювати, комбінувати; знімає з учня необхідність у громіздких рутинних обчисленнях, стимулює його інтерес і допитливість протягом тривалого часу; уможливлює вирішення проблем диференціації та індивідуалізації навчання в умовах класно-урочної системи організації навчального процесу;

2) застосовуючи стохастичні методи при навчанні інших дисциплін, при складанні прикладних та сюжетних задач, слід керуватись виключно

науково обґрунтованими підходами. Для вирішення цієї проблеми доцільно спиратися на міжпредметні зв’язки стохастики з іншими навчальними предметами, зокрема, фізикою, біологією тощо;

3) використовувати багаторічний практичний та методологічний досвід інших країн з цього питання. У більшості зарубіжних країн накопичено значний досвід навчання стохастики в курсі математики середньої школи, особливо доцільно звернути увагу на вивчення елементів стохастики в школах Японії, Великобританії, Польщі та Росії.

Значна увага до статистичних даних на державному та міжнародному рівнях (особливо під час проведення виборчих кампаній, різноманітних суспільних та психологічних дослідженнях, страхуванні) свідчить про необхідність оволодіння основними поняттями та методами стохастики ще в школі. Володіння її основами потрібні кожній людині для розуміння сутності результатів статистичних досліджень, якими рясніють сучасні журнали та газети.

Проведений аналіз шкільних підручників з математики для 6, 9 та 11 класів дає підстави стверджувати, що навчанню елементів стохастики приділено не дуже багато уваги.

Враховуючи недостатню кількість навчальних годин, що відведені на вивчення цієї теми, доцільно рекомендувати застосування персональних комп’ютерів при розв’язуванні задач зі стохастики. Розвиток ІКТ уможливлює використання комп’ютера як засобу активізації навчального процесу, сучасне джерело навчальних і наукових відомостей при навчанні.

Основні результати першого розділу висвітлено в роботах [185, 186, 189, 192, 193, 194].

РОЗДІЛ ІІ
МЕТОДИЧНА СИСТЕМА НАВЧАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ СТОХАСТИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

2.1. Пропедевтика навчання елементів стохастики в 5-7 класах

Вивченню елементів стохастики обов'язково повинне передувати проведення пропедевтики її основних понять. Така пропедевтична робота має важливе значення також в підготовці школярів до вивчення вищої математики в майбутньому. Вона в деякій мірі буде сприяти ліквідації розриву між шкільною математикою та тією математикою, що вивчають у вищому навчальному закладі, підготує майбутнього студента до успішного сприйняття доволі складних понять сучасної математики.

Закони детермінізму, на вивчення яких орієнтована сучасна шкільна освіта, доволі однобоко розкривають сутність оточуючого світу. Розгляд випадкового характеру різних явищ залишають поза увагою шкільних програм. Задачі, які ставить перед вчорашніми школярами сучасне життя, здебільшого пов'язані з аналізом впливу випадкових факторів і прийняття правильних рішень у різноманітних ситуаціях. Стиль мислення, заснований на врахуванні стохастичних явищ і застосуванні результатів їх аналізу, необхідний страховику та психологу, досліднику та інженеру, біологу та економісту, метеорологу та керівнику підприємства. Знання методів статистичного аналізу явищ оточуючого світу, технологічних та економічних процесів потрібні сучасним фахіцям.

Знання елементів стохастики потрібні кожному учневі, зокрема при вивченні багатьох предметів шкільного курсу, адже вивчення закономірностей, що розглядають на уроках фізики, біології та інших шкільних предметів, потребує використання понять, фактів та методів стохастики. Хоча навіть на сучасному етапі можна зустріти в науковій літературі заперечення доцільності вивчення елементів стохастики. Зокрема О.С. Івашев-Мусатов пише: «розв'язування ймовірнісних задач з самого початку вимагає істотного застосування інтуїції та здорового глузду. Це абсолютно не притаманно курсу математики в школі, тому введення теорії ймовірностей в школі – протипоказано» [151]. Однак «застосування інтуїції та здорового глузду» вимагає навчання будь-яких дисциплін, і це цілком притаманно як при навчанні математики в школі, так і фізики, хімії, інформатики та інших дисциплін, тому з наведеним твердженням погодитися ніяк не можна. Якщо слідувати за О.С. Івашевим-Мусатовим, то слід вилучити із шкільного курсу математики і геометрію О.В. Погорєлова, який подає означення площі, об’єму аналогічно означенню ймовірнісної міри. Те саме стосується маси та довжини в фізиці тощо.

Не можна погодитися і з думкою Я.С. Бродського та О.Л. Павлова [38], які стверджують, що вивчати елементи стохастики недоцільно, адже учні не мають відповідних мотивів щодо вивчення цього матеріалу, оскільки елементи стохастики не входять до програми вступних іспитів. Однак математику вивчають не лише для того, щоб вступити у вищий навчальний заклад, а перш за все для формування світогляду, розвитку творчих здібностей тощо. По-друге, при проходженні зовнішнього незалежного оцінювання [148-150] передбачено розв’язування завдань зі стохастики (зразки яких наведено у Додатку Е).

Однією з актуальних проблем, що виникає на цьому етапі, є вирішення питання про доцільність введення елементів стохастики у 5–7 класах.

За новою програмою елементи стохастики починають вивчати у 6-му класі. Для учнів, що навчаються за науково-педагогічним проектом «Росток», передбачено в варіативній складовій окремий предмет «Елементи теорії ймовірностей» протягом чотирьох років (6-9 класи) по одному уроку на тиждень (34 години щороку) [236].

На думку багатьох педагогів і математиків, «нова» математика, завдяки своєму «скінченому» характеру, набагато доступніша для початківців, ніж такі розділи математики, як, наприклад, математичний аналіз та математичне моделювання тощо. Тому необхідно зважити на те, що елементи стохастики, завдяки своєму прикладному значенню, можуть швидше зацікавити школярів і викликати менше труднощів, якщо будуть розглянуті ними у процесі навчання в основній школі.

Однак обсяг матеріалу та місце стохастики у шкільному курсі математики потрібно визначати певною мірою взаємозв'язками з іншими шкільними предметами. Тобто потрібно враховувати, які елементи стохастики можуть бути застосовані під час вивчення окремих тем інших дисциплін, зокрема природничого циклу.

Польський математик і педагог А. Плоцкі [254-258] підкреслює, що при навчанні елементів стохастики усі теоретичні конструкції та логічні висновки мають бути інтуїтивно зрозумілими для кожного учня, що вимагає умілого його введення в процес навчання теорії, пропедевтики теоретичного матеріалу. Тому вбачається необхідним виділити спеціальний пропедевтичний етап, що має предметом математичну організацію емпіричного матеріалу.

Статистичні спостереження вимагають визначення предмета спостережень, їх мети, засобів реєстрації та інтерпретації їх результатів. На відміну від випадкових експериментів учні, як правило, не є учасниками подій, за якими вони спостерігають. До статистичних спостережень доцільно переходити тоді, коли учні побачили практичну корисність від проведення випадкових експериментів, пов'язаних з їхніми іграми. Як і в статистичних експериментах, так і в ході спостережень за подіями, що відбуваються поза полем їхньої діяльності, учні встановлюють певні стохастичні закономірності, оцінюють невідомі параметри розглянутих ситуацій, перевіряють гіпотези. Наприклад, у ході статистичних експериментів можна оцінювати кількість білих хустин в ящику, якщо відома загальна кількість хустин, перевіряти гіпотезу про однакову кількість хустин двох кольорів в ящику тощо. У ході статистичних спостережень можна оцінювати, наприклад, частоту, з якою зустрічається той чи інший прийменник у творах певного письменника, перевіряти гіпотезу про рівність цих частот у двох письменників тощо. Крім названих, прикладами статистичних спостережень є спостереження за метеорологічними та політичними явищами у певному регіоні, за розіграшами лотерей, за результатами дослідів, що проводяться на уроках фізики, хімії, біології тощо.

Основною метою навчання елементів стохастики є навчити учнів аналізувати процеси та явища, що мають стохастичний характер, та вміти застосовувати отримані знання для оцінювання можливостей відбування різноманітних подій навколишнього світу, коли це відбування залежить від багатьох випадкових чинників, детерміноване врахування яких неможливе. Очевидно, вивчення даної теми буде ефективним лише за умови, що вчитель буде спиратися на існуючу базу математичних знань учнів, їх життєвий досвід, сформованість абстрактного мислення, здатність до узагальнень, тощо. Не варто забувати, що згідно програми вивчення математики у 5-7 класах здійснюється з переважанням індуктивних міркувань в основному на наочно-інтуїтивному рівні з залученням практичного досвіду учнів і прикладів з довкілля [270].

До проблеми пропедевтики елементів стохастики зверталися такі математики та педагоги, як Л.М. Рибалова [282-283], М. Глеман, Т. Варга [80], Г.В. Степенко [309] та інші.

На перших уроках зі стохастики необхідно звернути увагу учнів на те, що до вивчення стохастики, в математиці була визначеність даних і однозначність результатів, отриманих при розв’язуванні задач (наприклад, площа прямокутника однозначно визначалася довжинами двох його сторін). Однак в житті часто трапляються випадки, коли неможливо передбачити результат (кількість дівчаток у навмання вибраному класі, листя на дереві, кількість золотих медалей на олімпіаді, хто переможе у виборах).

На першому етапі навчання елементів стохастики доцільно звернути увагу на те, щоб експерименти проводити в однакових або максимально близьких умовах, а дітям пропонувати завдання, результати яких вони могли б передбачити, спрогнозувати, спираючись на свій життєвий досвід.

Дуже важливо вивчати також ті явища, які не залежать від волі людини: погода, врожайність тощо.

Звернемося до зарубіжного досвіду навчання елементів стохастики. У більшості зарубіжних країн накопичено значний досвід навчання елементів стохастики у курсі математики середньої школи. Починаючи з перших років навчання стохастичні уявлення формують у учнів Японії, Угорщини, Англії, Німеччини, Польщі, США, Росії та інших країн світу.

В Японії, наприклад, пропедевтичний курс стохастичних відомостей розглядають, починаючи з другого класу початкової школи, тобто з семирічного віку. Протягом п’яти років у дітей формують первісні навички збирання даних, їх реєстрації у вигляді таблиць і діаграм. До моменту закінчення початкової школи діти досить легко справляються з подібними задачами та готові до систематичного вивчення елементів стохастики, яке починають у першому класі молодшої середньої школи.

У першому та третьому класах (відповідно 7-й та 9-й роки навчання) учнів знайомлять з елементами статистики. У другому класі (8-й рік) введено новий розділ, в якому на досить елементарному рівні з використанням мінімального математичного апарату подають основні початкові поняття та факти теорії ймовірностей. Автори підручників дотримуються такого підходу: вводять курс не поступово, а одразу подають основні поняття та методи розв’язування задач, а потім на основі цього будують всю подальшу роботу стосовно оволодіння навчальним матеріалом. Знайомлять учнів на елементарному рівні з основними поняттями, фактами, методами статистики, які відомі студентам вищих навчальних закладів [309; 374; 378; 379].

Доцільно розглянути з учнями 5-7 класів також елементи історії розвитку стохастики, як науки. У новій програмі [270] зазначено: важливу роль у навчанні математики відіграє систематичне використання історичного матеріалу, який підвищує інтерес до вивчення математики, стимулює прагнення до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику як невід’ємну складову загальнолюдської культури. На доступних змістовних прикладах слід показувати учням, як розвивалися математичні поняття та відношення, теорії та методи. Ознайомлювати учнів з іменами та біографіями видатних учених, які створювали математику, зокрема видатних українських математиків, що сприятиме національному та патріотичному вихованню.

На уроках математики можна розв'язати з учнями такі усні вправи:

1. Що з перерахованого точно станеться; може статися, може не статися; не станеться ніколи:

а) з урни, в якій всі кульки червоні, дістали синю кульку;

б) при підкиданні шестигранного кубика випало 7 очок;

в) в червні йде сніг;

г) при підкиданні шестигранного кубика випало 3 очки;

д) з ящика, в якому всі хустини зелені, дістали зелену хустину;

е) випало непарне число очок на шестигранному кубику, на гранях якого нанесені числа від 1 до 6;

є) з урни, в якій зелені та сині кульки, дістали синю кульку;

ж) випаде герб при підкиданні монети;

з) при підкиданні монети не випаде ні герб, ні цифра.

Розглянемо детальніше приклад б). Напевне, спираючись на свій життєвий досвід більшість учнів одразу скажуть, що 7 очок випасти на кубику ніяк не може, бо на його гранях нанесено лише числа від 1 до 6. Але вчитель заздалегідь може виготовити кубик, на всіх гранях якого нанесено число 7. І після відповідей учнів показати такий кубик. При розгляді цієї задачі є можливість акцентувати увагу учнів на тому, що при розв'язуванні подібних задач дуже важливим є вигляд кубика (модель задачі).

При розв'язуванні прикладу г) більшість учнів одразу відмітить, що не вказано, про який кубик йде мова. Вчителю доцільно запитати в учнів, який кубик (модель) вони уявляють.

2. Що може, а що не може статися одночасно:

а) йде дощ і світить сонце;

б) випаде і цифра, і герб при одному підкиданні монетки;

в) дістали і синю, і червону кульку при діставанні однієї кульки з торбинки, в якій є лише сині та червоні кульки;

г) виграш і нічия в футболі в одному матчі.

Перед виконанням наступної вправи слід провести серію відповідних випробувань.

3. Які наслідки випробування відбулися (настали) однаково часто:

а) випадання герба чи цифри при підкиданні монети;

б) випадання 3 чи 6 на гральному кубику, на гранях якого нанесено числа від 1 до 6;

в) поява білої чи червоної кульки при діставанні з урни, в якій 7 червоних і 5 білих кульок;

г) діставання білої чи синьої хустини з шухляди, в якій 6 білих і 6 синіх хустин.

Після вдалого розв’язування простіших вправ доцільно перейти до складніших завдань:

1. У ящику 2 червоні, 2 зелені, 2 блакитні хустини. Експеримент полягає у діставанні 3 хустин одну за одною. Чи можливо, щоб всі вони були одного кольору?

Учні повинні міркувати так: Неможливо, бо є лише по дві хустини кожного кольору.

Дістанемо 3 хустини. Чи можуть вони бути двох кольорів?

У*чні повинні міркувати так:* таке можливо, оскільки у ящику є по дві хустини кожного з 3-х кольорів. Наприклад, можливо, що дві хустини червоні, а одна зелена. Учні можуть запропонувати різні варіанти наборів 3-х хустин, з яких 2 – одного кольору, а 1 – іншого.

Дістанемо 3 хустини. Чи можуть вони бути трьох кольорів?

У*чні повинні міркувати так:* якщо є 3 хустини трьох кольорів, то одна повинна бути червоною, одна – зеленою та одна блакитною. Таке можливо, оскільки у ящику є хустини таких кольорів.

Побудуємо простір подій.

Учні *повинні міркувати так:* перерахуємо всі можливі комбінації діставання хустин: *ЧЧБ, ЧЧЗ, ЧЗБ, ЧЗЧ, ЧЗЗ, ЧББ, ЧБЧ, ЧБЗ, ЗЗЧ, ЗЗБ, ЗББ, ЗБЧ, ЗБЗ, ЗЧБ, ЗЧЧ, ЗЧЗ, ББЧ, ББЗ, БЗЗ, БЗБ, БЗЧ, БЧЗ, БЧБ, БЧЧ*.

2. Перед наступною задачею вчитель повідомляє учням, що зараз спробує вгадати відповіді на деякі запитання, які їм буде поставлено та пропонує їм швидко записати: парне число до 10, домашню тварину, прізвище українського поета, улюблену пору року, улюблене свято, кількість братів і сестер у учня. Вчитель заздалегідь готує на дошці відповіді, що зустрічалися у учнів цього віку найчастіше (дані для цієї вправи доцільно використати з попередніх уроків) і закриває їх: 2, кіт, Шевченко, літо, день народження, 1. Після того, як учні дали відповіді, вчитель відкриває дошку та проводить опитування, у скількох учнів він відгадав відповіді.

3. Скласти стовпчасту діаграму для графічного подання результатів написання контрольної роботи з математики, попередньо розподіливши оцінки на чотири інтервали (рис. 2.1), а також для кожної оцінки окремо (рис. 2.2), якщо відомо, що 1, 2 і 12 балів ніхто не отримав, 3 і 11 балів – по 1 учню, 4 і 10 балів по 2 учні, 5 і 9 балів по 4 учні, 6, 7 і 8 балів по 5 учнів.

Рис. 2.1. Стовпчаста діаграма результатів написання контрольної роботи (4 групи)

Рис. 2.2. Стовпчаста діаграма результатів написання контрольної роботи (12 груп)

4. Учні записують 5 різних цифр. Знаходять їх суму та повідомляють вчителю. Всі суми вчитель записує на дошці (можна помітити, що мінімальна сума дорівнює 10, а максимальна – 35). Далі знаходять різницю між максимальним і мінімальним значенням (25), ділять проміжок [10, 35] на 5 однакових інтервалів, складають таблицю та будують стовпчасту діаграму розподілу сум отриманих учнями класу.

5. В наборі з шести чисел 5, 7, 11, 33, __, 16 пропущено число. Знайдіть його, якщо відомо, що середнє арифметичне набору чисел дорівнює 20.

Розв'язання доцільно проводити у вигляді бесіди. Спочатку запропонувати учням пригадати визначення середнього арифметичного. Після чого вони без особливих труднощей складуть рівняння: $(5+7+11+33+x+16): 6 = 20$, *розв'язавши яке отримають число* $x=48$.

6. В упорядкованому наборі з шести чисел 5, 7, 11, 16, 33, __ невідоме останнє число. Знайдіть його, якщо відомо, що розмах вибірки дорівнює 35.

Учні повинні міркувати так: оскільки найменше значення 5, розмах 35 – це різниця максимального значення та мінімального $x - 5$, *то найбільше число* $x = 35 + 5 = 40$.

7. В наборі з шести чисел 5, 7, 11, 33, __, 16 пропущено число. Знайдіть його, якщо відомо, що мода дорівнює 11 і вибірка має одну моду.

Учні повинні міркувати так: оскільки мода одна і вона дорівнює 11, а всі інші числа зустрічаються один раз, то пропущене число теж 11.

8. Відомо, що набір даних складається з натуральних чисел. Чи може для цього набору дробовим числом бути:

а) середнє арифметичне (*учні міркують так: може, тому що для визначення середнього арифметичного використовують операцію ділення суми доданків на їх кількість, наприклад, для чисел 1 і 2 середнє арифметичне дорівнює* $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$).

б) розмах вибірки (*учні міркують так: не може, оскільки для визначення розмаху вибірки використовують операцію віднімання*).

в) мода (*учні міркують так: не може, тому що мода – це число, що зустрічається у вибірці найчастіше*).

г) медіана (*учні міркують так: не може, адже медіана – це рівновіддалене від обох кінців впорядкованої вибірки число, а всі числа у наборі натуральні*).

9. Відомо, що учні класу на підготовку домашнього завдання щодня витрачають приблизно: 5; 1,5; 0; 2; 3; 1; 4; 1; 2; 3; 0,5; 1; 1; 0,5; 2; 1; 1; 0; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3; 2; 1; 4; 5; 1; 2 години. Побудуйте таблицю розподілу абсолютних частот. Знайдіть скільки часу в середньому витрачають учні даного класу на виконання домашнього завдання.

10. В таблиці (табл. 2.1) подано розподіл відносних частот стажу роботи вчителів школи. Побудувати кругову діаграму розподілу частот стажу (рис. 2.3).

Таблиця 2.1

Стаж роботи, роки	менше 5	не менше 5, менше 10	не менше 10, менше 15	не менше 15, менше 20	20 і більше
Відносна частота, %	11	9	26	34	20

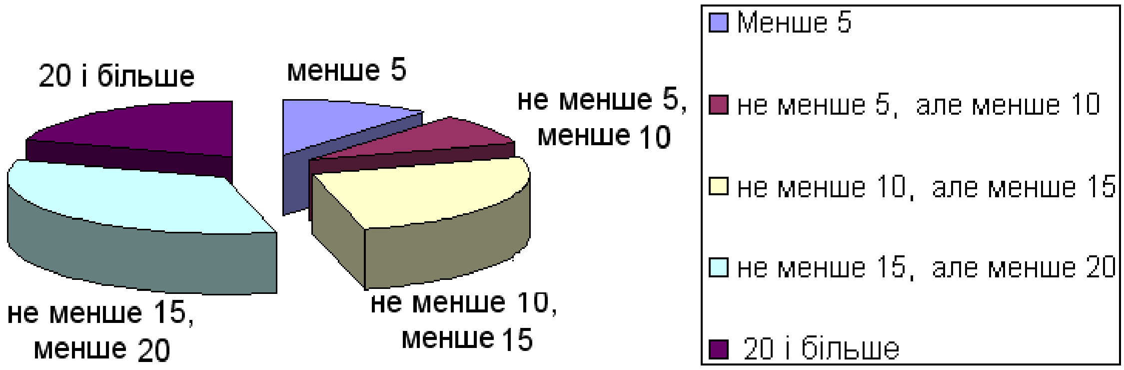


Рис. 2.3. Діаграма розподілу частот стажу роботи вчителів школи

11. Вивчити спеціалізацію вчителів школи та побудувати відповідну стовпчасту діаграму за складеною таблицею (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Спеціалізація	Кількість вчителів
Вчителі математики	6
Вчителі української мови та літератури	8
Вчителі іноземної мови	7
Вчителі історії	2
Вчителі географії	3
Вчителі біології	2
Вчителі фізкультури	4
Вчителі праці	4
Вчителі фізики	3

12. В таблиці (табл. 2.3) показано кількість пар взуття, виготовлених з 2003 року по 2008 рік на взуттєвій фабриці.

Таблиця 2.3

Рік	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Кількість пар взуття	780	625	645	810	850	760

Побудувати полігон частот для ілюстрації динаміки виготовлення взуття за вказаний період часу. Користуючись полігоном:

а) охарактеризувати динаміку зміни виробництва взуття.

б) вказати два роки, що слідують один за одним, де відбувається значне збільшення виробництва.

13. На стовпчастій діаграмі (рис. 2.4) подано дані про розподіл частот віку вчителів школи. Користуючись діаграмою, знайти:

а) кількість вчителів віком від 20 до 24 (висота відповідного стовпчика),

б) вікову групу, до якої належить найбільша кількість вчителів (найвищий стовпчик),

в) загальну кількість вчителів школи (сума висот стовпчиків).

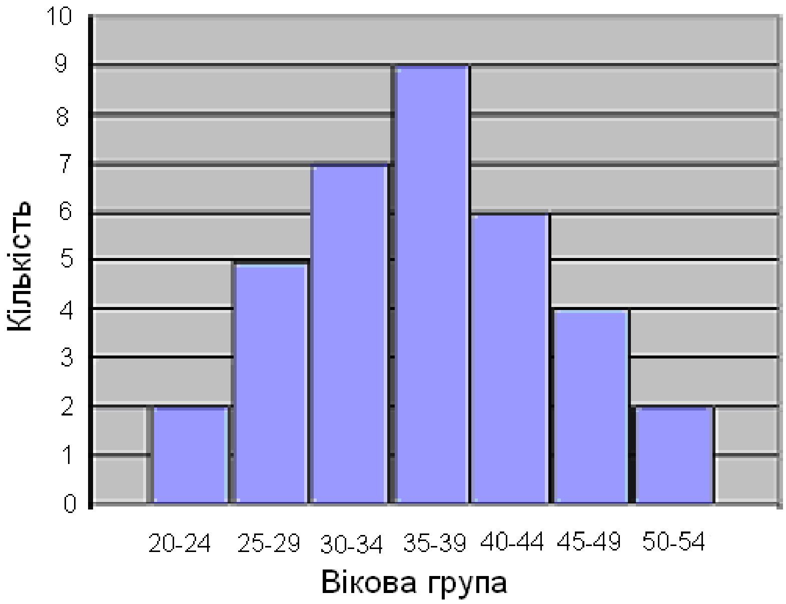


Рис. 2.4. Діаграма розподілу вчителів школи за віковими групами

Додому можна запропонувати підготуватися до розв'язування наступних задач, які безпосередньо будуть розглянуті на наступному уроці:

1. Учні повинні записати номери автомобілів, що стоять біля їхнього будинку, і потім на уроці перевірити, чи всі цифри в цих номерах зустрічаються приблизно однаково часто.

2. Учні отримують завдання – поміряти свій зріст. На уроці всі разом знаходять середній зріст учнів свого класу.

3. Для того, щоб перевірити, чи є у даному місті (районі, мікрорайоні, селищі тощо) кількість хлопчиків приблизно однаковою з кількістю дівчаток, учні рахують, скільки тих і інших вони зустрічають по дорозі до школи.

4. Для того, щоб з'ясувати, чому саме так розташовані літери на клавіатурі комп'ютера (рис. 2.5), учні підраховують, скільки разів кожна

літера зустрічається в деякому тексті. Заздалегідь кожен учень дома готує українську абетку, записану в стовпчик, і віршик з восьми рядочків.

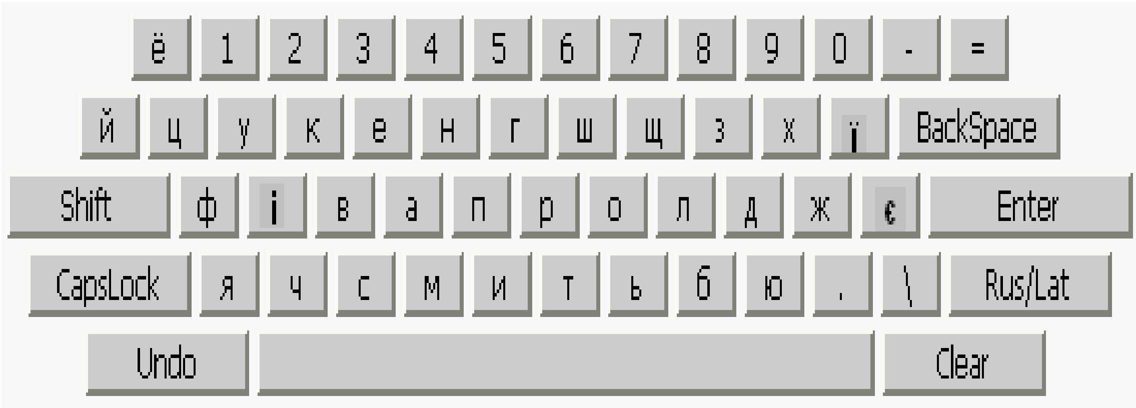


Рис. 2.5. Клавіатура комп’ютера

5. Підкинути дома монету 50 разів і порахувати, скільки разів випаде герб. Записати результат у зошит. У класі підрахувати, скільки досліджень проведено всіма учнями класу. Знайти відносну частоту випадання герба.

6. Які події можливі, які неможливі, які відбудуться точно:

а) при одному підкиданні шестигранного кубика випаде 8 очок, якщо на гранях нанесені цифри від 1 до 6;

б) у найближчу неділю піде дощ;

в) 2010 року в Україні не буде жодного сонячного дня;

г) при одному підкиданні випаде парне число на шестигранному кубику, на гранях якого нанесено числа від 1 до 6;

д) при одному підкиданні випаде число від 1 до 6 на кубику, на гранях якого нанесено числа від 1 до 6;

е) цей урок закінчиться через 3 хвилини;

є) учитель математики поставить Вам за рік 12 балів;

ж) завтра у Вашому класі буде диктант з української мови;

з) 31 червня Ваш клас поїде на екскурсію до Пирогово;

і) при одному підкиданні шестигранного кубика випаде непарне число, якщо на його гранях нанесено числа від 1 до 6;

ї) найближчий футбольний матч «Динамо»-«Дніпро» закінчиться внічию;

й) 2010 року Вас оберуть Президентом Олімпійського комітету;

к) при одному підкиданні шестигранного кубика випаде число, що націло ділиться на 7, якщо на його гранях нанесено числа від 1 до 6;

л) на кубику при одному підкиданні випаде число, що націло ділиться на 3, якщо на гранях кубика нанесено числа від 1 до 6.

7. В класі 18 хлопчиків і 11 дівчаток. Експеримент полягає у фіксації місяця (січень – 1, лютий – 2 і т.д.), в якому народився кожен з них. Відомо, що хлопчики народилися в таких місяцях: 1, 4, 6, 4, 3, 2, 7, 8, 9, 4, 3, 2, 12, 11, 10, 3, 4, 5; а дівчатка: 7, 8, 9, 3, 6, 5, 3, 7, 10, 11, 4. Які з подій є неможливими, які можливими:

а) двоє учнів цього класу народилися в одному місяці;

б) двоє народилися в різних місяцях;

в) дві дівчинки народилися в одному місяці;

г) два хлопчики народилися в одному місяці;

д) всі хлопчики народилися в різних місяцях;

е) всі дівчатка народилися в різних місяцях;

є) є хлопчик і дівчинка, що народилися в одному місяці;

ж) є хлопчик і дівчинка, що народилися в різних місяцях.

8. Порівняти частоти появи літер «ф» і «о» в певному тексті.

9. Вписати в кожне речення одне зі слів (можливо, неможливо, напевне, малоймовірно), що найбільше підходить за змістом:

а) Завтра Сонце... зійде на сході;

б)..., що у Петрика день народження 30 лютого;

в)..., що в Києві на вулиці Ви зустрінете улюбленого співака.

10. Обвести ті пари наслідків випробувань, які можуть відбутися однаково часто в n випробуваннях:

а) поява герба (цифри) при підкиданні монетки,

б) випадіння 1 очка (6 очок) при підкиданні кубика,

в) випадання 1 очка (парного числа очок) при підкиданні кубика, г) по дорозі в школу Ви зустріли чоловіка. Він виявився татом Вашого однокласника (відомим футболістом Андрієм Шевченком).

Для виконання вдома можна запропонувати учням такі задачі:

1. Обрати один абзац будь-якого тексту. Підрахувати загальну кількість слів і кількість слів, що містять 4 літери. Знайти відносну частоту появи слів, які складаються з 4 літер.

2. Обрати абзац будь-якого тексту. Провести підрахунок всіх голосних літер абзацу окремо, і знайти відносну частоту появи літер «а», «о», «ю», «ї».

Ці вправи допоможуть школярам на інтуїтивному рівні ознайомитися з деякими елементами стохастики, що забезпечить можливість у майбутньому вивчати їх на вищому науковому рівні.

2.2. Природа основних понять стохастики та методика введення їх в шкільному курсі математики

Той, хто навчає елементів стохастики, напевне помітив, що виникають численні труднощі при навчанні цього розділу учнів основної та старшої школи. По-перше, важко подолати прихильність до чисто детерміністського мислення. По-друге, велику складність являє собою необхідність бачити за формальними обчисленнями реальну картину. По-третє, стохастика суттєво спирається на теорію міри (як показує досвід такий підхід є найкращим) [131]. Справді, таким шляхом найпростіше досягти логічної єдності математики, продемонструвавши, що багато понять в математиці є лише різними інтерпретаціями одного і того самого математичного поняття, що нерідко за різними формулюваннями приховує одні і ті самі факти. Необхідно відмітити можливість знаходження зв’язків там, де вони ще не намітилися [116, с.28].

При вивченні шкільного курсу математики учнів, зокрема, навчають вимірювати різноманітні величини: довжини відрізків, кількість певних об’єктів, площі фігур, об’єми та маси тіл, ймовірності випадкових подій тощо. Тому у процесі навчання математики школярів, згідно з принципом науковості навчання, доцільно сформувати уявлення про те, як ці проблеми розв'язують у межах сучасних математичних теорій [132].

Необхідно також відмітити, що аксіоматичне означення ймовірності за А.М. Колмогоровим майже дослівно збігається з означенням площі плоскої фігури, градусної міри кута, довжини відрізка, а також з означенням об'єму тіла в підручнику з геометрії О.В. Погорєлова [259]. До речі, на цьому наголошують відомі українські педагоги та науковці М.І. Жалдак та Г.О. Михалін [132].

Спробуємо провести аналогію введення основних понять геометрії, що подані у підручнику О.В. Погорєлова.

Наприклад, для довжини відрізка [259, с.7]:

- довжина кожного відрізка виражається невід'ємним числом;
- коли відрізок поділити на частини без спільних точок, то довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин;
- рівні відрізки мають рівні довжини.

За підручником О.В. Погорєлова [259, с.194] поняття площі для простих фігур задовольняє аналогічні аксіоми. Те саме можна сказати про поняття об'єму в курсі геометрії 10-11 класів [259, с.107] для простих тіл та градусну міру кута [259, с.11].

Люди використовують вимірювання у всіх сферах своєї діяльності. Всім знайомі такі поняття, як: кількість предметів у наборі; довжина відрізка; площа фігури; об'єм тіла; маса тіла тощо.

Зрозуміло, що всі ці поняття чимось схожі між собою, а саме, їх властивостями. Це особливо яскраво видно, коли виписати поруч основні властивості довжини, площі, об'єму.

Основою сучасної теорії міри є теорія множин, окремі факти якої пронизують весь шкільний курс математики навіть за умови, що багато авторів шкільних підручників намагаються уникати всього того, що пов'язане з теорією множин. У 10 класі (профільний, академічний і поглиблений рівень) на уроках алгебри розглядають множини, операції над множинами, взаємно однозначну відповідність між елементами множин, рівнопотужні множини. Учні повинні навчитися зображувати на діаграмах чи числовій прямій об’єднання та переріз множин та ілюструвати поняття підмножини, формулювати означення підмножини, об’єднання та перерізу множин, знаходити об’єднання та переріз числових множин [368].

Введення кожної окремої міри починають, як правило, з конкретизації непорожньої множини Ω та виділення елементарних підмножин (частин) цієї множини і правил, за якими обчислюють міру кожної з частин [132].

Аналогічно до понять довжини, площі та об’єму, можна показати, що маса тіла є мірою, тобто задовольняє аналогічні аксіоми (теж невід’ємна величина, і якщо тіло поділити на частини, що не мають спільних точок, то маса тіла дорівнюватиме сумі мас його частин).

Кількість елементів $k(A)$ у скінченній множині A – величина невід’ємна і така, що коли множину A поділити на частини A_i, $i=\overline{1,m}$, що не перетинаються (не мають спільних точок), то кількість елементів у множині A дорівнюватиме сумі кількостей елементів у її частинах.

Отже, необхідно звернути увагу учнів на схожі властивості площі фігури, об’єму тіла, маси тіла, градусної міри кута, кількості елементів у множині тощо [132]. Доцільно зазначити, що цілком природно всі ці поняття через їх схожість називають однаково. Оскільки всі вони пов’язані з вимірюванням, називають мірами відповідних множин. І оскільки відомо, що вивчати те, про що дитина раніше чула набагато простіше, ніж починати «з нуля», то зрозуміло, що необхідно акцентувати увагу учнів на схожості цих величин, їх властивостей та обчислення.

У роботах М.І. Жалдака, Г.О. Михаліна [122, с.137; 133, с.49] запропоновано використання обчислювального апарату, застосовного при так званому «класичному підході», однак при цьому використовуючи аксіоматичний підхід. Разом з тим немає жодної потреби в так званому «класичному означенні» ймовірності, в якому ймовірність події A, $A \in S$, означають через ймовірності рівноймовірних елементарних подій, в результаті чого створюється «зачароване коло».

Ймовірнісні поняття в школі необхідно вводити не раптово, не самі по собі, а тим природним шляхом, який призвів до їх створення, до їх появи в науці. А це неможливо, якщо з самого початку навчання не показувати, як виникає необхідність в нових математичних поняттях і як недосконале знання стає повнішим і досконалішим і охоплює все ширше коло явищ [115].

Головною метою навчання розділу «Елементи стохастики» має бути ліквідація «стохастичної безграмотності», формування стохастичних понять, що передбачає:

- формування розуміння детермінованості та випадковості,
- ознайомлення учнів з основними поняттями, ідеями, фактами, закономірностями та законами стохастики, з її логічною будовою, формування цілісного уявлення про неї,
- простеження історичного розвитку стохастики,
- усвідомлення того, що багато законів природи та суспільства носять стохастичний характер, багато реальних явищ і процесів можна описати стохастичними моделями,
- переконання, що навчання елементів стохастики має важливе значення не лише для математичної освіти, а й для формування світогляду учнів,
- не варто забувати і про міжпредметні зв'язки стохастики з іншими шкільними предметами, реалізацією яких можна пояснити учням необхідність навчання стохастики в шкільному курсі математики.

Учитель математики має бути впевненим, що починати ненав'язливе подання стохастичних ідей можна вже у середніх класах загальноосвітньої школи. При першому ознайомленні з основними поняттями стохастики необхідно передбачити педагогічно виважене та доцільне поєднання життєвого досвіду учнів, строгості та доступності подання навчального матеріалу. При навчанні елементів стохастики доцільно починати з вивчення випадкових подій та їх статистичних ймовірностей, ознайомитися з розподілами статистичних ймовірностей та з їх числовими характеристиками.

Однією з причин нерозуміння місця елементів стохастики в шкільному курсі математики є недосконалість методичної системи навчання, і в першу чергу однієї з головних складових такої системи – змісту навчання. В основу змісту більшості навчальних посібників і методичних матеріалів донедавна покладали лише так зване «класичне означення» ймовірності, що часто приводить до протиріч і численних некоректностей.

«Класичне означення» ймовірності передбачає розгляд скінченного числа несумісних і рівноможливих результатів випробування. Між тим на практиці досить часто можна зустріти такі випробування, коли їх наслідки не є рівноможливими або коли множина можливих результатів випробування нескінченна, дискретна чи неперервна. В таких випадках «класичне означення ймовірності» неможливо застосувати. Це можна проілюструвати на таких прикладах (знаходження ймовірності вибору будь-якого натурального числа або знаходження випадання певної кількості очок на кубику, якщо він не є «правильним», тобто зі зміщеним центром ваги).

Один приклад розглянемо детальніше.

Приклад 2.1. Нехай $\Omega=\{С, Ч, З, Ж, К, Ф\}$ (експеримент полягає у діставанні олівця з набору олівців синього, червоного, зеленого, жовтого, коричневого та фіолетового кольорів, при якому фіксували діставання синього чи червоного олівця та решти олівців).

$H_1=\{С, Ч\}$, $H_2=\{З, Ж, К, Ф\}$,

$S=\{\varnothing, H_1, H_2, H_1+H_2\}=\{\varnothing, \{С, Ч\}, \{З, Ж, К, Ф\}, \{С, Ч, З, Ж, К, Ф\}=\Omega\}$,

$\mu(A)=k(A)$, $P(A)=\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}=\dfrac{k(A)}{k(\Omega)}$, $A\in S$.

Тоді $\mu(\varnothing)=0$, $\mu(\Omega)=6$, $\mu(\{С, Ч\})=2$, $\mu(\{З, Ж, К, Ф\})=4$, $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$, $P(\{С, Ч\})=\dfrac{2}{6}$, $P(\{З, Ж, К, Ф\})=\dfrac{4}{6}$.

Цей розподіл ймовірностей не буде рівномірним (за множинами H_1 і H_2). Однак не виключено, що $\mu(H_1)=\mu(H_2)=3$. Тоді отримаємо рівномірний розподіл ймовірностей на Ω (за множинами H_1 і H_2).

Якщо в результаті великої серії з n випробувань, що полягали в діставанні олівця, в яких дослідника цікавив лише синій та червоний колір, з'ясувалося, що $P_n^*(\{С\})=0{,}5$, $P_n^*(\{Ч\})=0{,}2$, $P_n^*(\{З,\ Ж,\ К,\ Ф\})=0{,}3$, то можна говорити про статистичні ймовірності потрапляння лише в множини з сукупності $S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1 + H_2, H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 =\Omega\}$, де $H_1=\{С\}$, $H_2=\{Ч\}$, $H_3=\{З,\ Ж,\ К,\ Ф\}$.

Отже в даному експерименті тільки три можливі наслідки: $H_1=\{С\}$, $H_2=\{Ч\}$, $H_3=\Omega \setminus (С)\cup(Ч) = \{З,\ Ж,\ К,\ Ф\}$, тобто або $С$, або $Ч$, або і не $С$ і не $Ч$, хоча здається, що їх шість: $E_1=С$, $E_2=Ч$, $E_3=З$, $E_4=Ж$, $E_5=К$, $E_6=Ф$.

Отже, $P_n^*(\varnothing)=0$, $P_n^*(H_1+H_3)=P_n^*(\{З,\ Ж,\ К,\ Ф,\ С\})=0{,}8$,

$P_n^*(H_1)=P_n^*(\{З,\ Ж,\ К,\ Ф\})=0{,}3$, $P_n^*(H_2+H_3)=P_n^*(\{З,\ Ж,\ К,\ Ф,\ Ч\})=0{,}5$,

$P_n^*(H_2)=P_n^*(\{С\})=0{,}5$, $P_n^*(H_1+H_2)=P_n^*(\{С,\ Ч\})=0{,}7$,

$P_n^*(H_3)=P_n^*(\{Ч\})=0{,}2$, $P_n^*(H_1+H_2+H_3)=P_n^*(\{С,\ Ч,\ З,\ Ж,\ К,\ Ф\})=1$.

Питання про статистичні ймовірності потрапляння в будь-які інші підмножини множини Ω, окрім тих, що входять до S, наприклад, в підмножини $\{С,\ Ж\}$, $\{С,\ З,\ К\}$, $\{Ч,\ Ф,\ З\}$ тощо, а також визначення статистичних ймовірностей елементарних подій, $E_3=З$, $E_4=Ж$, $E_5=К$, $E_6=Ж$ та визначення через статистичні ймовірності елементарних подій, статистичних ймовірностей всіх інших подій втрачають сенс. За заданих умов знайти відповіді на ці та деякі інші питання неможливо.

Навіть якби «класичне означення» ймовірностей не було суперечливим, воно придатне лише для випадку, коли розглядають так званий рівномірний розподіл ймовірностей на скінченній множині елементарних подій. Це приводить до проблем – неможливості розглядати ніякі інші розподіли ймовірностей, крім рівномірного на скінченній множині, наприклад, неможливо розглядати біноміальний розподіл ймовірностей на скінченній множині точок, який не є рівномірним (і разом з тим цей матеріал пропонують до вивчення у шкільних програмах зі стохастики), будь-які неперервні розподіли, зокрема рівномірний розподіл ймовірностей на обмеженій неперервній множині, у тому числі так звані «геометричні ймовірності» (геометрично задану ймовірнісну міру на вимірній за А. Лебегом множині, як відношення мір множин – довжин, площ, об'ємів).

Інший вагомий недолік методичної системи навчання елементів стохастики в школі на основі «класичної схеми» зі скінченною множиною рівноймовірних елементарних подій полягає в тому, що елементи стохастики по суті зводяться до комбінаторики, а найістотніші поняття, їх геометричні, фізичні й інші аналоги, зв'язки з основними поняттями з інших розділів математики (довжиною, площею, градусною мірою, кількістю елементів тощо), фізики зникають, а разом з ними зникає сутність понять і положень, які необхідно вивчати, що приводить до заформалізованості змісту навчання, нечіткого та часто неправильного тлумачення основних понять, нерозуміння змісту навчання, коли основні поняття стають «нереальними», «незбагненними» – може бути усунутий за рахунок відмови від побудови шкільного курсу елементів стохастики на базі так званого «класичного означення» ймовірності та переорієнтацією його на аксіоматичну побудову теорії ймовірностей на основі системи аксіом А.М. Колмогорова.

При неперервному розподілі ймовірність потрапляння в деяку область обчислюють так само, як площу криволінійної трапеції – це інтеграл від щільності розподілу ймовірностей, що у геометричній інтерпретації є не що інше, як площа під графіком щільності над зазначеною областю, а в механічній – маса, що припадає на визначену область за умови, що вздовж осі *Ox* розподілена з зазначеною щільністю одинична маса. Очевидно, «класичне означення» ймовірностей тут виявляється непридатним. Якщо ж вивчати розподіл ймовірностей на скінченній множині точок, то при нерівномірному розподілі ймовірностей на цій множині, коли ймовірності елементарних подій не рівні між собою, «класичне означення» ймовірностей і комбінаторні формули теж будуть непридатними та непотрібними при розв'язуванні задач.

На відміну від більшості посібників, що так чи інакше орієнтовані на «класичне означення» ймовірності, при розгляді статистичних ймовірностей подання матеріалу здійснено не тільки на інтуїтивному рівні, а й паралельно формується уявлення про сучасний, тобто аксіоматичний метод побудови теорії ймовірностей. У зв'язку з цим зовсім не знадобилися елементи комбінаторики, оскільки вони абсолютно не потрібні для формування початкових знань зі стохастики. Крім того, навіть не згадується «класичне означення» ймовірностей [131, с.4]. Замість цього використано статистичний або емпіричний підхід до формування поняття ймовірності та разом з тим передбачена можливість сформувати уявлення про аксіоматичне означення.

Теорія ймовірностей, як строга математична дисципліна, побудована на аксіоматичній основі, поняття ймовірності події тут носить формально-логічний характер. Однак, аксіоматична побудова основ теорії ймовірностей базується на властивостях статистичної ймовірностей, тобто в решті решт на практичній основі, як і будь-яка інша наукова теорія.

Як показує практичний досвід, статистичне означення ймовірності також виявляється не завжди коректним (коли статистичні ймовірності (відносні частоти) не стабілізуються при як завгодно великому збільшенні кількості випробувань) [126].

Що стосується внутрішнього аспекту необхідності аксіоматичного методу, то, за твердженням Д.Е. Майстрова [203], він полягає у тому, що на початку XX ст. в усіх працях з теорії ймовірностей давали «класичне обґрунтування» П.Лапласа, хоча з розвитком науки була вже досить помітною деяка невідповідність цієї системи рівню стохастичних знань. З «класичного означення» ймовірності через рівноможливі події випливає інший істотний недолік класичної концепції – дуже обмежене коло її застосувань. Звісно, що багатьох вчених не задовольняло означене вузьке коло застосувань, оскільки вже об'єктивно відмічали цілеспрямоване проникнення теорії ймовірностей в інші науки, такі як фізика, статистика, біологія, техніка, медицина, соціологія та інші. Першу спробу аксіоматично обґрунтувати теорію ймовірностей зробив С.Н. Бернштейн ще у 1917 році шляхом введення трьох аксіом:

1) аксіома порівняння результатів;

2) аксіома про несумісні події;

3) аксіома про сумісність подій,

які А.М. Колмогоров [173] оцінює так: «С.Н. Бернштейну належить перша, систематично розвинута аксіоматика теорії ймовірностей, яка побудована на понятті якісного порівняння подій за їх більшою чи меншою ймовірністю. Саме чисельне вираження ймовірності з'являється в цій концепції вже у вигляді похідного поняття».

Однак за допомогою аксіоматизації стохастики її можна перетворити в «чисту» математику. Наприклад, вище згадана система аксіом А.М. Колмогорова перетворює стохастику в спеціальну частину абстрактної теорії міри. Однак, таке зведення стохастики призводить до того, що специфічні проблеми стохастики інколи перетворюються в занадто штучні задачі цієї теорії, ідейна спрямованість стохастики стає мало зрозумілою, нарешті губиться можливість специфічного ймовірнісного інтуїтивного передбачення результатів [170]. Ця причина обумовлює те, що фахівці зі стохастики вважають себе представниками особливої науки зі специфічним стилем мислення та направляють свої дослідження на з'ясування законів реальних випадкових явищ, виникнення строгої причинної залежності на ґрунті накладання великої кількості незалежних, слабо пов'язаних факторів.

З того часу було запропоновано ряд інших аксіоматичних трактувань. Хороший порівняльний їх опис дав В. Феллер [334], який наводить строгий, але неаксіоматичний опис, який вимагає доволі значних і складних міркувань, і тому ми не будемо обговорювати тут ці аксіоматичні варіанти.

Важливо, однак, пам'ятати що теорія ймовірностей, як і всі інші аксіоматичні розділи математики, розглядає виключно відношення між абстрактними об'єктами. Через аксіоми задають систему правил, за якими встановлюють співвідношення між абстрактними сутностями. Ці правила можна потім застосовувати для доведення теорем, а теореми об'єднати при виведенні складніших теорем.

В наш час прийнято використовувати саме аксіоматичне означення ймовірності при строгій побудові теорії ймовірностей.

Теорія ймовірності як математична дисципліна аксіоматизована абсолютно в тому ж розумінні, як геометрія й алгебра. Це означає, що після того, як дано назви досліджуваним об'єктам і їх основним відношенням, а також визначено аксіоми, яким ці відношення повинні підпорядковуватися, весь подальший аналіз повинен бути заснований виключно лише на цих аксіомах, не спираючись на звичайне конкретне значення цих об'єктів і їх відношень. Будь-яка аксіоматична (абстрактна) теорія припускає як відомо велику кількість конкретних інтерпретацій.

Аксіоматизація теорії ймовірностей (і не лише) може бути проведена різними способами як у відношенні добору аксіом, так і добору основних понять і основних співвідношень. Якщо переслідувати мету можливої простоти як самої системи аксіом, так і побудови з неї подальшої теорії, то найдоцільніше аксіоматизувати поняття випадкової події та її ймовірності. Існують також інші системи аксіоматичної побудови теорії ймовірностей, а саме такі, в яких поняття ймовірності не відносять до числа основних понять, а визначають через інші поняття.

Легко бачити, що статистична ймовірність (відносна частота) події A є невід'ємною, цілком адитивною, нормованою одиницею функцією, визначеною на сукупності подій, тобто такою, що задовольняє всі аксіоми стосовно ймовірностей, а тому її можна розглядати, як звичайну ймовірність.

Разом з тим поняття статистичної ймовірності значно легше сприймають учні з урахуванням їхніх вікових особливостей, сформованості абстрактного мислення, бази математичних знань, здатності до узагальнень, життєвого досвіду. З огляду на вище сказане цілком природно починати формування основних понять стохастики з вивчення поняття статистичної ймовірності та її властивостей, відмовившись при цьому від «класичного», «геометричного», «механічного», «статистичного» означень ймовірностей, які зрештою виявляються некоректними, оскільки в них поняття ймовірності по суті вводять на основі складнішого поняття розподілу ймовірностей [131].

Вивчення ж статистичних ймовірностей, які задовольняють всі аксіоми стосовно ймовірностей, уможливлює формування в учнів необхідних понять і знань, на основі яких цілком можливо буде пізніше вивчати теорію ймовірностей на аксіоматичній основі [122].

При навчанні теми «Площа многокутника» можна познайомити учнів з поняттям геометрично заданої ймовірності, яке було наведене вперше французьким математиком Ж. де Бюффоном. Його задача про голку уможливила експериментальне обчислення числа π. Кидаючи голку на площину, що покрита сіткою координатних прямих, він підраховував кількість перетинів голки з цими прямими. Слід зауважити, що таким методом у 1901 р. число π було обчислено з шістьма правильними цифрами. Подання таких історичних фактів є корисним, адже їх розгляд допомагає продемонструвати широту можливостей застосування методів стохастики [284].

Що ж являє собою геометрично задана ймовірність? Візьмемо відрізок AB. $CD \subset AB$ (частина). На AB обираємо будь-яку точку K.

Ймовірність того, що точка $K \in CD$ задається формулою: $p[CD] = \dfrac{довжина(CD)}{довжина(AB)}$. Таке задання ймовірності називають геометричним.

Однак доцільно зазначити, що про ймовірність можна говорити лише у зв’язку з деяким простором елементарних подій, тобто з деяким експериментом. Означення статистичної ймовірності (не слід плутати з «статистичним означенням» ймовірності) побудоване на основі поняття стохастичного експерименту. Поняття простору елементарних подій та його точок (елементарних подій) є первинними, неозначуваними. Простір елементарних подій — це модель «реального» експерименту, у тому розумінні, що за означенням будь-який результат експерименту визначають однією і тільки однією точкою цього простору [131]. Розглянемо приклад.

Приклад 2.2. В ящику знаходяться зелені, жовті, червоні яблука. Яка статистична ймовірність того, що при діставанні з ящика навмання яблука, воно буде не жовтим, якщо відомо, що при 100 діставаннях одного яблука (і повернення його щоразу в ящик), зелене яблуко діставали 30 разів, а червоне – 40 разів?

Розв’язування. Очевидно, що поява не жовтого яблука означає появу чи зеленого чи червоного яблука. Оскільки при 100 випробуваннях зелене яблуко з’являлося 30 разів, а червоне – 40, то статистична ймовірність появи зеленого яблука ($\frac{30}{100}$), а червоного ($\frac{40}{100}$). Оскільки події «поява зеленого яблука» та «поява червоного яблука» – несумісні, то за властивістю 2_p статистична ймовірність шуканої події дорівнює $\frac{30}{100}+\frac{40}{100}=\frac{70}{100}$.

Накопичений людством досвід свідчить, що подія, що має близьку до одиниці статистичну ймовірність, майже обов’язково відбувається, тобто є практично вірогідною, а малоймовірна подія практично неможлива. Цей досліджений факт виявляється при достатньо великій кількості досліджень.

2.3. Методика введення поняття випадкової події та операцій над подіями у шкільному курсі математики

Одразу зазначимо, що теоретичний матеріал подаватимемо з позицій, викладених у посібнику [131].

На першому уроці зі стохастики необхідно поговорити з учнями про стохастику як науку, про її методи. Запитати у дітей, чи чули вони слова «стохастика», «статистика», «ймовірність», чи можуть вони пояснити їх значення. Доцільно на першому уроці поговорити і про історію розвитку стохастики як науки. Заздалегідь можна попросити активних учнів підготувати доповіді у вигляді презентацій (один з прикладів таких презентацій наведено у додатку Б).

При підготовці до уроків учитель повинен старанно добирати та систематизувати навчальний матеріал, виділити в ньому найважливіше, продумати форми подання, доцільно врахувати, якими знаннями, вміннями та навичками учні вже володіють, а які потрібно сформувати, при цьому врахувавши вікові особливості.

В кожній науці є певна кількість понять, що є первинними і які не означають через простіші поняття (в геометрії це поняття точки та площини, в теорії множин – елемента множини та множини, в інформатиці – інформації і т.д.). Основними поняттями стохастики є поняття елементарної події та простору елементарних подій [133, с.56].

Перші уроки доцільно присвятити формуванню основних понять, зокрема, стохастичного експерименту, елементарної, вірогідної, неможливої та випадкової події, сумісних подій. Необхідно наводити значну кількість випадкових подій, переконуючи учнів, що для масових випадкових подій – існують закономірності, які і вивчає стохастика.

Доцільно провести з учнями кілька експериментів (підкидати монетку, шестигранний кубик, діставати кульки, яблука, ручки, зошити тощо). Необхідно зазначити, що уроки стохастики надають вчителю певні можливості використання групової роботи. Адже будь-який стохастичний експеримент (чи то підкидання монет, чи збирання даних) не під силу провести одній людині. Учні з задоволенням і інтересом виконують практичні роботи, пов’язані з опитуваннями, систематизацією й опрацюванням отриманих даних, зокрема, за допомогою комп’ютера [329].

Засвоєння понять відбувається у процесі аналітико-синтетичної діяльності учнів, спрямованої на виділення суттєвих властивостей певного поняття й усвідомлення несуттєвих властивостей, а також на застосуванні нового поняття до розв’язування задач. У структурі пізнавальної діяльності учнів щодо засвоєння понять входять як загальні (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення тощо), так і специфічні розумові дії (дія підведення до поняття і виведення наслідків) [300, с.57].

При введенні стохастичних понять доцільно використовувати і метод аналогії, порівнюючи нові поняття з уже відомими учням, що сприятиме кращому усвідомленню цих понять, зв'язків між ними, властивостей.

Доцільно будувати пояснення так, щоб учні відчували необхідність вивчення теоретичного матеріалу, самі отримували розв'язки задач. Лише так вони відчують закономірності, що вивчаються, необхідність в майбутньому цих знань для практичної та професійної діяльності в майбутньому.

Не варто забувати і про те, що чим абстрактніше поняття, тим складніша логічна структура його означення, тим гостріша потреба в попередньому введенні поняття на інтуїтивному рівні, у поясненні властивостей, які увійдуть в означення, спочатку на конкретних прикладах з використанням наочних образів [300, с.61]. Це в значній мірі стосується стохастичних понять.

2.3.1. Випадкові події

Розглянемо процес введення понять елементарної події та множини елементарних подій. Спочатку необхідно звернути увагу учнів, що при вивченні різноманітних явищ та процесів, що відбуваються в природі та суспільстві, доволі часто доводиться здійснювати певні спостереження та експерименти, результати яких є непередбачуваними. Наприклад, запропонувати учням вгадати, скільки раз вчитель навмання (з закритими очима) дістане білу повітряну кульку з торбинки, в якій лежать 5 синіх, 3 білих і 2 червоних кульки, якщо буде здійснено 50 діставань, після кожного з яких кульку повертатиме назад. Запропоновані учнями відповіді доцільно зафіксувати на дошці, після чого провести описане випробування та порівняти його результати з записаними на дошці. Напевне будуть відповіді, які значно різнитимуться з отриманими в ході експерименту. Після цього повідомити учням, що експерименти, результати яких передбачити неможливо називають випадковими або стохастичними. Перерахувавши всі можливі наслідки таких експериментів, отримують сукупність всіх наслідків, які називають елементарними подіями та позначають *E*, а сукупність таких подій називають множиною (простором) елементарних подій і позначають Ω.

Вчитель: Якою буде множина елементарних подій у нашому випробуванні?

Очікувана відповідь: поява синьої, червоної, білої кульки.

Вчитель: Для зручності записують множину елементарних подій так: Ω=*{С, Ч, Б}*. При будь-якому випробуванні (експерименті) має місце лише один наслідок (відбувається одна елементарна подія з множини Ω).

Закріпити теоретичний матеріал доцільно, розв'язуючи задачі, які доцільно добирати так, щоб зацікавити учнів вивченням стохастики, при можливості спиратися на їхній попередній життєвий досвід.

Приклад 2.3. Експеримент полягає в діставанні навмання однієї цукерки з коробки та фіксації кольору її обгортки (в коробці цукерки загорнуті в червоні та жовті обгортки).

Вчитель: Який простір елементарних подій даного експерименту?

Учні: Простором елементарних подій буде множина Ω =*{Ч, Ж},* де подія «*Ч*» – поява цукерки в червоній обгортці, а подія «*Ж*» – в жовтій.

Приклад 2.4. На столі лежить пачка зошитів в клітинку, лінійку та косу лінію. Експеримент полягає в діставанні навмання одного зошита та фіксації способу розграфлення цього зошита.

Вчитель: Яким буде простір елементарних подій даного експерименту?

Учні: Множина Ω=*{«К», «Л», «КЛ»}*.

Вчитель: Що означає поява зошита в клітинку, лінійку, косу лінію?

Учні: Відбувається відповідна елементарна подія.

Вчитель: Які характеристики зошита ще можна фіксувати?

Учні: Колір обкладинки зошита, кількість аркушів в зошиті.

Дома учням можна запропонувати розв'язати такі задачі:

1. Описати множину наслідків експерименту, що полягає в діставанні навмання яблука з ящика, в якому лежать зелені, жовті та червоні яблука.

2. Описати простір елементарних подій експерименту, що полягає в виборі навмання одного учня класу та фіксації статі (хлопчик, дівчинка).

3. Описати простір елементарних подій експерименту, що полягає в діставанні навмання одного підручника з полички, на якій знаходяться підручники, що видали на початку навчального року.

Необхідно звернути увагу учнів на те, що у розглянутих прикладах простір елементарних подій скінчений (кількість підручників, яблук, зошитів). Однак в житті трапляються випадки, коли множина можливих наслідків експерименту є нескінченною.

Приклад 2.5. Експеримент полягає в тому, що з множини натуральних чисел навмання вибирають одне число.

Вчитель: Якою буде множина Ω?

Очікувана відповідь: Множина Ω міститиме всі натуральні числа.

Вчитель: Як інакше можна назвати цю множину?

Очікувана відповідь: Простір елементарних подій.

Педагогічний досвід свідчить, що учень добре осмислив і зрозумів матеріал тільки тоді, коли він може самостійно наводити приклади, тому доцільно запропонувати учням навести кілька прикладів експериментів, в яких множина Ω є скінченною і нескінченною. Після чого обговорити 2-3 з них.

На уроках необхідно наводити приклади стохастичних експериментів з хімії, економіки, біології, медицини та інших галузей для реалізації міжпредметних зв’язків та демонстрації застосування елементів стохастики для розв’язування задач прикладного характеру.

Приклад 2.6. Експеримент полягає у називанні навмання учнем тварини та фіксації класу, до якого ця тварина належить (наприклад, риби, птахи). Яким буде простір елементарних подій?

Нехай випробування полягає в тому, що з певної множини елементів навмання вибирають один елемент. Появу окремого елемента ототожнюють з відбуванням відповідної елементарної події (яка полягає в тому, що вибрано саме цей елемент). Таким чином можна встановити взаємно однозначну відповідність між елементарними подіями та елементами цієї множини (множина елементів і відповідна множина елементарних подій еквівалентні).

Подібні експерименти необхідно пропонувати виконати дома (наприклад, діставати різнокольорові кульки, яблука, зошити, ручки, цукерки тощо та фіксувати їх колір; підкинути 100 раз монетку та зафіксувати, скільки разів випаде герб, скільки цифра тощо). При цьому необхідно звернути увагу учнів на те, що різні експерименти можуть бути описані однією стохастичною моделлю (діставання яблука певного кольору з ящика, в якому лежать яблука різних кольорів; ручки з пеналу, в якому лежать різнокольорові ручки; цукерки з коробки цукерок різних сортів; повітряної кульки з торбинки, в якій знаходяться різні за формою кульки тощо).

Введення основних понять стохастики можливе з застосуванням як конкретно-індуктивного, так і абстрактно-дедуктивного методу, при цьому закріплення нових понять краще здійснювати безпосередньо після введення певного поняття шляхом розв’язування задач. Тому під час уроку ефективною нам видається евристична бесіда, у ході якої в учнів формуються й одночасно закріплюються нові поняття та способи розв’язування задач.

Паралельно цьому відбувається формування у школярів уявлення про стохастичний експеримент та його непередбачувані наслідки, множину можливих наслідки стохастичного експерименту, випадкову подію тощо.

Розглянемо введення поняття випадкової, неможливої та вірогідної події, спочатку запропонувавши учням провести наступний експеримент: з карток з числами від 0 до 9, які лежать на столі навмання дістають одну (експеримент повторюють значну кількість раз, наприклад, 50).

Вчитель: Якими були наслідки експерименту (елементарні події)?

Учні: Поява картки з числами 0, 1, 2, …, 9.

Вчитель: Якою буде множина елементарних подій?

Учні: $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Вчитель: Чи можна дістати картку, на якій написано парне число?

Учні: Так, це картки з номерами 2, 4, 6, 8.

Вчитель: Чи всі перераховані числа входять до множини Ω?

Учні: Так.

Вчитель: В цьому випадку кажуть, що поява кожної картки з числами 2, 4, 6, 8 сприяє появі картки, на якій написано парне число. Чи можна дістати картку, на якій написано просте число?

Учні: Так, це картки з номерами 2, 3, 5, 7.

Вчитель: А чи всі перераховані числа входять до множини Ω?

Учні: Так.

Вчитель: Отже, коли всі елементи деякої множини входитимуть у множину Ω (множину елементарних подій, що відповідає певному експерименту) ми називатимемо її подією (або випадковою подією).

Вчитель: Чи можна дістати картку, на якій написано одноцифрове число?

Учні: Так, яку б ми картку не дістали, на ній буде написано одноцифрове число.

Вчитель: Отже, множина всіх можливих наслідків експерименту – це множина одноцифрових чисел і в результаті кожного випробування подія Ω обов'язково відбувається, її прийнято називати вірогідною подією.

Вчитель: А чи можна дістати картку, на якій написано число 10? 100?

Учні: Ні, карток з такими числами немає.

Вчитель: Дана подія не співпадає з жодним елементом (елементарною подією) з множини Ω, тому вона ніколи не може відбутися в результаті випробування, таку подію називають неможливою. При цьому слід підкреслити, що без зв'язку з певним експериментом і відповідним простором Ω елементарних подій не можна вести мову ні про випадкову, ні про вірогідну, ні про неможливу подію.

Вчитель зазначає, що позначати події прийнято великими латинськими літерами *A, B, C* і т.д. Необхідно запропонувати учням навести приклади неможливих, можливих і вірогідних подій для наступного експерименту: на 4 картках намальовано червоні квадрат, прямокутник, трапеція, ромб, при цьому описавши простір елементарних подій Ω.

Разом з учнями спробувати скласти схему класифікації подій (рис. 2.6).

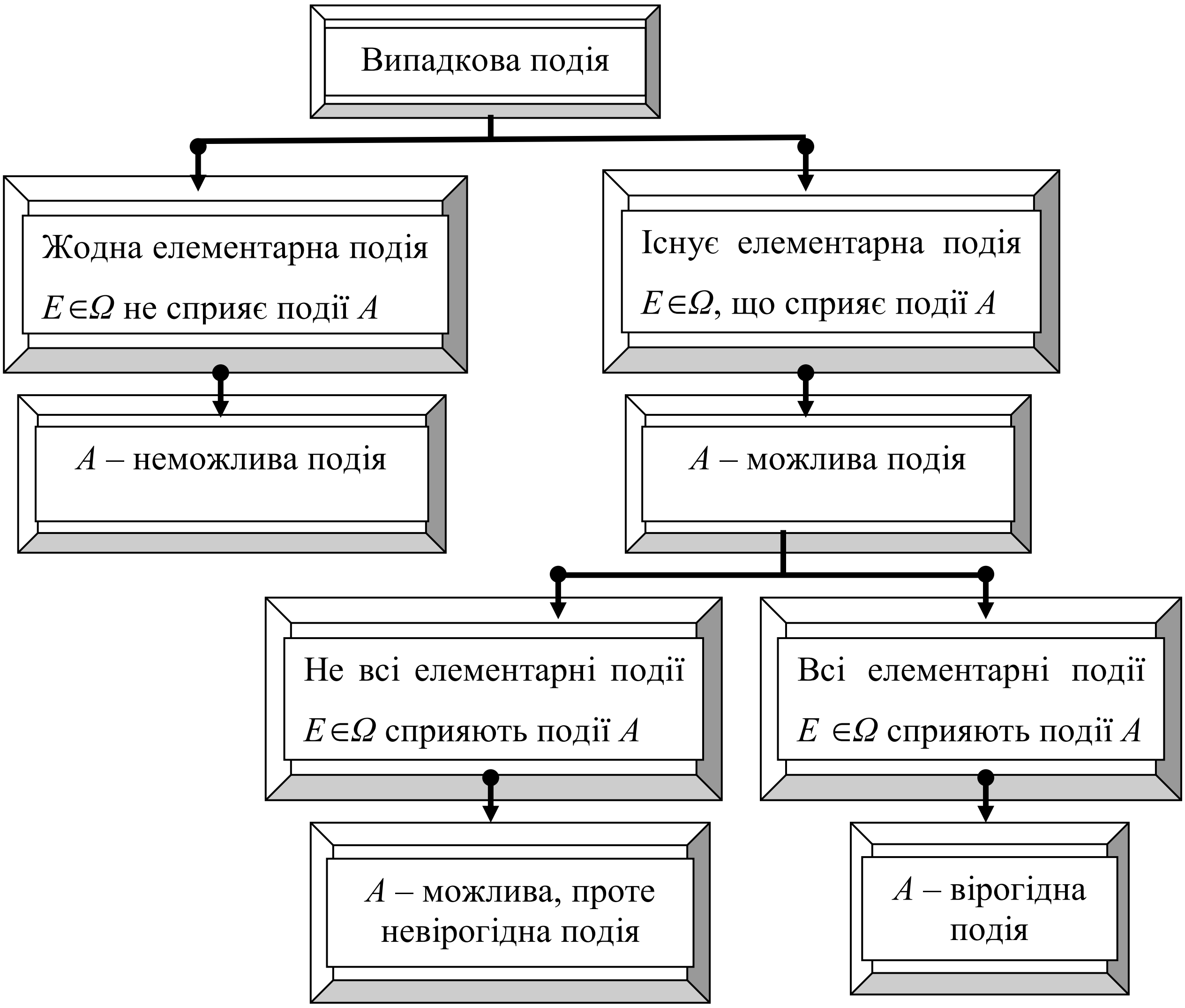


Рис. 2.6. Схема класифікації подій

Приклад 2.7. Експеримент полягає у діставанні одного яблука з ящика, у якому є зелені та червоні яблука $\Omega = \{З, Ч\}$. Подіями будуть підмножини множини Ω: $E_1=\{З\}$, $E_2=\{Ч\}$, $\Omega =\{З,Ч\}$, $\varnothing$, які означають, що дістали відповідно зелене яблуко; червоне; зелене або червоне; ні зелене, ні червоне. Елементарна подія «*З*» сприяє події $A=\{З\}$ і події $\Omega =\{З,Ч\}$, але не сприяє події $B=\{Ч\}$ і події $\varnothing$. Аналогічно елементарна подія «*Ч*» сприяє події $B=\{Ч\}$

і Ω =*{З,Ч},* і не сприяє події *А={З}* і події *Ø*. Неможливою подією в даному експерименті є діставання яблука іншого кольору, наприклад, жовтого, або іншого плода, наприклад, груші.

Приклад 2.8. Експеримент полягає у діставанні одного плода з ящика, у якому є жовті та червоні яблука. Вчитель пропонує учням навести кілька прикладів неможливих та вірогідних подій в даному експерименті.

Приклад 2.9. Експеримент полягає у діставанні одного плода з ящика, в якому знаходяться огірки, помідори, груші й яблука, тобто Ω=*{О, Г, П, Я}*. Випадкова подія *А={Я, Г}* полягає в тому, що дістають яблуко або грушу.

Вчитель: Які елементарні події сприяють події *А={Я, Г}?*

Учні: Елементарні події *«Я» і «Г».*

Вчитель: Які елементарні події не сприяють події *А={Я, Г}?*

Учні: Елементарні події *«П» і «О»,* оскільки вони ∉ *А={Я, Г}.*

Вчитель: Яка подія є неможливою в даному експерименті?

Учні: Неможливою подією в даному випадку є діставання з ящика плода, відмінного від названих (наприклад, сливи).

Приклад 2.10. З коробки, в якій лежать сині та жовті повітряні кульки навмання дістають три кульки і фіксують їх кольори у порядку діставання. Подія *А* полягає в тому, що принаймні дві з них сині. Яким є простір елементарних подій? З яких елементарних подій складається подія А?

Вчитель: Якою буде множина елементарних подій експерименту?

Учні: Набір результатів трьох діставань кульки, тобто Ω=*{ССС, ССЖ, СЖС, СЖЖ, ЖСС, ЖСЖ, ЖЖС, ЖЖЖ},*

Вчитель: Опишіть множину *А*.

Учні: *А={ССС, ССЖ, СЖС, ЖСС}.*

Вчитель: Яка подія в даному експерименті буде неможливою?

Учні: Неможливою подією є діставання з коробки повітряної кульки, колір якої відмінний від вказаних (наприклад, червоної).

Дома учням доцільно запропонувати скласти та розв’язати 2-3 подібні задачі.

При розгляді поняття рівних подій *A* і *B* (одночасно або відбуваються, або не відбуваються, тобто *A* є підмножиною *B* і *B* є підмножиною *A*) запропонуємо учням назвати подію *A*, що полягає у виборі непарного числа серед чисел 3, 4, 5, 6, 7, 8 і подію *B*, що полягає у виборі простого числа з тих же чисел. З'ясувати, чи рівні ці події, після чого учні наводять свої приклади рівних подій.

Для самостійного розв'язування можна запропонувати учням з'ясувати рівність подій:

А) вибір непарного числа та числа, яке націло не ділиться на 2 (експеримент полягає у виборі одного числа з множини натуральних чисел);

Б) викликати до дошки дівчинку та викликати не хлопчика (експеримент полягає у тому, що до дошки виходить навмання вибраний учень);

В) витягнути з пеналу синю ручку і не червону (експеримент полягає у діставанні однієї ручки з пеналу, в якому лежать сині, червоні, зелені та чорні ручки).

Приклад 2.11. Нехай Ω=*{Я, П, О, Г},* тобто експеримент полягає у діставанні з ящика яблука, помідора, огірка чи груші. Подія *A={Я}* спричинює подію *B={Я, Г},* яка в свою чергу, спричинює подію *C={Я, Г, П}*. Подія *C* дорівнює події *D*, яка полягає в тому, що з ящика дістають не огірок.

Дома можна запропонувати учням з'ясувати, чи спричинює подія *A* подію *B*, чи спричинює подія *B* подію *A*, якщо:

А) *A*=«число ділиться націло на 4», *B*=«число ділиться націло на 2», експеримент полягає у виборі одного натурального числа;

Б) *A*=«число ділиться націло на 3», *B*=«число ділиться націло на 9», експеримент полягає у виборі натурального числа від 1 до 100;

В) *A*=«учень є відмінником», *B*=«учень є спортсменом», експеримент полягає у виборі одного учня з Вашого класу;

Г) *A*=«учень є відмінником», *B*=«учень є хлопчиком», експеримент полягає у виборі одного учня з Вашого класу;

Д) *A*=«учень є хлопчиком», *B*=«учень є спортсменом», експеримент полягає у виборі одного учня з Вашого класу.

2.3.2. Операції над подіями

Необхідно розглянути з учнями й основні операції над подіями (оскільки події є підмножинами множини Ω елементарних подій, то над ними можна виконувати ті самі операції, що й над множинами) у вигляді бесіди.

Вчитель: Запишіть множини, що відповідають події *A* – вибір непарного числа і події *B* – вибір простого числа з множини $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Учні: $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$.

Вчитель: Випишіть спільні елементи цих двох множин?

Учні: Це числа 3, 5 і 7.

Вчитель: Добутком подій *A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події *A* і *B* (позначають $A \cap B$ або $A \cdot B$), тобто в множину *C* входять спільні елементи двох множин, що відповідають подіям *A* і *B*. А тепер випишіть всі елементи множин, що відповідають подіям *A* і *B*, при цьому, елементи, що зустрічаються двічі запишемо лише один раз.

Учні: 1, 2, 3, 5, 7, 9.

Вчитель: Сумою подій *A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій *A* або *B* (позначають $A \cup B$ або $A+B$), тобто в множину *C* входять всі елементи двох множин. Вчитель обов'язково повинен звернути увагу на те, що кількість елементів у множині *C* не обов'язково дорівнює сумарній кількості елементів, що є у множинах *A* і *B*, оскільки спільні елементи враховують лише один раз.

Вчитель: А тепер випишіть всі елементи множини, що відповідає події *A*, але яких немає в множині, що відповідає події *B*.

Учні: 1, 9.

Вчитель: Різницею подій A і B називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B (позначають $A \backslash B$ або $A–B$). Для того, щоб отримати різницю подій A і B необхідно з множини, що відповідає події B вилучити всі елементи множини, що відповідають події A. Запишіть різницю подій $B \backslash A$.

Учні: $B \backslash A=\{2\}$.

Слід наголосити, що говорити про операції над подіями можна лише стосовно певного експерименту та відповідного простору Ω – елементарних подій. Закріпити теоретичні відомості доцільно, розв'язавши наступні задачі.

Приклад 2.12. Нехай $\Omega =\{Ч, З, С\}$ – множина елементарних подій, що відповідає діставанню однієї ручки з пеналу, в якому лежать чорні, сині та зелені ручки. Нехай $A=\{Ч\}$ – подія, що полягає у діставанні з пеналу червоної ручки, а $B=\{З\}$ – подія, що полягає у діставанні зеленої ручки. Тоді $A+B=A \cup B=\{Ч, З\}$ – подія, яка полягає в тому, що дістали червону ручку (відбувається подія A), або зелену (відбувається подія B).

Приклад 2.13. Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибраний учень школи є хлопчиком, а подія B – навмання вибраний учень є спортсменом (спортсменкою).

Вчитель: Яка множина буде простором елементарних подій?

Учні: Ω – множина учнів школи.

Вчитель: Які множини будуть подіями A і B?

Учні: A – множина усіх хлопчиків, що навчаються в школі, B – множина усіх спортсменів і спортсменок школи.

Вчитель: Яка множина відповідає події $C=A+B$?

Учні: Множина всіх хлопчиків, що навчаються в школі і дівчаток-спортсменок.

Дома учням доцільно запропонувати наступну задачу. Експеримент полягає у виборі одного натурального числа від 1 до 20. Знайти суму наступних подій: A=«обране число парне», B=«обране число ділиться на 5». Необхідно також запропонувати самостійно скласти 2-3 аналогічні задачі.

Приклад 2.14. Якщо A – подія, що полягає в виборі натурального числа з множини {1, 2, 3, … 100} кратного 5, а B – у виборі одноцифрового числа, тоді $A\cdot B=A\bigcap B=\{5\}$ – подія, яка полягає в тому, що вибрали число, кратне 5 (відбувається подія A) і одноцифрове (відбувається подія B).

Дома учням доцільно запропонувати виписати множини, що відповідають подіям A і B та знайти їх добуток:

А) A=«спортивні ігри», B=«ігри з м’ячем», якщо Ω={футбол, волейбол, «їстівне-неїстівне», баскетбол, регбі, «я знаю 5 імен», бадмінтон, теніс, «штандер-вандер», перетягування канату, «гаряча картопля»};

Б) A=«просте число», B=«парне число», якщо Ω={3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93};

В) A=«дерева», B=«хвойні дерева», якщо Ω={дуб, ясен, тополя, осика, сосна, ялина, береза, клен, піхта}.

Потім вводимо поняття сумісності подій з позицій посібника [131] і розв’язуємо наступні задачі.

Приклад 2.15. Експеримент полягає у тому, що до дошки викликають одного учня, подія A полягає в тому, що він є хлопчиком, а подія B – відмінником. Ці події сумісні, оскільки вони в даному експерименті можуть відбутися одночасно, тобто хлопчик може виявитися відмінником.

Приклад 2.16. Експеримент полягає у тому, що спортсмен здійснює один постріл у мішень. Подія A полягає в тому, що він влучає в мішень, а подія B – не влучає. Чи будуть ці події сумісними?

Очікувана відповідь: Це приклад несумісних подій, оскільки одночасно в одному випробуванні вони відбутися не можуть.

Приклад 2.17. Експеримент полягає у діставанні одного зошита з пачки. Подія A – цей зошит в лінійку, а подія B – у клітинку. Чи сумісні ці події?

Очікувана відповідь: події A і B – несумісні, оскільки не існує елементарної події, яка належить як до множини A, так і до множини B (зошит не може бути одночасно і в лінійку, і в клітинку).

Доцільно запропонувати учням і групову роботу (утворити групи по 5-6 чоловік), запропонувати обговорити кожній групі окремо розв'язання аналогічних вправ. Після роботи в групах обов'язковим є обговорення отриманих результатів. Самостійно учням можна запропонувати з'ясувати сумісність наступних подій з наступним обговоренням розв'язку.

а) A=«вибране число є парним», B=«вибране число є простим» (якщо експеримент полягає у виборі натурального числа від 1 до 100);

б) навмання обране натуральне число від 1 до 25 включно є A=«парним», B=«кратним трьом»;

в) маючи один білет лотереї виграти A=«мотоцикл», B=«фотоапарат», якщо множина речей, що можна виграти є такою: Ω={автомобіль, мотоцикл, фотоапарат, комп'ютер, магнітофон}.

Приклад 2.18. Розглянемо події A – дістали ручку і B – дістали червону ручку з пеналу, в якому знаходяться сині, зелені, червоні ручки та прорсті олівці. Подія $A \setminus B$ полягає в тому, що дістали ручку синю чи зелену (не червону).

Приклад 2.19. Знайти різницю двох подій $A \setminus B$ і $B \setminus A$, якщо відомо, що A – учень народився в першому кварталі року, а B – учень народився весною.

Вчитель: Які місяці відносять до першого кварталу (подія A)?

Учні: Січень, лютий, березень.

Вчитель: Назвіть весняні місяці (подія B).

Учні: Березень, квітень, травень.

Вчитель: Які місяці належать до першої множини і не належать до другої?

Учні: Січень, лютий.

Вчитель: Яка подія буде різницею подій A і B ($A \setminus B$)?

Учні: $A \setminus B$ – учень народився в січні або в лютому.

Вчитель: Які місяці не належать до першої множини і належать до другої?

Учні: Квітень, травень.

Вчитель: Яка подія буде різницею $B \backslash A$?

Учні: $B \backslash A$ – учень народився в квітні або в травні.

Для закріплення теоретичного матеріалу можна запропонувати самостійно знайти різниці подій $A \backslash B$ і $B \backslash A$: A=«названий навмання учнем місяць є вереснем», B=«названий навмання учнем місяць є осіннім».

Вводимо поняття події, протилежної до події A (як різницю подій $\Omega \backslash A$).

Приклад 2.20. Нехай подія A полягає в тому, що дістали зошит у клітинку з пачки зошитів у клітинку, лінійку, косу лінію. Можливими наслідками випробування є елементарні події, які полягають в тому, що дістали зошит у лінію, клітинку, косу лінію. Тоді $\Omega=\{Л, К, КЛ\}$, $A=\{К\}$, $\overline{A}=\{Л, КЛ\}$. Отже, подія $\overline{A}$ означає, що дістали зошит в лінійку чи косу лінію (не в клітинку).

Для обговорення доцільно запропонувати такі вправи:

1. Множина Ω складається з усіх двоцифрових чисел. Назвіть події протилежні до події A і події B. Чи будуть взаємно протилежними ці події, якщо A=«двоцифрове число складається тільки з парних цифр» і B=«двоцифрове число складається тільки з непарних цифр».

2. Вкажіть події протилежні до наступних подій: при підкиданні кубика, на гранях якого нанесено числа від 1 до 6, випало шість очок; дві кулі потрапили в центр мішені при двох пострілах.

Аналогічні задачі доцільно запропонувати для самостійного розв’язування.

Нехай **Ω** – простір елементарних подій, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ *і* $C \subset \Omega$ – довільні випадкові події, $\varnothing$ – неможлива подія. Доцільно зазначити, що введені операції над подіями задовольняють такі закони [131, с.16] (заздалегідь необхідно виготовити плакат або підготувати презентацію, яку можна продемонструвати на мультимедійній дошці):

1. $\overline{\overline{A}}=A$ – закон подвійного заперечення;

$$\left.\begin{aligned}&2.\ A+B=B+A\\&3.\ AB=BA\end{aligned}\right\}$$ комутативні (переставні) закони додавання та множення;

$$\left.\begin{array}{l} 4.\ (A+B)+C=A+(B+C) \\ 5.\ (AB)C=A(BC) \end{array}\right\}$$ асоціативні (сполучні) закони додавання і множення;

6. $(A+B)C=AC+BC$ – перший дистрибутивний (розподільний) закон;

7. $AB+C=(A+C)\ (B+C)$ – другий дистрибутивний (розподільний) закон;

8. $A+A=A;$

9. $A\cdot A=A;$

10. $A+\overline{A}=\Omega;$

11. $A\cdot\overline{A}=\varnothing;$

12. $A+\Omega=\Omega;$

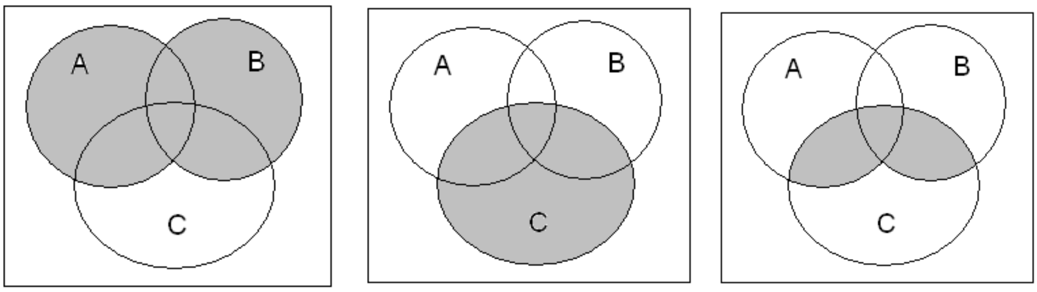
13. $A\cdot\Omega=A;$

14. $A+\varnothing=A;$

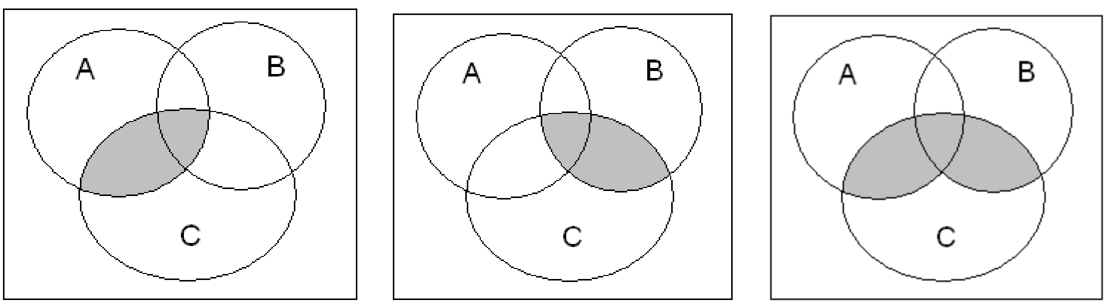
15. $A\cdot\varnothing=\varnothing;$

$$\left.\begin{array}{l} 16.\ \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B} \\ 17.\ \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B} \end{array}\right\}$$ – закони двоїстості (правила де Моргана).

Для геометричної ілюстрації даних законів (зокрема, 4, 5, 7, 16, 17) можна запропонувати учням групову роботу (попередньо проілюструвавши один з них, наприклад, 6 (рис. 2.7)).



A+B *C* *(A+B)C*



AC *BC* *AC+BC*

Рис. 2.7

Після введення операцій над подіями наголошуємо, що не всі підмножини простору Ω будуть подіями. Адже, поняття події вводиться не саме по собі, а лише у зв’язку з поняттям простору подій.

Нехай Ω – деякий простір елементарних подій, і задана деяка сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. Якщо $A \in S$, то і $\overline{A} \in S$;

3_s. Якщо $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, то і $\bigcup_i A_i \in S$.

Для закріплення поняття простору подій доцільно розв’язати низку задач.

Приклад 2.21. Якщо експеримент полягає в фіксації парності названого натурального числа, то *Ω={П, Н},* простір *S* випадкових подій може складатися лише з неможливої події *∅*, яка полягає в тому, що названо ні парне, ні непарне число, та з вірогідної події **Ω**, яка полягає у тому, що число або парне, або непарне.

Зауважимо, що коли для множини Ω *={П,Н}* покласти *S={∅,* Ω*, {П}}*, то ця сукупність підмножин простору Ω не задовольняє умову 2), а тому в цьому випадку *S* не може бути простором подій. Отже, не кожна сукупність *S* підмножин простору Ω елементарних подій може бути простором подій (докладніше [131]). Можна запропонувати учням припустити, що необхідно зробити, щоб дана сукупність підмножин *S* стала простором подій.

Очікувана відповідь: додати до сукупності *S* підмножину *{Н}.*

Приклад 2.22. Нехай **Ω** *={К, Л, КЛ}* – простір елементарних подій, що відповідає експерименту – однократному діставанню зошита з пачки. Покладемо *S={∅,* Ω*, {К}, {Л, КЛ}}.* Тоді *S* задовольняє умови 1)-3), тобто розглядувана сукупність *S* підмножин множини Ω може бути простором подій, а елементи сукупності *S* – подіями.

Доцільно поцікавитися у учнів, чи можна було в останньому прикладі сукупність *S* задати інакше?

Очікувана відповідь: так, наприклад, $S=\{\varnothing, \Omega, \{Л\}, \{К, КЛ\}\}$.

Разом з учням необхідно зробити висновок про те, що одному і тому самому простору Ω елементарних подій може відповідати кілька просторів S випадкових подій. Множина $A \subset \Omega$ залежно від обраного простору S подій може бути подією, а може і не бути. Лише множини $\varnothing$ та Ω є подіями для будь-якого простору S випадкових подій.

2.4. Методика вивчення статистичних ймовірностей в шкільному курсі математики

Поняття ймовірності психологічно є складним для учнів. Навіть великі математики неодноразово помилялися при розв’язуванні конкретних імовірнісних задач, оскільки неправильно тлумачили це поняття, тому формувати його в учнів потрібно поступово та обережно, не заучуючи значної кількості малозрозумілих означень, а розв’язуючи й обговорюючи ретельно дібрані задачі.

Вводити поняття статистичної ймовірності (відносної частоти) доцільно після розв’язування кількох задач, щоб учні самі прийшли до формулювання означення. Задачі на обчислення статистичної ймовірності повинні бути практичного змісту, хоча умови можуть бути дещо «ідеалізовані».

2.4.1. Поняття статистичної ймовірності

Означення статистичної ймовірності можна отримати безпосередньо з експерименту, який доцільно запропонувати у вигляді випереджувального домашнього завдання: утворити чотири групи учнів, кожному учню першої групи запропонувати підкинути дома монетку 2 рази, другої групи – 5 разів, третьої – 100 разів і четвертої – 200 разів, при цьому фіксуючи в зошиті кількість підкидань монетки та кількість випадінь герба.

До початку уроку підготувати на дошці (слайді) таблицю (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Група	I				II				III				IV			
Кількість підкидань монетки	2	2	2	2	5	5	5	5	100	100	100	100	200	200	200	200
Кількість випадінь герба																
Відносна частота появи герба																
Округлена до десятих відносна частота																

На початку уроку вчитель під диктовку учнів заповнює третій рядочок таблиці, а відносну частоту для кожного стовпчика обчислюють разом (шляхом ділення кількості випадінь герба на кількість підкидань монети). Потім учитель пропонує округлити відносні частоти до десятих і цікавиться, чи рівні округлені результати першої та другої груп (*очікувана відповідь*: ні, всі результати різні), а у другої та третьої груп (*очікувана відповідь*: хоча всі дані були різні, але при округленні вони всі дорівнюють 0,5). Запропонуємо учням побудувати на координатній площині точки другої та третьої груп, абсциси яких – номер результату в таблиці, а ординати – відповідні відносні частоти та поцікавимося, вздовж якої прямої розташовані дані (*очікувана відповідь*: $y=0,5$). Після чого вчитель повідомляє, що подібний експеримент не раз проводили відомі вчені в різні роки та демонструє заготовлений плакат (слайд) з таблицею (табл. 2.5).

Вчитель зазначає, що число, навколо якого зосереджено значення відносних частот при зростанні кількості випробувань називають статистичною ймовірністю (відносною частотою) події (в нашому випадку це 0,5). Статистична ймовірність характеризує середню кількість відбувань певної події в кожному з n випробувань.

Приклад 2.23. Нехай простір елементарних подій $\Omega=\{Ч, З, Ж\}$ (де *Ч, З, Ж* – відповідно червоне, зелене та жовте яблуко), простір подій $S=\{\varnothing, \Omega,$

{Ч}, {З}, {Ж}, {Ч,З}, {З,Ж}, {Ж,Ч}} і подія *A={Ч}* – діставання одного червоного яблука з ящика.

Таблиця 2.5

Результати експерименту, проведеного деякими вченими щодо підкидання монетки

Дослідник	Кількість підкидань монети	Кількість випадінь герба	Відносна частота появи герба
Ж.Бюффон (1707-1788)	4040	2048	0,5069
О.де Морган (1806-1871)	4092	2048	0,5005
К.Пірсон (1857-1936)	12000	6019	0,5016
К.Пірсон (1857-1936)	24000	12012	0,5005
В.Феллер (1906-1970)	10000	4979	0,4979
У.Джевонс (1835-1882)	20480	10379	0,5068
В.Романовський (1879-1954)	80640	40151	0,4979

Припустимо, що проведено $n=100$ діставань, в результаті яких зелене яблуко діставали 30 разів, червоне – 55 разів. Тоді $m_{100}(\{З\})=30$, $m_{100}(\{Ч\})=55$, $m_{100}(\{Ж\})=100-(30+55)=15$, $m_n(\varnothing)=0$, $m_n(\Omega)=100$ – абсолютні частоти відповідних подій. Числа $P^*_{100}(\varnothing)=0$, $P^*_{100}(\Omega)=1$, $P^*_{100}(\{З\})=\frac{30}{100}=0,3$, $P^*_{100}(\{Ч\})=\frac{55}{100}=0,55$, $P^*_{100}(\{Ж\})=\frac{15}{100}=0,15$ – статистичні ймовірності відповідних подій у даній серії з $n=100$ випробувань з діставанням яблука. Зокрема, $m_{100}(A)=55$, $P^*_{100}(A)=\frac{55}{100}=0,55$.

Доцільно наголосити на тому, що при проведенні іншої серії зі 100 діставань яблука, можна отримати значення $P^*_n(A)$, $A\in S$, які не обов'язково співпадатимуть з попередніми. Проте, якщо провести досить велику кількість досить довгих серій випробувань, то часто серед отриманих значень $P^*_n(A)$ можна виділити досить велику групу близьких між собою значень (як це відбулося в випереджувальному домашньому завданні з підкиданням монети). Переважна більшість з них у певному розумінні групуються одне біля одного, а тому й біля певного фіксованого числа. Саме тому статистична ймовірність $P_n^*(A)$ при досить великих n характеризує міру можливості відбування події A не тільки у кожному з n проведених випробувань, а й у тих, що можуть бути проведеними [131, с.23].

Приклад 2.24. Нехай з коробки олівців дістають один олівець і простір елементарних подій $\Omega=\{Ч, С, Ж, З, К, Ф\}$, простір S подій – сукупність будь-яких підмножин простору Ω, а подія $A=\{Ч, С\}$ – діставання одного олівця червоного або синього кольору (якщо в коробці є олівці червоного, синього, жовтого, зеленого, коричневого та фіолетового кольорів). Припустимо, що проведено $n=20$ таких випробувань і спостерігали такі результати:

$$E_{сп\,1}=«Ч», E_{сп\,2}=«С», E_{сп\,3}=«Ж», E_{сп\,4}=«З», E_{сп\,5}=«К»,$$
$$E_{сп\,6}=«С», E_{сп\,7}=«Ж», E_{сп\,8}=«З», E_{сп\,9}=«Ч», E_{сп\,10}=«С»,$$
$$E_{сп\,11}=«К», E_{сп\,12}=«Ж», E_{сп\,13}=«Ч», E_{сп\,14}=«С», E_{сп\,15}=«Ч»,$$
$$E_{сп\,16}=«Ж», E_{сп\,17}=«Ф», E_{сп\,18}=«З», E_{сп\,19}=«З», E_{сп\,20}=«С».$$

Вчитель: Скільки разів діставали червоний (синій, жовтий, зелений, коричневий, фіолетовий) олівець?

Учні: 4 (5, 4, 4, 2, 1).

Вчитель: Чому дорівнюють абсолютні частоти елементарних подій $m_{20}(E_i)$:

Учні: $m_{20}(E_1)= m_{20}(Ч)=4, m_{20}(E_2)= m_{20}(С)=5, m_{20}(E_3)= m_{20}(Ж)=4,$

$m_{20}(E_4)= m_{20}(З)=4, m_{20}(E_5)= m_{20}(К)=2, m_{20}(E_6)= m_{20}(Ф)=1.$

Вчитель: Чи можна тепер обчислити абсолютну частоту $m_{20}(E_i)$ для довільної події $\in S$?

Учні: Так.

Вчитель: Як обчислити абсолютну частоту появи червоного або синього олівця в даній серії із $n=20$ випробувань $(m_{20}(A))$?

Учні: $m_{20}(A) = m_{20}(Ч,С) = m_{20}(Ч) + m_{20}(С) = 4+5 = 9.$

Вчитель: Як обчислити статистичну ймовірність події A?

Учні: Статистична ймовірність або відносна частота події *A* – це число $P_{20}^{*}(A)=\frac{m_{20}(A)}{m_{20}(\Omega)}=\frac{9}{20}$.

Вчитель: А чи можна підрахувати статистичні ймовірності елементарних подій?

Учні: Так, $P_{20}^{*}(Ч)=\frac{4}{20}$, $P_{20}^{*}(С)=\frac{5}{20}$, $P_{20}^{*}(Ж)=\frac{4}{20}$, $P_{20}^{*}(З)=\frac{4}{20}$, $P_{20}^{*}(К)=\frac{2}{20}$, $P_{20}^{*}(Ф)=\frac{1}{20}$.

Вчитель: Чи можна знайти статистичну ймовірність події *A* через статистичні ймовірності елементарних подій?

Учні: Так, $P_{20}^{*}(Ч)+P_{20}^{*}(С)=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$.

Вчитель пропонує порівняти обидва результати та зробити висновок.

Корисно навчати учнів правил виконання окремих видів розумових дій, алгоритмів, правил-орієнтирів, евристичних схем основних видів навчальної діяльності. Зокрема при обчисленні статистичних ймовірностей можна запропонувати таке правило:

1. Описати простір елементарних подій Ω.
2. З’ясувати кількість проведених випробувань $n=m_n(\Omega)$.
3. Визначити кількість $m_n(A)$ випробувань, в яких відбулися елементарні події E_i, що сприяють події *A*.
4. Обчислити статистичну ймовірність події *A* за формулою: $P_n^{*}(A)=\frac{m_n(A)}{m_n(\Omega)}$.

Для самостійного розв’язування можна запропонувати учням знайти абсолютні та відносні частоти діставання білої, чорної, золотистої та сріблястої повітряної кульки, якщо відомо, що у *100* випробуваннях біла з’являлася *15* разів, чорна – *25* разів, срібляста та золотиста по *30* разів.

Властивості статистичної ймовірності, на які необхідно звернути увагу учнів, доцільно подати у вигляді плакату (слайду) [122, с.31]:

$1_р$. $P_n^*(A)\geq 0,\ A\in S$ – статистична ймовірність події $A\in S$ невід'ємна;

$2_р$. $P_n^*\left(\sum_k A_k\right)=\sum_k P_n^*(A_k)$, коли $A_k\in S$ і $A_iA_j=\varnothing$ при $i\neq j$ (повна адитивність статистичної ймовірності).

$3_р$. $P_n^*(\Omega)=1$ – статистична ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

Необхідно звернути увагу учнів на те, що ці три властивості статистичної ймовірності називають основними. Усі інші властивості випливають з основних.

Тут є нагода реалізувати міжпредметні зв'язки з геометрією. Доцільно запитати учнів, чи не пригадають вони геометричні величини, які мають аналогічні властивості (невід'ємні, адитивні, нормовані одиницею) (в разі потреби підказати одну з них, наприклад, площа фігури).

Необхідно зазначити, що інколи можна почути: «ймовірність події складає 45 відсотків», краще уникати використання вимірювання ймовірностей подій у відсотках, оскільки це може викликати в учнів сумнів, що ймовірність не може бути більше одиниці, і в подальшому призвести до помилок.

Приклад 2.25. Нехай з коробки, в якій було 6 олівців багато раз діставали з поверненням олівець та фіксували лише частоту появи синього, червоного та решти кольорів. При цьому з'ясували, що $P_n^*(Ч)=0,2$, $P_n^*(С)=0,25$, $P_n^*(\{К, Ф, Ж, З\})=0,55$.

Введемо позначення: $H_1=\{К,\ Ф,\ Ж,\ З\}$, $H_2=\{С\}$, $H_3=\{Ч\}$. Очевидно $H_iH_j=\varnothing$, $i\neq j$, $H_1+H_2+H_3=\Omega$, тобто підмножини H_1, H_2, H_3 утворюють розбиття множини Ω на підмножини, що попарно не перетинаються.

Розглянемо таку сукупність S підмножин множини $\Omega=\{Ч, С, К, З, Ж, Ф\}$: $S=\{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1+H_2, H_1+H_3, H_2+H_3, H_1+H_2+H_3=\Omega\}=\{\varnothing, \{К, Ф, З, Ж\}, \{Ч\}, \{С\}, \{К, Ф, З, Ж, Ч\}, \{К, Ф, З, Ж, С\}, \{Ч, С\}, \{К, Ф, Ж, З, Ч, С\}=\Omega\}$.

Сукупність S задовольняє вимоги 1_s–3_s, вона породжена системою підмножин H_1, H_2, H_3. Зауважимо, що $P_n^*(A)$ визначена на всіх елементах сукупності S і задовольняє вимоги 1_p-3_p:

$P_n^*(\{С\})=0,25$; $P_n^*(\varnothing)=0$; $P_n^*(\{К, Ф, Ж, З, Ч\})=0,75$;

$P_n^*(\{К, Ф, Ж, З\})=0,55$; $P_n^*(\{Ч, С\})=0,45$;

$P_n^*(\{Ч\})=0,2$; $P_n^*(\{К, Ф, Ж, З, Ч, С\})=1$.

$P_n^*(\{К, Ф, Ж, З, С\})=0,8$;

Тому в цьому випадку сукупність S є простором подій (вимірних за мірою $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω), а трійка (Ω, S, P_n^*) є ймовірнісним простором.

Однак доцільно звернути увагу учнів на те, що підмножини множини Ω $\{К\}$, $\{К,Ф\}$, $\{К, Ж, З\}$ та деякі інші є невимірними відносно розглянутої міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, оскільки за наведених умов неможливо відповісти, як часто діставали коричневий, чи один із двох – коричневий або фіолетовий, чи один з трьох – коричневий, жовтий, або зелений. Тому їх не включено до простору подій S, їх не вважають подіями. Для закріплення знань учнів доцільно навести ще кілька прикладів невимірних множин за тими чи іншими мірами.

Доцільно також запропонувати учням самостійно вказати простір Ω і навести приклади вимірних і невимірних множин відносно міри $P(A)$, попередньо поділивши їх на 5-6 груп та роздавши кожній групі заздалегідь надруковану на картці задачу приблизно такого змісту: в пачці 50 зошитів, серед яких є зошити в клітинку, лінійку, косу лінію. З пачки багато раз діставали з поверненням один зошит та фіксували частоту появи зошита в клітинку та решти. При цьому з'ясували, що $P_n^*(К)=0,7$, $P_n^*(\{Л, КЛ\})=0,3$. Чи є вимірними події «поява зошита в клітинку (лінійку, косу лінію)».

Після розв'язування задачі кожна група представляє свій розв'язок з поясненнями та відповідає на запитання, що виникли у інших учнів.

Корисно, щоб учні спробували самі навести кілька прикладів вимірних і невимірних множин відносно певної міри $P(A)$.

Далі доцільно ввести поняття умовної статистичної ймовірності, залежних і незалежних подій і відповідні формули для їх обчислення, а потім розв'язати наступні задачі.

Приклад 2.26. З коробки, в якій були олівці червоного, синього, зеленого, фіолетового, жовтого, коричневого кольору діставали по одному олівцю велику кількість разів *(n)* з поверненням, при цьому з'ясувалося, що відносна частота появи червоного олівця дорівнює *0,15*, синього – *0,25*, зеленого – *0,1*, фіолетового – *0,15*, жовтого – *0,2*, коричневого – *0,15*.

Позначимо можливі наслідки (елементарні події) через E_i, $i \in \overline{1,6}$. Тоді простір елементарних подій $\Omega=\{Ч, С, З, Ф, Ж, К\}=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. Як події розглядатимемо будь-які підмножини множини Ω, тобто розглянемо простір *S* подій, який містить події $\varnothing$ і Ω, всі одно-, дво-, три-, чотири- та п'ятиелементні підмножини множини Ω. Нехай подія *A* полягає в появі синього, фіолетового або коричневого олівця, *B* – червоного, зеленого або жовтого, *C* – фіолетового, жовтого або коричневого, *D* – червоного, синього, зеленого, фіолетового. Обчислити $P_n^*(A/B)$, $P_n^*(B/A)$, $P_n^*(A/C)$, $P_n^*(C/A)$, $P_n^*(A/D)$, $P_n^*(D/A)$. Запишемо умову задачі у вигляді таблиці (табл. 2.6):

Таблиця 2.6

E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
$P_n^*(E_i)$	0,15	0,25	0,1	0,15	0,2	0,15

За формулою $P_n^*(E)=\sum\limits_{E_i \in X} P_n^*(E_i)$, для розглянутих подій *A, B, C, D*:

$P_n^*(A)=0,55$, $P_n^*(B)=0,45$, $P_n^*(C)=0,5$, $P_n^*(D)=0,65$.

Оскільки $AB=\varnothing$, $AC=\{E_4, E_6\}$, $AD=\{E_2, E_4\}$, то за формулою для умовних статистичних ймовірностей $P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ матимемо:

$$P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_1,E_3,E_5\})}=\frac{0}{0,45}=0,$$

$$P_n^*(B/A)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_2,E_4,E_6\})}=\frac{0}{0,55}=0,$$

$$P_n^*(A/C)=\frac{P_n^*(AC)}{P_n^*(C)}=\frac{P_n^*(\{E_4,E_6\})}{P_n^*(\{E_4,E_5,E_6\})}=\frac{0,3}{0,5}=0,6,$$

$$P_n^*(C/A)=\frac{P_n^*(AC)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(\{E_4,E_6\})}{P_n^*(\{E_2,E_4,E_6\})}=\frac{0{,}3}{0{,}55}=\frac{6}{11},$$

$$P_n^*(A/D)=\frac{P_n^*(AD)}{P_n^*(D)}=\frac{P_n^*(\{E_2,E_4\})}{P_n^*(\{E_1,E_2,E_3,E_4\})}=\frac{0{,}4}{0{,}65}=\frac{8}{13},$$

$$P_n^*(D/A)=\frac{P_n^*(AD)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(\{E_2,E_4\})}{P_n^*(\{E_2,E_4,E_6\})}=\frac{0{,}4}{0{,}55}=\frac{8}{11}.$$

Доцільно запропонувати учням самостійно знайти ймовірність настання події *A*=«двоцифрове число ділиться на 5» за умови, що відбулася подія *B*=«двоцифрове число ділиться на 10».

Приклад 2.27. «Лото Максима» є державною числовою лотереєю, в якій необхідно вгадати 5 номерів з 42. В урні є *42* кульки, які пронумеровані числами від *1* до *42*. Велику кількість *(n)* разів проводили наступні випробування (тиражі лото Максима) – навмання одну за однією без повернення в урну діставали п'ять кульок. При цьому виявлялося, що відносна частота появи будь-якої з *42* кульок першою дорівнюватиме $\frac{1}{42}$. Після того, як першу кульку вже дістали, відносна частота появи будь-якої з *41* кульки дорівнюватиме $\frac{1}{41}$ незалежно від номера першої кульки. Після виймання двох кульок, відносна частота появи будь-якої з *40* кульок дорівнюватиме $\frac{1}{40}$ незалежно від номерів двох попередньо вийнятих кульок. Після виймання трьох кульок, відносна частота появи будь-якої з *39* кульок дорівнюватиме $\frac{1}{39}$ незалежно від номерів трьох вийнятих кульок. Після виймання чотирьох кульок, відносна частота появи будь-якої з *38* кульок дорівнюватиме $\frac{1}{38}$ незалежно від номерів чотирьох вийнятих кульок.

Потрібно обчислити статистичну ймовірність відбування події *A*, що полягає в тому, що буде вийнято п'ять кульок з наперед задуманими числами від *1* до *42* (тобто знайти шанси на виграш в лотереї (зокрема, перевірити, чи збігається прогноз на виграш зі словами ведучих, які стверджують, що шанси виграти – 1 з 850 668))?

Нехай задумали номери k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. Позначимо через A_1 подію, яка полягає в появі першою кульки з номером m_1 (який є серед задуманих), тобто $m_1 \in \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$. Цю подію спричинюють п'ять попарно несумісних подій, кожна з яких полягає в появі кульки, номер якої дорівнюватиме одному із задуманих чисел, тобто k_1, k_2, k_3, k_4 або k_5. За умовою задачі статистична ймовірність кожної з цих п'яти подій дорівнює $\frac{1}{42}$, а отже

$$P_n^*(A_1)=\frac{5}{42}.$$

Через A_2 позначимо подію, яка полягатиме в появі другої кульки з номером m_2, який збігається з одним з п'яти задуманих чисел, тобто $m_2 \in \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$. Якщо подія A_1 відбулася, тобто першою вийняли кульку з номером $m_1 \in \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}$, то кульку з номером m_1 неможливо вийняти вдруге, а, отже при умові, що подія A_1 відбулася, подія A_2 спричинена чотирма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в появі другої кульки з номером m_2, який збігається з одним з задуманих чисел, але $m_2 \neq m_1$, отже $m_2 \in \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\} \setminus \{m_1\}$. За умовою задачі умовна статистична ймовірність кожної з цих чотирьох подій дорівнює $\frac{1}{41}$. Тому $P_n^*(A_2/A_1)=\frac{4}{41}$.

Аналогічно, якщо A_3, A_4, A_5 події, які полягають в появі третьої, четвертої, п'ятої кульки з номерами m_3, m_4, m_5, кожний з яких є серед задуманих чисел і не збігається з номерами раніше вийнятих кульок, які теж належать до задуманих, то

$$P_n^*(A_3/A_1A_2)=\frac{3}{40},\ P_n^*(A_4/A_1A_2A_3)=\frac{2}{39},\ P_n^*(A_5/A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{38}.$$

Очевидно, що подія A відбувається лише тоді, коли в одному і тому самому випробуванні (тиражі спортлото) відбуваються всі п'ять подій A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 (отже $A= A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$). Враховуючи формулу, отримаємо

$$P_n^*(A)=P_n^*(A_1A_2A_3A_4A_5)=P_n^*(A_1)P_n^*(A_2/A_1)P_n^*(A_3/A_1A_2)P_n^*(A_4/A_1A_2A_3)\cdot$$

$$\cdot P_n^*(A_5 / A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{5}{42} \cdot \frac{4}{41} \cdot \frac{3}{40} \cdot \frac{2}{39} \cdot \frac{1}{38} = \frac{120}{102080160} = \frac{1}{850668}.$$

Отже, в серії дуже великої кількості *(n)* випробувань *5* чисел із *42* можливих вдається вгадати *1* раз в *850 668* спробах. Тобто прогноз виграшу співпадає з обіцянкою ведучих.

Нагадаємо, що теоретичні відомості ми подаємо з позицій посібника [131]. Після введення поняття незалежних подій вводять поняття незалежних в сукупності. Необхідно звернути увагу учнів на те, що при заданні іншої ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*(A),\ A \in S$, на тому самому просторі *S* подій, події, що були незалежні (чи незалежні в сукупності) щодо ймовірнісної міри P_n^*, не обов'язково залишатимуться такими щодо міри $\widetilde{P}_n^*$ [133, с.62].

Разом з учнями розв'язуємо таку задачу.

Приклад 2.28. Лотерея «Лото Трійка» є державною грошовою числовою лотереєю. Кожен розіграш випадає 3 номери від 0 до 9, з яких формується трьохзначне число. Ви виграєте, якщо вибрані Вами номери і їх порядок збігатимуться з виграшними номерами та порядком їх випадіння. Які шанси виграти в цій лотереї, якщо відомо, що відносна частота появи кожної кульки дорівнює $\frac{1}{10}$? (ведучі стверджують, що 1 до 1000).

Вчитель: Яка відносна частота появи кульки з задуманим числом у першому лототроні (позначимо цю подію *А*)?

Учні: $\frac{1}{10}$.

Вчитель: Яка відносна частота появи кульки з задуманим числом у другому лототроні (подія *В*)?

Учні: $\frac{1}{10}$.

Вчитель: Яка відносна частота появи кульки з задуманим числом у третьому лототроні (подія *С*)?

Учні: $\frac{1}{10}$.

Вчитель: За яких умов відбувається виграш в лотереї (подія *D*)?

Учні: Коли в одному випробуванні відбуваються всі три події *A, B* і *C*.

Вчитель: Як знайти відносну частоту події *D*?

Учні: Необхідно перемножити відносні частоти подій *A, B* і *C*.

Вчитель: Чи залежні події *A, B* і *C*?

Учні: Ні, оскільки кожну кульку отримують з окремого лототрона.

Вчитель: Чому дорівнює відносна частота події *D?*

Учні: $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}$.

Вчитель: Які шанси виграти в лотерею «Лото трійка»?

Учні: Один з тисячі.

Вчитель: Отже, отриманий результат збігається з обіцянкою ведучих.

Додому доцільно запропонувати учням розв'язати аналогічну задачу (виграш в лотереї *6* із *49*, *5* із *36* тощо).

На цьому ж уроці можна розглянути історію лотерей, яку учні можуть підготувати самостійно у вигляді презентації.

Для закріплення теоретичного матеріалу розв'язуємо наступні задачі.

Приклад 2.29. Нехай $\Omega=\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$. При цьому відомо що $P_n^*(\{E_1\})=\frac{1}{4}$, $P_n^*(\{E_2\})=\frac{1}{4}$, $P_n^*(\{E_3\})=\frac{1}{4}$, $P_n^*(\{E_4\})=\frac{1}{4}$.

Нехай події *A, B, C* визначені так: $A=\{E_1, E_4\}$, $B=\{E_2, E_4\}$, $C=\{E_3, E_4\}$. Тоді $P_n^*(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Оскільки $AB=\{E_4\}$, $BC=\{E_4\}$, $AC=\{E_4\}$, то

$$P_n^*(AB)=\frac{1}{4}=P_n^*(A)P_n^*(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

$$P_n^*(AC)=\frac{1}{4}=P_n^*(A)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

$$P_n^*(BC)=\frac{1}{4}=P_n^*(B)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Таким чином події *A, B, C* попарно незалежні, подія *A* відбулася в половині всіх з *n* випробувань, а також в половині тих випробувань, коли відбулася подія *B*, оскільки $P_n^*(A)=\frac{1}{2}$, $P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$.

Аналогічно можна сказати про безумовні статистичні ймовірності $P_n^*(B)$, $P_n^*(C)$ та умовні статистичні ймовірності $P_n^*(D/C)$, $P_n^*(C/D)$, $P_n^*(B/C)$, $P_n^*(C/B)$. Разом з тим $ABC=\{E_4\}$, тому той факт, що подія *A* залежить від добутку подій *B* і *C*, очевидний, оскільки у всіх тих випробуваннях, коли відбувається подія ВС, відбувається і подія *A*, тобто $P_n^*(A/BC)=1\left(=\frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(BC)}=\frac{1/4}{1/4}\right)$.

Оскільки $P_n^*(A/BC)=1\neq P_n^*(A)=\frac{1}{2}$, то подія *A* залежить від добутку подій *B* і *C*. Отже, в розглянутому випадку події *A, B, C* попарно незалежні, але залежні в сукупності.

Доцільно обговорити з учнями наступну задачу:

1. З урни, що містить 10 кульок, пронумерованих від 1 до 10, навмання беруть одну кульку. Подія *A* полягає в тому, що на кульці написано число, яке ділиться на 3, подія *B* — в тому, що на кульці написано непарне число, а подія *C* – на кульці написано число, що ділиться на 5. Відомо, що елементарна подія E_1 полягає в тому, що на кульці написано число 1, E_2 – написано число 2 і т.д. і $P_n^*(\{E_i\})=\frac{1}{10}$, $i=1, 2, \ldots, 10$. Чи будуть події *A, B* і *C* незалежними?

Вчитель: Діставання кульок, з якими номерами сприяють події *A?*

Учні: З номерами 3, 6 і 9.

Вчитель: Діставання кульок, з якими номерами сприяють події *B?*

Учні: З номерами 1, 3, 5, 7 і 9.

Вчитель: Діставання кульок, з якими номерами сприяють події *C?*

Учні: З номерами 5 і 10.

Вчитель: Які елементарні події сприяють подіям *A, B, C*?

Учні: $A=\{E_3, E_6, E_9\}$, $B=\{E_1, E_3, E_5, E_7, E_9\}$, $C=\{E_5, E_{10}\}$.

Вчитель: Чи можемо ми знайти статистичні ймовірності подій *A, B, C*?

Учні: $P_n^*(A)=\frac{3}{10}$, $P_n^*(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(C)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

Вчитель: Які елементарні події сприяють подіям *AB, BC, AC*?

Учні: $AB=\{E_3, E_9\}$, $BC=\{E_5\}$, $AC=\varnothing$.

Вчитель: Чи можна тепер знайти статистичні ймовірності подій *AB, BC, AC?*

Учні: $P_n^*(AB)=\frac{1}{5}$, $P_n^*(BC)=\frac{1}{10}$, $P_n^*(AC)=0$.

Вчитель: Чи можна тепер знайти добутки статистичних ймовірностей подій *A* і *B, A* і *C, B* і *C?*

Учні: $P_n^*(A)P_n^*(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$, $P_n^*(A)P_n^*(C)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$, $P_n^*(B)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

Вчитель: Чи залежні події *A* і *B*?

Учні: Ці події залежні, оскільки $P_n^*(AB)=\frac{1}{5}\neq\frac{3}{20}=P_n^*(A)\cdot P_n^*(B)$.

Вчитель: Чи залежні події *A* і *C*?

Учні: Ці події залежні, оскільки $P_n^*(AC)=0\neq\frac{3}{50}=P_n^*(A)\cdot P_n^*(C)$.

Вчитель: Чи залежні події *B* і *C*?

Учні: Ці події незалежні, оскільки $P_n^*(BC)=\frac{1}{10}=\frac{1}{10}=P_n^*(B)\cdot P_n^*(C)$.

Вчитель: Чи можна стверджувати залежність подій *A, B* і *C* в сукупності?

Учні: Можна, оскільки ці події не є навіть попарно незалежними.

Для самостійного розв’язування на уроці можна запропонувати таку задачу: *A*=«навмання названий місяць є весняним» (березень, квітень, травень), *B*=«у навмання названому місяці святкують День знань» (вересень), *C*=«у навмання названому місяці є канікули» (січень, березень, червень, липень, серпень, листопад). Відомо, що елементарна подія E_1 – січень, E_2 –

лютий і т.д. і $P_n^*(\{E_i\})=\frac{1}{12}$, *i=1, 2, …, 12.* Чи будуть події *A*, *B* і *C* попарно незалежними, незалежними в сукупності?

Дома доцільно запропонувати учням з'ясувати залежні, попарно незалежні чи незалежні в сукупності наступні події: *A*=«одноцифрове число парне», *B*=«одноцифрове число непарне», *C*=«одноцифрове число ділиться на три», якщо відомо, що $P(A)=\frac{4}{10}$, $P(B)=\frac{5}{10}$, $P(C)=\frac{3}{10}$.

2.4.2. Формула повної статистичної ймовірності та формула Байєса

Далі розглядаємо формулу повної статистичної ймовірності $P_n^*(A)=\sum_{i=1}^{m} P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)$ та Байєса $P_n^*(H_i/A)=\frac{P_n^*(AH_i)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{m} P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}$.

Приклад 2.30. Є два ящики, в яких лежать зелені та червоні яблука. Експеримент полягає в тому, що навмання вибирають ящик, з якого навмання вибирають яблуко, яке потім повертають в ящик. З n випробувань n_1 разів вибирали перший ящик, при цьому в $m_1<n_1$ цих випадків яблуко було зелене, і $n_2=n-n_1$ разів вибирали другий ящик, при цьому в $m_2<n_2$ випадків яблуко було зелене.

Отже, простір елементарних подій Ω=*{(1, з), (1, ч), (2, з), (2, ч)},* де елементарна подія $E_{mз}$*=(m, з), (*$E_{mч}$*=(m, ч)),* $m\in\overline{1,2}$, означає, що з ящика з номером m дістали зелене (червоне) яблуко. Подія H_m*={(m, з), (m, ч)}* означає, що яблуко вийняли з ящика з номером *m*, $m\in\overline{1,2}$. За умовою задачі $P_n^*(H_1)=\frac{n_1}{n}$, $P_n^*(H_2)=\frac{n_2}{n}$. Очевидно $H_1\cdot H_2=\varnothing$ і $H_1+H_2=\Omega$.

Нехай подія *A={(1,з), (2,з)}* – поява зеленого яблука. За умовою задачі $P_n^*(A/H_1)=\frac{m_1}{n_1}$, $P_n^*(A/H_2)=\frac{m_2}{n_2}$ і в n випробуваннях подія *A* відбулася m_1+m_2 разів. Тому за формулою статистична ймовірність появи зеленого яблука в цих n випробуваннях дорівнює

$$P_n^*(A)=P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)+P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m_1}{n_1}+\frac{n_2}{n}\cdot\frac{m_2}{n_2}.$$

Наступний приклад необхідно обговорити з учнями.

Приклад 2.31. Молоко привозили з трьох різних молокозаводів. Для контролю продукції велику кількість *(n)* разів навмання вибирали один пакет молока кожного виробника. При цьому виявилося, що відносна частота вибору пакету молока кожного виробника дорівнює $\frac{1}{3}$. Серед тих випадків, коли було вибрано пакет молока першого та другого молокозаводу, жодного разу не було виявлено неякісну продукцію. Коли ж для контролю вибирали пакети молока третього молокозаводу, то в одному випадку з п'яти було виявлено неякісну продукцію. Потрібно обчислити відносну частоту відбування події *A*, яка полягає в тому, що виявлено неякісну продукцію.

Вчитель: Давайте позначимо елементарні події, на першому місці вказавши номер молокозаводу, а на другому – якість продукції: $E_{nн}=(n, н)$ $(E_{nя}=(n, я))$, $n\in\overline{1,3}$, що це означатиме?

Учні: вибраний пакет молока привезений з молокозаводу *n* і є неякісним (якісним).

Вчитель: Як можна позначити подію, яка полягатиме в тому, що для контролю було вибрано пакет привезений з першого, другого, третього молокозаводу?

Учні: $H_1=\{(1,н), (1,я)\}$ – з першого молокозаводу, $H_2=\{(2,н), (2,я)\}$ – з другого, $H_3=\{(3,н), (3,я)\}$ – з третього.

Вчитель: Як виглядатиме простір елементарних подій?

Учні: $\Omega=\{(1,н), (2,н), (3,н), (1,я), (2,я), (3,я)\}$.

Вчитель: В чому полягатиме подія *A*?

Учні: Подія *A* полягає в тому, що вибраний пакет молока є неякісним $A=\{(1,н), (2,н), (3,н)\}$.

Вчитель: Чи виконуються умови $H_iH_j=\varnothing$ при $i\neq j$ і $H_1+H_2+H_3=\Omega$?

Учні: Так.

Вчитель: Чи відомі статистичні ймовірності гіпотез *H_1, H_2, H_3*: $P_n^*(H_1)$, $P_n^*(H_2)$, $P_n^*(H_3)$?

Учні: Так, за умовою задачі, $P_n^*(H_1)=\frac{1}{3}$, $P_n^*(H_2)=\frac{1}{3}$, $P_n^*(H_3)=\frac{1}{3}$.

Вчитель: А чому дорівнюють умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A/H_i)$ події *A* при кожній з гіпотез H_i?

Учні: За умовою задачі $P_n^*(A/H_1)=0$, $P_n^*(A/H_2)=0$, $P_n^*(A/H_3)=\frac{1}{5}$.

Вчитель: Чи можемо ми скористатися формулою повної статистичної ймовірності?

Учні: За формулою повної статистичної ймовірності $P_n^*(A)=P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)+P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)+P_n^*(H_3)P_n^*(A/H_3)=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$.

Вчитель: Якого висновку можемо дійти?

Учні: В наведеній серії вказаних контрольних заходів з перевірки якості молока було виявлено неякісну продукцію в середньому в одній спробі з кожних п’ятнадцяти, а в решті спроб не було виявлено неякісну продукцію.

Для самостійного розв’язування можна запропонувати побудувати простір елементарних подій і обчислити відносну частоту відбування події *A*, яка полягає в тому, що виберуть відмінника, якщо вибирали з чотирьох класів, в кожному з яких по *30* учнів, при чому в першому – *5* відмінників, в другому – *4*, в третьому і четвертому – відмінників немає. При цьому виявилося, що відносна частота вибору кожного класу дорівнює $\frac{1}{4}$.

2.5. Методика вивчення дискретних та неперервних розподілів статистичних ймовірностей у шкільному курсі математики

2.5.1. Поняття розподілу статистичних ймовірностей

Доцільно перед вивченням розподілів статистичних ймовірностей запропонувати учням випереджувальне домашнє завдання: виміряти свій зріст. На уроці отримані дані записують й отримують приблизно такий ряд:

1,5; 1,7; 1,64; 1,53; 1,74; 1,52; 1,62; 1,73; 1,87; 1,43; 1,38; 1,59; 1,63; 1,61; 1,78; 1,43; 1,62; 1,69; 1,58; 1,70; 1,32; 1,49; 1,66; 1,71; 1,65; 1,70; 1,67; 1,71; 1,51; 1,67. Далі пропонують учням відповісти на питання:

1. Чи знаєте ви, хто найвищий в вашому класі? Найнижчий?

Очікувана відповідь: Так (на уроках фізкультури учнів шикують за зростом).

2. Чи можна дивлячись на ці дані миттєво сказати, який зріст найбільший? Найменший? Середній?

Очікувана відповідь: Ні, на це потрібен певний час.

3. Чи полегшить вирішення цього завдання впорядкування даних?

Очікувана відповідь: Напевне.

Вчитель: Отже, для полегшення опрацювання великої кількості даних, їх розташовують у порядку зростання, в результаті чого отримують ряд, який називають *варіаційним*. На вашу думку, чи буде суттєво різнитися найбільший, найменший і середній зріст учнів паралельного класу? Давайте це перевіримо (вчитель пропонує дані, які зібрали учні іншого класу), поділивши учнів на дві групи: одна знаходить найменший, найбільший і середній зріст учнів свого класу, а інша – паралельного. Після чого відмічаємо, що хоча найвищий і найнижчий зріст учнів можуть суттєво різнитися, середній зріст учнів двох класів приблизно однаковий.

4. Чи можна порівняти зріст учнів всієї школи? мешканців міста? всіх українців?

Очікувана відповідь: Це буде значно важче, а може, й неможливо.

Вчитель: Побудуємо стовпчасту діаграму зросту учнів (спочатку без використання ПК, а потім в програмі Excel, з якою учні знайомляться на уроках інформатики) (рис. 2.8).

5. Чи можна, дивлячись на діаграму, сказати, який зріст найбільший? Найменший?

Очікувана відповідь: Так, це найдовший і найкоротший стовпчик.

Вчитель: Отже, подавати дані можна різними способами: за допомогою рядів, діаграм (стовпчастих, лінійних, кругових), таблиць.

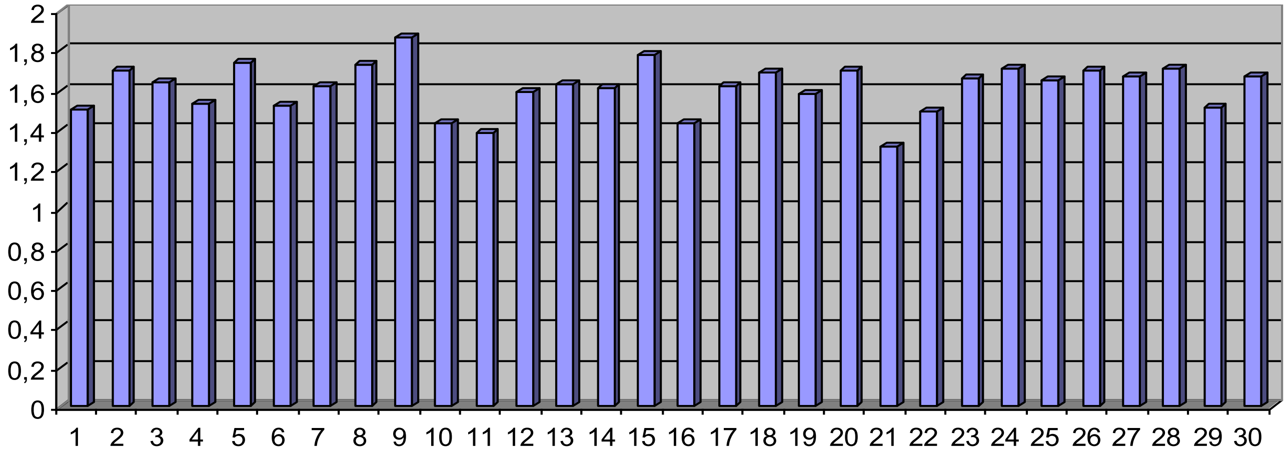


Рис. 2.8. Стовпчаста діаграма зросту учнів класу

6. Чи відрізняються за зростом першокласник і одинадцятикласник? Дванадцятирічна дівчинка та тридцятирічний чоловік?
7. А чи знаєте ви, якого зросту найвища людина в світі? Найнижча?

Очікувана відповідь: Ні.

Вчитель: На фотографії (слайді) найвища та найнижча людина в світі (рис.2.9.), зріст 27-річного колишнього баскетболіста з Туреччини Султана Косена – 2 м 46,5 см, а 21-річного китайця Хі Пінгпінга – 70 см.

Рис. 2.9. Найвища і найнижча людина планети

8. Чи можна з’ясувати, який зріст має найвища (найнижча) людина нашого міста? країни?

Очікувана відповідь: Так, для цього потрібно виміряти зріст всіх людей, які мешкають у місті, країні, але це займе занадто багато часу.

9. А навіщо потрібно знати зріст людей?

Очікувана відповідь: Для того, щоб пошити для них одяг, розрахувати висоту стелі в будинку, висоту дверей тощо.

Вчитель: Але ж немає можливості для кожної людини індивідуально будувати будинки, шити одяг, взуття? Загальновідомо, щоб визначити розмір взуття потрібно виміряти стопу, поставити обидві ноги (в шкарпетках) на аркуш паперу й обвести олівцем. На отриманому малюнку виміряти відстань між найвіддаленішими точками. Виміряти обидві ноги та вибрати більше значення. Отриманий результат слід округлити до 5 мм [363].

Для отримання розміру жіночого одягу необхідно знати: зріст, об'єм грудей і стегон, після чого скористатися табл. 2.7 [363]:

Таблиця 2.7

Розміри жіночого одягу

Маркування	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL	XXXL
Зріст	170	170	176	176	176	182	182	182
Об'єм грудей	84	88	92	96	100	104	108	112
Об'єм стегон	88	92	96	100	104	108	112	116
Розмір	42	44	46	48	50	52	54	56

Для отримання розміру чоловічого одягу необхідно знати: зріст, об'єм грудей і талії, після чого скористатися табл. 2.8 [363]. Отже, одяг не шиють для кожної конкретної людини, і навіть під кожний зріст, а фактично ділять на групи по 6 см в кожній, тобто групують дані.

Таблиця 2.8

Розміри чоловічого одягу

Маркування	S	M	L	XL	XXL	XXXL	XXXL	XXXXXL
Зріст	170	176	182	182	188	188	188	188
Об'єм грудей	92	96	100	104	108	112	116	120
Об'єм талії	80	84	88	92	96	100	104	108
Розмір	46	48	50	52	54	56	58	60

10. Для чого розв'язувати подібні задачі?

Очікувана відповідь: Наприклад, для того, щоб знати, яку кількість одягу, взуття певного розміру необхідно виготовити.

Приклад 2.32. Невпорядкований ряд оцінок за контрольну роботу учнів класу має вигляд: 8, 3, 7, 5, 3, 9, 10, 4, 7, 6, 8, 4, 5, 12, 10, 5, 9, 7, 5, 4, 5, 6, 3, 6, 7, 6, 11, 6, 10, 7, після впорядкування: 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11, 12. Відповідні ряди розподілу абсолютних та відносних частот подані в табл. 2.9 і 2.10.

Таблиця 2.9

Ряд розподілу абсолютних частот оцінок за контрольну роботу

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	0	0	3	3	5	5	5	2	2	3	1	1

Таблиця 2.10

Ряд розподілу відносних частот оцінок за контрольну роботу

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_n^*(x_i)$	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$

Якщо точки $(x_i,\ P_n^*(x_i))$ зобразити на координатній площині, то ламану з вершинами у цих точках називають *полігоном відносних частот* або многокутником розподілу статистичних ймовірностей. Отже, для побудови полігону відносних частот в системі координат відмічають точки, абсциси яких – дані експерименту, а ординати – відповідні їм частоти.

Приклад 2.33. На рис. 2.10 зображено полігон відносних частот, що визначений табл. 2.10.

Після цього доцільно запропонувати учням дидактичну гру: утворити групи по 5-6 учнів, обрати тему дослідження (наприклад, вага людини, об'єм талії, довжина нігтів, розмір яблука тощо), зібрати необхідні статистичні дані (не менше 50), з'ясувати найбільше, найменше та середнє значення отриманих даних, порівняти їх з офіційними статистичними даними або даними книги Рекордів Гінесса. У вигляді презентації подати результати свого дослідження. Ролі в групі учні розподіляють самостійно: двоє відповідають за збирання та опрацювання даних, двоє за добір фотографій, малюнків, цікавих фактів за темою дослідження (їх можна знайти у мережі Інтернет), двоє займаються оформленням презентації.

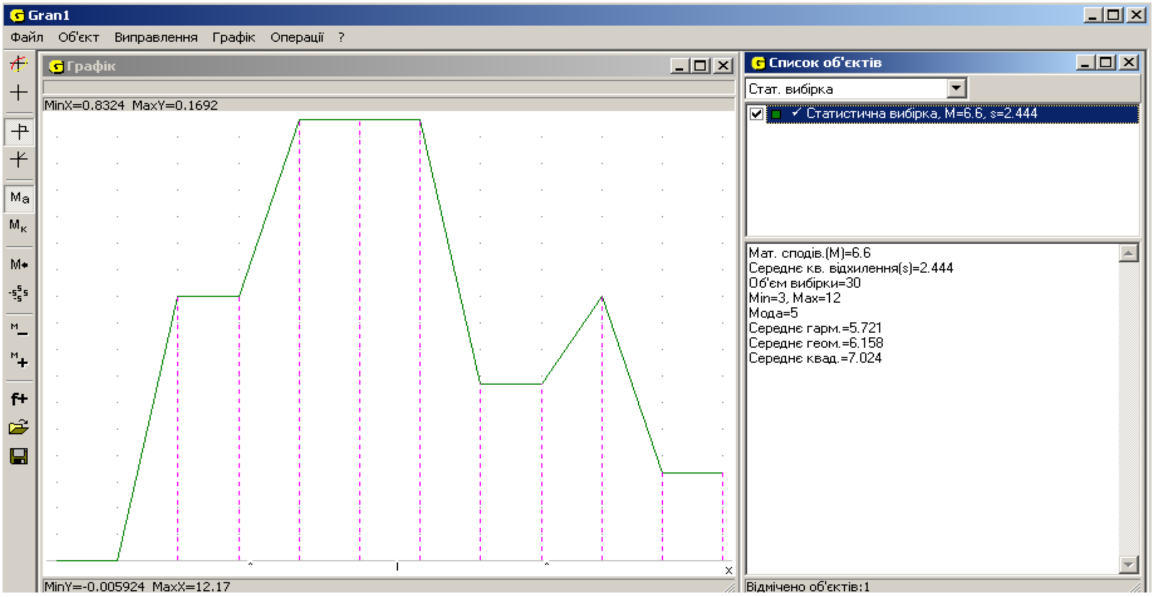


Рис. 2.10. Полігон відносних частот

При опрацюванні статистичних даних доводиться виконувати рутинні обчислення, які можна значно полегшити, використовуючи педагогічний програмний засіб GRAN1, при роботі з яким не виникає жодних проблем, оскільки всі обчислення, побудови графіків, визначення деяких параметрів розподілів виконуються автоматично та практично миттєво.

Починати самостійну роботу учнів в комп’ютерному класі можна як на етапі ознайомлення з основними поняттями, так і на етапі закріплення основних понять стохастики та розв’язування відповідних задач. Самостійно використовувати комп’ютер для розв’язування задач доцільно, коли учні вже засвоїли хід розв’язування того чи іншого типу задач. Разом з тим, таке використання комп’ютера має бути педагогічно виваженим.

Перед розв’язуванням наступної задачі необхідно пригадати разом з учнями деякі поняття, які розглядалися в 9 класі, зокрема, мода, медіана, середнє арифметичне. Можна поцікавитися у учнів, що вони розуміють під словом «мода». Відповіді можуть бути приблизно такими: дорогі речі, популярні речі, нові речі. В решті повинні прийти до думки, що модним є те, що найпопулярніше в певній галузі (музика, зачіски, довжина чи фасон брюк тощо). Отже, *модою* вибірки називають значення, яке має найбільшу частоту (таких значень може бути декілька). Аналогічно, доцільно попросити учнів пригадати, що вони пам'ятають про медіану. Напевно, хтось згадає, що медіана – це лінія що сполучає вершину трикутника з серединою протилежної сторони. Але будуть і такі, хто скаже, що *медіаною* вибірки називають той її елемент, який поділяє варіаційний (впорядкований) ряд навпіл.

Доцільно зазначити, що поняття моди та медіани спочатку сприймаються нормально, однак при розв'язуванні задач можуть виникнути певні труднощі. Зокрема, визначення моди, коли у вибірці їх декілька. У визначенні медіани теж є певна неясність: якщо кількість елементів у вибірці парна, то середнього елемента не існує. В цьому випадку за медіану беруть два елементи, які знаходяться посередині вибірки.

Закріпити теоретичні відомості доцільно, розв'язавши наступну задачу.

Приклад 2.34. Протягом травня була зафіксована така середньодобова температура (в градусах Цельсія): 12, 15, 11, 13, 14, 12, 9, 10, 11, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 14, 10, 11, 9, 14, 15, 13, 15, 14, 16, 12, 14, 13, 16, 15, 16. Знайдіть моду, медіану, середнє значення даної вибірки температур. Побудуйте полігон відносних частот.

Розв'язання доцільно проводити у вигляді бесіди.

Вчитель: Який вигляд має відповідний варіаційний ряд?

Учні: 9, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16.

Вчитель: Яким буде ряд розподілу абсолютних частот температур?

Учні:

Таблиця 2.11

x_i	9	10	11	12	13	14	15	16
n_i	2	3	4	4	4	6	5	3

Вчитель: Чи можемо тепер побудувати ряд розподілу відносних частот?

Учні: Так.

Таблиця 2.12

x_i	9	10	11	12	13	14	15	16
$P_n^*(x_i)$	$\frac{2}{31}$	$\frac{3}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{6}{31}$	$\frac{5}{31}$	$\frac{3}{31}$

Вчитель: Чому дорівнює мода нашої вибірки?

Учні: 14 градусів.

Вчитель: Чому дорівнює медіана нашої вибірки?

Учні: 13 градусів.

Вчитель: Як знайти середнє значення температури у травні?

Учні: Додати всі значення та поділити на їх кількість (31).

Вчитель: Чому дорівнює середньомісячна температура?

Учні: $(2 \cdot 9+3 \cdot 10+4 \cdot 11+4 \cdot 12+4 \cdot 13+6 \cdot 14+5 \cdot 15+3 \cdot 16):31=12{,}548 \approx 13$.

Вчитель: Як виглядатиме полігон відносних частот (рис. 2.11)?

Учні:

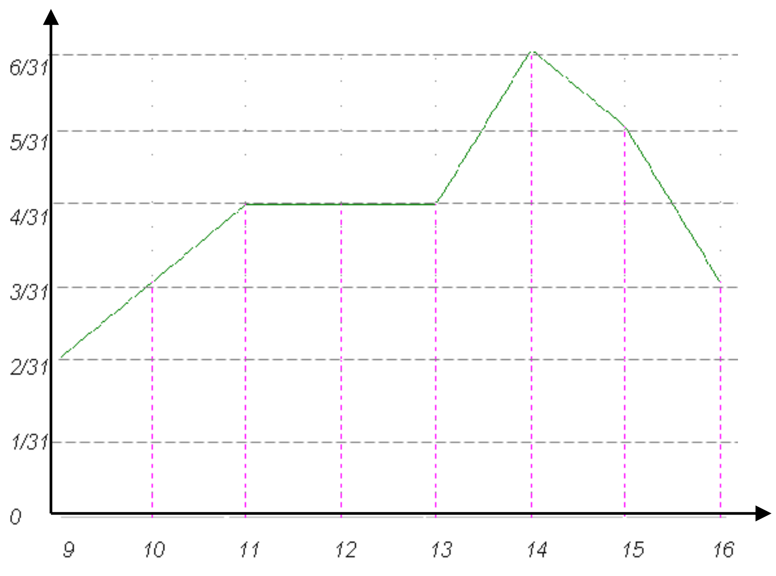


Рис. 2.11. Полігон відносних частот

Додому учням можна запропонувати розв'язати задачу без використання ІКТ і зафіксувати час, який був витрачений на її розв'язування: подати ряди розподілу абсолютних і відносних частот, побудувати полігон відносних частот для наступного варіаційного ряду: віку опитаних навмання учнів школи: 7, 13, 9, 15, 7, 11, 7, 13, 8, 6, 9, 14, 15, 13, 11, 10, 7, 9, 6, 13, 12, 14, 15, 12, 11, 10, 8, 12, 14, 15. На наступному уроці можна запропонувати розв'язати ту саму задачу з використанням програми GRAN1, фіксуючи час, а потім з'ясувати скільки часу можна зекономити, використовуючи програмні засоби. Необхідно також порівняти результати отримані цими двома способами.

Нагадаємо, що основні поняття, зокрема, неперервного розподілу статистичних ймовірностей та щільності їх розподілу ми вводимо згідно посібника [131].

Приклад 2.35. Нехай $\Omega=[0;3)$ і навмання вибрано *100* точок всередині круга та зафіксовано відстані цих точок до його центра, відповідні інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот наведено у табл. 2.13, 2.14

Таблиця 2.13

Таблиця інтервального розподілу абсолютних частот

$[a_{i-1}; a_i)$	*[0; 0,5)*	*[0,5; 1)*	*[1; 1,5)*	*[1,5; 2)*	*[2; 2,5)*	*[2,5; 3)*
n_i	*20*	*25*	*15*	*20*	*15*	*5*

Таблиця 2.14

Таблиця інтервального розподілу відносних частот

$[a_{i-1};a_i)$	*[0; 0,5)*	*[0,5; 1)*	*[1; 1,5)*	*[1,5; 2)*	*[2; 2,5)*	*[2,5; 3)*
$P^*_{100}([a_{i-1};a_i)$	*0,2*	*0,25*	*0,15*	*0,2*	*0,15*	*0,05*

Поняття *гістограми* та *полігону* учні сприймають без особливих ускладнень. Однак, доцільно звернути увагу учнів на те, що за зовнішнім виглядом стовпчасту діаграму плутають з «гістограмою», що відображає дещо інші характеристики набору чисел. Відмітимо, що в русифікації відомої комп'ютерної програми Excel стовпчаста діаграма не зовсім коректно перекладена як «гістограма». Існує особливий тип даних – згруповані дані, – на яких стовпчаста діаграма є, по суті, «гістограмою». Тобто гістограма є частковим випадком стовпчастої діаграми для спеціальним чином згрупованих вихідних наборів чисел [45]. Формування вмінь будувати гістограми та полігони відносних частот закріплюється розв’язуванням задач.

Приклад 2.36. Якщо неперервний розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 2.14, то щільність цього розподілу має вигляд:

$$f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \text{коли } x<0, \\ 0{,}2, \text{коли } 0\le x<0{,}5, \\ 0{,}25, \text{коли } 0{,}5\le x<1, \\ 0{,}15, \text{коли } 1\le x<1{,}5, \\ 0{,}2, \text{коли } 1{,}5\le x<2, \\ 0{,}15, \text{коли } 2\le x<2{,}5, \\ 0{,}05, \text{коли } 2{,}5\le x<3, \\ 0, \text{коли } x\ge 3. \end{cases}$$

На рис. 2.12 зображено гістограму заданого неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

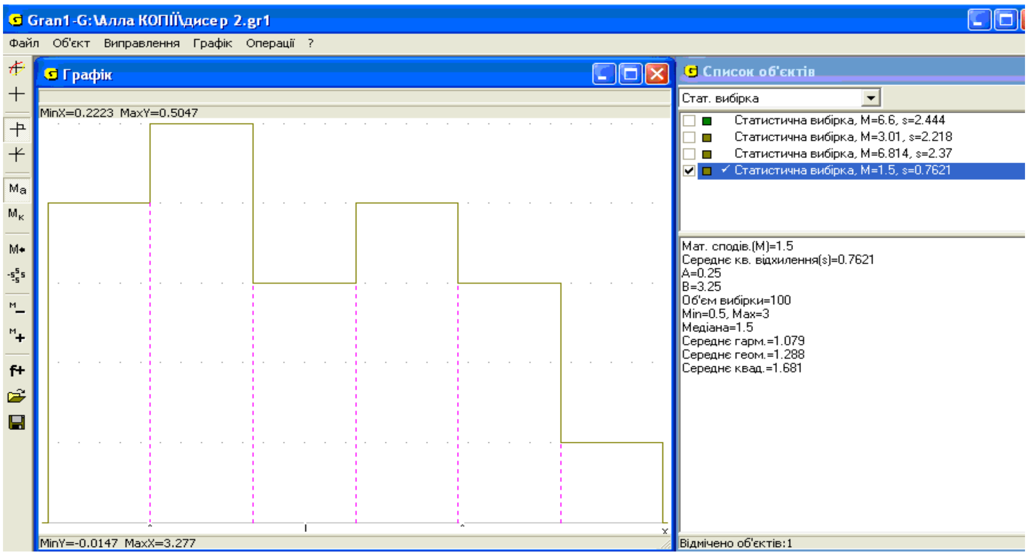


Рис. 2.12. Гістограма неперервного розподілу статистичних ймовірностей

Приклад 2.37. Розподіл статистичних ймовірностей задано табл. 2.15.

На рис. 2.13 зображено графік функції розподілу статистичних ймовірностей, що визначено табл. 2.15.

Таблиця 2.15

Розподіл статистичних ймовірностей

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{2}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{21}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3}{100}$

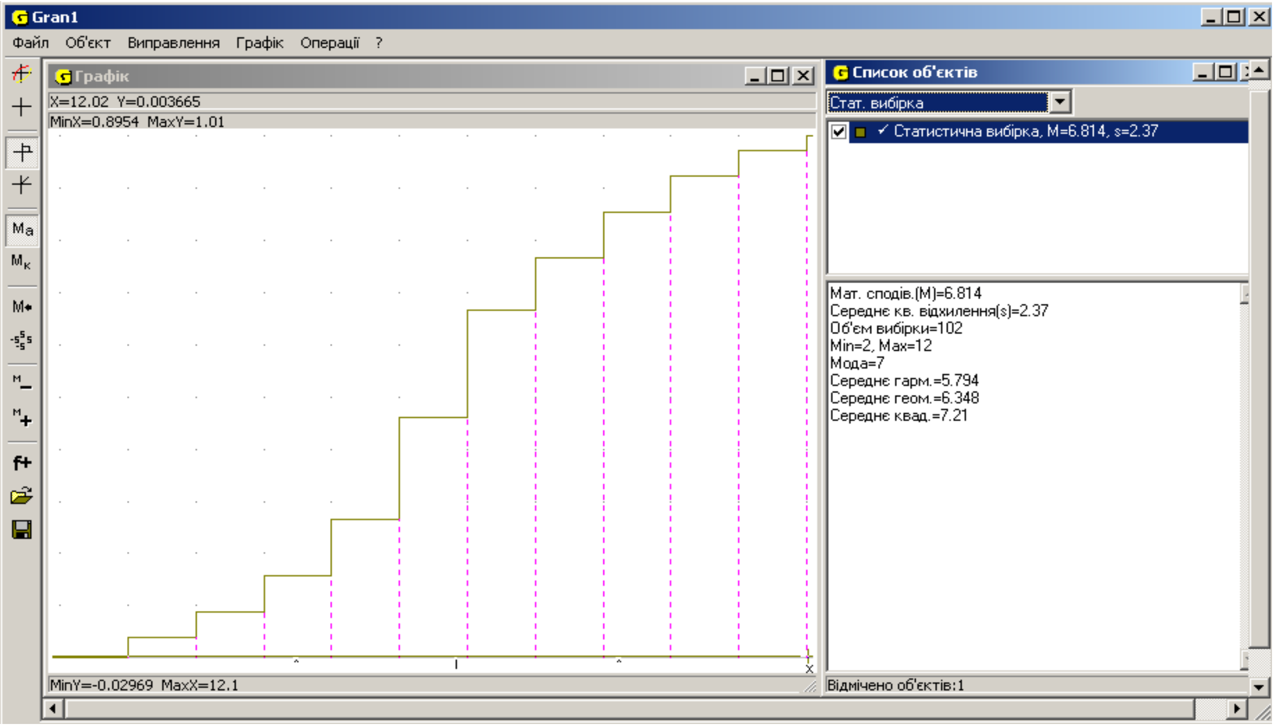


Рис. 2.13. Графік функції дискретного розподілу статистичних ймовірностей

Тоді

$$F_n^*(x)=P_n^*((-\infty;x))=\begin{cases}0,\ \text{коли}\ x\le 2,\\ \frac{2}{100},\ \text{коли}\ 2<x\le 3,\\ \frac{7}{100},\ \text{коли}\ 3<x\le 4,\\ \frac{14}{100},\ \text{коли}\ 4<x\le 5,\\ \frac{25}{100},\ \text{коли}\ 5<x\le 6,\\ \frac{45}{100},\ \text{коли}\ 6<x\le 7,\\ \frac{66}{100},\ \text{коли}\ 7<x\le 8,\\ \frac{76}{100},\ \text{коли}\ 8<x\le 9,\\ \frac{85}{100},\ \text{коли}\ 9<x\le 10,\\ \frac{92}{100},\ \text{коли}\ 10<x\le 11,\\ \frac{97}{100},\ \text{коли}\ 11<x\le 12,\\ \frac{100}{100},\ \text{коли}\ x>12\end{cases}$$

Додому учням доцільно запропонувати записати функцію розподілу статистичних ймовірностей і побудувати її графік до розподілу статистичних ймовірностей, поданого в табл. 2.16.

Таблиця 2.16

Розподіл статистичних ймовірностей

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{3}{200}$	$\frac{17}{200}$	$\frac{25}{200}$	$\frac{33}{200}$	$\frac{49}{200}$	$\frac{32}{200}$	$\frac{21}{200}$	$\frac{15}{200}$	$\frac{5}{200}$

2.5.2. Властивості функцій розподілів статистичних ймовірностей

Необхідно обговорити з учнями основні властивості функції дискретного розподілу статистичних ймовірностей [122, с.63].

Необхідно зазначити, що за новою дванадцятирічною програмою [270] інтегральне числення вивчатиметься в 12 класі, а елементи стохастики в 11. Тому введення інтеграла від скінченої функції $f_m^*(x)$, як відповідної суми, є своєрідною пропедевтикою для подальшого вивчення інтеграла, як границі інтегральної суми.

Приклад 2.38. Нехай неперервний розподіл статистичних ймовірностей визначено табл. 2.17:

Таблиця 2.17

Неперервний розподіл статистичних ймовірностей

$[a_{i-1};a_i)$	[0; 1)	[1; 2)	[2; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0,35	0,05	0	0,25	0,05	0,01	0,01	0,15	0,03	0,1

Тоді

$$F_n^*(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)dt=\begin{cases} 0, & коли\ x\le 0, \\ 3{,}5x, & коли\ 0<x\le 1, \\ 0{,}35+0{,}5(x-1), & коли\ 1<x\le 2, \\ 0{,}4+0(x-2), & коли\ 2<x\le 3, \\ 0{,}4+2{,}5(x-3), & коли\ 3<x\le 4, \\ 0{,}65+0{,}5(x-4), & коли\ 4<x\le 5, \\ 0{,}7+0{,}1(x-5), & коли\ 5<x\le 6, \\ 0{,}71+0{,}1(x-6), & коли\ 6<x\le 7, \\ 0{,}72+1{,}5(x-7), & коли\ 7<x\le 8, \\ 0{,}87+0{,}3(x-8), & коли\ 8<x\le 9, \\ 0{,}9+1(x-9), & коли\ 9<x\le 10, \\ 1, & коли\ x>10. \end{cases}$$

На рис. 2.14 подано графік функції неперервного розподілу статистичних ймовірностей, що визначений табл. 2.17.

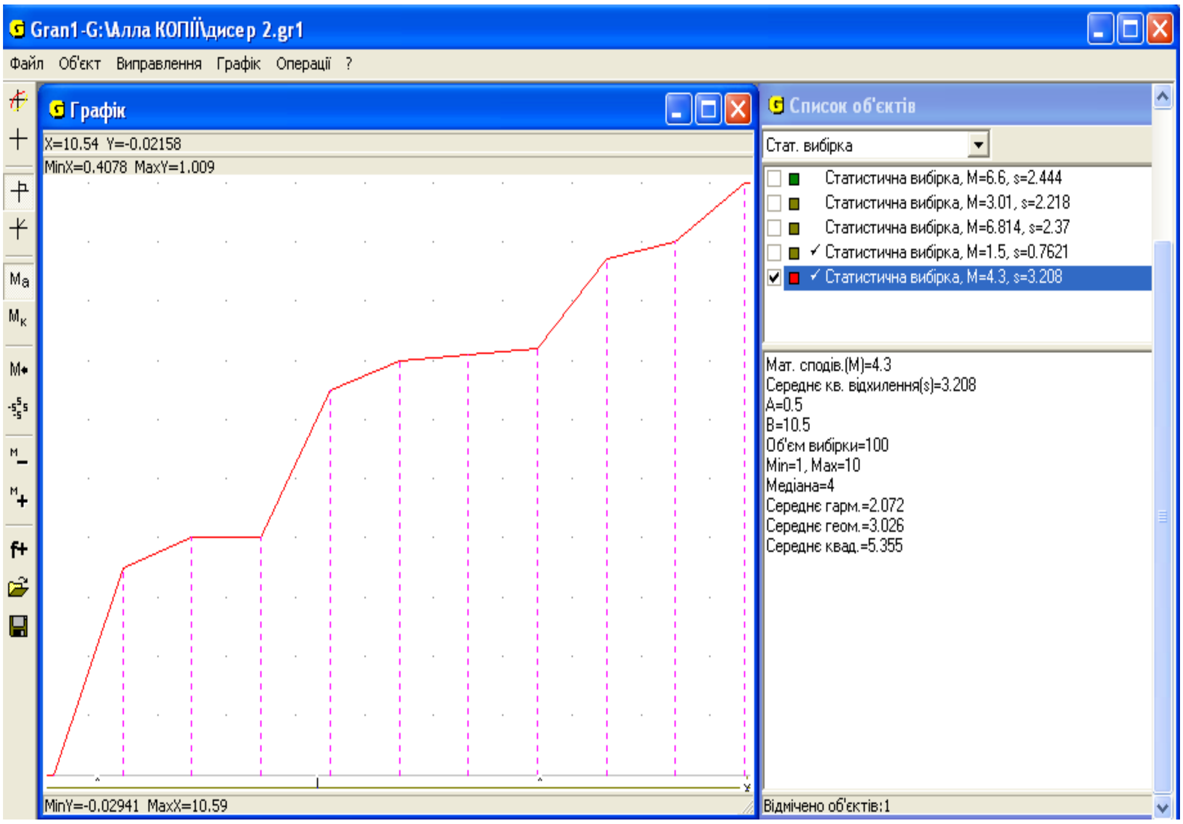


Рис. 2.14. Графік функції неперервного розподілу статистичних ймовірностей

Роль аналогії у відкритті та засвоєнні нових понять загальновідома. Використання аналогій при формуванні понять сприяє активізації мислення школярів, оскільки встановивши, що нове поняття аналогічне відомому раніше, учень може припустити співпадання властивостей цих понять. Порівняння аналогічних понять забезпечує можливість встановлювати однакові властивості, а також виявити неспівпадання, що сприяє глибшому усвідомленню властивостей нових понять, міцному їх запам'ятовуванню та попередженню помилок [299, с.58-59].

Оскільки неважко помітити, що дискретний і неперервний розподіл статистичних ймовірностей мають багато спільного, то разом з учнями можна сформулювати основні властивості функції неперервного розподілу.

Заздалегідь необхідно підготувати плакати (презентацію для демонстрації на мультимедійній дошці) з властивостями функції неперервного та дискретного розподілу.

Введемо деякі числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей (центр розсіювання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення).

Приклад 2.39. Розглянемо два розподіли статистичних ймовірностей:

Таблиця 2.18

1)

x_i	*10*	*11*	*12*
$P_n^*(x_i)$	*0,25*	*0,5*	*0,25*

2)

$x_i^/$	*210*	*211*	*212*
$P_n^*(x_i^/)$	*0,25*	*0,5*	*0,25*

Ці розподіли відрізняються тим, що кожне із значень $x_i^/$ в другому розподілі на *200* більше, ніж у першому розподілі. В першому розподілі статистичні ймовірності розподілені на множині з трьох точок $x_1=10$, $x_2=11$, $x_3=12$, що розташовані не далі, ніж на відстані, рівній *1*, від точки $x=11$, а в другому розподілі статистичні ймовірності розподілені так само на множині з трьох точок $x_1^/=210$, $x_2^/=211$, $x_3^/=212$, що віддалені не далі, ніж на відстані 1 від точки $x_i^/=211$. Точки $\bar{x}=11$ та $\bar{x}^/=211$ прийнято *називати центрами розсіювання статистичних ймовірностей* розподілів. Вони характеризують значення, навколо яких зосереджені спостережені значення.

Приклад 2.40. Нехай є два розподіли:

Таблиця 2.19

1)

x_i	-1	0	1
$P_n^*(x_i)$	0,2	0,6	0,2

2)

x_i'	-15	0	15
$P_n^*(x_i')$	0,2	0,6	0,2

Наголошуємо, що для кожного з цих розподілів $m_n^*=0$, але в другому розподілі розсіювання частот навколо *центра розсіювання* $m_n^*=0$ помітно більше, ніж у першому розподілі. Чим менше *розсіювання (дисперсія)*, тим надійнішим, точнішим і вірогіднішим є середній результат спостережень (m_n^*) при достатньо великій кількості спостережень [133, с.114].

Приклад 2.41. Якщо розподіл визначено таблицями 2.20 та 2.21,

Таблиця 2.20

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	0	2	1	3	3	4

Таблиця 2.21

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

то $m_n^*=1\cdot 0+2\cdot\frac{2}{20}+3\cdot\frac{5}{20}+4\cdot\frac{8}{20}+5\cdot\frac{3}{20}+6\cdot\frac{2}{20}=\frac{1}{20}(4+15+32+15+12)=3,9$

$$D_n^*=\frac{1}{20}\Big[(1-3,9)^2\cdot 0+(2-3,9)^2\cdot 2+(3-3,9)^2\cdot 1+$$
$$+(4-3,9)^2\cdot 3+(5-3,9)^2\cdot 3+(6-3,9)^2\cdot 4\Big]\approx 1,5,\ \sigma_n^*=\sqrt{D_n^*}\approx 1,22.$$

Введемо деякі числові характеристики неперервного розподілу статистичних ймовірностей (центр розсіювання та дисперсію, що визначається щільністю, середнє квадратичне відхилення) згідно [131].

Приклад 2.42. Для неперервного розподілу, що визначений табл. 2.22 визначити центр розсіювання статистичних ймовірностей, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Таблиця 2.22

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0,4	0,3	0,02	0,03	0,05	0,1	0	0,05	0,03	0,02

маємо: $m_n^* = 0,05 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,02 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,45 \cdot 0,05 +$

$$+ 0,55 \cdot 0,1 + 0,65 \cdot 0 + 0,75 \cdot 0,05 + 0,85 \cdot 0,03 + 0,95 \cdot 0,02 \approx 0,24,$$

$$D_n^* \approx (0,05 - 0,24)^2 \cdot 0,4 + (0,15 - 0,24)^2 \cdot 0,3 + (0,25 - 0,24)^2 \cdot 0,02 +$$

$$+ (0,35 - 0,24)^2 \cdot 0,03 + (0,45 - 0,24)^2 \cdot 0,05 + (0,55 - 0,24)^2 \cdot 0,1 +$$

$$+ (0,65 - 0,24)^2 \cdot 0 + (0,75 - 0,24)^2 \cdot 0,05 + (0,85 - 0,24)^2 \cdot 0,03 +$$

$$+ (0,95 - 0,24)^2 \cdot 0,02 \approx 0,063, \quad \sigma_n^* = \sqrt{D_n^*} \approx \sqrt{0,063} \approx 0,25.$$

2.6. Використання інформаційно-комунікаційних технологій при навчанні елементів стохастики у шкільному курсі математики

Розглянемо докладніше окремі аспекти методики навчання елементів стохастики з використанням ІКТ. Застосування сучасних ІКТ уможливлює ефективне вирішення протиріччя між формальним вивченням цього розділу та евристичною діяльністю учнів шляхом інтенсивного та систематичного впровадження адаптованих до навчального процесу завдань; між обсягом елементів стохастики та часом на оволодіння ними за рахунок одночасного використання різних засобів подання матеріалу.

На сьогодні комп’ютер широко використовують в багатьох сферах діяльності людей: науково-дослідній, виробничій, у сфері обслуговування, в побуті. Комп’ютеризація навчального процесу розкриває найширші перспективи його суттєвого вдосконалення, тому для вчителя математики комп’ютер повинен стати «правою рукою» [273].

Не раз було наголошено на тому, що одним із засобів активізації пізнавальної діяльності учнів при навчанні елементів стохастики є її комп’ютерна підтримка, яка з педагогічно виваженим і доцільним використанням програмних засобів дає значний педагогічний ефект. Це перш за все вже досить відомі програмні засоби GRAN1, DG, DERIVE та інші.

Педагогічний програмний засіб GRAN1, рекомендований Міністерством освіти і науки України, призначений для комп’ютерної підтримки навчання алгебри, початків аналізу, планіметрії, тригонометрії, елементів стохастики в школі.

При опрацюванні статистичного матеріалу за допомогою педагогічного програмного засобу GRAN1 не виникає жодних проблем — всі обчислення, побудови графіків (многокутників розподілу статистичних ймовірностей, гістограм, функцій дискретних чи неперервних розподілів статистичних ймовірностей), визначення деяких параметрів розподілів (середнє значення, характеристики розсіювання тощо) виконуються автоматично та практично миттєво – досить звернутися до відповідної послуги програми. Тому з'являється можливість основну увагу учнів зосередити саме на з'ясуванні сутності явищ, які вивчають, їх властивостей, причинно-наслідкових зв'язків, різноманітних особливостей окремих їх проявів. При цьому всі рутинні операції, пов'язані з виконанням обчислень та графічних побудов, є можливість перекласти на комп'ютер [198].

Проведене анкетування (Додаток З) свідчить, що сьогодні, на жаль, комп'ютер на уроках математики, зокрема під час вивчення розділу «Елементи стохастики», вчителі майже не використовують. При опитуванні вчителів математики школи було виявлено, що причинами цього, в основному, є:

- непідготовленість вчителів математики до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі;
- відсутність достатньої кількості комп'ютерних класів у школі;
- відсутність доступу до комп'ютерного класу (збіг уроків математики та інформатики).

При цьому окремі вчителі стверджують, що використовують комп'ютер, який є досить ефективним засобом навчання, творчої діяльності учнів при навчанні різних предметів, зокрема і математики.

За весь період використання комп'ютерів у навчальному процесі значною мірою було розширено межі їх застосування, підвищено психолого-педагогічні вимоги до комп'ютерно-орієнтованого методичного забезпечення навчального процесу. Принципових змін зазнали й уявлення про комп'ютерні системи навчального призначення, їх сутність, функції, можливості використання.

Одним з напрямів підвищення рівня ефективності навчання елементів стохастики є використання комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання[5] в поєднанні з системою психологічних і педагогічних методів активізації навчальної діяльності. Застосування комп'ютера передбачає опанування учнями знань зі стохастики, навичок використання стохастичних методів, програмного забезпечення, тобто використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, доступ до яких може забезпечити навчальний заклад. На заняттях, що проводяться з використанням ІКТ, учень може переконатися в тому, що людина за допомогою комп'ютера може розв'язувати досить складні завдання.

Зрозуміло, що використання комп'ютера забезпечує значну економію часу та можливість продуктивніше спрямувати зусилля учнів на осмислення та засвоєння навчального матеріалу. Це сприяє розвитку логічного, абстрактного мислення, просторової уяви, що є основою формування стійких знань, умінь, навичок на базі цілісного світогляду та розвиненої системи внутріпредметних зв'язків.

Вирішуючи проблему використання комп'ютера в процесі навчання стохастики, доцільно виходити не стільки з функціональних характеристик комп'ютера та бажання використати його в навчальному процесі, скільки з методичної системи навчання елементів стохастики, аналіз якої повинен показати, які навчальні завдання доцільно вирішувати за допомогою комп'ютера, тому що інші дидактичні засоби менш ефективні або їх застосування взагалі недоцільне або і неможливе.

[5] *Комп'ютерно-орієнтована методична система* – сукупність елементів (мета, зміст, методи, засоби та форми організації навчання), що утворюють єдину цілісну функціональну структуру, орієнтовану на досягнення цілей навчання, на основі якої забезпечується цілеспрямований процес здобування знань, формування умінь, набуття навичок, засвоєння способів пізнавальної діяльності людини та сприяння її розвитку, в якій основними засобами управління навчальною діяльністю та засобами навчання є програмно-апаратні засоби, що функціонують на базі комп'ютерної техніки, комунікаційних систем та мереж, і використовуються у навчальному процесі під керівництвом вчителя [323, с.257]

Отже, використання комп'ютера уможливлює реалізацію принципів розвиваючого навчання:

- проводити навчання на високому рівні складності в зоні найближчого розвитку кожного учня, а оскільки ця зона індивідуальна для кожного учня, то допомогу необхідно надавати різну;
- у швидкому темпі, оскільки використання комп'ютера уможливлює збільшення об'єму навчального матеріалу;
- дотримуючись закономірностей навчального процесу (первинне сприймання, усвідомлення та запам'ятовування);
- забезпечити систематичний розвиток кожного учня (опосередковано сприяти розвитку спеціальних прийомів розумових дій: підведення під поняття, добір суттєвих ознак, порівняння, аналіз, синтез тощо).

У процесі навчання елементів стохастики вчителю доводиться майже на кожному кроці оперувати різноманітними статистичними даними, які він подає в усній або табличній формі, для цього зручно використовувати комп'ютер та мультимедійну дошку.

Використання комп'ютерів в навчальному процесі, крім допомоги у виконанні дидактичних завдань активізує дослідницьку діяльність учнів, уможливлює розкриття творчого потенціалу учнів, більше задовольнити пізнавальні потреби дітей відповідно до їхніх нахилів і здібностей.

Ефективне засвоєння знань учнями за умов широкого впровадження засобів інформаційно-комунікаційних технологій навчання значною мірою залежить від наявних педагогічних програмних засобів.

Суттєвий вплив використання ІКТ на інтенсифікацію навчального процесу підтверджує практика навчання елементів стохастики і, зокрема, педагогічна діяльність автора даного дослідження.

Учні з високим рівнем навчальної активності витрачають на навчання елементів стохастики у 1,5-2 рази менше часу від запланованого для вивчення (що забезпечує можливість розглянути цей розділ ширше). Доцільно також супроводжувати навчання елементів стохастики демонстрацією конкретних моделей на уроках (наприклад блукання точки), практичних заняттях, лабораторних проектах.

На основі аналізу психолого-педагогічних особливостей навчання з використанням інформаційно-комунікаційних технологій розглянемо особливості застосування цих технологій при навчанні елементів стохастики:

- розвиток мислення, формування знань, умінь, навичок розв'язування задач, оволодіння обчислювальними методами, зокрема, стохастичними,
- ознайомлення з розділами математики, які не входять до програми шкільного курсу математики або є новими для нього,
- розвиток здібностей до вивчення нових розділів математики,
- використання задач професійного спрямування,
- забезпечення необхідного часу роботи учнів за комп'ютером.

Вплив використання ІКТ на зміст навчання проявляється у:

- розширенні та поглибленні теоретичних основ елементів стохастики,
- поглибленні міжпредметних зв'язків та використанні задач реального (практичного) змісту [140].

Використання комп'ютерів забезпечує можливість при навчанні стохастики звернути основну увагу учнів на з'ясування суті досліджуваних явищ, побудову математичних моделей, інтерпретації отриманих за допомогою комп'ютера результатів, зекономити час, що раніше витрачався на громіздкі математичні обчислення, побудову графічних зображень.

Використання такого потужного засобу, як комп'ютер, робить процес навчання технологічнішим і результативнішим. За допомогою комп'ютера можна робити уроки, не схожі один на один, головний успіх таких уроків – це «вогник» в очах учнів, їх готовність до творчості, потреба в отриманні нових знань і відчуття самостійності.

Застосування сучасних комп'ютерів підвищує пізнавальний інтерес учнів до навчального матеріалу, розширює можливості цілеспрямованого упорядкованого формування, поглиблення та розширення теоретичних знань учнів. Це можна досягти шляхом урізноманітнення подання матеріалу й удосконалення методики навчання всіх розділів математики, в тому числі елементів стохастики. Використання персональних комп'ютерів уможливлює систематичний розгляд різних шляхів розв'язування задач, збільшення їх кількості, урізноманітнення змісту, розширення можливостей узагальнення математичних понять [174].

Таким чином, під час розв'язування задач зі стохастики з використанням комп'ютерів на якісно новому рівні є можливість формувати не лише стохастичну культуру, але й культуру розумової праці, а також важливі вміння: планувати свою роботу, раціонально її виконувати, критично зіставляти початковий стан роботи з реальним процесом її виконання [333].

Використання засобів сучасних інформаційно-комунікаційних технологій забезпечує можливість вчителю повною мірою реалізувати такі загальнодидактичні принципи навчання, як свідоме виконання навчальних завдань, наочність, доступність, послідовність, диференціація та індивідуалізація навчального процесу.

Зупинимось детальніше на реалізації принципу наочності. Відомо, що унаочнення навчального матеріалу сприяє утворенню чітких і точних образів сприйняття й уявлення, переходу від сприйняття конкретних об'єктів до абстрактних понять. Правильний добір засобів наочності забезпечує усвідомлене сприйняття, сприяє підвищенню пізнавального інтересу, активізації мислення. Широкі можливості використання графічних побудов за допомогою сучасних комп'ютерів, навчання з використанням комп'ютерної графіки сприяє забезпеченню наочно-образного подання графічних даних у поєднанні зі знаково-символьним, що має надзвичайне значення при навчанні стохастики.

Навчання елементів стохастики з опорою на педагогічно виважене та доцільне використання засобів ІКТ забезпечує можливість вчителю інтенсифікувати роботу учнів, створюючи для кожного учня адекватний його можливостям темп просування у навчанні. Учні, працюючи з програмами типу GRAN1, мають під рукою засіб для вивчення широкого кола математичних понять та закономірностей, що уможливлює швидке та якісне виконання необхідних обчислень, графічних побудов, випробовування різних методів розв’язування конкретної задачі, внесення певних змін в досліджуваний процес або явище, всебічне вивчення їх властивостей, проведення необхідних обчислювальних експериментів і узагальнення їх, висування певних припущень та обґрунтування чи спростування їх тощо.

Використання математичних програм при розв’язуванні задач стохастики забезпечує можливість учням кваліфіковано й ефективно маніпулювати математичними об’єктами. Вони оволодівають теоретичним матеріалом, насиченим геометричними ілюстраціями, алгебраїчними методами, а не витрачають час на механічні обчислення та використання різноманітних технічних операцій. Важливим педагогічним завданням вчителя є застосування таких методів і форм організації заняття, на яких учень отримував би осмислені відповіді на кожному етапі розв’язування задачі. Педагоги та психологи вважають, що основним принципом педагогіки сучасної школи є вирішення проблеми перенесення наукових знань у навчальний предмет [164].

Певна економія часу може бути досягнута за рахунок комп’ютеризації навчального процесу. Однак не варто забувати, що необґрунтоване застосування на заняттях зі стохастики стандартних програм не сприяє глибокому усвідомленню й опрацюванню навчального матеріалу, крім того, слабка комп’ютерна підготовка частини учнів призводить до сліпої віри в правильність результату, отриманого за допомогою комп’ютера. Тому їх використання може бути рекомендоване лише в якості засобів виконання громіздких рутинних обчислювальних та графічних операцій, подання результатів виконання навчальних завдань.

Використання комп’ютера забезпечує можливість учителю математики під час занять акцентувати увагу на стимулюванні процесів саморозвитку. На уроках стохастики з використанням комп’ютерів всіх учнів очікує напружена та цікава робота. Кожен працює за мірою своїх здібностей і можливостей. Ефективність уроку підвищується за рахунок того, що всі учні будуть включені в роботу повністю. А цього можна досягти лише за умови педагогічно виваженого використання комп’ютерів.

При використанні інформаційно-комунікаційних технологій у вчителя з’являється можливість поширити контроль за засвоєнням знань і управляти цим процесом. Доцільне використання програм типу GRAN1 допомагає активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів, уможливлює досягнення таких цілей:

- учні навчаються працювати за комп’ютером;
- учні закріплюють практичні навички та вміння побудови гістограм і частотних таблиць;
- економлять час при розв’язуванні задач;
- учитель має можливість контролювати виконання завдання кожним учнем на кожному окремому етапі.

Цілком доцільним є використання комп’ютера для ефективного подання графічних побудов. Не потрібно, однак, вважати, що використання комп’ютера завжди принесе найкращі результати у засвоєнні учнями навчального матеріалу (зокрема, при розв’язуванні задач на доведення, обґрунтування висновків, які вимагають значної мислительної роботи, осмислювальної діяльності).

Однак виникає парадокс: чим більше в учнів можливостей використання комп’ютерної техніки, тим менше вони обчислюють взагалі. Тим часом реальним стає комплексний підхід до навчання елементів стохастики в школі – від постановки технічних або «природничих» задач, до побудови їх математичних моделей і дослідження цих моделей за допомогою комп’ютера з аналізом і тлумаченням отриманих результатів у термінах поставленої задачі.

Під час роботи за комп’ютером, як свідчить досвід, спілкування вчителя з класом значно утруднюється. Згідно гігієнічних вимог за комп'ютером учні не повинні працювати більше 30 хвилин [261], отже прийнятною формою організації роботи може бути така: на початку уроку (5 хвилин) вчитель повідомляє класу загальні завдання та рекомендації щодо їх виконання, потім учні працюють самостійно (можливо групами по 2-3 учні за одним комп'ютером) за інструкцією, а вчитель виконує роль консультанта; в кінці уроку, коли роботу закінчено, відбувається обговорення роботи та обмін думками (10 хвилин).

При навчанні елементів стохастики корисно відпрацювати всі прийоми аналізу дослідних даних на одному і тому ж наборі. Такий аналіз уможливлює визначення ключових моментів для перевірки та самоконтролю, а також забезпечує можливість підготувати учнів до проведення самостійного опрацювання результатів експериментів в майбутньому. В цій індивідуальній роботі кожен учень виконує дослідження деякого випадкового явища вибірковим методом, визначає розподіли статистичних ймовірностей та їх числові характеристики, виконує відповідні графічні побудови. Останніми роками намітилася тенденція до скорочення кількості годин з математики. При збереженні попереднього об'єму нормативних програм дуже гостро постає проблема добору теоретичного матеріалу, побудови уроків з розв'язування задач, організації самостійної роботи та дослідницької роботи учнів.

Використання комп'ютера сприяє паралельно з економією часу, відведеного на обчислення, зміцненню зв'язків між різними навчальними предметами, перевірці знань учнів щодо основних понять зі стохастики і їх умінню робити висновки про отримані результати [248].

Учитель свідомо ставить кожного учня в такі умови, щоб добір подальших дій залежав від самого учня, а тому учні набувають впевненості, поваги до себе.

Прикладний характер стохастики зумовлює необхідність розв'язування задач, які є досить громіздкими та вимагають багато часу, що без використання комп'ютера та відповідних програмних засобів є значною перешкодою для досягнення високих навчальних результатів на практичних заняттях зі стохастики. Позитивних результатів можна досягти лише за умови гармонійного поєднання традиційних і новітніх комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання.

Перед розв'язуванням наступної задачі вчитель зазначає, що неможливо виміряти зріст або вагу всіх людей на планеті (в країні, місті), опитати всіх виборців перед голосуванням тощо, тому для того, щоб склалося певне уявлення про середній зріст людей на планеті, середній вік, якій політичній партії надають перевагу, вибирають навмання певну кількість людей, формують так звану вибірку (при цьому для отримання вірогідніших результатів бажано, щоб серед вибраних людей були люди різних вікових категорій, обох статей, мешканці і міст, і сіл тощо).

Розглянемо розв'язування за допомогою програмного засобу GRAN1 задачі характерної для шкільних підручників [354].

Приклад 2.43. Побудувати варіаційний ряд і полігон розподілу відносних частот для 50 пар жіночого взуття, яке було продано за один день: 37, 35, 39, 37, 38, 35, 35, 36, 37, 38, 37, 36, 38, 37, 39, 38, 39, 36, 37, 36, 37, 38, 37, 39, 38, 36, 35, 37, 36, 35, 38, 37, 36, 35, 39, 37, 38, 38, 36, 38, 39, 38, 37, 37, 36, 35, 37, 36, 38, 39.

Після перевірки правильності побудов за допомогою GRAN1, вчитель може запропонувати систему запитань для аналізу отриманих результатів:

1. Які дані вводили?

Очікувана відповідь: Розміри жіночого взуття, проданого за один день.

2. Скільки пар жіночого взуття було придбано протягом дня?

Очікувана відповідь: 50.

3. Як можна з використанням послуг програми GRAN1 отримати потрібний варіаційний ряд?

Очікувана відповідь: Вибрати тип даних – варіанти для статистичної вибірки (рис. 2.15).

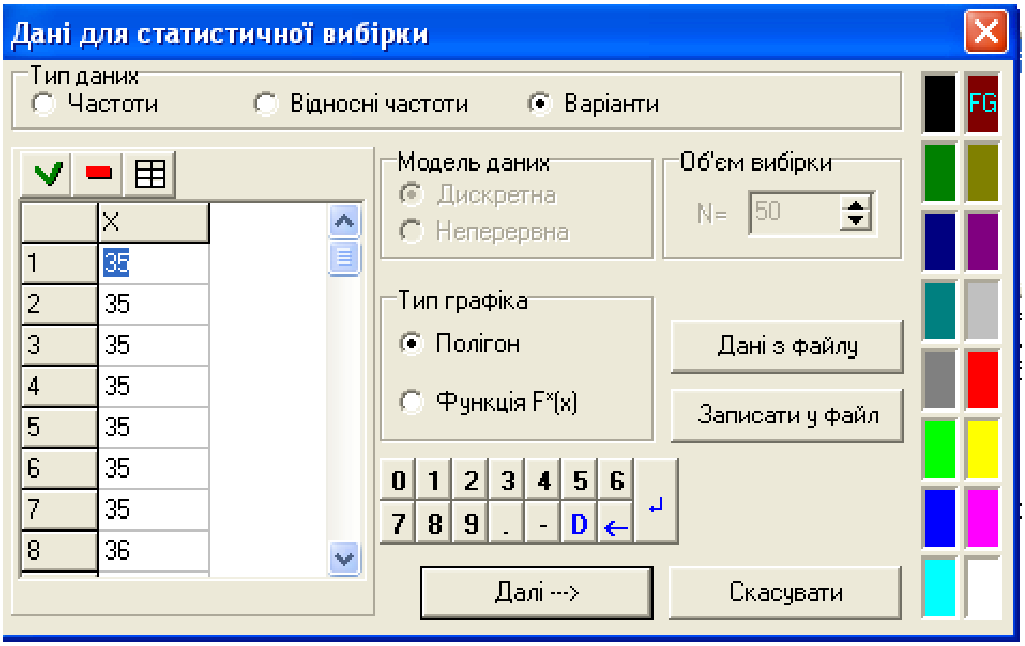


Рис. 2.15. Дані для статистичної вибірки

4.Як редагують введені дані?

Очікувана відповідь: Натиснувши ліву кнопку мишки, коли курсор вказує на помилково набрані дані.

5. Який вигляд має варіаційний ряд?

Очікувана відповідь: 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 39, 39, 39.

6. Скільки жінок цього дня придбали взуття 36 розміру?

Очікувана відповідь: 10.

7. Який розмір цього дня користувався найбільшим попитом?

Очікувана відповідь: 37.

8. Чи можна сказати, що 37 розмір взуття найпопулярніший у світі?

Очікувана відповідь: Ні, оскільки даних замало, вони отримані лише в одному магазині, в одному місті, в одній країні.

9. Що необхідно зробити, щоб дізнатися найпопулярніший у світ розмір жіночого взуття?

Очікувана відповідь: провести дослідження в різних країнах світу, в міській та сільській місцевості, в різних магазинах, на базарах тощо.

10.Як отримати числові характеристики розподілу статистичних ймовірностей з використанням послуг програми GRAN1?

Очікувана відповідь: У списку об’єктів активізувати «Статистична вибірка» і у нижній частині вікна прочитати необхідні дані (рис. 2.16).

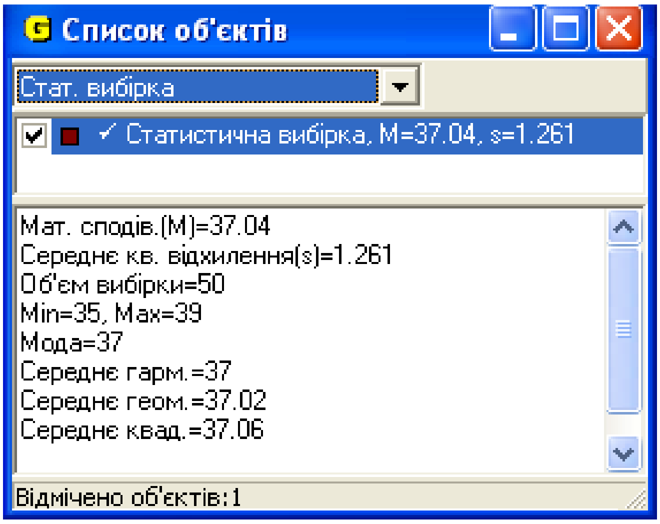


Рис. 2.16. Числові характеристики розподілу статистичних ймовірностей

11.Чому дорівнює середнє квадратичне відхилення?

Очікувана відповідь: 1,261.

12.Як визначити найбільшу відносну частоту та відповідне значення досліджуваної величини за умови, що побудовано полігон частот?

Очікувана відповідь: Підвести курсор до найвищої точки графіку й у верхньому рядочку прочитати значення X та Y (у нашому випадку найбільша відносна частота 0,281, а відповідне значення 37) (рис. 2.17).

13.Який відсоток жінок у цьому магазині придбали найпоширеніший розмір взуття?

Очікувана відповідь: 28% (відносну частоту 37 розміру помножили на 100%) (рис. 2.18).

14.Скільки % жінок придбали у магазині розмір взуття, менший 37?

Очікувана відповідь: 34% (відносну частоту 35 і 36 розміру множимо на 100% і додамо).

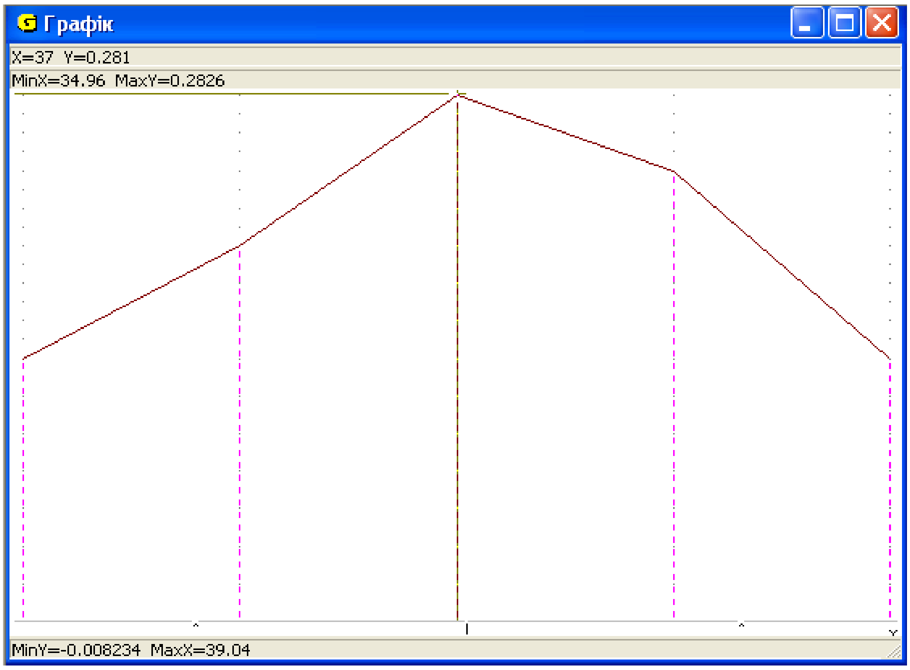


Рис. 2.17. Полігон частот

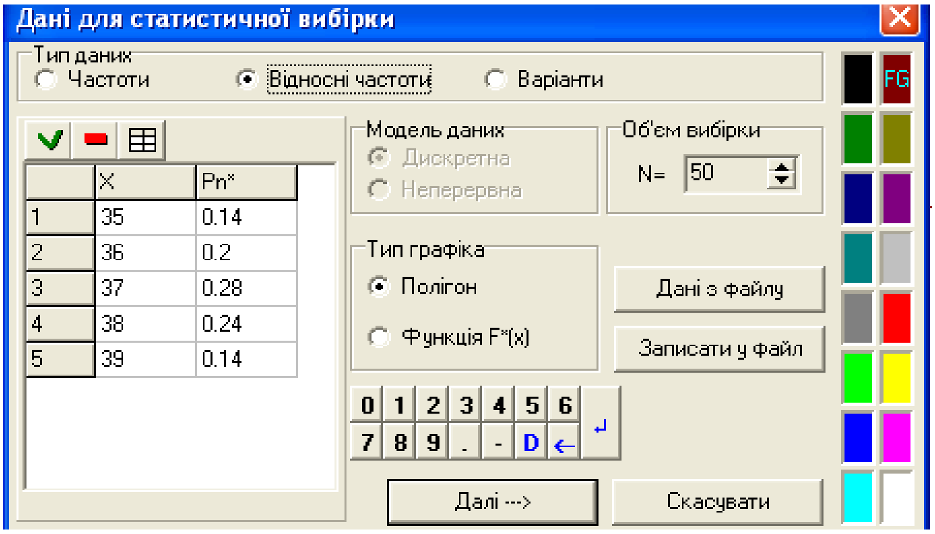


Рис. 2.18. Відносні частоти

Проілюструємо, як можна використати програму GRAN1 для розв’язування інших задач.

Приклад 2.44. Скласти частотну таблицю оцінок за контрольну роботу з математики учнів свого класу (статистичну вибірку формуємо самостійно, провівши обчислення, вибірка виглядатиме так: 7, 8, 2, 8, 3, 10, 4, 5, 6, 4, 8, 3, 10, 5, 6, 9, 5, 11, 9, 6, 7, 8, 9, 7, 9, 8, 5, 6, 7, 7). Досліджуємо дискретний розподіл статистичних ймовірностей на множині з 12 точок (12 оцінок), тип даних – варіанти (згідно з запитами в програмі GRAN1). Ця величина може набувати значення з певної дискретної множини. Обсяг вибірки – 30 учнів.

У першому рядочку таблиці зафіксуємо всі можливі оцінки, розташувавши їх у порядку зростання. Далі підрахуємо кількість кожної з оцінок (тобто частоту появи) та занесемо ці дані у другий рядочок табл. 2.23.

Таблиця 2.23

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	0	1	2	2	4	4	5	5	4	2	1	0

$$P_{30}(1)=\frac{0}{30}=0, \quad P_{30}(2)=\frac{1}{30}=0{,}033 \quad P_{30}(3)=\frac{2}{30}=0{,}066 \quad P_{30}(4)=\frac{2}{30}=0{,}066$$

$$P_{30}(5)=\frac{4}{30}=0{,}133 \quad P_{30}(6)=\frac{4}{30}=0{,}133 \quad P_{30}(7)=\frac{5}{30}=0{,}166 \quad P_{30}(8)=\frac{5}{30}=0{,}166$$

$$P_{30}(9)=\frac{4}{30}=0{,}133 \quad P_{30}(10)=\frac{2}{30}=0{,}066 \quad P_{30}(11)=\frac{1}{30}=0{,}033 \quad P_{30}(12)=\frac{0}{30}=0.$$

Отже є набір статистичних даних, отриманих учнями (рис.2.19).

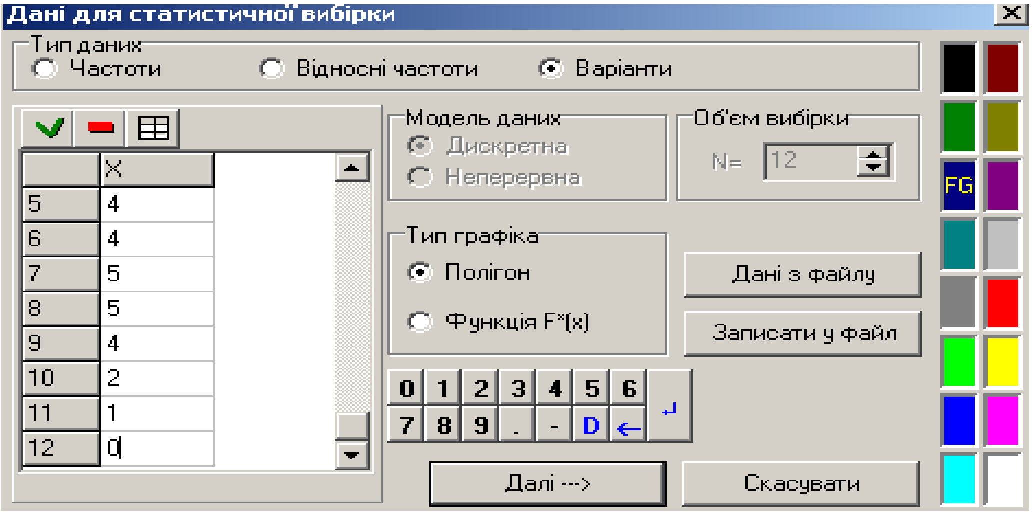
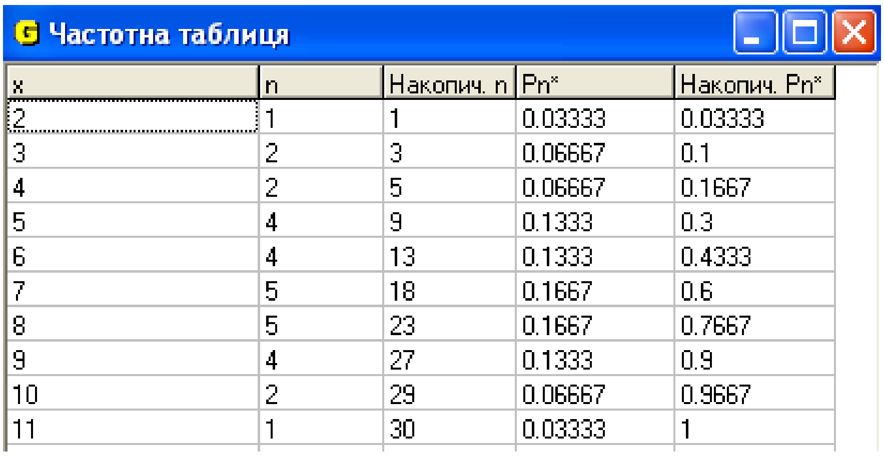


Рис. 2.19. Упорядкований набір оцінок за контрольну роботу

Отримані учнями бали за контрольну роботу показано на рис. 2.20.



Частотна таблиця

x	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
2	1	1	0.03333	0.03333
3	2	3	0.06667	0.1
4	2	5	0.06667	0.1667
5	4	9	0.1333	0.3
6	4	13	0.1333	0.4333
7	5	18	0.1667	0.6
8	5	23	0.1667	0.7667
9	4	27	0.1333	0.9
10	2	29	0.06667	0.9667
11	1	30	0.03333	1

Рис. 2.20. Отримані бали за контрольну роботу

Приклад 2.45. Для дослідження кількості медалістів в місті Києві навмання вибрали 30 шкіл з 300. Кількість медалістів в кожній з цих шкіл виявилася такою (табл. 2.24).

Таблиця 2.24

4	0	3	4	6	1
5	2	4	3	2	2
7	5	2	4	1	2
3	4	5	0	0	2
6	7	6	4	3	5

Впорядкуємо статистичну вибірку (рис. 2.21). Потім побудуємо частотну таблицю (рис. 2.24) для кількості медалістів в школах. В задачах такого типу учні повинні робити висновки на основі запропонованої вибірки шляхом виконання певних обчислень (модель даних в цій задачі – дискретна, тип даних – варіанти). Для досліджуваної вибірки зробити прогноз щодо: 1) кількість шкіл, в яких немає медалістів, 2) кількість шкіл, в яких більше 4 медалістів, 3) кількість шкіл, в яких 3 і менше медалістів, 4) загальну кількість медалістів в школах міста Києва.

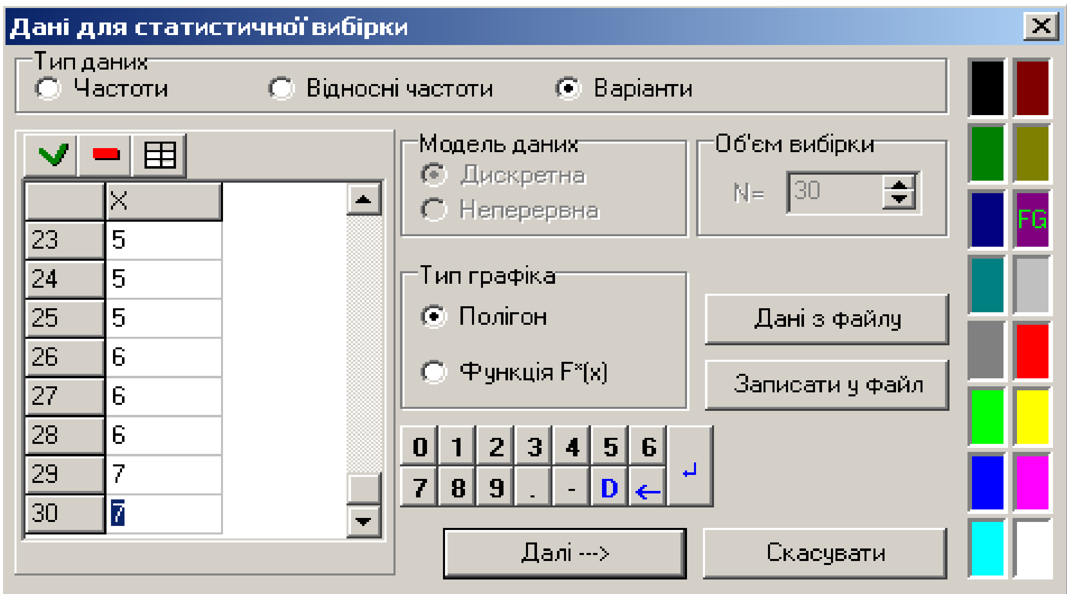


Рис. 2.21. Дані для статистичної вибірки

Частотна таблиця

x	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
0	3	3	0.1	0.1
1	2	5	0.06667	0.1667
2	6	11	0.2	0.3667
3	4	15	0.1333	0.5
4	6	21	0.2	0.7
5	4	25	0.1333	0.8333
6	3	28	0.1	0.9333
7	2	30	0.06667	1

Рис. 2.22. Частотна таблиця

1) *Вчитель*: Як можна визначити прогнозовану кількість шкіл без медалістів?

Учні: Можна вважати, що $P^*_{300}(0) \approx P^*_{30}(0)$, а тому можна перемножити відносну частоту входження до загального переліку шкіл без медалістів $P^*_{30}(0)$ на загальну кількість шкіл *(n)*, тобто *0,1·300=30;*

2) *Вчитель*: Чи є школи, в яких більше 4 медалістів?

Учні: Так, це школи в яких 5, 6 і 7 медалістів.

Вчитель: Як можна визначити прогнозовану кількість шкіл, в яких більше 4 медалістів?

Учні: Аналогічно, вважаючи $P^*_{300}(k) \approx P^*_{30}(k)$ для кожного k=5, 6, 7, необхідно помножити суму відносних частот входження до загального переліку шкіл, в яких 5, 6 і 7 медалістів $(P^*_{30}(5)+ P^*_{30}(6) + P^*_{30}(7))$ на загальну кількість шкіл *(n)*, тобто *(0,1333+0,1+0,0667)·300=0,3·300=90;*

3) *Вчитель*: Чи є школи, в яких 3 і менше медалістів?

Учні: Так, це школи в яких 3, 2, 1 і жодного медаліста.

Вчитель: Як визначити прогнозовану кількість шкіл, в яких 3 і менше медалістів?

Учні: Необхідно помножити суму відносних частот входження до переліку шкіл, в яких 3 і менше медалістів ($P^*_{30}(0)+P^*_{30}(1)+P^*_{30}(2)+P^*_{30}(3)$) на загальну кількість шкіл, $(0,1+0,0667+0,2+0,133)\cdot 300=0,5\cdot 300=150$.

4) *Вчитель*: А чи можна визначити загальну прогнозовану кількість медалістів в школах міста Києва?

Учні: Так, необхідно $(x_0\cdot P^*_{30}(0)+x_1\cdot P^*_{30}(1)+\ldots+x_7\cdot P^*_{30}(7))\cdot 300=$ $=(0,1\cdot 0+0,0667\cdot 1+0,2\cdot 2+0,133\cdot 3+0,2\cdot 4+0,133\cdot 5+0,1\cdot 6+0,0667\cdot 7)\cdot 300=1020$.

Для ознайомлення з різними видами графічного подання розподілів статистичних ймовірностей запропонуємо учням побудувати графік функції $F^*_n(x)$ для вибірки стосовно кількості медалістів (рис. 2.23).

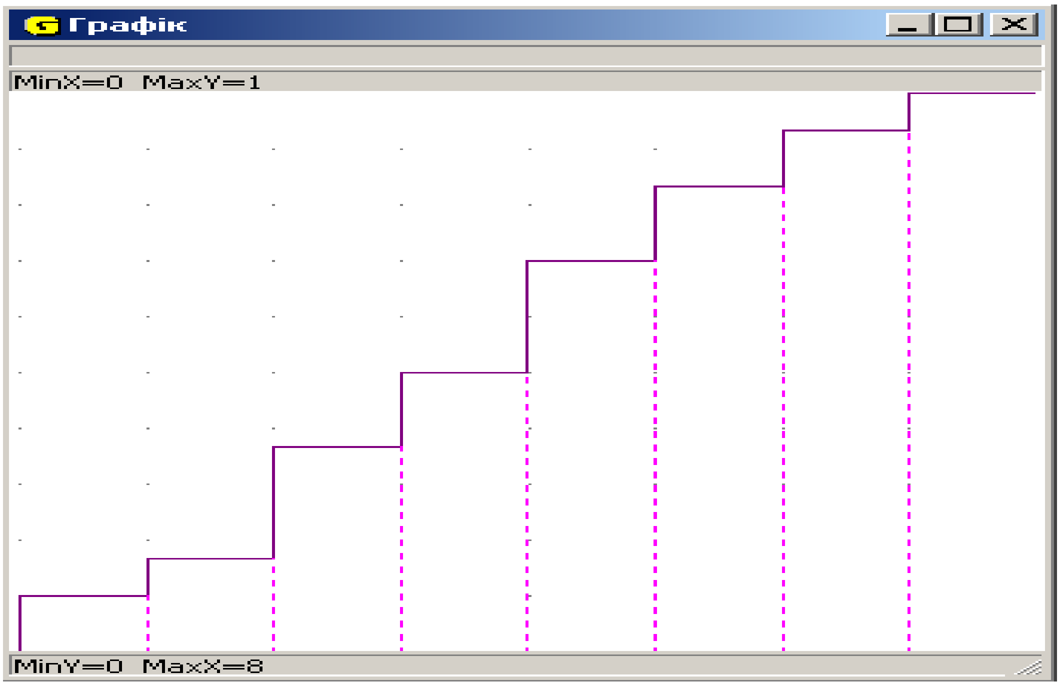


Рис. 2.23. Графік функції $F^*_n(x)$ для вибірки стосовно кількості медалістів

Приклад 2.46. У табл. 2.25 наведено округлений до 0,1 секунди час, за який пробігли стометрівку учні 11-х класів.

Таблиця 2.25

сек.	*15,1*	*15,2*	*15,3*	*15,4*	*15,5*	*15,6*	*15,7*	*15,8*	*15,9*	*16,0*	*16,1*	*16,2*	*16,3*	*16,4*	*16,5*
n	*1*	*3*	*4*	*6*	*4*	*5*	*6*	*7*	*6*	*5*	*4*	*4*	*3*	*1*	*1*

Необхідно визначити моду даної вибірки.

За допомогою полігону відносних частот (рис. 2.24) можна визначити значення моди; це буде число 15,8.

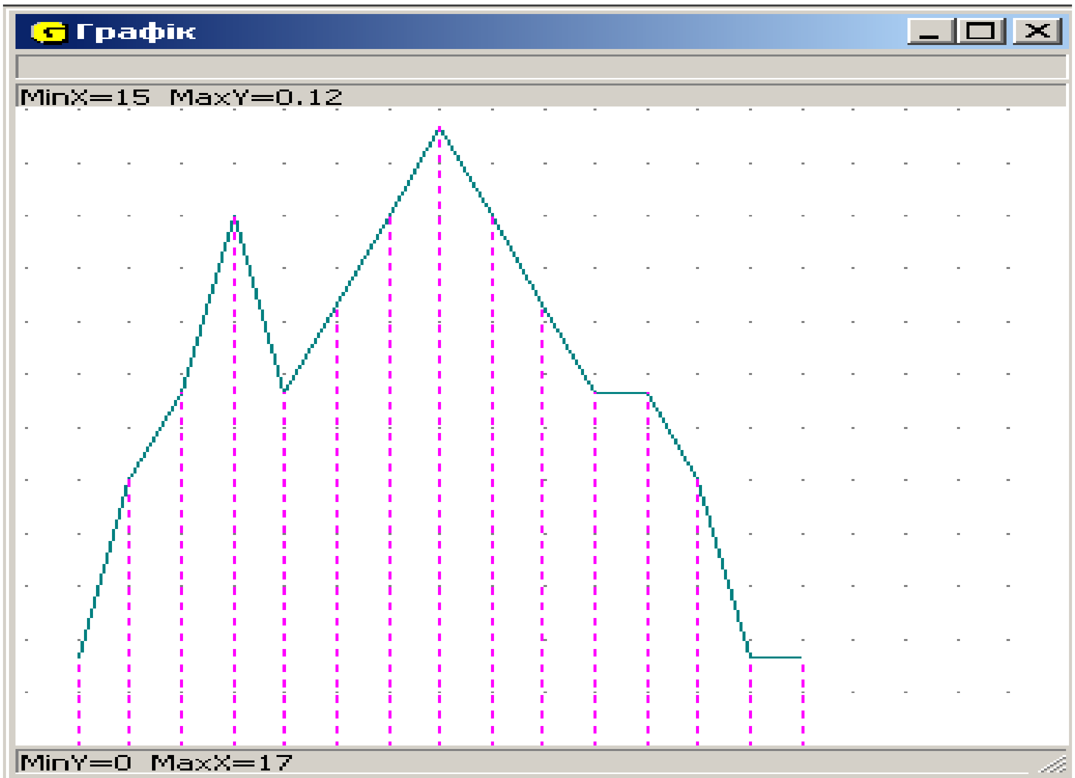


Рис. 2.24. Полігон відносних частот для вибірки часу пробігу

Розглянемо розв’язування наступної задачі двома способами.

Приклад 2.47. Для вивчення попиту на розмір чоловічих сорочок продавець записував, які розміри було продано протягом тижня й отримав такі дані: 38, 41, 39, 41, 44, 43, 42, 40, 39, 41, 38, 44, 43, 40, 41, 42, 38, 41, 43, 38, 44, 39, 40, 39, 42, 38, 43, 40, 41, 42, 38, 38, 43, 39, 40, 44, 42, 39, 43, 39, 44, 40, 41, 42, 39, 40, 39, 40, 44, 43, 41, 42, 40, 41, 40, 41, 42, 40, 40, 41, 42. Побудувати ряд розподілу відносних частот, знайти числові характеристики цього розподілу.

Таблиця 2.26

Традиційний спосіб розв’язування	Розв’язування за допомогою програми GRAN1

Величина «розмір сорочок» може набувати значень з певної дискретної множини. Заповнимо таблицю:

x_i	38	39	40	41	42	43	44
n_i	7	9	11	11	9	7	6

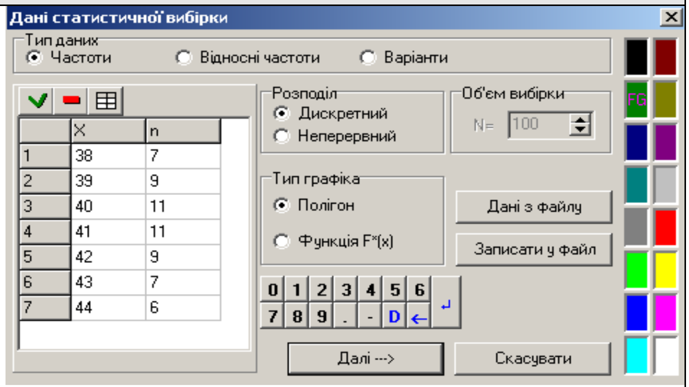


Рис. 2.25. Дані статистичної вибірки

Обсяг вибірки =60. $P_{60}^*(38)=\dfrac{7}{60}$,

$P_{60}^*(39)=\dfrac{9}{60}$, $P_{60}^*(40)=\dfrac{11}{60}$,

$P_{60}^*(41)=\dfrac{11}{60}$, $P_{60}^*(42)=\dfrac{9}{60}$,

$P_{60}^*(43)=\dfrac{7}{60}$, $P_{60}^*(44)=\dfrac{6}{60}$.

побудуємо розподіл відносних частот:

x_i	38	39	40	41	42	43	44
$P_n^*(x_i)$	$\frac{7}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{6}{60}$

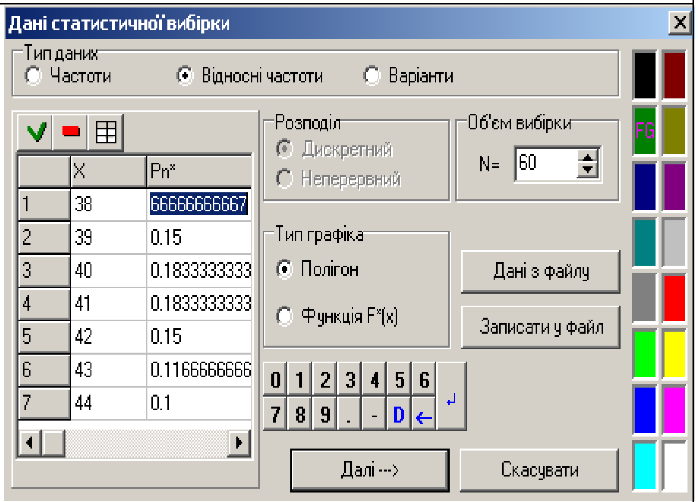
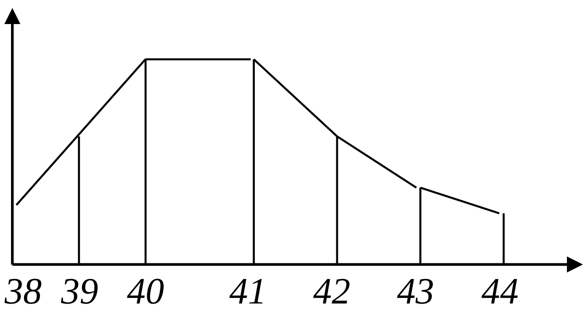


Рис. 2.26. Розподіл відносних частот

Побудуємо полігон відносних частот



Найчастіше купували розміри 40 і 41, найменшим попитом користувався розмір 44 (це видно з графіка).

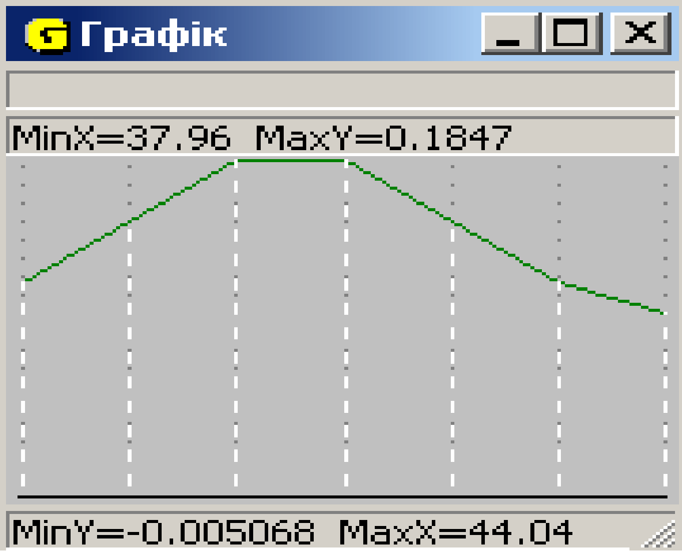


Рис. 2.27. Полігон відносних частот

Продовж. табл. 2.26

<table>
<tr><th>Традиційний спосіб розв’язування</th><th>Розв’язування за допомогою програми GRAN1</th></tr>
<tr><td>

Запишемо функцію розподілу відносних частот

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, \text{коли } x<38,\\ 0{,}116, \text{коли } 38\le x<39,\\ 0{,}266, \text{коли } 39\le x<40,\\ 0{,}45, \text{коли } 40\le x<41,\\ 0{,}633, \text{коли } 41\le x<42,\\ 0{,}783, \text{коли } 42\le x<43,\\ 0{,}9, \text{коли } 43\le x<44,\\ 1, \text{коли } x\ge 44\end{cases}$$

</td><td>

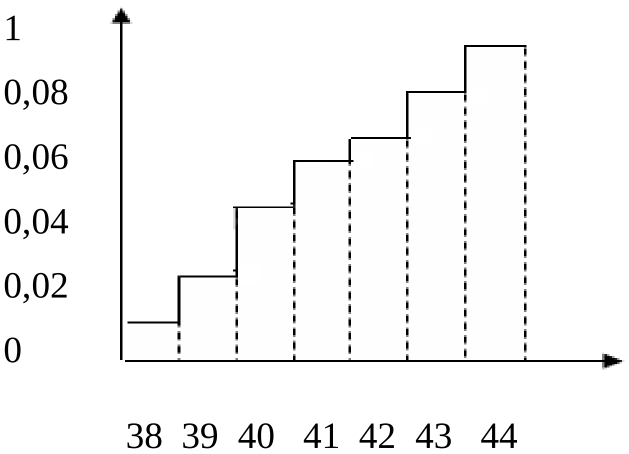
Частотна таблиця

x	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
38	7	7	0.1167	0.1167
39	9	16	0.15	0.2667
40	11	27	0.1833	0.45
41	11	38	0.1833	0.6333
42	9	47	0.15	0.7833
43	7	54	0.1167	0.9
44	6	60	0.1	1

Рис. 2.28. Частотна таблиця

</td></tr>
<tr><td>

Побудуємо графік $F_n^*(x)$



</td><td>

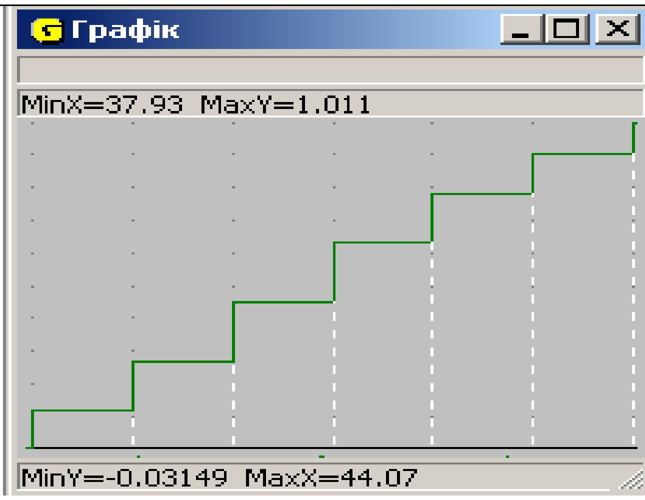


Рис. 2.29. Графік функції F_n^* (x)

</td></tr>
<tr><td>

Знайдемо центр розсіювання (наближене значення математичного сподівання) статистичних ймовірностей вибірки

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$ =(38·7+39·9+40·11+
+41·11+42·9+43·7+44·6)/60=40,85≈41.

Отже, середнім розміром проданих сорочок протягом дня є 41.

</td><td>

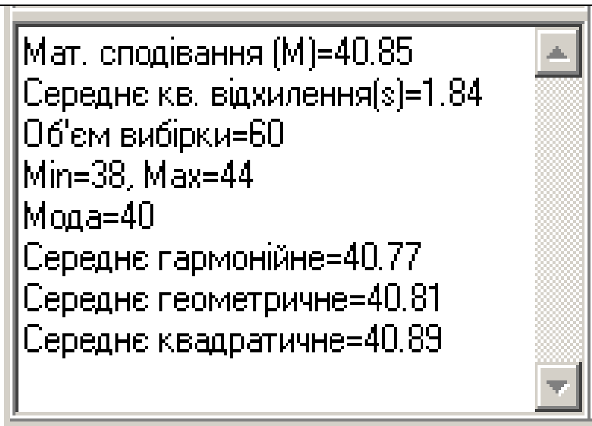


Рис. 2.30. Характеристики числового ряду

</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 2.26

Традиційний спосіб розв'язування	Розв'язування за допомогою програми GRAN1
Обчислимо дисперсію $D_n^* \approx \sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2 \cdot P_n^*(x_i) \approx [(38–40,85)^2 \cdot$ $0,116+(39-40,85)^2 \cdot 0,15+(40–40,85)^2 \cdot$ $0,183+(41-40,85)^2 \cdot 0,183+(42–40,85)^2 \cdot$ $0,116+(43-40,85)^2 \cdot 0,15+(44–40,85)^2 \cdot$ $0,1 =3,39$	
Середнє квадратичне відхилення $\sigma_n^* = \sqrt{3,39} \approx 1,84$	

Під час використання педагогічного засобу GRAN1 вдається зекономити час (при традиційному розв'язуванні – 30 хвилин, за допомогою GRAN1 – 5-10 хвилин).

Для розв'язування у групах з використанням комп'ютера можна запропонувати наступні задачі (попередньо поділивши учнів на групи залежно від кількості комп'ютерів та учнів у класі):

Задача 1. У приймальній комісії вели реєстрацію поданих заяв абітурієнтів: А – автомеханічний факультет, К – комп'ютерних систем, Е – економічний, П – правознавства, Ф – філології, Б – біомедичних технологій, І – інженерний, М – математичний, Д – дизайну. Для того, щоб з'ясувати, які факультети є найпопулярнішими серед абітурієнтів, вирішили зробити вибірку й отримали такий набір даних: К, Ф, П, Д, М, І, К, І, П, М, П, І, К, Е, Е, К, П, Е, П, М, К, Е, Б, Е, Б, І, М, П, Ф, І, А, А, К, І, П, А, Ф, П, Д, Д, А, Ф, П, Е, П, К, П, А, Ф, І, П, К, Е, Е, К, П, А, Е, Ф, Ф, М, Е, М, П, К, К, А, Е, Ф, П, І, Б, Е, Б, І. Складіть таблицю відносних частот заяв, поданих на кожен з факультетів. Який факультет цього дня прийняв найбільшу кількість заяв, який – найменшу? Як це зобразити графічно? Який відсоток складають абітурієнти математичного факультету? Які ще висновки можна зробити?

Задача 2. Ціни на продукти, що були продані протягом дня у магазині, були такими: 1,20; 11,15; 2,30; 8,90; 3,29; 12,07; 5,65; 13,46; 14,09; 10,65;

10,53; 4,70; 3,23; 2,90; 2,19; 2,45; 8,92; 11,31; 12,30; 1,20; 2,30; 10,35; 1,40; 12,02; 8,93; 3,26; 13,21; 8,39; 11,30; 10,35. Побудувати інтервальний розподіл статистичних ймовірностей і гістограму. Який інтервал цін користується найбільшим попитом? Як це визначити? На які ще запитання можна відповісти за результатами розв'язування задачі? Сформулюйте їх.

Задача 3. У 3-х класах однієї навмання вибраної школи виміряли зріст 30 дівчат і отримали такі дані: 121; 128; 122; 128; 129; 122; 121; 132; 130; 128; 125; 127; 120; 122; 128; 122; 138; 150; 146; 130; 145; 125; 143; 128; 124; 128; 126; 132. Побудувати інтервальний розподіл частот і гістограму, поклавши спочатку k=6, а потім k=5. Визначити числові характеристики – моду та медіану, пояснити їх зміст. Що спільного та відмінного в побудованих гістограмах?

Кожному вчителеві під силу скласти аналогічну систему завдань зі стохастики. Бажано, щоб в цих завданнях було розглянуто прикладні задачі економічного, медичного, соціологічного чи інших змістів, що цікавлять учнів даного класу [202].

Періодично на уроках доцільно проводити самостійні роботи (задачі можна запропонувати з додатку А) та тестування з використанням комп'ютера (завдання для тестування наведені у додатку Г). На сьогодні існує значна кількість різноманітних програм, що можуть бути використані. Такі програми можна знайти та скачати в мережі Інтернет, наприклад, MyTest X – система програм для створення та проведення комп'ютерного тестування, збирання й аналізу результатів (розробляється Башлаковим Олександром Сергійовичем з 2003 року, скачати її можна на сайті http://mytest.klyaksa.net), ADSoft Tester (розробник ADSoft, скачати її можна на сайті http://www.adtester.org), TEST-W (розробник Шестопалов Олексій, скачати її можна на сайті http://informatika.at.ua/load/1-1-0-3). Ми скористаємося вільно поширюваною контрольно-діагностичною системою MyTest X (рис. 2.31 – 2.34), що призначена для перевірки знань з використанням комп'ютера.

Програма MyTest X працює з дев'ятьма типами завдань: одиночний вибір, множинний вибір, встановлення порядку слідування, встановлення відповідності, вказання істинності чи хибності тверджень, ручне введення числа, ручне введення тексту, вибір місця на зображенні, перестановка літер. В тесті можна використовувати будь-яку кількість будь-яких типів питань. У завданнях з вибором відповіді можна використовувати до 10 (включно) варіантів відповіді.

До кожного завдання можна задати складність (кількість балів за вірну відповідь), прикріпити підказку (показування може бути за штрафні бали) та пояснення вірної відповіді (виводиться у випадку помилки в навчальному режимі. В MyTest X можна використовувати будь-яку систему оцінювання.

Кожен тест має оптимальний час тестування, зменшення чи перевищення якого знижує якісні показники тесту. Тому передбачено обмеження часу виконання як всього тесту, так і будь-якої відповіді на завдання (для різних завдань можна виставити різний час).

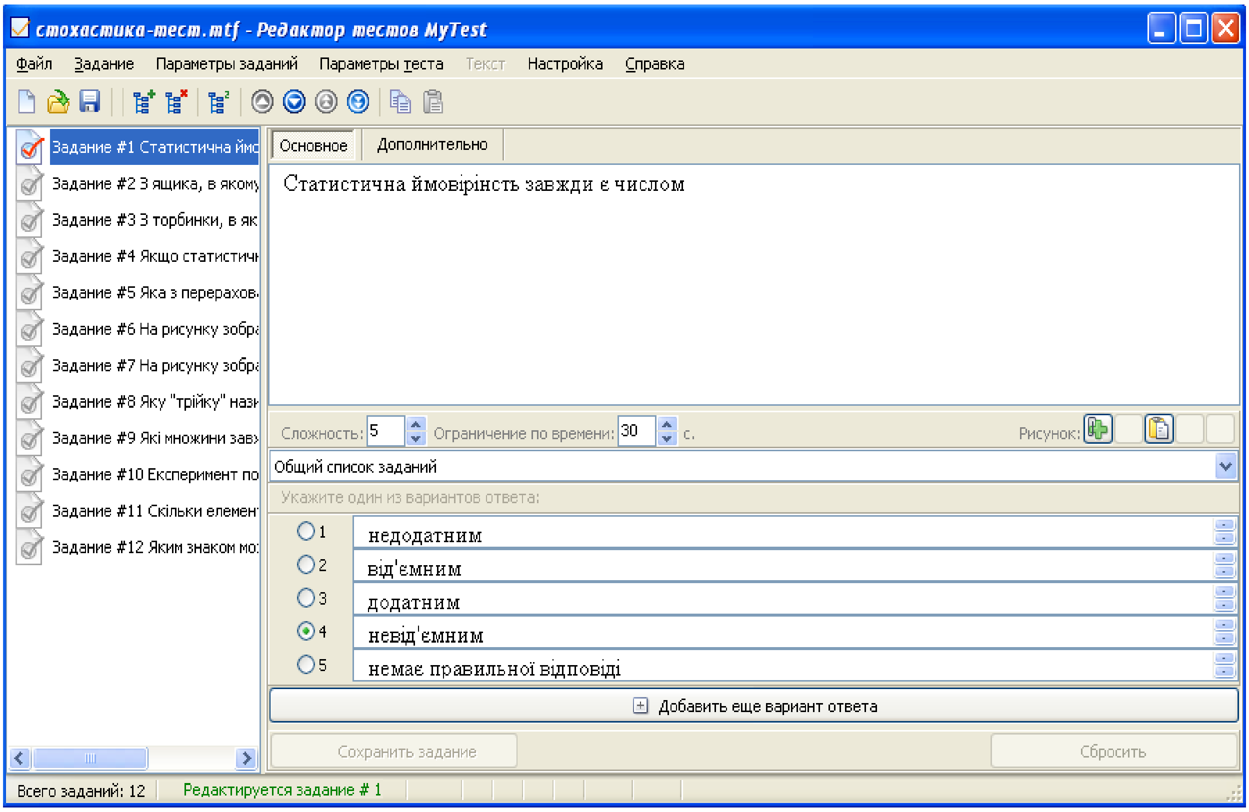


Рис. 2.31. Вікно для створення тестового завдання в контрольно-діагностичній системі MyTest X

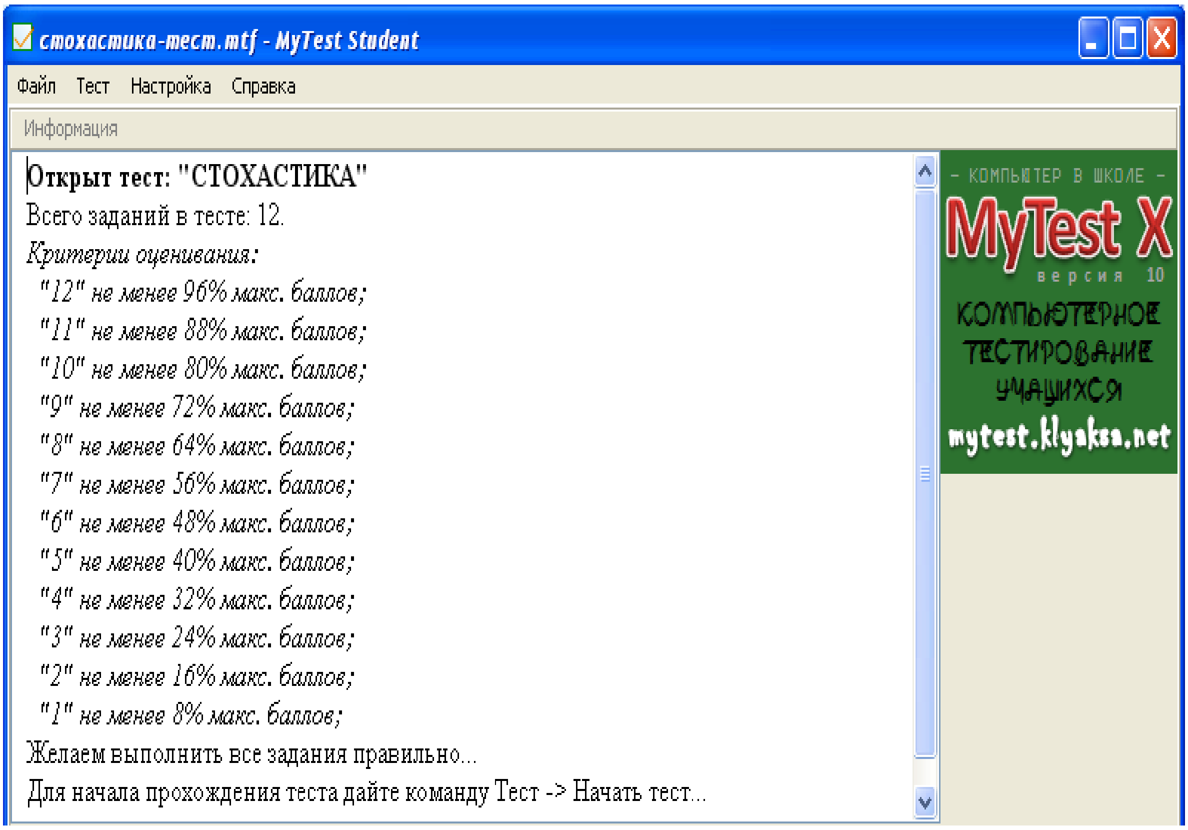


Рис. 2.32. Вікно початку тестування в контрольно-діагностичній системі MyTest X

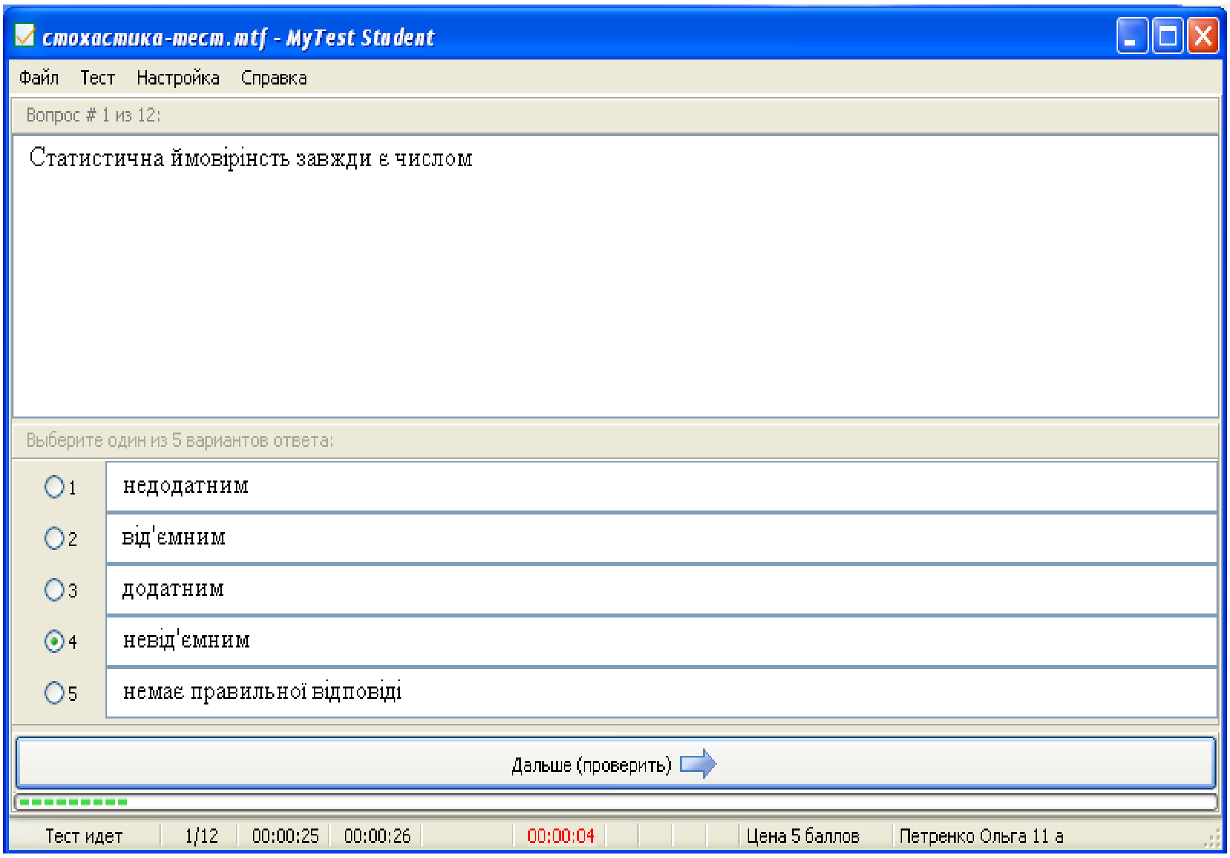


Рис. 2.33. Вікно тестування в контрольно-діагностичній системі MyTest X

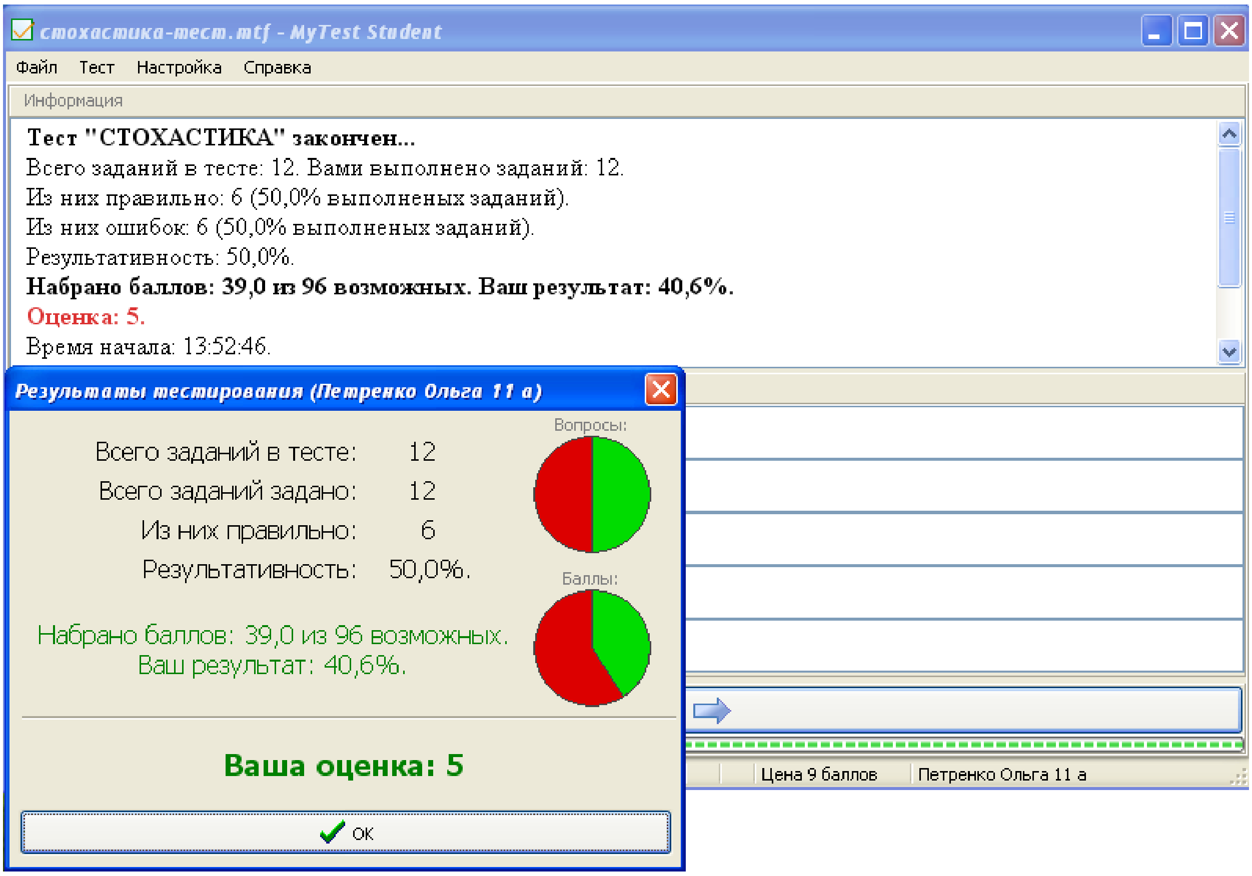


Рис. 2.34. Результати тестування в

контрольно-діагностичній системі MyTest X

2.7. Організація та методика проведення педагогічного експерименту та його результати

З метою визначення ефективності запропонованої комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики в основній та старшій школі було проведено педагогічний експеримент, який було здійснено в три етапи.

На першому – **констатувальному етапі** (2003-2005 роки) – було проведено аналіз існуючих методик навчання математики в старших класах, теоретичного та задачного матеріалу зі шкільного курсу математики; було досліджено рівень стохастичних знань учнів; визначено індивідуально-особистісні, соціальні, психофізіологічні, характерологічні, мотиваційні та інші фактори впливу на формування стохастичної культури учнів; було оцінено знання старшокласників із стохастики на основі аналізу анкетного матеріалу, оцінкових шкал, даних спостережень і тестування.

Аналіз результатів констатувального етапу педагогічного експерименту забезпечив можливість зробити висновки про невисокий рівень знань старшокласників із стохастики, про наявність в учнів труднощів під час розв'язування задач різного типу, особливо задач з прикладним змістом, нестандартних та творчих завдань, задач на побудову стохастичних моделей різноманітних об'єктів і явищ.

Під час **пошукового етапу** педагогічного експерименту (2005-2007 роки) було проаналізовано шляхи та напрями вдосконалення процесу розвитку стохастичної культури учнів при навчанні математики в основній та старшій школі; проаналізовано міжпредметні та внутріпредметні зв'язки; вивчено досвід вітчизняних та зарубіжних науковців і педагогів щодо введення елементів стохастики до шкільних програм; визначено зміст та складність навчального матеріалу; розроблено систему задач та вправ, методику реалізації індивідуального підходу у навчанні елементів стохастики в основній та старшій школі; проведено аналіз на придатність і адаптованість до шкільного навчального процесу різноманітних комп'ютерно-орієнтованих засобів, призначених для підтримки навчання елементів стохастики, а також прогноз щодо впливу їх впровадження та використання на розвиток стохастичної культури школярів; розроблено методичні рекомендації використання комп'ютера при навчанні елементів стохастики в школі; добирався програмний, тематичний і задачний матеріал для проведення експериментального навчання, урізноманітнення методів та прийомів навчання у зв'язку із застосуванням відповідних комп'ютерних програм, під час розгляду яких було проведено експерименти з комп'ютерними моделями математичних об'єктів тощо.

Метою **формувального етапу** педагогічного експерименту (2007-2009 роки) було перевірити на практиці ефективність розроблених та уточнених компонентів комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики (мети, змісту, форм, засобів і методів), спрямованої на розвиток стохастичної культури учнів під час навчання математики, порівняти результати та наслідки навчально-пізнавальної діяльності учнів, яких навчали за традиційною методикою, та тих, хто був задіяний в експериментальному навчанні, в якому було використано комп'ютерно-орієнтовану методичну систему навчання елементів стохастики.

Добір експериментальних і контрольних груп здійснювався випадковим чином, при проведенні експерименту було виконано всі вимоги щодо застосування статистичних методів опрацювання результатів педагогічних досліджень: всі вибірки були однорідними та незалежними. Єдиною відмінністю була методична система навчання елементів стохастики.

Уроки в експериментальних групах проводили з використанням комп'ютерно-орієнтованої методичної системи, розробленої під час пошукового етапу даного дослідження, а в контрольних – за традиційною методикою навчання елементів стохастики. Експериментом було охоплено шість експериментальних груп (по дві групи 6, 9 і 11 класів). Аналогічним чином симетрично було дібрано контрольні групи. Загальна кількість учнів, що навчалися за експериментальною методикою – 183 учні (відповідно 61 учень шостих, 58 учнів дев'ятих і 64 учні одинадцятих класів), а контрольна група складалася зі 177 учнів (відповідно 56 учнів шостих, 59 учнів дев'ятих і 62 учні одинадцятих класів). Уроки в експериментальних групах проводилися в школах №248, №293 м. Києва, в кабінетах, оснащених комп'ютерами.

Перед початком експериментальної перевірки запропонованої методичної системи навчання елементів стохастики в кожній з груп за результатами попередніх бесід з вчителями, проведених контрольних робіт (Додаток Ж) було визначено відсоткові показники кількості учнів, що належали до основних груп успішності. Виявилось, що в експериментальних групах розподіл відбувся так: на рівні 1-3 балів зафіксовано 5% (10 учнів), на рівні 4-6 балів – 51% (93 учні), на рівні 7-9 балів – 40% (72 учні), а на рівні 10-12 – 4% (8 учнів). У контрольних групах статистичні дані виявились такими: на рівні 1-3 балів зафіксовано 7% (12 учнів), на рівні 4-6 балів – 51% (90 учні), 7-9 балів – 37% (66 учнів), а 10-12 балів – 5% (9 учнів) (табл. 2.27).

Щоб переконатися в тому, що до початку експериментального навчання рівень успішності учнів у експериментальній групі не вище, ніж у контрольній, було висунуто гіпотезу H_o, яка містила це твердження. Перевірку її здійснено з використанням критерія Колмогорова-Смірнова.

Таблиця 2.27

Результати контрольної роботи проведеної до експерименту

Оцінка	Кількість учнів з експериментальної групи	Кількість учнів з контрольної групи
1-3	10	12
4-6	93	90
7-9	72	66
10-12	8	9
Об’єм вибірки	n_1=10+93+72+8=183	n_2=12+90+66+9=177

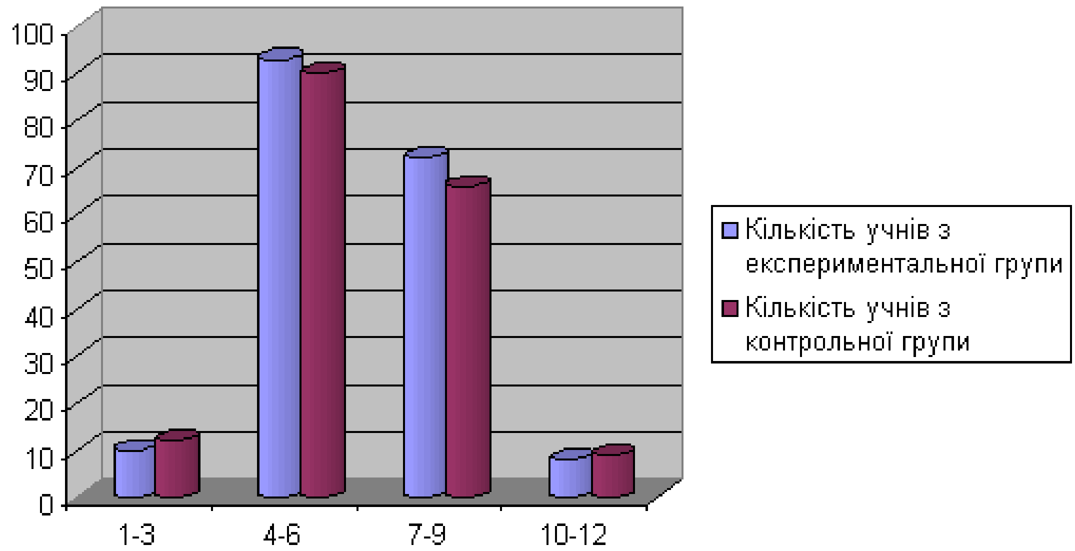


Рис. 2.35. Діаграма розподілу учнів в експериментальній та контрольній групах до проведення експериментального навчання

Після обчислення відносних частот *f*, рівних частці від ділення частот на об’єм вибірки, для двох наявних вибірок, визначимо модуль різниці відповідних відносних частот для контрольної та експериментальної вибірок. В результаті вихідна таблиця набуває наступного вигляду (табл. 2.28).

Таблиця 2.28

Відносні частоти оцінок до проведення експерименту

Відносна частота оцінок експериментальної групи ($f_{експ}$)	Відносна частота оцінок контрольної групи ($f_{контр}$)	Модуль різниці частот $\lvert f_{експ} - f_{контр} \rvert$
10/183 ≈ 0,054	12/177 ≈ 0,068	0,014
93/183 ≈ 0,508	90/177 ≈ 0,508	0
72/183 ≈ 0,393	66/177 ≈ 0,373	0,02
8/183 ≈ 0,044	9/177 ≈ 0,051	0,007

Серед отриманих модулів різниць відносних частот найбільший позначаємо через d_{max}. Отже, 0 < 0,007 < 0,014 < 0,02, тому d_{max}= 0,02.

Емпіричне значення критерію $\lambda_{емп}$ визначають за допомогою формули:

$$\lambda_{емп} = d_{max} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \qquad (2.1)$$

Порівняємо експериментальне значення критерію з його критичним значенням, що визначається за спеціальною таблицею [367], виходячи з рівня значущості α. При цьому нульову гіпотезу слід прийняти в тому випадку, якщо спостережене значення критерію не перевищує його критичного значення.

$$\lambda_{емп} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{183 \cdot 177}{183 + 177}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{32391}{360}} \approx 0{,}189$$

Вважаючи, що $\alpha=0{,}05$, за таблицею визначається критичне значення критерію: $\lambda_{кр}(0{,}05)=1{,}36$. Отже, $\lambda_{кр}=1{,}36>0{,}189= \lambda_{емп}$. Тому немає причин вважати гіпотезу H_o такою, що суперечить статистичним даним, отже можна стверджувати, що рівень успішності у експериментальній групі не вище, ніж рівень успішності у контрольній групі.

В процесі подальшого дослідження в експериментальних групах було проведено уроки математики за запропонованою методичною системою.

Результати експериментального навчання перевірено за наслідками проведення контрольних робіт (Додаток Д). Результати проведення контрольної роботи подано у табл. 2.29 і на діаграмі (рис. 2.36), в якій у першому стовпчику містяться інтервали отриманих учнями оцінок, у другому та третьому стовпчиках відповідно кількість учнів з експериментальних та контрольних груп, що отримали оцінки з відповідного інтервалу.

Таблиця 2.29

Результати контрольної роботи проведеної після експерименту

Оцінка	Кількість учнів з експериментальної групи	Кількість учнів з контрольної групи
1–3	4	11
4–6	80	98
7–9	86	62
10–12	15	6
Об’єм вибірки	n_1=6+90+76+11=183	n_2=11+98+62+6=177

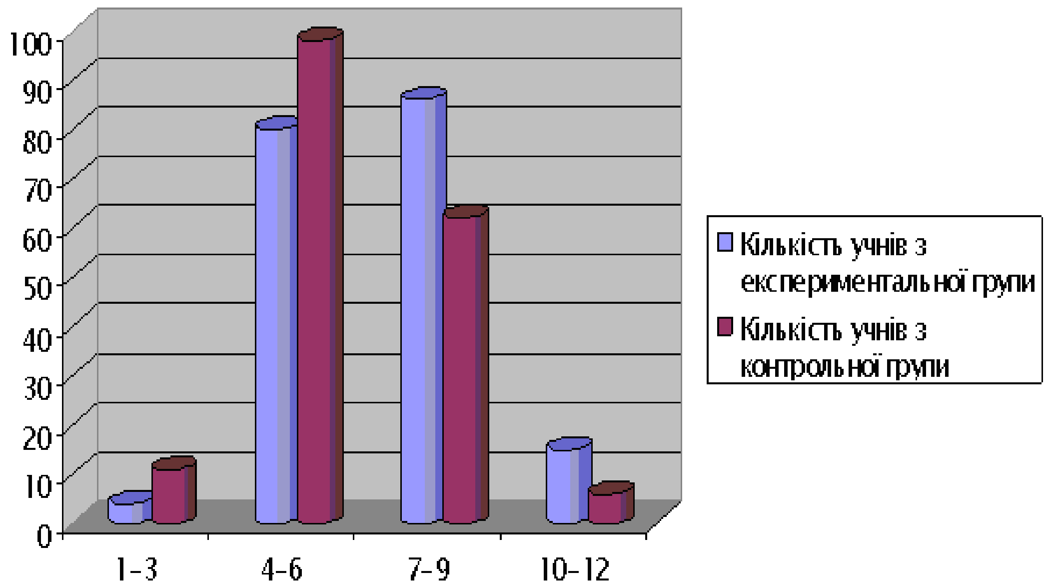


Рис. 2.36. Діаграма розподілу учнів в експериментальній та контрольній групах після проведення експериментального навчання

Для аналізу отриманих статистичних даних застосовуємо критерій Колмогорова-Смірнова, оскільки всі вимоги, необхідні для його використання, виконуються [99, с.110].

Нульова гіпотеза H_o: рівень успішності учнів у експериментальній групі не вище за рівень успішності в контрольній групі. Альтернативна гіпотеза H_1 – рівень успішності учнів у експериментальній групі вище за рівень успішності в контрольній групі.

Заповнимо таблицю 2.30, в яку занесемо значення відносних частот кожної з вибірок, значення виразів, за якими визначимо значення d_{max}.

Таблиця 2.30

Результати контрольної роботи проведеної після експерименту

Відносна частота оцінок експериментальної групи ($f_{експ}$)	Відносна частота оцінок контрольної групи ($f_{контр}$)	Модуль різниці частот $\lvert f_{експ} - f_{контр}\rvert$
4/183 ≈ 0,021	11/177 ≈ 0,062	0,041
80/183 ≈ 0,437	98/177 ≈ 0,553	0,116
86/183 ≈ 0,470	62/177 ≈ 0,350	0,120
15/183 ≈ 0,082	6/177 ≈ 0,034	0,048

Серед отриманих модулів різниць відносних частот вибираємо найбільший модуль, який позначаємо d_{max}. Отже, 0,041< 0,048< 0,116< 0,120, тому d_{max}= 0,120.

Емпіричне значення критерія $\lambda_{емп}$ визначено за допомогою формули (2.1). Щоб зробити висновок про ефективність запропонованої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики порівняємо експериментальне значення критерію з його критичним значенням.

$$\lambda_{емп} = 0{,}120\sqrt{\frac{183177}{183+177}} = 0{,}120\sqrt{\frac{32391}{360}} \approx 10{,}797$$

При рівні значущості α=0,05, критичне значення критерія: $\lambda_{кр}=1{,}36$.

Оскільки $\lambda_{емп} =10{,}797>1{,}36= \lambda_{кр}$, то висунута гіпотеза H_o відхиляється на рівні значущості α і приймається альтернативна гіпотеза про те, що рівень успішності учнів в експериментальній групі вищий за рівень успішності в контрольній групі.

Слід відзначити, що кількість учнів з низьким (1-3) і середнім (4-6) рівнями успішності зменшилася, зросла кількість учнів з достатнім (7-9) і високим (10-12) рівнями успішності.

Таким чином, результати опрацювання статистичних даних, зібраних наприкінці проведення експериментального навчання, свідчать про ефективність запропонованої комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики.

Враховуючи відомий в теорії науки висновок про те, що дослідження рівня знань необхідно проводити неодноразово, аналогічні, але менш тривалі «контрольні зрізи» були проведені ще двічі протягом експериментального навчання, а їх наслідки забезпечили можливість простежити хронологію розвитку в учнів знань з елементів стохастики.

Дослідження знань з елементів стохастики у учнів були проведені не лише під час контрольних робіт. Ефективність методичної системи перевірена за результатами виконання учнями домашніх завдань, які були дібрані з врахуванням рівневої диференціації учнів та орієнтовані на розвиток у них стохастичної культури. Порівнювалися також методи розв’язування багатьох проблемних задач; також було оцінено вплив педагогічно доцільного використання в навчальному процесі засобів навчання на розвиток знань учнів зі стохастики.

Підведення підсумків проведеного дослідження та комплексний аналіз даних, отриманих внаслідок цього, уможливили визначення кількісних показників знань учнів, що заново розподілились за основними групами успішності (табл. 2.31, рис. 2.37).

Таблиця 2.31

Процентні показники кількості учнів експериментальних груп, що належать до різних груп успішності

Рівень успішності	Процентні показники та кількість учнів до проведення експерименту	Процентні показники та кількість учнів після проведення експерименту
Низький (1-3 бали)	5% (10 учнів)	3% (4 учнів)
Середній (4-6 балів)	51% (93 учні)	49% (80 учнів)
Достатній (7-9 балів)	40% (72 учні)	42% (86 учнів)
Високий (10-12 балів)	4% (8 учнів)	6% (15 учнів)

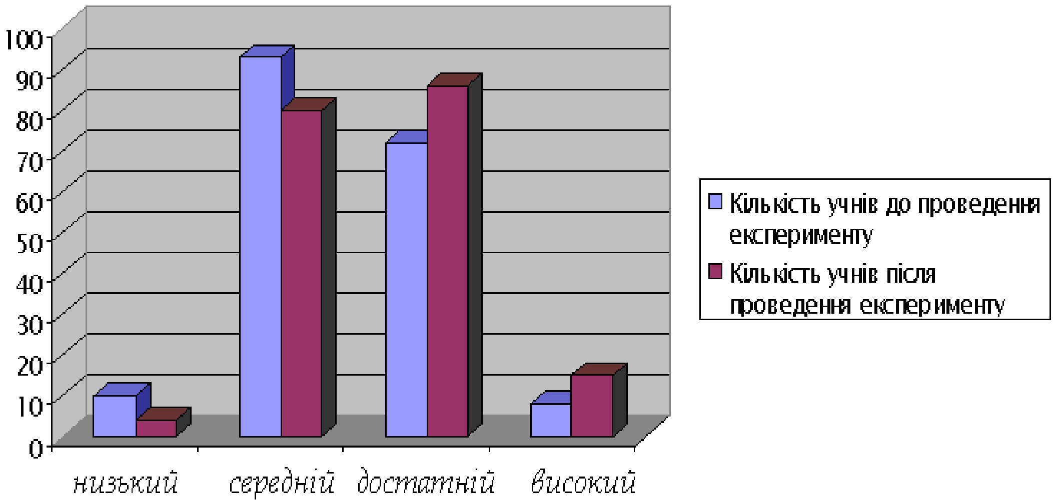


Рис. 2.37. Діаграма розподілу учнів за рівнями успішності в експериментальній групі до та після проведення експерименту

Практика впровадження в шкільне навчання засобів сучасних інформаційно-комунікаційних технологій і їх використання в процесі навчання учнів елементів стохастики підтверджує припущення, що здатність розв’язувати стохастичні задачі повинна розвиватися у учнів шляхом цілеспрямованого включення їх у творчо-інтелектуальну діяльність з урахуванням рівня успішності кожного учня окремо, з тенденцією до постійного ускладнення задач, збільшення вимог, перевірок математичних здогадок, прогнозів, висунутих гіпотез, передбачень, унаочнення експериментальних досліджень на основі ІКТ, використання знань зі стохастики при розв’язуванні прикладних задач.

Висновки до другого розділу

Було розглянуто основні компоненти комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики в школі.

Метою навчання елементів стохастики в школі є формування в учнів навичок первинного опрацювання статистичних даних, аналіз кількісних характеристик різноманітних випадкових явищ.

Завдання навчання елементів стохастики:

1) підвищити рівень стохастичної культури школярів;

2) подати у систематизованій формі теоретичні відомості про статистичні ймовірності, розподіли статистичних ймовірностей, опрацювання статистичних даних;

3) ознайомити учнів з елементами історії розвитку стохастики;

4) підвищити рівень інформаційно-комп'ютерної підготовки учнів шляхом використання ІКТ у навчальному процесі;

5) сформувати у учнів навички самостійної роботи з педагогічними програмними засобами.

Зміст навчання елементів стохастики:

- (5-6 класи): формування на інтуїтивному рівні поняття випадкової події, порівняння шансів настання тих чи інших подій на основі інтуїтивних міркувань, на статистичній основі, за допомогою геометричних міркувань; збирання, реєстрація статистичних даних, подання їх у вигляді діаграм, таблиць; читання таблиць і діаграм; проведення статистичних експериментів і спостережень;
- (7-9 класи): формування поняття випадкового експерименту і випробування та їх результати, випадкової події; обчислення статистичних ймовірностей настання випадкових подій; первинне опрацювання й аналіз статистичних даних; графічне подання розподілів статистичних ймовірностей; вибіркові характеристики (середнє арифметичне, мода, медіана);

- (10-11 класи): формування на вищому рівні поняття випадкового експерименту і випробування та їх результати, випадкова подія; операції над подіями та їх основні властивості; статистична ймовірність події та її основні властивості; статистичні ймовірності суми та добутку подій, незалежність подій; дискретний і неперервний розподіли статистичних ймовірностей; числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей; поняття випадкової величини; поняття про закон великих чисел.

Засоби навчання:

- традиційні (навчальні посібники, підручники, дидактичні матеріали, наочні засоби навчання);
- комп'ютерно-орієнтовані (комп'ютер, табличний процесор Excel, педагогічний програмний засіб GRAN1).

Методи навчання (за джерелом здобуття знань):

- традиційні (вербальні: розповідь, пояснення, бесіда, наочні: діаграми, слайди, відеофільми, спостереження, практичні: виконання вправ, розв'язування доцільно дібраних задач);
- комп'ютерно-орієнтовані (опрацювання відомостей, отриманих у мережі Інтернет, робота з навчально-контролюючими програмами, створення презентацій).

Форми організації навчання:

- традиційні: лекції, семінари, тестування;
- комп'ютерно-орієнтовані: комп'ютерно-орієнтована лекція, комп'ютерно-орієнтовані уроки математики, комп'ютерне тестування.

1. На основі констатувального експерименту встановлено, що за традиційної системи навчання забезпечено недостатні можливості для ефективного формування знань, умінь та навичок зі стохастики учнів, які мають досить різний рівень підготовки.

2. Включення в шкільний курс математики елементів стохастики є одним з найважливіших аспектів модернізації змісту математичної освіти на

сучасному етапі, коли в життя стрімко ввійшли референдуми та соціологічні опитування, кредити та страхові поліси, різноманітні банківські нарахування та політичні дослідження тощо.

3. Бурхливий розвиток інформатики та інформаційно-комунікаційних технологій загострюють перед освітою завдання розширення практики використання новітніх технологій навчання, сприяють вдосконаленню методики навчання у багатьох педагогічних дослідженнях останніх років, особливу увагу приділяють розробці шляхів формування мислення, цілеспрямованого розвитку інтелектуального рівня, навчанню прийомів пізнавального пошуку, до якого відносять: аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, конкретизацію, класифікацію, систематизацію тощо. Впровадження в педагогічну практику інформаційно-комунікаційних технологій посідає особливе місце у формуванні зазначених вище якостей у учнів.

4. Педагогічно доцільне, виважене та методично обґрунтоване впровадження ІКТ у навчальний процес уможливлює підвищення ефективності управління навчальною діяльністю учнів, відкриваючи нові можливості для розвитку творчого потенціалу учнів, диференціації й індивідуалізації навчання, полегшуючи запам’ятовування навчального матеріалу. Водночас розкриваються широкі дидактичні можливості щодо розвитку пізнавальної активності учнів, умінь та навичок самостійної пізнавальної діяльності.

5. Використання запропонованих компонентів комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики гарантує підвищення рівня знань, умінь та навичок учнів.

Основні результати ІІ розділу висвітлено в роботах [187, 188, 190, 191, 195].

ВИСНОВКИ

В пропонованій комп’ютерно-орієнтованій методичній системі навчання елементів стохастики в школі реалізовано підхід, при якому:

1) не використовується «класичне» означення ймовірності,

2) вивчається лише один спосіб введення поняття ймовірності: за допомогою статистичних ймовірностей (відносних частот). Оскільки статистична ймовірність $P^*_n(A)$ є ймовірнісною мірою, бо задовольняє аксіоми 1_p–3_p, то, по суті, вивчаючи статистичні ймовірності, учні вивчають і елементи теорії ймовірностей, і елементи математичної статистики, а не окремо елементи теорії ймовірностей і окремо елементи математичної статистики, як це пропонується в традиційному шкільному курсі математики,

3) запропонований підхід є потужною пропедевтикою до вивчення курсу теорії ймовірностей на аксіоматичній основі, відмовившись від некоректних означень ймовірності («класичного», «геометричного», «статистичного» тощо),

4) рекомендоване педагогічно виважене використання ІКТ, що розширює можливості подання навчального матеріалу; повторення тих тем, які конкретний учень засвоїв на недостатньому рівні; орієнтації на кожного учня особисто, а не на «середнього», як це зазвичай робиться при традиційній класно-урочній системі; використання різноманітних тестових завдань; звільнення від громіздких рутинних обчислень.

В ході проведеного дисертаційного дослідження вирішені всі поставлені на початку дослідження завдання. Результати проведеного теоретичного й експериментального дослідження дають підстави зробити наступні висновки:

1. В школі можна не вивчати загальне поняття ймовірності, яке коректно можна означити лише аксіоматично, а досить вивчати елементи стохастики, обмежившись лише статистичними ймовірностями. Це буде потужною пропедевтикою для подальшого вивчення теорії ймовірностей на аксіоматичній основі. Означення статистичної ймовірності (відносної

частоти) події цілком доступне та зрозуміле учням, не вимагає аксіоматичного введення, разом з тим задовільняє аксіоми щодо ймовірності (ймовірнісної міри), що легко випливає з означення статистичної ймовірності.

2. В результаті проведення педагогічного експерименту підтверджено доцільність запропонованої комп'ютерно-орієнтованої методичної системи навчання елементів стохастики в основній та старшій школі. Доцільно спиратися на прогресивні форми навчально-пізнавальної діяльності, засновані на педагогічно виваженому та доцільному використанні ІКТ, що привносить в навчальний процес високий рівень проблемності, тенденції розвитку дослідницьких вмінь і навичок учнів, підвищення рівня креативності їхнього мислення. Поєднуючи колективні, групові й індивідуальні форми навчання, різні форми самостійної роботи учнів, можна значно підвищити ефективність уроків з математики в старших класах, що допоможе учням подолати соціальні, педагогічні та психологічні бар'єри, які виникатимуть в процесі навчання.

3. Одним з ефективних шляхів підвищення рівня знань зі стохастики учнів є використання в шкільному навчальному процесі комп'ютерно-орієнтованих систем навчання, модельних експериментів з математичними об'єктами, досліджень різноманітних математичних тверджень, проблем, розв'язування цікавих, творчих задач, завдань з прикладною спрямованістю, з життєвої практики, зі споріднених навчальних предметів.

4. Педагогічно виправдано й обґрунтовано використовуючи комп'ютерну техніку на уроках зі стохастики в основній та старшій школі, можна створити сприятливі умови для розвитку в учнів ймовірнісної інтуїції, оригінальності та нешаблонності стохастичного мислення, закладених природою задатків і творчих здібностей, своєрідних і неповторних способів вирішення різноманітних проблем, кмітливості та винахідливості.

5. Використання в процесі навчання стохастики комп'ютерного супроводу, що забезпечує вчителю можливість диференційовано підходити

до процесу навчання кожного учня окремо, сприяє створенню комфортних умов для розвитку інтелектуальних механізмів творчої діяльності учнів, для розкриття талантів і творчого потенціалу учнів і вчителя.

6. Проведене дослідження не претендує на остаточне розв'язання проблеми навчання елементів стохастики в школі в умовах використання інформаційно-комунікаційних технологій навчання. Його результати сприяють визначенню деяких напрямів подальших досліджень, зокрема:

- створити збірник задач, які можна пропонувати учням для розв'язування на уроках стохастики з використанням комп'ютерно-орієнтованої системи навчання,
- визначити шляхи вдосконалення використання існуючих програмних продуктів у навчальному процесі, зокрема, при навчанні елементів стохастики,
- впровадити в курс методики навчання математики у вищих педагогічних навчальних закладах теорію та практику використання в шкільному навчальному процесі програмного забезпечення, призначеного для підтримки та супроводу навчально-творчої діяльності школярів при навчанні всіх розділів математики, в тому числі елементів стохастики,
- впровадити в курс методики навчання математики вищого педагогічного закладу освіти методику навчання елементів стохастики з використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Задачі зі стохастики

1. Що з перерахованого точно станеться; може статися, може не статися; не станеться ніколи:

а) з ящика, в якому всі яблука червоні, дістали зелене яблуко;

б) при підкиданні грального кубика випало 8 очок (на кубику нанесено числа від 1 до 6);

в) в січні температура повітря в Україні +30 °С;

г) при підкиданні грального кубика випало 1 очко (на кубику нанесено числа від 1 до 6);

д) випаде цифра при підкиданні монети;

е) випало парне число очок на гральному кубику (на кубику нанесено числа від 1 до 6);

є) з ящика, в якому зелені та жовті яблука, дістали жовте яблуко.

2. Що з перерахованого точно станеться; може статися, може не статися; не станеться ніколи:

а) політ людини на Юпітер;

б) виросте дуб висотою 10 м;

в) хоч один день на рік у Києві йтиме дощ;

г) Ви отримаєте 12 балів на одному з уроків математики протягом навчального року;

д) завтра настане весна;

е) через рік Вас оберуть Президентом України.

3. Що може, а що не може статися одночасно:

а) навмання вибраний учень Вашого класу є спортсменом і музикантом;

б) випаде 1 і 6 очок при одному підкиданні кубика;

в) дістали і червоне, і жовте яблуко при діставанні одного яблука;

г) мат і пат при грі в шахи.

4. З мішка фокусника багаторазово діставали одну кульку з поверненням і з’ясували, що статистична ймовірність діставання зеленої повітряної кульки $\frac{40}{100}$, жовтої $\frac{25}{100}$, червоної $\frac{35}{100}$. Яка статистична ймовірність того, що при діставанні з мішка навмання кульки, вона буде червоною чи зеленою (не жовтою)?

5. У ящику фокусника 3 рожеві, 3 зелені, 3 сині стрічки. Він дістає 4 стрічки одну за одною. Чи можливо, щоб всі вони були одного кольору? Дістає 5 стрічок. Чи можуть серед них бути стрічки всіх трьох кольорів?

6. Які з наступних пар подій є несумісними:

а) мат і пат при грі в шахи;

б) йде сніг та дощ;

в) шах і мат при грі в шахи;

г) навмання вибране натуральне число від 1 до 99 буде кратним 3 і 5.

7. Чи будуть протилежними наступні події:

а) натуральне число (від 1 до 100) є парним і непарним;

б) натуральне число (від 1 до 100) кратне 2 і 5.

8. Вкажіть протилежні події до наступних подій:

а) при підкиданні монетки випав герб;

б) натуральне число (від 1 до 100) кратне 3.

9. Нехай **Ω**= *{ЯГ, ГЯ, ГГ, ЯЯ}*= *{E_1, E_2, E_3, E_4}* – простір елементарних подій, що відповідає одночасному діставанню 2 фруктів з ящика, в якому є лише яблука і груші, причому $P^*_n(E_k)=\frac{1}{4}$, $k=\overline{1,4}$. Подія А полягає в діставанні груші першою. Подія В – в діставанні груші другою.

а) чи залежні події А та В;

б) чи можна ймовірнісну міру задати так, щоб А та В стали залежними (незалежними);

в) чи існує така подія С, щоб А, В і С були незалежними в сукупності.

10. Вписати в кожне речення одне зі слів (можливо, неможливо, напевне, малоймовірно), що найбільше підходить за змістом:

а) ..., що весною тепліше, ніж зимою.

б) ..., що один з Ваших однокласників стане вчителем.

в) …, що протягом семестру Ваш клас поїде на екскурсію.

г) …, що Ви полетите завтра на Місяць.

11. З набору ручок (червоні, сині, зелені, чорні) діставали з поверненням одну ручку 10 раз. Якими можуть бути при цьому абсолютні та відносні частоти появи зеленої ручки?

12. З набору кольорового паперу (10 різнокольорових аркушів) діставали навмання 10 раз по одному аркушу та повертали його у набір. Якими можуть бути абсолютні та відносні частоти появи червоного аркушу паперу?

13. З ящика, в якому знаходяться мандарини, апельсини, ківі, яблука, груші дістають навмання 5 раз якийсь один фрукт з поверненням. Якими можуть бути абсолютні і відносні частоти появи яблука?

14. Для даного експерименту вказати множину елементарних подій:

а) діставання однієї кульки з коробки, в якій лежать сині, жовті, червоні кульки;

б) фіксація місця, яке спортсмен виборов у змаганнях, в яких бере участь 20 спортсменів;

в) фіксація класу, в якому навчається навмання вибраний учень школи;

г) діставання олівця з коробки, в якій лежать олівці кольорів веселки.

15. Учні повинні записати кількість сторінок книг, що є в їх домашній бібліотеці, і потім на уроці переконатися, що всі цифри (від 0 до 9) зустрічаються приблизно однаково часто у зафіксованих числах.

16. Побудувати можливі простори S випадкових подій, що відповідають просторам Ω елементарних подій. Ω – множина можливих наслідків експерименту, що полягає в:

а) діставанні яблука з ящика, в якому лежать великі та маленькі яблука;

б) діставанні плода з ящика, в якому лежать лимони, мандарини, ківі;

в) фіксації кольору автомобіля, що проїжджає по трасі;

г) фіксації розміру взуття покупця взуттєвого магазину.

17. Учні отримують завдання – виміряти свою вагу. На уроці всі разом знаходять середню вагу учнів свого класу.

18. Підкинути дома кубик 50 разів і порахувати, скільки разів випаде кожне число. Записати результат в зошит. В класі підрахувати, скільки досліджень проведено всіма учнями класу. Знайти відносну частоту випадання кожного числа.

19. Обрати один абзац будь-якого тексту. Підрахувати загальну кількість голосних і приголосних літер в тексті. Знайти відносну частоту появи голосних та приголосних.

20. На основі оцінок учнів класу за контрольну з математики скласти частотну таблицю та побудувати стовпчасту діаграму, а також поміркувати, яка з числових характеристик розподілу частот (мода, медіана чи середнє арифметичне) найкраще характеризують результати написання цієї контрольної роботи.

21. В наборі з восьми чисел 12, 16, 16, 24, 28, 28, __, 32 пропущено число. Знайдіть його, якщо відомо,

а) що середнє арифметичне набору чисел дорівнює 26,

б) що розмах вибірки дорівнює 36,

в) що мода дорівнює 28 і вона одна.

22. З’ясувати улюблений вид спорту учнів класу та побудувати відповідну стовпчасту діаграму.

Таблиця А.1

Вид спорту	Кількість учнів
Футбол	
Баскетбол	
Фігурне катання	
Художня гімнастика	
Легка атлетика	
Плавання	
Акробатика	

23. В табл. А.2 подано відносну частоту середнього балу учнів класу за I семестр.

Таблиця А.2

Середній бал	менше 4	не менше 4, але менше 7	не менше 7, але менше 9	9 і більше
Відносна частота, %	2	40	44	16

Побудувати кругову діаграму, що ілюструє розподіл частот середнього балу учнів класу за I семестр.

24. Відомо, що учні класу, при здачі нормативу з фізкультури присіли: 15; 15; 23; 26; 35; 19; 14; 18; 25; 31; 25; 15; 18; 35; 26; 15; 12; 28; 30; 20; 16; 15; 23; 36; 27; 19; 14; 25; 16; 27 раз. Побудуйте таблицю розподілу частот. Знайдіть скільки разів в середньому присідають учні даного класу.

25. Учні записують цифрами число та місяць свого народження. Знаходять суму всіх цифр і повідомляють вчителю. Всі суми вчитель записує на дошці (можна помітити, що мінімальна сума дорівнює 2 (01.01), а максимальна – 20 (29.09). Далі знаходять різницю між максимальним і мінімальним значенням (18), ділять цей проміжок на 6 однакових інтервалів, складають таблицю та будують стовпчасту діаграму.

26. Скласти лінійчату діаграму для графічного подання підсумків за І семестр з математики, попередньо поділивши оцінки на чотири інтервали, а також для кожної оцінки окремо, якщо відомо, що 1, 2, 3, 11 і 12 балів ніхто не отримав, 4 і 10 балів по 3 учні, 5 і 9 балів по 4 учні, 6, 7 і 8 балів по 5 учнів.

27. В табл. А.3 показано кількість автомобілів, зареєстрованих з 2000 року по 2009 рік у Деснянському районі міста Києва.

Таблиця А.3

Рік	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Кількість автомобілів	625	645	790	780	750	730	810	850	760	930

Побудувати полігон, що ілюструє реєстрацію автомобілів за вказаний період часу. Користуючись полігоном:

а) охарактеризувати динаміку зміни реєстрації кількості автомобілів.

б) вказати два роки, що слідують один за одним, де відбувається значне збільшення кількості автомобілів.

28. Взяли ящик морозива і з'ясували, що вага кожної окремої порції морозива відрізняється від норми на: 7; 5; -1,5; 10; 2,5; -3,5; 1,5; 4,5; 10; 4,5; 3; 7,5; 1; 1,5; -2,5; 2; 1,5; -1; 0; 6; 0; -5,5; 0,5; -1; 1,5; 2,5; -3,5; 5,5; -1; 4; -5; 1,5; 2 грами. Побудуйте таблицю розподілу частот. Знайти на скільки грамів в середньому відрізняється вага порції морозива від норми.

29. На діаграмі стовпчастій (див. рис. А.1) подано дані про розподіл частот оцінок за контрольну роботу з математики. Користуючись діаграмою, знайти:

Рис. А.1. Стовпчаста діаграма «Результати контрольної роботи»

а) кількість учнів, що отримали оцінку від 1 до 3 балів,

б) групу, до якої належить більшість оцінок,

в) загальну кількість учнів, що писали контрольну роботу.

30. Побудувати варіаційний ряд і накреслити полігон розподілу частот для віку 100 людей, які мешкають в одному будинку, поділивши всі дані на 10 вікових груп: 41, 15, 23, 17, 40, 2, 47, 39, 34, 29, 40, 56, 37, 42, 15, 26, 32, 41, 15, 46, 42, 34, 76, 90, 54, 40, 23, 17, 92, 72, 44, 41, 23, 45, 31, 27, 43, 49, 39, 14, 12, 4, 2, 43, 37, 1, 4, 3, 39, 49, 14, 13, 11, 10, 7, 42, 13, 41, 9, 7, 44, 38, 1, 4, 3, 8, 3, 2, 11, 22, 34, 31, 71, 60, 30, 13, 20, 55, 57, 70, 5, 3, 16, 19, 22, 34, 91, 34, 30, 33, 60, 54, 9, 12, 54, 87, 30, 69, 23, 17.

31. Скласти частотну таблицю місяців народження учнів свого класу (у задачі статистичну вибірку треба сформувати самостійно, провівши необхідні обчислення). У цій задачі досліджують дискретний розподіл статистичних ймовірностей на множині із 12 точок (12 місяців), тип даних – варіанти (згідно із запитами в програмі GRAN1). Ця величина може набувати значення з певної дискретної множини. Обсяг вибірки – 30 учнів.

32. У табл. А.4 наведено зріст учнів 2-х класів. Накреслити полігон розподілу частот.

Таблиця А.4

Зріст, см	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
n	1	3	4	6	4	5	6	7	6	5	4	4	3	1	1

33. У магазині вивчали попит на фрукти, позначаючи: А — ананас, Я — яблуко, К — ківі, П — апельсин, Б — банан, М – мандарин, Г – груша. Для того, щоб з'ясувати, які фрукти користуються найбільшим попитом, записувати придбані фрукти й отримали такий набір даних: К, Г, П, Г, М, Я, К, Я, П, М, П, Я, К, Я, Я, К, П, Я, П, М, К, Я, Б, Я, Б, Я, М, П, Я, Я, А, А, К, Г, П, А, Г, П, Г, Я, А, Г, П, Я, П, К, П, А, Г, Я, П, К, Я, Г, К, П, А, Я, Я, Я, М, Г, М, П, К, К, А, Я, Г, П, Я, Б, Г, Б, Я. Складіть таблицю відносних частот придбаних фруктів. Який фрукт цього дня користувався найбільшим попитом, який — найменшим? Як це зобразити графічно? Який відсоток складають апельсини? Які ще висновки можна зробити за отриманими результатами?

34. У перехожих на вулиці цікавилися, якій політичній партії вони надають перевагу (позначимо їх № 1, № 2, № 3, № 4 і № 5). І отримали такі дані: 1, 4, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 4, 3, 2, 4, 3, 5, 3, 2, 1, 4, 2, 5, 5, 5, 3, 2, 1, 4, 3, 3, 1, 3, 4, 1, 1, 4, 4, 5, 3, 5, 2, 3, 4, 3, 5, 2, 1, 2, 3, 5. Побудуйте інтервальний розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) і гістограму. Якій політичній партії надають перевагу? Як це визначити? На які ще запитання можна відповісти за результатами розв'язування задачі? Сформулюйте їх.

35. На конкурсі з'ясовували який з 10 співаків (кожному було надано конкурсний номер від 1 до 10) має отримати приз глядацьких симпатій. Для цього опитували глядачів і отримали такі дані: 1, 2, 7, 6, 4, 1, 1, 3, 6, 8, 4, 2, 8, 1, 2, 4, 6, 7, 2, 1, 10, 9, 5, 6, 2, 10, 1, 2, 7, 10, 9, 6, 7, 8, 1, 2, 1, 1, 3, 4, 5, 8, 3, 2, 10, 1, 2, 10, 9, 6, 8, 1, 2, 5, 9, 6, 4, 1, 2, 7, 10, 1, 2, 2, 10, 9, 4, 7, 1, 2, 1, 2, 6, 5, 8,

2, 1, 3, 10, 5, 6, 8, 10, 1, 4, 7, 8, 4, 6, 10, 6, 8, 4, 1, 4, 5, 10, 4, 6, 1, 2, 5, 1, 4, 7, 4, 8, 9, 5, 3, 1, 2, 8, 1, 2, 10, 7, 5, 3, 4, 4, 1, 2, 6, 7, 9, 8, 1, 2, 1, 3, 2, 6, 7, 4, 6, 8, 9, 3, 2, 1, 10, 5, 4, 5, 6, 8, 9, 9, 2. Складіть таблицю відносних частот номерів співаків. Який співак отримає приз? Як це зобразити графічно? Який відсоток віддав перевагу переможцю? Які ще висновки можна зробити за отриманими результатами?

36. У пологовому будинку намагалися з'ясувати середній зріст немовлят. Отримали такі дані (в см): 51, 55, 54, 53, 54, 54, 41, 52, 49, 54, 53, 53, 56, 55, 53, 43, 54, 54, 53, 52, 51, 53, 54, 53, 54, 54, 51, 56, 52, 57, 54, 53, 58, 57, 53, 56, 54, 51, 55, 49, 54, 55, 55, 53, 57, 56, 52, 54, 41, 54, 46, 45, 54, 53, 54, 53, 54, 56, 54, 59, 54, 52, 55, 51, 54, 53, 55, 54, 56, 56, 52, 54, 57, 51, 52, 53, 53, 54, 58, 48, 43, 56, 53, 52, 53, 55, 54, 54, 56, 58, 54, 54. Побудуйте інтервальний розподіл частот і гістограму, поклавши спочатку $k=3$, а потім $k=6$. Визначте числові характеристики моди та медіани та поясність їх зміст. Що спільного в побудованих гістограмах і яка між ними різниця?

37. Побудувати варіаційний ряд спостережуваних значень, що відповідає спостережуваним відхиленням точки потрапляння дротиком в дартсі від центру мішені на відстань 1, 3, 5, 6, 2, 4, 7, 6, 4, 3, 4, 5, 6, 6, 3, 2, 1, 4, 3, 1, 4, 5, 6, 3, 2, 2, 3, 2, 1, 4 см.

38. Побудувати многокутник розподілу статистичних ймовірностей (полігон відносних частот) появи спостережених значень досліджуваної величини, якщо задано розподіл відносних частот (табл. А.5).

Таблиця А.5

x_i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
n_i	1	3	7	10	15	20	15	12	10	5	2

Для даного розподілу побудувати графік функції $F_n^*(x)$

39. Побудувати гістограму неперервного розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на сукупності інтервалів довжиною 1, якщо в таблиці зазначені центри цих інтервалів і частоти потрапляння в них (табл. А.6).

Таблиця А.6

-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
2	7	15	18	30	35	28	25	20	9	1

Для даного розподілу побудувати графік функції F_n^*(x).

40. При визначенні похибки вимірювань певного приладу зроблено 100 вимірювань, в яких зафіксовано похибки: 1,5; 2,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; -1,5; 2,5; 0; -1; 1,5; -2; 1,5; 2,5; 0; -1; -1,5; -0,5; 2; -1,5; -2,5; 0; 1; 1,5; -0,5; 2; -1,5; 2,5; 0; -1; 1,5; 2; 0,5; 1,5; -2,5; 0; -1; 1,5; -0,5; 2; -1,5; -2,5; 0; 1; 1,5; 2; -1,5; 2,5; 0. Побудувати інтервальний розподіл статистичних ймовірностей і гістограму, поклавши кількість відрізків поділу рівною 5.

41. Кількість покупців, що приходять до супермаркету протягом доби випадкова. Спостереження протягом доби дали такі результати (табл. А.7).

Таблиця А.7

Години	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Кількість	124	102	134	245	247	249	342	359	459	527	493	327

Побудувати полігон частот. Знайти середнє арифметичне та середнє квадратичне відхилення для досліджуваної величини.

ДОДАТОК Б

Слайди презентації на тему «Історія розвитку стохастики» та коментарі до них

Рис. Б.1

Рис. Б.2

1. Стохастичні ідеї ще не отримують статусу науки, але відбувається активне накопичення фактичного матеріалу. Такі математики як Л. Пачолі (1445-1514), Н. Тарталья (1500-1557), Д. Кардано (1501-1576) формулюють деякі ймовірнісні задачі, пов'язані з азартними іграми та страхуванням.

Цей період закінчується працями Н. Тарталья «Загальний трактат про число та міру», Г. Галілея «Про випадання очок при грі у кості». У цих працях фігурує поняття ймовірності, використовують і теорему про ймовірність добутку незалежних подій, висловлюють міркування щодо так званого закону великих чисел.

Взагалі уявлення про стохастику та підрахунок сприятливих комбінацій при грі в кості можна зустріти ще в «Божественній комедії»

Данте. Більш-менш строгий аналіз випадкових явищ можна зустріти у Луко Пачолі, який присвятив цьому аналізу свій трактат за назвою «Сума знань з арифметики, геометричних відношень і пропорційності». Ось приклади двох «незвичайних» задач з нього.

1. Компанія грає в м'яч до 60 очок і робить ставку в 22 дукати. Гра не може бути продовжена, причому одна сторона в цей момент має 50 очок, інша – 30. Яку частину загальної ставки повинна отримати кожна сторона?

2. Троє змагаються в стрільбі з арбалету. Хто отримає 6 очок, той виграє. Ставка 10 дукатів. Перший влучив 4 рази, другий 3, а третій – 2, вони не хочуть продовжувати змагання та вирішили поділити приз. Якою повинна бути частка кожного?

Рис. Б.3

За 10 років після смерті відомого філософа Б.Спінози (1632-1677) було опубліковано його працю «Замітки про математичну ймовірність», де вперше йшлося про математичну ймовірність, хоча саме поняття не введене.

2. Сучасна стохастика бере свій початок з відомого листування Б.Паскаля і П.Ферма у другій половині XVII ст. В своєму листуванні вони дійшли висновку, що задачу оцінювання щасливих ставок в азартних іграх можна було б звести до задач математичної теорії комбінацій і розміщень.

К. Гаус розвинув теорію найменших квадратів і використав властивості нормальної кривої (кривої Гауса), щоб отримати метод виключення похибки спостережень, які вимагали високого ступеня точності при їх здійсненні. Похибка спостереження при вимірюванні кутів і відстаней, наприклад, мала велике значення в його геодезичних дослідженнях, що являли спробу емпіричного вирішення питання про те, чи є фізичний простір евклідовим. Ф. Гальтон був більше зацікавленим не в істинному значенні деякої величини, а в мірі мінливості, притаманної процесам розвитку, що спричинило розвиток так званого регресійного аналізу.

3. Серед досягнень та відкриттів найвидатнішими є досягнення П. Лапласа (1749-1827) та С. Пуассона (1781-1840), які «затьмарили всіх

своїх попередників». Наукові результати цих вчених та теореми, які стали називати їх іменами, займають центральне місце у розвитку теорії ймовірностей. Головною працею С.Д. Пуассона в галузі теорії ймовірностей стала «Дослідження ймовірностей судових вироків у кримінальних та цивільних справах», в якій подано теорему, пов'язану з законом розподілу ймовірностей. В своїй роботі «Про ймовірність середніх результатів спостережень» (1832) використав поняття випадкової величини, хоча сам термін не ввів.

П.Лаплас і С.Д.Пуассон зробили спробу узагальнення та систематизації існуючих на той час стохастичних ідей. Це уможливило широке застосування науково обґрунтованих методів теорії ймовірностей в різноманітних галузях досліджень (демографія, теорія стрільби, теорія похибок, страхування, проведення лотерей, азартних ігор тощо). В своїх роботах вони припускали певні помилки, які стосувалися необґрунтованого поширення застосувань теорії ймовірностей. П.Лаплас вважав історію суспільства галуззю, в якій панує «сліпий випадок », а всі закономірності будь-якої галузі масових явищ повністю можна описати нормальним законом (так назвав А. Пуанкаре теорему П. Лапласа). С.Д. Пуассон вважав, що всі явища морального і фізичного порядку підпорядковані універсальному закону – закону великих чисел. А.Пуанкаре та С.Д. Пуассон вважали природним застосовувати теорію ймовірностей до юриспруденції, політичних і суспільно-економічних явищ.

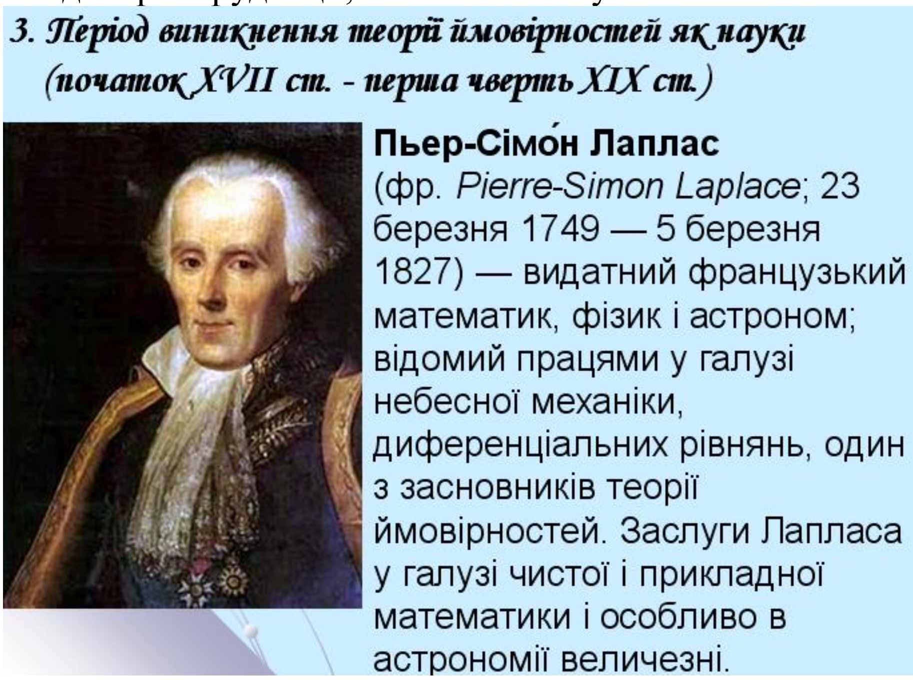


Рис. Б.4

Одними з перших дослідників у теорії ймовірностей та математичної статистики як науки були швейцарські математики Я.Бернуллі (1654-1705), М.Бернуллі (1687-1759), Д. Бернуллі (1700-1782) та Л.Ейлер (1707-1783). Я. Бернуллі написав книгу «Мистецтво припущень», де наводить біноміальний розподіл ймовірностей та закон великих чисел. М. Бернуллі своєю працею «Досвід застосування мистецтва припущень до правових питань» (1711) продовжив працю Я.Бернуллі, застосовував імовірнісні поняття, ідеї та методи до оцінювання показань свідків, підрахунку ренти, страхування життя та товарів. Д. Бернуллі першим висунув ідею застосування нескінченно малих до задач теорії ймовірностей. Головна його робота у галузі теорії ймовірностей «Досвід дослідження застосування числення нескінченно малих у мистецтві припущень».

А.Муавр продовжив роботу Д.Бернулі, зробив значний поштовх для розвитку стохастики, написавши трактати: «Про міру випадку» (1711 рік), «Доктрина шансів» (1718, 1738, 1756 роки) та «Аналітичні етюди» (1730 рік), в яких приділив значну увагу задачі про розорення гравця (грають, доки один не розориться).

Англійський математик Т. Байєс написав працю «Досвід розв'язування однієї задачі про випадок», яка була видана у 1763-1764 роках. У ній, зокрема, наведено частинний випадок формули, яку пізніше назвали його ім'ям, і розглянуто поняття несумісності випадкових подій.

У 1777 році французький математик Ж.де Бюффон навів перший приклад «геометричної ймовірності». Його задача про голку надавала можливість експериментально знайти число π. Ж.де Бюффон використовував також елементи теорії ймовірностей до обґрунтування власної гіпотези походження планет сонячної системи як результату зіткнення Сонця з кометою, що привело його до розвитку поняття ймовірності.

Т.Сімпсон (1710-1761), А.М. Лежандр (1752-1833), К.Ф. Гаусс (1777-1855) розробили теорію похибок. Результати дослідження пов'язані з застосуванням нормального розподілу ймовірностей (артилерія, біологія).

Велику роль у поширенні ідей стохастики в Росії та в Україні відіграли видатні російські математики українського походження В.Я. Буняковський (1804-1889) та М.В.Остроградський (1801-1862).

4. Закон великих чисел після Д.Бернулі досліджував майже через 150 років П.Л. Чебишов (1821-1894).

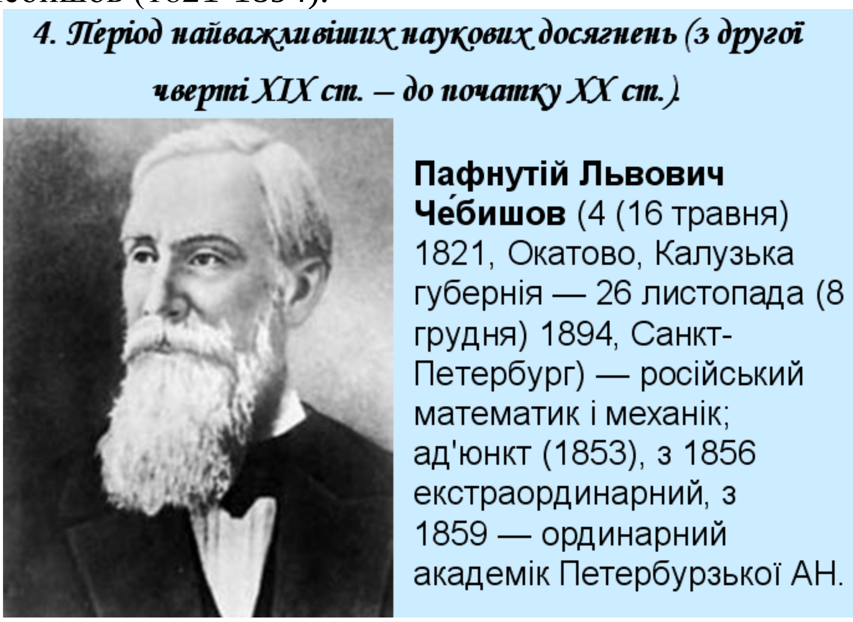


Рис. Б.5

Серед інших досягнень цього періоду варто згадати роботу Ж.Д`Аламбера (1717-1783) «Герб чи цифра».

Е. Борель (1871-1956) досліджував зв'язок теорії ймовірностей з теоріями міри та множин. С.Н. Бернштейн (1880-1968) запропонував першу систему аксіом теорії ймовірностей. А. Ломницький (1881-1941) побудував варіант теоретико-множинної аксіоматики теорії ймовірностей.

Якщо на самому початку її появи, фактично майже до кінця XVIII ст., основний інтерес являло дослідження ймовірності, то вже в XIX ст. центр ваги було перенесено на дослідження випадкових величин. Однак, саме це поняття формувалося дуже тривалий час, і його елементи можна зустріти вже в роботах Х. Гюйгенса. Пізніше випадковими величинами переймалися А.Муавр, Д. Бернуллі, П.Лаплас, А. Лежандр, К. Гаусс.

Праці М.В. Остроградського з теорії ймовірностей були присвячені розв'язуванню важливих практичних задач, стверджував: «необхідно теорію ймовірностей не лише викладати, як науку абстрактну, а й переходити якомога частіше до різноманітних її застосувань».

Четвертий період ознаменовано тріумфом Петербурзької математичної школи, провідна роль в якій належить П.Л. Чебишову (1821-1894) і його учням, А.А. Маркову (1856-1922), А.М. Ляпунову (1857-1918), Г.Ф. Вороному (1868-1908) та ін.

Як вважає відомий математик Б.В. Гнєденко (1912-1995), захоплення теорією ймовірностей у першій чверті XIX ст. привело до величезної кількості праць, пов'язаних із застосуванням теорії до різних проблем природничих наук та суспільного життя. Багато з цих застосувань були мало обґрунтованими та сприймалися як «математичні скандали». Потім це захоплення змінилося глибоким розчаруванням і повним скептицизмом щодо застосування теорії ймовірностей до наукового пізнання світу.

Рис. Б.6

5. Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уточнення основних її положень. Потрібно було встановити предмет теорії ймовірностей, галузі її застосування, а також вивчити та підсилити її специфічні методи досліджень. Велику роботу у цьому напрямку і провів

П.Л. Чебишов, який зробив помітний внесок у розвиток багатьох розділів математики, зокрема, і у теорію ймовірностей. Курс стохастики, який він читав у Петербурзькому університеті, відрізнявся не лише чіткістю формулювань, але й обґрунтованістю доведень тверджень. Ця недоречність була усунута на початку XX ст. завдяки працям багатьох математиків. Зокрема, значну роль відіграли представники англо-американської школи У. Госсет (Стьюдент) (1876-1937), Е. Пірсон (1895-1980) та Е. Нейман (1894-1981), завдяки працям яких була створена теорія статистичної перевірки гіпотез.

У XX ст. теорія ймовірностей поступово була перетворена у строгу аксіоматичну теорію. Це відбулося завдяки працям російського математики А.М. Колмогорова та англійського математика Р. Фішера (1890-1962), який розвинув статистичний або емпіричний підхід до формування поняття ймовірності. Поняття простору елементарних подій ввів німецький математик Р. Мізес (1883-1953). С.Н. Бернштейн (1880-1968) у 1917 році надрукував роботу «Досвід аксіоматичного обґрунтування теорії ймовірностей», а у 1927 році видав книгу «Теорія ймовірностей», в якій подав власну аксіоматичну теорію ймовірностей. Цю книгу вважають однією з найкращих серед творів світової літератури з теорії ймовірностей.

К. Вінер (1894-1964), Віто Вольтерра (1860-1940) розробили математичну теорію біологічних популяцій на базі детерміністичних міркувань. Пізніше ряд математиків і біологів розвинули їх ідеї на базі стохастичних уявлень. Теорію броунівського руху, що базувалася на теоретико-ймовірнісних передумовах, розглянув А. Ейнштейн (1879-1955) і М. Смолуховський (1872-1917) у 1905 році.

Ставало неможливим користуватися невизначеними поняттями та здійснювати важливі наукові та практичні розрахунки без строгої математичної теорії. І така теорія була створена значною мірою завдяки зусиллям А.М. Колмогорова, О.Я. Хінчина (1894-1959), Є.Є. Слуцького (1880-1948) та інших математиків. Глибокі теоретико-функціональні основи для побудови теорії ймовірностей закладені А.М. Колмогоровим в його знаменитій монографії «Основні поняття теорії ймовірностей». Великі досягнення у теорії ймовірностей та математичної статистики на цьому етапі мали також російські математики О.Я. Хінчин, Є.Є. Слуцький, В.А. Стєклов та багато інших, а також українські математики Б.В. Гнєденко, Й.І. Гіхман (1918-1985), Ю.М. Єрмольєв (1936), І.М. Коваленко (1935), В.С. Королюк (1925), В.С. Михалевич (1930-1994), А.В. Скороход (1930), А.Ф.Турбін (1940), М.Й. Ядренко (1932-2005) та інші.

Додаток В

Таблиця В.1

Тематичний план з розділу «Елементи стохастики» (11 клас)

№ теми	Назва теми	Кількість годин
1	Стохастичний експеримент. Простір елементарних подій.	1
2	Операції над подіями.	1
3	Простір подій.	1
4	Розв’язування задач. Самостійна робота № 1.	1
5	Статистична ймовірність події.	1
6	Ймовірнісні простори.	1
7	Умовна статистична ймовірність. Ймовірність добутку подій. Залежні та незалежні події.	1
8	Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса.	1
9	Розв’язування задач. Самостійна робота № 2.	1
10	Поняття дискретного розподілу статистичних ймовірностей.	1
11	Поняття неперервного розподілу статистичних ймовірностей.	1
12	Щільність розподілу статистичних ймовірностей.	1
13	Розв’язування задач. Самостійна робота № 3.	1
14	Функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей.	1
15	Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей.	
16	Числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей.	1
17	Числові характеристики неперервного розподілу статистичних ймовірностей.	1
18	Розв’язування задач. Підготовки до контрольної роботи.	1
19	Підсумкова контрольна робота.	1
20	Узагальнення та систематизація знань з теми.	1

Додаток Г

Тестові завдання

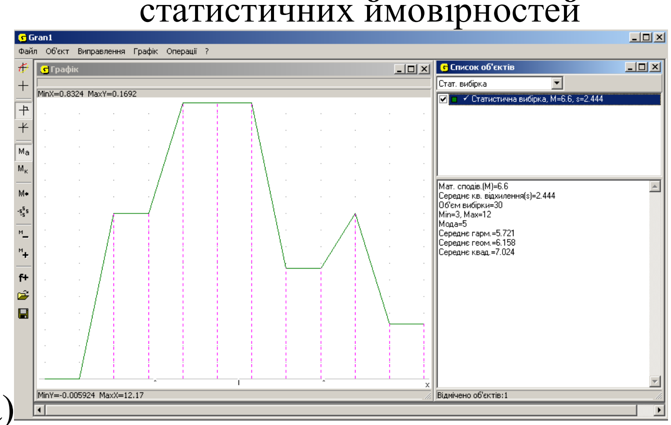
1. З ящика, в якому лежать яблука та груші дістають навмання 10 раз з поверненням один фрукт. Якими можуть бути абсолютні частоти появи яблука:

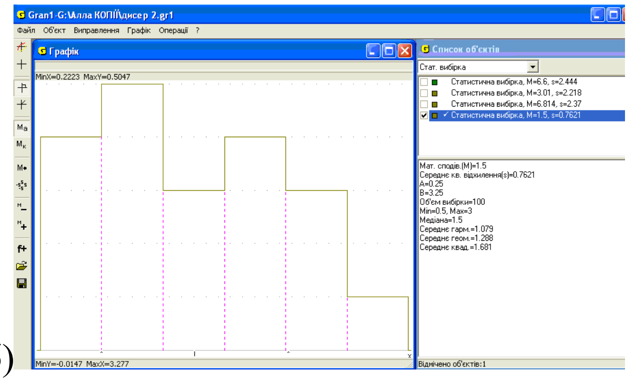
а) від $\frac{1}{10}$ до $\frac{10}{10}$; Б) від $\frac{5}{10}$ до $\frac{1}{10}$;
в) від 11 до 20; Г) від 1 до 10.

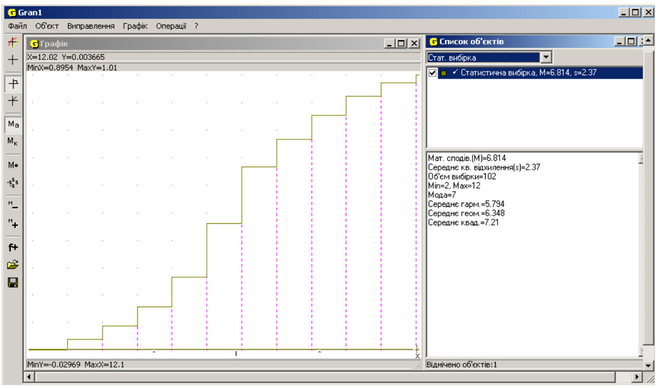
2. З торбинки, в якій знаходяться зелені, жовті та сині повітряні кульки, навмання діставали з поверненням одну кульку 5 раз. Якими можуть бути відносні частоти появи кульки зеленого кольору:

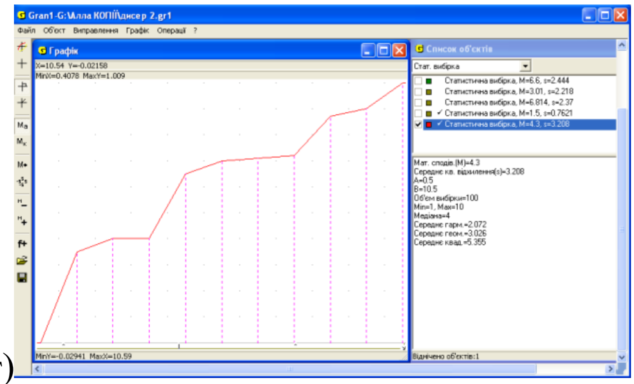
а) від $\frac{1}{2}$ до $\frac{10}{5}$; Б) від $\frac{1}{5}$ до $\frac{5}{5}$;
в) від 1 до 5; Г) від 1 до 2.

3. На якому з рисунків зображено гістограму неперервного розподілу статистичних ймовірностей


а)


б)


в)


г)

4. Якщо $P_n^*(A)=1$, то подія А:

а) вірогідна; б) неможлива.

5. Яка з перерахованих властивостей є властивістю статистичних ймовірностей:

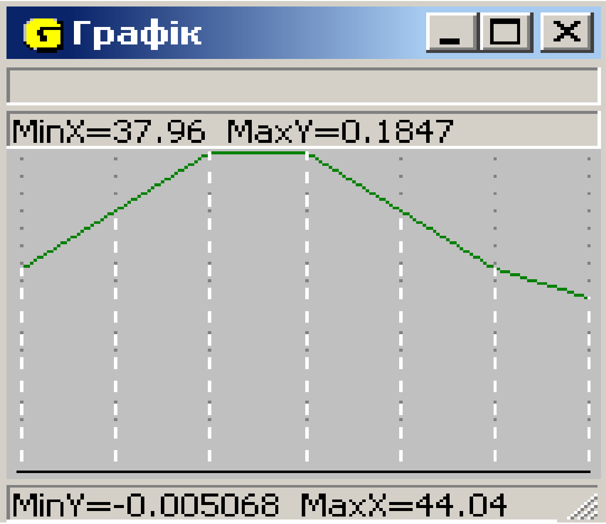
а) $P_n^*(A)\geq 0$; б) $P_n^*(A)\geq 10$.

6. Статистична ймовірність $P_n^*(A)$ події A може набувати значення з проміжку:

а) [0; 1] в) [1; 2)
б) (-1; 0) г) (1; 100]

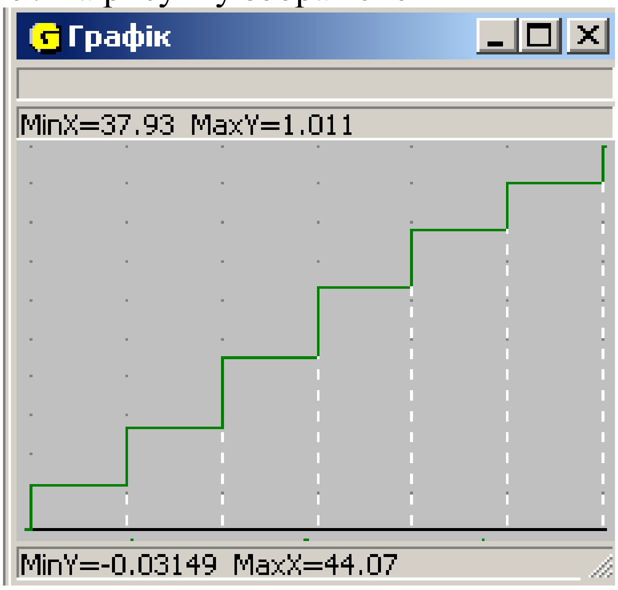
7. На честь якого науковця названа система аксіом теорії ймовірностей:
а) О.Я. Хінчина;
б) А.А. Маркова;
в) А.М. Колмогорова;
г) М.Й. Ядренка.

8. На рисунку зображено



а) полігон відносних частот;
б) графік функції $F_n^*(x)$;
в) гістограму неперервного розподілу статистичних ймовірностей;
г) графік функції $f_n^*(x)$.

9. На рисунку зображено



а) полігон відносних частот;
б) графік функції $F_n^*(x)$;
в) гістограму неперервного розподілу статистичних ймовірностей;
г) графік функції $f_n^*(x)$.

10. Яку «трійку» називають ймовірнісним простором:
а) (Ω, S, P_n^*);
б) $(\varnothing, A, \Omega)$
в) (P_n^*, Ω, A);
г) $(\varnothing, \Omega, P_n^*)$.

11. Статистична ймовірність завжди є числом:
а) недодатним;
б) від'ємним;
в) додатним;
г) невід'ємним.

12. Експеримент полягає в підкидання монетки один раз і фіксації грані, якою вона впаде догори. Яка множина є простором елементарних подій:
а) $\Omega=\{1, 2, 5, 10, 25\}$;
б) $\Omega=\{Г, Ц\}$;
в) $\Omega=\{ГГ, ЦЦ, ГЦ, ЦГ\}$;
г) $\Omega=\{Г, Ц, Р, З\}$.

13. Яким знаком можуть позначати суму подій:
а) /;
б) $\cap$;
в) $\cup$;
г) +.

14. A і B називають несумісними, якщо:

а) AB≠0;
в) A/B=$\varnothing$;
б) AB=$\varnothing$;
г) B/A=$\varnothing$.

15. A+$\overline{A}$=:

а) Ω;
в) A;
б) $\varnothing$;
г) $\overline{A}$.

16. A ·Ω=:

а) $\overline{A}$;
в) A;
б) $\varnothing$;
г) Ω.

17. A+A=:

а) $\varnothing$;
в) $\overline{A}$;
б) A;
г) Ω.

18. A ·$\varnothing$=:

а) A;
в) Ω;
б) $\overline{A}$;
г) $\varnothing$.

19. Які множини завжди будуть подіями для будь-якого простору S випадкових подій:

а) A і B;
в) Ω і $\varnothing$;
б) A і $\overline{A}$;
г) S і $\overline{S}$.

20. Скільки елементів може містити простір S, якщо відповідний йому простір Ω елементарних подій містить один елемент:

а) 1;
в) 2 або 3;
б) 2 або 3;
г) 4.

21. Як прийнято позначати протилежну подію до події A:

а) $\overline{A}$;
в) $\overleftarrow{A}$;
б) $\overline{\overline{A}}$;
г) $\underline{\underline{A}}$.

Додаток Д

Можливі завдання для контрольної роботи

1. З ящика, в якому знаходяться сині, білі та рожеві хустини, 100 раз діставали 1 хустину та повертали її назад. При цьому з’ясувалося, що синю хустину діставали 50 разів, білу – 37, а рожеву – 13. Яка статистична ймовірність того, що при діставанні з ящика навмання хустини, вона буде білою? не синьою?

2. Учні класу, при здачі нормативу з фізкультури віджалися: 35; 25; 23; 26; 35; 19; 24; 28; 25; 11; 25; 25; 28; 35; 26; 35; 22; 28; 20; 21; 19; 15; 23; 16; 17; 19; 14; 32; 16; 22 рази. Побудувати таблицю розподілу відносних частот. Скільки раз в середньому віджимаються учні даного класу?

3. При вимірюванні ваги кожної окремої упаковки чіпсів з’ясували, що вона відрізняється від норми на: 3; 2; -1,5; 1; 2; -1,5; 1,5; 0,5; 1; 0,5; -1; 1,5; 1; 1,5; -0,5; 0,5; 0,5; -1; 0; 2; 0; -1,5; 0,5; -1; 1,5; 0,5; -1,5; 1,5; -1; 2; -1; 1,5; 2 грами. Побудувати таблицю розподілу відносних частот. Побудувати варіаційний ряд і накреслити полігон розподілу частот. На скільки грамів в середньому відрізняється вага упаковки чіпсів від норми?

4. Побудувати гістограму неперервного розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на сукупності інтервалів довжиною 1, якщо в табл. Д.1 зазначені центри цих інтервалів і частоти потрапляння в них:

Таблиця Д.1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9	12	15	28	32	29	27	24	20	3

Для даного розподілу побудувати графік функції F_n^*(x).

Додаток Е

Зразки завдань зовнішнього незалежного оцінювання 2007-2009 років

1. Лучник здійснив 11 пострілів по мішені та набрав відповідно 6, 5, 7, 9, 6, 9, 10, 8, 7, 9, 10 очок. Знайти моду цього ряду даних.
2. У лотереї 10 виграшних білетів і 290 білетів без виграшу. Яка ймовірність того, що перший придбаний білет цієї лотереї буде виграшним?
3. У туриста є 10 однакових за розмірами консервних банок, серед яких 4 – з тушкованим м’ясом, 6 – з рибою. Під час зливи етикетки відклеїлися. Турист навмання взяв одну банку. Яка ймовірність того, що вона буде з рибою?
4. З натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30?
5. Група студентів з 15 осіб написала контрольну роботу з вищої математики. Оцінки, отримані студентами за виконання контрольної роботи, виявилися такими: 4, 2, 4, 4, 5, 3, 3, 4, 5, 3, 5, 3, 4, 4, 3. Укажіть полігон частот, що відповідає цьому ряду даних (рис. Е.1).

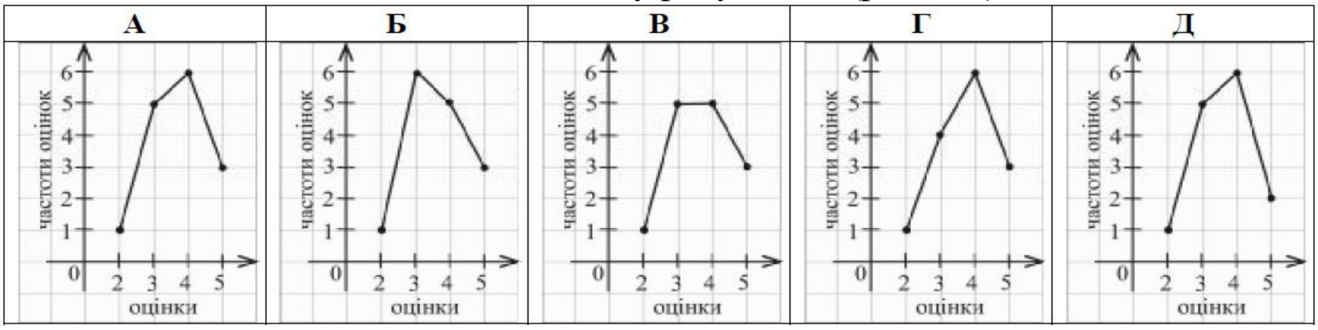


Рис. Е.1

6. Серед учнів одного класу проведено опитування щодо кількості книг, прочитаних ними під час літніх канікул. Результати цього опитування подано в таблиці (*X* – кількість книг, прочитаних учнем за канікули, *M* – кількість учнів, які прочитали таку кількість книг). На якому з указаних полігонів правильно проілюстровано заданий розподіл частот?

Таблиця Е.1

X	2	3	4	6	8
M	12	6	3	1	1

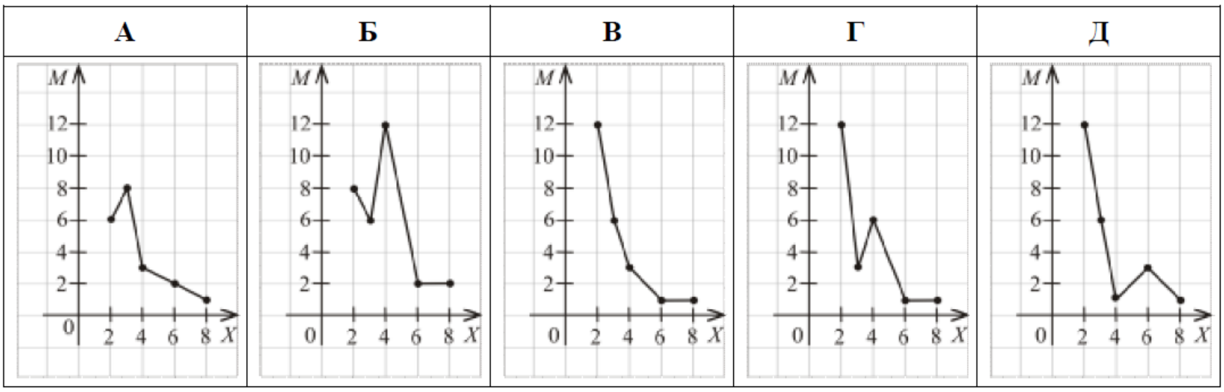


Рис. Е.2

Рис. Е.3

7. В уривку художнього твору 47 слів мають різну кількість букв. Укажіть моду даного розподілу за допомогою зображеного на рисунку полігона частот (рис. Е.3).
8. Задано 25 чисел. Серед них число 9 повторюється 12 разів, число 8 – 9 разів, число 15 − 4 рази. Знайдіть середнє арифметичне заданих чисел.
9. У коробці є 80 цукерок, з яких 44 з чорного шоколаду, а решта − з білого. Визначте ймовірність того, що навмання взята цукерка з коробки буде з білого шоколаду.
10. У скриньці знаходяться 10 білих і 16 чорних кульок. Із скриньки навмання виймають одну кульку та відкладають її у бік. Ця кулька – білого кольору. Потім зі скриньки навмання виймають ще одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька також буде білою?
11. В ящику 4 білих, 5 червоних і кілька синіх кульок. Знайдіть загальну кількість кульок в ящику, якщо ймовірність витягти навмання синю кульку дорівнює 1/4.
12. У сумці лежать яблука, серед яких 8 – червоні, решта – жовті. Знайдіть кількість жовтих яблук у сумці, якщо ймовірність витягти навмання червоне яблуко дорівнює 0,4.
13. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 22 роки. Під час гри одного з футболістів було вилучено з поля, після чого середній вік гравців, що залишилися, став дорівнювати 21 рік. Скільки років футболісту, який залишив поле?

Додаток Ж

Контрольна робота запропонована в 11 класі перед вивченням елементів стохастики

Запропоновані завдання призначені для перевірки у школярів, які не вивчали елементи стохастики готовності до вивчення цього розділу математики (зокрема, знання про функції, уявлення про множини та операції над ними, вміння знаходити середнє арифметичне, працювати з таблицями, будувати графіки функцій, упорядковувати числа).

1. Знайти об'єднання та перерізи числових проміжків:

№	Проміжки	Об'єднання	Переріз
1.	$(-9; 1)$ і $(8; +\infty)$		
2.	$(-2; 15)$ і $(4; 11)$		
3.	$(-\infty; 1)$ і $(-5; +\infty)$		
4.	$(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$		
5.	$(-7; 5)$ і $(2; 7)$		

2. Побудувати графіки функцій: а) $y = x^2 - 4x + 2$; б) $y = 5x - 2$.
3. Знайти область визначення та область значень функцій:
1) $y = -x^2 + 3x - 2$; 2) $y = \sqrt{x+3}$.
4. Записати числа у порядку зростання: $\frac{1}{2}$; 0,7; -0,4; -0,02; $\frac{1}{3}$; 0,25; $\frac{2}{5}$; -0,2; $-\frac{1}{4}$; -0,7; 0,05; $-\frac{1}{2}$; 0,35; -0,75; $-\frac{1}{20}$.
5. Знайти середнє арифметичне цілих розв'язків подвійної нерівності:
$2 < \frac{x-2}{3} - \frac{x-8}{4} < 3$.

Додаток З

АНКЕТА № 1
з питань використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі в школі (для учнів)

Мета анкети: вивчити та проаналізувати стан, проблеми та перспективи використання ІКТ в школах України

1. Чи вивчали Ви інформатику в школі?
2. Чи був у школі комп’ютерний клас? Якщо так, то чи сучасні, з Вашої точки зору комп’ютери?
3. Чи була в Вашій школі мультимедійна дошка?
4. Чи використовували вчителі під час навчання в школі ІКТ? Якщо так, то вчителі яких предметів і які програми?
5. Чи потрібно, на Вашу думку, використовувати ІКТ на уроках? Якщо так, то на яких саме?
6. Чи вмієте Ви користуватися комп’ютером?
7. Чи допомогло б Вам використання комп’ютера розвивати інтерес до навчання в школі?
8. Чи використовуєте Ви ІКТ у своїй навчальній діяльності?

Ні (вкажіть причини)		Так (вкажіть, для чого)	
Не маю доступу до комп’ютера		Створення текстових матеріалів (рефератів, курсових, дипломних робіт тощо)	
Не вмію працювати з комп’ютером		Як джерело відомостей через мережу Інтернет	
Не вважаю, що комп’ютер допомагає мені в навчанні		Для застосування при вивченні математичних дисциплін	
Ваш варіант		Ваш варіант	

9. Чи відомі Вам програми, які можна використати при навчанні математики? Якщо так, то які?

Повідомте тепер, будь-ласка, про себе

Школа №___ населений пункт ____
Рік закінчення школи ______________ Вік________________

Ваші побажання та рекомендації щодо змісту анкети та її проведення ____

ДЯКУЄМО ЗА УЧАСТЬ В АНКЕТУВАННІ !

АНКЕТА № 2
з питань використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі в школі (для вчителів)

1. Чи вивчали Ви інформатику в школі (ВНЗ)?
2. Чи був у школі (ВНЗ) комп'ютерний клас?
3. Чи потрібно, на Вашу думку, використовувати ІКТ на уроках? Якщо так, то на яких саме?
4. Оцініть рівень Вашого володіння навичками роботи з комп'ютером, а також використання його у навчальному процесі (не вмію; вмію, але не застосовую в роботі; вмію і застосовую для роботи; вмію і застосовую на заняттях).
5. Чи допомогло б Вам використання комп'ютера розвивати інтерес до навчання в школі (ВНЗ)?
6. Чи використовуєте Ви ІКТ при викладанні свого предмету?

Ні (вкажіть причини)		Так (вкажіть, для чого)	
Не маю доступу до комп'ютера		Для створення методичних та дидактичних матеріалів з дисципліни, зокрема мультимедійних	
Не вмію працювати з комп'ютером		Як джерело відомостей через Інтернет	
Не вважаю, що комп'ютер може допомогти при навчанні		Для вимірювання навчальних досягнень учнів (комп'ютерне тестування, автоматизований контроль)	
Потрібне підвищення кваліфікації з використання ІКТ у навчальному процесі		На заняттях, як інструмент розв'язування задач	
У учнів низький рівень інформаційної культури		Як засіб дистанційного навчання	
Відсутні умови для використання ІКТ у навчальному процесі		Для активізації самостійної роботи учнів	
Ваш варіант		Ваш варіант	

7. Чи відомі Вам програми, які можна використати при навчанні математики? Якщо так, то які?

Повідомте тепер, будь-ласка, деякі відомості про себе

Школа №_____ населений пункт ____
Рік закінчення школи ___________Стаж роботи__________ Вік ___________
Які предмети викладаєте?____

Ваші побажання та рекомендації щодо змісту анкети та її проведення

ДЯКУЄМО ЗА УЧАСТЬ В АНКЕТУВАННІ !

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абремский, Б.А. Расширять содержание межпредметных связей / Б.А.Абремский, И.В.Павлов // Математика в школе.– 1987.– №3.– С.29-31.
2. Авраменко, М.І. Уроки алгебри і початків аналізу в 10 і 11 класах: Посібник для вчителя / М.І. Авраменко. – К.: Рад. шк., 1989. – 319 с.
3. Агапон, Г.И. Задачник по теории вероятностей / Г.И.Агапон. – М.: Высш. шк., 1986. – 80 с.
4. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / А.М. Колмогоров, О.М. Абрамов, Ю.П. Дудніцин та ін. / За ред. А.М. Колмогорова. – К.: Освіта, 1994. – 350 с.
5. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.
6. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 384 с.
7. Алгебра: учеб. пособие для 10-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / Е.П. Кузнецова и др.; под ред. Л.Б. Шнепермана. – Минск: Нар. Асвета, 2006. – 286 с.
8. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2007. – 424 с.
9. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2007. – 424 с.
10. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 кл. В 2 ч. Ч. 1. Учебник

для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович и др. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.

11. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 кл. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 239 с.
12. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2007. – 287 с.
13. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2009. – 264 с.
14. Алгебра. 9 кл: Учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 4-е изд. – М.: Мнемозина, 2002. – 192 с.
15. Апатова, Н.В. Влияние информационных технологий на содержание и методы обучения в средней школе: Дис… д-ра пед. наук: 13.00.02. / Н.В.Апатова. – М.: НИИ СИМО, 1994. – 348 с.
16. Арлей, Н. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику // Н.Арлей, К.Бух. – М.: Изд. ин. лит., 1951. – 246 с.
17. Бабанский, Ю.К. Оптимизация педагогического процесса: в вопросах и ответах / Ю.К. Бабанский. – К.: Радянська школа, 1982. – 198 с.
18. Башмаков, М.И. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / М.И. Башмаков. – М.: Просвещение, 1992. – 351 с.
19. Бевз, Г.П. Методика викладання математики / Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1981. – 199 с.
20. Бевз, Г.П. Підручник з алгебри 7-9 кл./Г.П.Бевз.– К.: Школяр, 2002.– 303 с.
21. Бевз, Г.П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. Закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Зодіак-ЕКО, 2009. – 288 с.
22. Бевз, В., Бевз Г. Про новий підручник «Алгебра-9» // Математика в школі,

2009. – № 9. – С.3-7.

23. Бейли, Н. Математика в биологии и медицине / Н. Бейли. – М.: Мир, 1970. – 328 с.

24. Бех, О.В. Методичні вказівки до розв’язування задач економічного змісту з теорії ймовірностей та математичної статистики / О.В. Бех. – Кривий Ріг: КНЕУ, 2000. – 54 с.

25. Беленький, Г. Межпредметные связи / Г. Беленький // Совершенствование содержания образования в школе. // Под ред. И.Д. Зверева, М.П. Кашина. – М.: Педагогика, 1985. – 272 с.

26. Білоцький, М.М. Повторення і міжтемні зв’язки в процесі вивчення математики в середніх навчальних закладах. IX міжнародна наукова конференція імені акад. М. Кравчука: Матеріали конференції. – К., 2002.

27. Болдин, М.В. Практикум по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие / М.В. Болдин, Е.С. Кочетков. – М.: С.Орджоникидзе, 1983. – 91 с.

28. Болдырев, Н.И. Педагогика / Н.И. Болдырев. – М.: Изд-во Академии педагогических наук РСФСР, 1968. – 280 с.

29. Большев, Л. Таблицы математической статистики / Л. Большев, Н. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.

30. Бомас, В.В. Практикум по теории вероятностей и математической статистике / В.В. Бомас; под ред. М.Ф. Росина. – М.: Московський авиационный ин-т им. С.Орджоникидзе, 1972. – 104 с.

31. Бондаренко, Т.В. Інформаційні технології на уроці математики / Т.В. Бондаренко, І.І. Дмитренко // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ КДПУ, 2001. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – с.29-30.

32. Борель,Э. Вероятность и достоверность/Э.Борель.– М.: Наука, 1969.–110 с.

33. Борисова, В.А. Использование компьютера во внепрограммной познавательной деятельности старшеклассников // Теоретические

проблемы использования ЭВМ в школе. – М.: АПН СССР, 1991. – с.99-107.

34. Боровков, А.А. Курс теории вероятностей / А.А. Боровков. – М.: Наука, 1972. – 287 с.
35. Боровков, А.А. Теория вероятности / А.А. Боровков, 4-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 470 с.
36. Бородин, А.И. Биографический словарь деятелей в области математики / А.И. Бородин, А.С. Бугай // Перевод с украинского. – К.: Радянська школа, 1979. – 608 с.
37. Бочаров, П.П. Теория вероятностей. Математическая статистика: Учеб. пособие / П.П. Бочаров, А.В. Печенкин. – М.: Гардарика, 1998. – 327 с.
38. Бродський, Я.С. Про введення ймовірнісно-статистичної змістової лінії в шкільний курс математики / Я.С. Бродський, О.Л. Павлов // Математика в школі. – 2000. – №4. – с.19-24.
39. Бродський, Я.С. Про міжнародний досвід моніторингу математичної підготовки учнів середніх навчальних закладів / Я.С. Бродський, О.Л. Павлов // Математика в школі. – 2001. – № 3. – С.30-36.
40. Бродський, Я.С. Діагностика математичної підготовки / Я.С. Бродський, О.Л. Павлов // Математика в школі. – 1998. – № 4. – С.10-15.
41. Бродський, Я.С. Про ймовірнісно-статистичну змістову лінію у шкільному курсі математики / Я.С. Бродський, О.Л. Павлов // Математика в школі. – 2006. – № 7. – с.2-11.
42. Брудер, Ф. Роздуми про майбутнє математики / Ф. Брудер // У світі математики. – 2003. – №2. – с.1-7.
43. Булычев, В.А. Вероятность вокруг нас и в школьном учебнике математики / В.А. Булычев // Математика. – 1997. – № 48.
44. Булычев, В.А. Случайный эксперимент и его вероятностные модели / В.А.Булычев // Математика в школе. – 1998. – с.25-35.
45. Бунимович, Е.А. О теории вероятностей и статистике в школьном курсе /

Е.А. Бунимович, В.А. Булычев, Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко, П.В.Семенов // Математика в школе. –2009. – № 7. – с.3-13.

46. Бунимович, Е.А. Статистический подход к понятию вероятности: возможности и границы / Е.А. Бунимович // II международный семинар по проблеме преподавания теории вероятностей и математической статистики в школе. – Калуга, 1996.

47. Бунимович, Е.А. Вероятность и статистика. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. – М.: Дрофа, 2002.

48. Бунимович, Е.А. Методические указания к теме «Статистические исследования» / Е.А.Бунимович, С.Б. Суворова // Математика в школе. – 2003. – № 3. – с.29-36.

49. Бунимович, Е.А. Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики / Е.А. Бунимович // Математика в школе. – 2002. – № 4. – с.52-58.

50. Бурда, М.І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи: Дис… д-ра пед. наук: 13.00.02/ М.І. Бурда. – К.: АПН України, Інститут педагогіки, 1994. – 347 с.

51. Бурумкулов, Ф.Х. Основы теории вероятностей и математической статистики: Учеб. пособие для учащихся сред. спец. учеб. заведений / Ф.Х. Бурумкулов, Е.А. Мировская. – М.: Изд-во стандартов, 1981. – 163 с.

52. Бычкова, Л.О. Формирование вероятностно-статистических представлений учащихся / Л.О. Бычкова. – М., 1991.

53. Вагіна, Н. Напрямки реалізації міждисциплінарних зв’язків математики і предметів гуманітарного циклу / Н. Вагіна // Математика в школі. – 2005. – № 6. – с.18-22.

54. Ван дер Варден. Математическая статистика / Ван дер Варден: Перевод с английского. – М.: Иностранная литература, 1960. – 434 с.

55. Варущик, Н. Використання СІТ на уроках геометрії / Н. Варущик,

С.Войтенко // Математика в школі. – 2005. – № 2. – с.2-4.

56. Варущик, Н. Вивчення елементів теорії ймовірностей в умовах модульно-розвивального навчання в математичному ліцеї / Н.Варущик, Т.Овчинникова // Математика в школі, 2006. – № 4. – с.29-34.

57. Васильков, Д.А. Начала теории вероятности / Д.А. Васильков. – М.: МИФИ, 1973. – 115 с.

58. Вентцель, Е.С. Задачи. Упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Изд. центр «Академия», 2003. – 440 с.

59. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.

60. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей (Первые шаги) / Е.С. Вентцель. – М.: Знание, 1977. – 64 с.

61. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, А.А. Овчаров. – М.: Наука, 1988. – 480 с.

62. Вероятностные задачи прикладной математики: Межвуз. сб. / Петрозавод. гос. ун-т им. О.В. Куусинена / редкол. В.И. Мернецкий (отв. ред.) и др. – Петрозаводск: ПГУ, 1984. – 106 с.

63. Вероятность и ее приложения / Ред. кол. А.К. Ляху (отв. ред.) и др. – Кишинев: Штиинца, 1990. – 100 с.

64. Виленкин, Н.Я. Функции в природе и технике: Кн. для внекласн. чтения IX-X кл. / Н.Я. Виленкин. – М.: Просвещение, 1985. – 192 с.

65. Вильямс, Р. Компьютеры в школе / Р. Вильямс, К. Маклин. – М:. Прогресс, 1988. – 336 с.

66. Війчук, Т. Вивчення елементів математичної статистики на уроках математики в 9 класі / Т. Війчук // Математика в школі. – 2005. – № 4. – с.24-29.

67. Війчук, Т. Використання різних функцій вправ для формування статистичних уявлень учнів / Т. Війчук // Математика в школі. – 2005. – № 5. – с.28-32.

68. Війчук, Т. Елементи математичної статистики (10 клас) / Т. Війчук //

Математика в школі. – 2004. – № 7. – с.38-41.

69. Війчук, Т. Прикладна спрямованість навчання математики при формуванні статистичних уявлень / Т. Війчук // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – С. 42-44.
70. Вікова та педагогічна психологія: Навч. посіб. / О. В. Скрипченко, Л. В. Долинська, З. В. Огорднійчук та ін. – К.: Просвіта, 2001. – 416 с.
71. Вопросы психологии обучения и воспитания: Тезисы докл. на конф. / НИИ психологии УССР; Украинское отделение общества психологов при АПН РСФСР / Г.С. Костюк (ред.), П.Р. Чамата (ред.). — К.: НИИ психологии УССР, 1961. — 258 с.
72. Возрастная и педагогическая психология / В.В. Давыдович и др.; Под ред. А. В. Петровського. – М.: Просвещение, 1979. – 288 с.
73. Вопросы теории вероятностей и методики преподавания: сб. статей / ред. коллегия: доценты Д.В. Маневич, А.Л. Перельдик. – Ташкент: Ташкентский гос. пед. ин-т им. Низами, 1977. – 91 с.
74. Выготский, Л.С. Вопросы детской психологии / Л.С. Выготский. — СПб.: СОЮЗ, 1997. — 224 с.
75. Выготский, Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский. — М.: Педагогика-Пресс, 1996. — 536 с.
76. Гайсинская, И.М. Некоторые вопросы методики изучения элементов теории вероятностей в шк. курсе мат.: Автореф. дисс.... канд. пед. наук / И.М. Гайсинская. – Ташкент: Ташкентский гос. пед. ин-т им. Низами, 1972. – 27 с.
77. Гайсинская, И.М.. Геометрическая вероятность на уроках геометрии в 7 классе / И.М. Гайсинская// Вопросы теории вероятности. Ученые записки. Том 100. – Ташкент: Ташкентский гос. пед. ин-т им. Низами, 1972. – 144 с.
78. Гихман, И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И.Гихман, А.В.Скороход, М.Й.Ядренко. – К.: Вища школа, 1988.– 440 с.

79. Гласс, Дж. Статистические методы в педагогике и психологи / Дж. Гласс: Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1976. – 495 с.

80. Глеман, М. Вероятность в играх и развлечениях: элементы теории вероятностей в курсе средней школы: Пособие для учителя / М. Глеман, Т. Варга / Пер. с франц. А.К. Звонкина. – М.: Просвещение, 1979. – 176 с.

81. Глотов, Н.В. Вероятность и статистика в школе: взгляд биолога / Н.В. Глотов, О.В. Глотова // Математика в школе. – 2002. – № 4. – с.64-66.

82. Гмурман, В.Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1963. – 238 с.

83. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студ. вузов / В.Е. Гмурман. – 5-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 400 с.

84. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособ. для студ. вузов / В.Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

85. Гнеденко, Б.В. Элементарное введение в теорию вероятностей / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. – 10-е изд. испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 206 с.

86. Гнеденко, Б.В. Теория вероятностей и комбинаторика / Б.В. Гнеденко, И.Г. Журбенко // Математика в школе. – 1968. – № 2. – с.72-84.

87. Гнеденко, Б.В. Математика в современном мире: Книга для внеклассного чтения (8-10 классы) / Б.В. Гнеденко. – М.: Просвещение, 1980. – 128 с.

88. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Наука, 1969. – 488 с.

89. Гнеденко, Б.В. Развитие теории вероятностей / Б.В. Гнеденко // Очерки по истории математики. – М.: Изд-во МГУ, 1977. – 347 с.

90. Головань, М.С. Методичні основи розвитку пізнавальної активності у процесі навчання алгебри і початків аналізу на основі НІТ // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Збірник наукових праць. – К.: Комп’ютер у школі та сім’ї, 1998. – с.50–55.

91. Головіна, Н. Комбінаторно-ймовірнісні методи розв'язування задач з біології / Н. Головіна // Математика в школі. – 1999. – №3-4. – с.14-16.

92. Гольдфаин И.И. Элементы теории вероятностей в современном школьном курсе биологии // Математика в школе, 2003. – № 3. – с.50-51.

93. Гончаренко, С.У. Український педагогічний словник / С.У. Гончаренко. – Київ: Либідь, 1997. – 376 с.

94. Гончаренко, С.У. Зміст освіти і її гуманітаризація / С.У. Гончаренко // Неперервна професійна освіта: проблеми, пошуки, перспективи / За ред. І.А. Зязюна. – К., 2000. – с.81-108.

95. Гончаров, М.К. Педагогіка: підручник для пед. училищ: Переклад з випр. і доп. рос. вид. / М.К. Гончаров, Б.П. Єсипов. – К.: Радянська школа, 1951. – 376 с.

96. Горошко, Ю.В. Вплив нової інформаційної технології на практичну значимість результатів навчання математики в старших класах середньої школи: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / Ю.В. Горошко. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1993. – 103 с.

97. Горошко, Ю.В. Розв'язування задач з математичної статистики з використанням програми GRAN1 / Ю.В. Горошко // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць/ Редкол. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Випуск 7. – 2003. – с.105-115.

98. Грищенко, В.О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Практикум: навч. посіб. / В.О. Грищенко. – К.: КНТЕУ, 2002. – 764 с.

99. Грабарь, М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы / М.И. Грабарь, К.Я. Краснянская. – М.: Педагогика, 1977. – 136 с.

100. Гришко, Л. В. Проблеми створення методичних систем навчання на основі нових інформаційних технологій / Л.В. Гришко, Г.П. Нечаєнко, Ю.В. Триус // Матеріали Всеукраїнської конференції молодих науковців «Інформаційні технології в науці та освіті» (ІТОН–97). – Черкаси: ЧДУ, 1997. – Ч.1. – с.196-211.

101. Громов, М. Можливі напрямки розвитку математики в наступних десятиліттях/ М. Громов// У світі математики.– 2001. – №1. – с.3-5.
102. Гутер, Р.С. Основы теории вероятностей / Р.С. Гутер, Б.В. Овчинский. – М.: Просвещение, 1967. – 159 с.
103. Давыдов, В.В. Виды общения в обучении / В.В.Давыдов. – М.: Педагогика, 1972. – 423 с.
104. Дайменд, С. Мир вероятности / С.Дайменд. – М: Статистика, 1970. – 155 с.
105. Далингер, В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Книга для учителя / В.А. Далингер. – М.: Просвещение, 1991. – 80 с.
106. Демакова, И.Д. Соціально-педагогические проблемы использования ЭВМ в школе: к концепции исследования / Теоретические проблемы использования ЭВМ в школе / И.Д. Демакова, М.С. Жамкочьян. – М.: АПН СССР, 1991. – с.4-19.
107. Дем'яненко, В.М. Підготовка вчителів до використання мультимедійних засобів навчання / В.М. Дем'яненко // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2002. – Випуск №5. – с.233-237.
108. Державний стандарт базової і повної середньої освіти / О.А. Кривенко (ред.). — К.: КНТ, 2004. — 88 с.
109. Державна національна програма «Освіта. Україна XXI століття». – К.: Райдуга. – 1994. – 61 с.
110. Джермен, Н. Количественная биология в задачах и примерах / Н. Джермен. – М.: Мир, 1972. – 151 с.
111. Джораев, М. Методические и дидактические основы формирования вероятностно-статистических идей / М. Джораев. – Ташкент: Ташкентский гос. пед. ин-т им. Низами, 1993. – 187 с.
112. Дороговцев, А. Теория вероятностей. Сборник задач: учеб. пособие для студ. вузов / А. Дороговцев, Д. Сильвестров, А. Скороход, М. Ядренко. – К.: Вища школа, 1980. – 432 с.

113. Драгилев, М.М. Введение в теорию вероятностей / М.М. Драгилев / отв. ред. А.И. Луценко.– Ростов-на-Дону: изд-во Рост. ун-та, 1985. – 80 с.
114. Дрибан, В.М. Теория вероятностей: учебное пособие / В.М. Дрибан, Г.Г. Пенина. – Донецк: ДонГУЭТ, 2003. – 519 с.
115. Евдокимова, Г.С. Теория и практика обучения стохастике при подготовке преподавателей математики в университете: Дис… д-ра пед. наук: 13.00.02 / Г.С. Евдокимова. – Москва: Московский педагогический университет, 2001. – 415 с.
116. Емельянов, Г.В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г.В. Емельянов, В.П. Скитович. – Ленинград: Изд. Ленинградского университета, 1967. – 331 с.
117. Еремеева, Н.В. Элементы теории вероятностей и ее приложения в средней школе: Автореф. дисс... канд. пед. наук: 13.00.02 / Н.В. Еремеева. – М., 1966. – 16 с.
118. Ершов, А.П. Компьютеризация школы и математическое образование / А.П. Ершов // Математика в школе. – 1989. – №1. – с.14-31.
119. Ершов, А.П. Компьютеризация школьного математического образования / А.П. Ершов // Программирование. – 1990. – № 1. – с.5-25.
120. Ершов, А.П. Школьная информатика в СССР: От грамотности к культуре / А.П. Ершов // Информатика и компьютерная грамотность. – М.: Наука, 1988.– с.6-23.
121. Жак, Я.Е. Несколько простых прикладных задач / Я.Е. Жак // Математика в школе. – 1980. – №2. – С.37-39.
122. Жалдак, М.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – Вид. 2, перероб. і доп. / М.І. Жалдак, Н.М. Кузьміна, Г.О. Михалін. – Полтава: Довкілля-К, 2009. – 500 с.
123. Жалдак, М.І. Комп’ютер на уроках математики: посібник для вчителів / М.І. Жалдак. – К.: Техніка, 1997. – 304 с.
124. Жалдак, М.І. Педагогічний потенціал комп’ютерно-орієнтованих систем

навчання математики / М.І. Жалдак // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. – Вип. 7. – 2003. – с.3-16.

125. Жалдак, М.І. Математика з комп'ютером / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – 282 с.

126. Жалдак, М.І. Одне узагальнення поняття границі функції та деякі його застосування / М.І.Жалдак, Г.О.Михалін, С.Я.Деканов // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наукових праць / Редрада. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. – № 5(12). – с.3-9.

127. Жалдак, М.І. Про поняття випадкової події, ймовірності, ймовірнісного простору, випадкової величини / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін // Математика в школі. – 2003. – № 2. – с.5-18.

128. Жалдак, М.І. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп'ютерною підтримкою: Навч. посіб. для вступ. до вищ. навч. закл. / М.І. Жалдак, А.В. Грохольська, О.Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2004. – 456 с.

129. Жалдак, М.І. Комп'ютер і елементи стохастики у шкільному курсі математики / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – №3. – 1998. – с.16-20, №4. – 1998. – с.22-27.

130. Жалдак, М.І. Про вивчення елементів стохастики в школі / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін // Математика в школі. – 2004. – № 1–10, 2005. – № 1.

131. Жалдак, М.І. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою: посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Г.О.Михалін. – К.: Шкільний світ, 2006.– 119 с.

132. Жалдак, М.І. Про зв'язок основних понять шкільних курсів стохастики та геометрії / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, О.В. Стогній // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – №5(12). – 2008. – С.24-31.

133. Жалдак, М.І. Елементи стохастики. Збірник задач і вправ: посібник для вчителів у двох частинах / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін // Інформатика. – 2008. – червень. – № 21-22.

134. Жильцов, О.Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій: навч. посіб. / О.Б. Жильцов, Г.М. Торбін. – К.: МАУП, 2002. – 408 с.

135. Жильцов, О.Б. Використання НІТН на уроках математики в 6 класах середньої школи / О.Б. Жильцов // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 1998. – с.56-62.

136. Жлуктечко, В. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. / В. Жлуктечко, С.Наконечний. – Київ, 2000. – 410 с.

137. Занков, Л.В. Избранные педагогические труды / Л.В. Занков. – М.: Новая шк., 1996. – 432 с.

138. Загальна біологія: підручник для учнів 10-11-х кл. серед. загальноосвіт. шк. / М.Є. Кучеренко, Ю.Г. Вервес, П.Г. Балан та ін. – К.: Ґенеза, 1998. – 464 с.

139. Задорожня, Т.М. Початки теорії ймовірностей та математичної статистики в змісті математичної освіти коледжів фінансово-економічного спрямування: дис… канд.. пед. наук: 13.00.02 / Інститут педагогіки АПН України. – К., 2007. – 258 с.

140. Зайцева, Т.В. Роль цікавих задач при вивченні математики та використання НІТ при їх розв’язуванні / Т.В. Зайцева // Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. Випуск 4. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2001. – 230 с.

141. Закон України «Про Національну програму інформатизації»: За станом на 10 липня 2002 р. / Офіц. вид. – К.: Парламентське видавництво, 2002. – 20 с.

142. Закон України «Про вищу освіту» / Верховна Рада України / Офіц. вид. – К.: Парламентське видавництво, 2006. – 64 с.

143. Закон України «Про Концепцію Національної програми інформатизації» // Відомості Верховної Ради (ВВР). – 1998. – №27-28.

144. Закон України «Про науково-технічну інформацію» // Закони України. – К., 1996. – Т.5. – с.191-200.

145. Закон України «Про науку і науково-технічну діяльність» // Закони

України. – К., 1999. – Т.16. – с.97-115.

146. Зверев, И.Д. Взаимная связь учебных предметов / И.Д. Зверев. – М.: Знание, 1997. – 64 с.

147. Зеленяк, О.П. Математичне моделювання та обчислювальний експеримент в школі / О.П.Зеленяк // Комп'ютер в школі та сім'ї.– 2001.– № 2.– с.16-18.

148. Зовнішнє незалежне оцінювання. Математика. 2007 рік [Електронний ресурс]. — Режим доступу: URL: http://s112.com.ua/files/mathematics _2007.pdf. — Назва з екрану.

149. Зовнішнє незалежне оцінювання. Математика. 2008 рік [Електронний ресурс]. — Режим доступу: URL: http://s112.com.ua/files/mathematics _2008.pdf. — Назва з екрану.

150. Зовнішнє незалежне оцінювання. Математика. 2009 рік [Електронний ресурс]. — Режим доступу: URL: http://s112.com.ua/files/mathematics _2009.pdf. — Назва з екрану.

151. Ивашев-Мусатов, О.С. О теории вероятностей / О.С. Ивашев-Мусатов // Математика в школе. – 2005. – № 5. – С. 63.

152. Ігнатенко, М.Я. Активізація навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: Монографія / М.Я. Ігнатенко. – К.: Тираж, 1997. – 300 с.

153. Ігнатенко, М.Я. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики: Дис... д-ра пед. наук. 13.00.02 / М.Я. Ігнатенко. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1997. – 335 с.

154. Інформаційні системи і технології в економіці: посіб. для студ. ВНЗ / За ред. В.С. Пономаренка. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 544 с.

155. Кедров, В.М. Классификация наук / В.М. Кедров. – М.: Изд-во ВПШ и АОН, 1961. – 237 с.

156. Кендал, М. Теория вероятностей / М. Кендал, А. Стюарт. – М.: Наука, 1966. – 342 с.

157. Кендал, М. Геометрические вероятности / М. Кендал, П. Моран. – М.:

Наука, 1972. – 192 с.

158. Кимбл, Г. Как правильно пользоваться статистикой / Г. Кимбл. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 294 с.

159. Кларин, М.В. Инновационные модели обучения в зарубежных педагогических поисках / М.В. Кларин. – М: Арена, 1994. – 222 с.

160. Кларин, М.В. Педагогические технологии в учебном процессе. Анализ зарубежного опыта / М.В. Кларин. – М.: Знание, 1969. – 78 с.

161. Клейман, Г.М. Школы будущего: компьютер в процессе обучения / Г.М. Клейман. — М.: Радио и связь, 1987. – 177 с.

162. Клепко, С. Інтегративний потенціал інформатики та комп’ютерних наук у навчальному процесі // Педагогіка і психологія професійної освіти. – 1998. – №2. – с.35-43.

163. Кліндухова, В.М. Рух за введення елементів стохастики в програму загальноосвітніх шкіл / В.М. Кліндухова // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць в 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ КДПУ, 2001. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – с.124-135.

164. Клочко, В.І. Вплив інформаційних технологій навчання на зміст та методику навчання математики в технічних ВНЗ / В.І. Клочко // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – с.106-115.

165. Клочко, В.І. Застосування новітніх інформаційних технологій при вивченні вищої математики у технічному вузі: навчально-методичний посібник / В.І. Клочко. – Вінниця: ВДТУ, 1997.– 300 с.

166. Кобильник, Т.П. Методична система навчання математичної інформатики у педагогічному університеті: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Т.П. Кобильник. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2007. – 205 с.

167. Коваленко, И.Н. Теория вероятностей / И.Н. Коваленко, Б.В. Гнеденко. – К.: Вища школа, 1990. – 324 с.

168. Коваленко, В.Г. Алгебра: Експериментальний навч. посібник для 9 кл. шк. з поглибл. вивченням математики в спеціалізов. шк. фіз.-мат. профілю / В.Г. Коваленко, В.Я. Кривошеєв, О.В. Старосєльцева. – 2-ге вид. – К.: Освіта, 1996. – 286 с.

169. Колмогоров, А.Н. Введение в теорию вероятностей и комбинаторику // Математика в школе. – 1968. – № 2. – с.63-72.

170. Колмогоров, А.Н. Введение в теорию вероятностей и комбинаторику / А.Н. Колмогоров // Математика в школе. – 2000. – № 8. – с.2-9.

171. Колмогоров, А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. – М.: Наука, 1982. – 159 с.

172. Колмогоров, А.Н. Об одном подтверждении законов Менделя / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. – 1940. – Т. 27, №1. – с.38-42.

173. Колмогоров, А.Н. Основные понятия теории вероятностей / А.Н. Колмогоров. – Изд. 2-е. – М.: Наука, 1974. – 119 с.

174. Коляда, Ю.Е. Бинарные уроки по математике и информатике / Ю.Е. Коляда, Е.В. Лунина, Л.Д. Шашенкова // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць в 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2002 – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – с.149-154.

175. Конет, І.М. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник для студ. фіз.-мат. факультетів пед. ін-тів та ун-тів / І.М.Конет.– Кам’янець-Подільський: К.-П. держ. пед. ун-т, 1999.– 214 с.

176. Кордемский, Б.А. Математика изучает случайности / Б.А. Кордемский. – М.: Просвещение, 1975. – 223 с.

177. Корінь, Г. Прикладні задачі як засіб реалізації міжпредметних зв’язків / Г. Корінь // Математика в школі. – 2004. – № 9 – 10. – с.30-35.

178. Крамер, Г. Полвека с теорией вероятности: наброски воспоминаний: Современные проблемы математики: Пер. с англ. / Г. Крамер. – М.: Знание, 1979. – 60 с.

179. Кремень, В.Г. Без реформи освіти не розбудуємо державу / В.Г. Кремень //

Математика в школі. – 2000. – № 1.

180. Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студ. вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 544 с.

181. Кудратов, Ж. Теория вероятности и математическая статистика / Ж. Кудратов. – М.: Наука, 1991. – 345 с.

182. Кулагин, П.Г. Межпредметные связи в процессе обучения / П.Г. Кулагин. – М.: Просвещение, 1981. – 51 с.

183. Кравчук, В.Р. Алгебра: підручник для 9 кл. / В.Р. Кравчук, М.В. Підручна, Г.М.Янченко. – Вид. 3-є, переробл. та доп. – Т.: Підручники і посібники, 2007. — 256 с.

184. Ламперти, Джон. Вероятность / Джон Ламперти: Пер. с англ. Н.Б. Левиной, С.А. Молчанова / Под ред. А.Н. Ширяева. – М.: Наука, 1973. – 183 с.

185. Ліпінська, А.В. Психолого-педагогічні проблеми вивчення елементів стохастики з комп’ютерною підтримкою / А.В. Ліпінська // Педагогічний процес: теорія і практика: Зб. наук. праць. – К.: Видавництво П/П «ЕКМО». – Випуск 3. – 2006. – С. 175-182.

186. Ліпінська, А.В. Міжпредметні зв’язки стохастики / А.В. Ліпінська // Математика в школі. – 2006. – № 10. – С.11-16.

187. Ліпінська, А.В. Використання програми GRAN при навчанні елементів стохастики / А.В. Ліпінська // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. – Серія 2. – Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – №5 (12). – 2007. – С.146-149.

188. Ліпінська, А.В. Пропедевтика елементів стохастики в 6-7 класах / А.В. Ліпінська // Дидактика математики: проблеми і дослідження. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2007. – Вип. 27. – С. 120-126.

189. Ліпінська, А.В. Психолого-педагогічні проблеми вивчення елементів

стохастики з комп’ютерною підтримкою / А.В. Ліпінська // Наукова конференція «Інформаційні технології в системі підготовки фахівців у вищій школі», 12-13 жовтня 2006 року, м. Київ. – С. 5.

190. Ліпінська, А.В. Використання комп’ютерів при навчанні елементів стохастики в школі / А.В. Ліпінська // Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці / Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції. 11-13 грудня 2006 р., м. Луганськ. – Луганськ: Альма-матер, 2006. – С.55-57.

191. Ліпінська, А.В. Використання інформаційних технологій при навчанні елементів стохастики / А.В. Ліпінська // Проблеми підготовки та перепідготовки фахівців у сфері інформаційних технологій / Матеріали IV Міжнародної науково-технічної конференції «Комп’ютерні технології в будівництві»: Київ-Севастополь, 18-21 вересня 2006 р. – Кривий Ріг, 2006. – С. 43-44.

192. Ліпінська, А.В. Місце стохастики серед інших дисциплін / А.В. Ліпінська // Проблеми підготовки та перепідготовки фахівців у сфері інформаційних технологій / Матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції «Комп’ютерні технології в будівництві»: Київ-Севастополь, 18-21 вересня 2007 р. – Кривий Ріг, 2008. – С. 62-63.

193. Ліпінська, А.В. Зарубіжний досвід навчання елементів стохастики / А.В. Ліпінська // Теоретичні питання культури, освіти та виховання: Зб. наук. праць, вип. 33, КНЛУ, НИАУ, 2007. – С. 87-91.

194. Ліпінська, А.В. Історія розвитку стохастики / А.В. Ліпінська // Математика в школі. – 2007. – № 4. – с.49-53, № 5. – С. 51-55.

195. Ліпінська, А.В. Використання комп’ютерів у навчанні елементів стохастики в старшій школі / А.В. Ліпінська // Комп’ютер у школі та сім’ї. – 2008. – № 1. – С. 39-42.

196. Линник, Ю.В. Избранные труды: Теория вероятностей / Ю.В. Линник. –

Л.: Наука, 1981. – 344 с.

197. Лиходєєва, Г.В. Формування навчально-дослідницьких умінь учнів у процесі навчання елементів стохастики: дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / НПУ ім. М.П.Драгоманов. – К., 2009. – 281 с.

198. Лиходєєва, Г.В. Розв’язування задач математичної статистики з використанням комп’ютера / Г. Лиходєєва // Математика в школі. – 2007. – № 1. – с.27-34.

199. Лотюк, Ю. Г. Комп’ютерно-орієнтована методична система навчання обчислювальної математики в педагогічному університеті: Дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ю.Г. Лотюк. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 228 с.

200. Любченко, К.М. Елементи математичної логіки з комп’ютерною підтримкою: Посібник для вчителів / К.М. Любченко, Ю.В. Триус. – Черкаси: Видавничий відділ ЧНУ, 2004. – 88 с.

201. Лютикас, В.С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. Это интересно! / В.С. Лютикас. – М.: Мир, 1993. – 236 с.

202. Магазинников, Л.И. Теория вероятностей: Учеб. пособие для студентов и преподавателей вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. / Л.И. Магазинников. – Томск: Томский гос. ун-т сист. упр. и радиоэлектр., 2000. – 150 с.

203. Майстров, Д.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк / Д.Е. Майстров. – М.: Наука, 1967. – 320 с.

204. Майстров, Д.Е. Развитие понятия вероятности / Д.Е. Майстров. – М.: Наука, 1980. – 269 с.

205. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. пособ. для учащихся 7-9 классов общеобраз. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк / Под ред. С.А. Теляковского. – М: Просвещение, 2003. – 78 с.

206. Макарычев, Ю.Н. Изучаем элементы статистики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк // Математика в школе. – 2004. – № 5. – с.42-47.

207. Макарычев, Ю.Н. Начальные сведения из теории вероятностей в

школьном курсе алгебры / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк // Математика в школе. – 2004. – № 7. – с.24-27.

208. Максимова, В.Н. Сущность и функции межпредметных связей в условиях процесса обучения / В.Н. Максимова.– Л., 1981.– 362 с.

209. Мальований, Ю.І. Алгебра. 9 клас: підруч. для загальноосв. навч. закл. / Ю.І. Мальований (ред.), Г.М. Литвиненко, Г.М. Возняк. – Т.: Навчальна книга-Богдан, 2009. – 288 с.

210. Маневич, Д.В. Совершенствование содержания общего среднего образования на основе теории вероятностей и статистики: Дис... д-ра пед. наук / Д.В. Маневич. – Ташкент: Ташкентский гос. пед. ин-т им. Низами, 1990. – 416 с.

211. Маневич, Д.В. Теория вероятностей и статистика в школьном образовании / Д.В.Маневич. – Ташкент: Укитивчи, 1989. – 273 с.

212. Марков, А.А. О проекте П.С. Фролова и П.А. Некрасова преподавания теории вероятности в средней школе / А.А. Марков. – М., 34 с.

213. Марков, А.А. Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей / А.А. Марков / Ред. проф. Ю.В. Линника, коммент. Ю.В. Линника (и др.) – М.: изд-во Акад. Наук СРСР, 1951. – 720 с.

214. Матвеев, В.Н. Сборник задач по математике с методами решений / В.Н. Матвеев, Н.М. Матвеев. – 3-е изд. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1971. – 276 с.

215. Машбиц, Е.И. Психологические проблемы обучения пользователей ЭВМ / Е.И. Машбиц. – К.: О-во «Знание», 1976. – 16 с.

216. Машбиц, Е.И. Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения / Е.И. Машбиц. – М.: Педагогика, 1988. – 236 с.

217. Машбиц, Е.И. Компьютеризация обучения: проблемы и перспективы / Е.И. Машбиц. – М.: Знание, 1986. – 80 с.

218. Машбиц, Е.И. Психологические основы управления учебной деятельностью / Е.И. Машбиц. – К.: Вища школа, 1987. – 224 с.

219. Машбиц, Е.И. Основы компьютерной грамотности / Е.И.Машбиц,

Л.П.Бабенко, Л.В.Верник. – К.: Вища шк., 1988. – 215 с.

220. Межпредметные связи естественно-математических дисциплин: пособие для учителя // Сб. научных статей под ред. В.Н. Федоровой. – М.: Просвещение, 1980. – 208 с.

221. Мерзляк, А.Г. Математика: Підручник для 6 класу /А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2006. – 304 с.

222. Мерзляк, А.Г. Алгебра: Підручник для 9 класу загальноосв. навч. закладів /А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 320 с.

223. Михалін, Г.О. Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу: Дис... д-ра пед. наук: 13.00.04 / Національний педагогічний ун-т ім. М.П.Драгоманова. — К., 2004. — 480 с.

224. Михалін, Г.О. Математичний кругозір учителя математики / Г.О. Михалін // Математика в школі. – 2004. – № 3. – с.12-16.

225. Моисеев, Н.Н. Алгоритмы развития / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

226. Монахов, В.М. Информационная технология обучения с точки зрения методических задач реформы школы / В.М. Монахов // Вопросы философии. – 1990. – № 2. – с.27-36.

227. Монахов, В.М. Обеспечить компьютерную грамотность школьника / В.М. Монахов, О.А. Кузнецов, С.І. Шварцбурд // Советская педагогика. 1985. – № 1. – с.21-28.

228. Монахов, В.М. Концепция создания и внедрения новой информационной технологии обучения / В.М. Монахов // Проектирование новых информационных технологий обучения: Сб. науч. трудов. – М.: Наука, 1991. – с.4-30.

229. Монахов, В.М. Что такое новая информационная технология обучения / В.М. Монахов // Математика в школе. – 1990. – № 2. – с.47-52.

230. Мордкович, А.Г. Событие. Вероятности. Статистическая обработка данных / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2003. – 112 с.

231. Морзе, Н.В. Підготовка педагогічних кадрів до використання комп'ютерних телекомунікацій / Н.В. Морзе // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – Випуск 6. – 2003. – с.11-25.

232. Мостеллер,Ф. Вероятность / Ф. Мостеллер.– М.: Мир, 1969.– 431с.

233. Мостеллер, Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями: пер. с англ. / Ф. Мостеллер / Под ред. Ю.В. Линника, изд. 2-е, испр. – М.: Наука, 1975. – 103 с.

234. Мун, Л.Н. Информационные технологии и гуманитарная культура: преподавание в школе учебных дисциплин с использованием достижений современных информационных технологий / Л.Н. Мун // Мир психологии. – 2002. – № 1. – с.262-272.

235. Національна Доктрина розвитку освіти в Україні у XXI столітті: Проект // Освіта. – 2001. – №№ 60-62. – 24-31 жовтня.

236. Науково-педагогічний проект «Росток»: Підручники [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL:http://osvita.ua/legislation/Ser_osv/3732. — Назва з екрану.

237. Никифировский, В.А. Вероятностный мир / В.А. Никифировский / отв. ред. А.Г. Григорьян. – М.: Наука, 1992. – 171 с.

238. Никифорова, М.А. Преподавание математики в школе и ИКТ / М.А. Никифорова // Математика в школе. – 2005. – № 6. – с.73.

239. Нічуговська, Л. Математичне моделювання в системі економічної освіти: Монографія / Л. Нічуговська. – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2003. – 289 с.

240. Нічуговська, Л. Прикладні аспекти математики: лінійна функція та її економічні застосування / Л. Нічуговська // Математика в школі. – 2003. – №8. – С.43-47.

241. Новая постиндустриальная волна на Западе. Антология / Под редакцией В. Л. Иноземцева. – М.: Издательский центр «Академия», 1999. – 640 с.

242. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф.

пед. кадров / Е. с.Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеева, А. Е. Петров; Под ред. Е.С. Полат. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 272 с.

243. Образовательный стандарт высшей школы сегодня и завтра; под ред. д-ра пед. наук В.И. Байденко, д-ра техн. наук Н.А. Селезневой. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2001.– 205 с.

244. Обухова, Л.Ф. Концепция Ж.Пиаже: за и против / Л.Ф. Обухова. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 191 с.

245. Олейников, А. О компьютерном моделировании в курсе теории вероятностей и математической статистики / А. Олейников, Н. Рашевская, Н. Рашевский // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Зб. наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2003. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – с.216-220.

246. Орос, В. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики в загальноосвітній школі / В. Орос // Математика в школі. – 2001. – № 6. – с.10-11.

247. Основи нових інформаційних технологій навчання: посібник для вчителів / Ю.І. Машбиць, О.О. Гокунь, М.І. Жалдак, Н.В. Морзе та ін. – К.: Інститут психології ім. Г.С.Костюка АПН України; Інститут змісту і методів навчання, 1997. – 260 с.

248. Павленко, Т.В. К вопросу об оптимальном подходе к изложению курса математической статистики в техническом вузе / Т.В. Павленко // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – с.224-225.

249. Панішева, О. Софізми в теорії ймовірностей / О. Панішева // Математика в школі. – 2003. – № 8. – с.27 – 29.

250. Пасхавер, И.С. Средние величины в статистике / И.С. Пасхавер. – М.: Статистика, 1979. – 279 с.

251. Пеньков, А.В. Использование новой информационной технологии при

преподавании математики в старших классах средней школы: Дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / А.В. Пеньков. – К.: УПУ им. М.П. Драгоманова, 1992. – 171 с.

252. Петрик, О.І. Некоторые общедидактические вопросы использования информационной технологии в учебном процессе в школах ЧСФР / О.І. Петрик // Использование информационной технологии в учебном процессе: Материалы межвузовской научно-практической конференции (27-28 апреля 1989 г.). – К.: МНО УССР. КГПИ им. Горького, Изд-во «Радянська школа», 1990. – с.22-28.

253. Петрук, В.А. Игровые формы обучения теории вероятностей и математической статистике во втузе / В.А. Петрук. – К., 2000. – 118 с.

254. Плоцки, А. Вероятность в задачах для школьников / А. Плоцки. – М.: Просвещение, 1996.

255. Плоцки, А. Стохастика в школе как математика в стадии создания и как новый элемент математики и общего образования: Дис… д-ра пед. наук. В форме научного доклада / А. Плоцки. – СПб, 1992. – 52 с.

256. Плоцки, А. Стохастические задачи и прикладные направления в обучении математике / А. Плоцки // Математика в школе. – 1991. – № 3.

257. Плоцкі, А. Випадкова величина та гра як модель процесу прийняття рішень в умовах ризику / А. Плоцкі // Математика в школі. – 2000. – №2. – с.7-14.

258. Плоцкі, А. Ймовірнісний простір на уроках математики як засіб розв'язування проблем / А. Плоцкі // Математика в школі. – 1991. – № 4. – с.7-12.

259. Погорєлов, О.В. Геометрія: Підруч. для 7-11 кл. серед. шк. / О.В. Погорєлов. – К.: Рад. шк., 1991. – 325 с.

260. Погорілко, І. Про деякі зв'язки навчального матеріалу під час вивчення математики і механіки / І. Погорілко // Фізика та астрономія в школі. – 1997. – №4. – с.38.

261. Полька, Н.С. Про державні санітарні правила та норми влаштування і обладнання кабінетів комп'ютерної техніки в навчальних закладах та режим праці учнів на персональних комп'ютерах / Н.С. Полька // Комп'ютер в школі та сім'ї. – 1999. – №4. – с.52-55.

262. Пиаже, Жан: Преподавание математики: Пособие для учителя / Жан Пиаже. – М.: Учпедгиз, 2001. – 163 с.

263. Поснова, М. ЭВМ в учебном процессе / М. Поснова, А. Титовицкая. – Мн.: Университетское, 1996. – 208 с.

264. Потапов, В.Г. Задачи по теории вероятностей для ср. школы / В.Г. Потапов. – Хабаровск: Кн. изд., 1969. – 64 с.

265. Педагогика: Учебное пособие для педагогических училищ; ред. Б.П. Есипов. – М.: Просвещение, 1967. – 414 с.

266. Психологія навчання і виховання: Тези доп. на республ. психол. конф. / НДІ психології УРСР; Українське відділення Товариства психологів СРСР / Г.С. Костюк (відп.ред.). — К.: Радянська школа, 1964. — 363 с.

267. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-11 класи / укл. В.Г. Бевз, А.А. Мерзляк, З.І. Слєпкань // Математика. – 2001. – № 35 (143) – 63 с.

268. Програма для класів з поглибленим вивченням математики. 8-11 класи. / укл. М.І. Бурда, М.І. Жалдак, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара, М.Й. Ядренко. // Математика. – 2001. – № 37 (145). – 48 с.

269. Програма зовнішнього незалежного оцінювання 2009 року. Математика [Електронний ресурс]. — Режим доступу: URL: http:// www.osvita.org.ua/ukrtest/progzno/2009_math.html. — Назва з екрану.

270. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. 5-12 кл. / укл. В.Г. Бевз, А.А. Мерзляк, З.І. Слєпкань. − Київ: Перун, 2005. − 64 с.

271. Прохоров, Ю.В. Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы / Ю.В. Прохоров, Ю.А. Розанов. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука, 1987. – 397 с.

272. Процай, В.Ф. Комбінаторика і теорія ймовірностей у школі. Теоретичні

положення. Розв’язування задач: Навч. посібник / В.Ф. Процай, І.В. Новікова. – Х.: Каравела, 1997. – 192 с.

273. Прудкий, О.С. Використання фізики та інформатики на уроках математики / О.С. Прудкий, З.Ю. Філер // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць в 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2006. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – с.113-117.

274. Пугачев, В.С. Опыт создания автоматизированных учебных курсов / В.С. Пугачев, В.И. Гришин, В.А. Латышев // Информатика и компьютерная грамотность. – М.: Наука, 1988. – с.187-199.

275. Раков, С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій: Дис... д-ра пед. наук: 13.00.02 / Харківський національний педагогічний ун-т ім. Г.С. Сковороди. — Х., 2005. — 516 с.

276. Раков, С.А. Нові освітні технології у навчанні математики / С.А. Раков, Т.О. Олійник, П.Є. Минко // Педагогічна спадщина М.В. Остроградського і розвиток освіти в Україні / Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції. – Полтава: ПОІПОПП, 1996. – 154 с.

277. Раков, С.А. Комп’ютерна підтримка дослідницького підходу у математичній освіті, болонський процес та профілізація загальноосвітньої школи / С.А. Раков // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія №2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. пр. / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. №2(9). – 2005. – с.42-53.

278. Растригин, Л.А. В мире случайных событий / Л.А. Растригин. – Рига: изд-во Академии наук Латвийской ССР, 1963. – 80 с.

279. Релизова, Н.И. Дифференциация обучения в средней школе Франции / Н.И. Релизова // Советская педагогика. – 1988. – с.6

280. Реньи, А. Письма о вероятности: Пер. с венг. / А. Реньи. – М.: Мир, 1970. – 93 с.

281. Реньи, А. Трилогия о математике / А. Реньи. – М.: Мир, 1980. – 376 с.

282. Рибалова, Л.М. Основи теорії ймовірностей. 6 клас. Частина I / Л.М. Рибалова. – Суми: ВАТ «Сумська обласна друкарня» Вид-во «Козацький вал», 2002. – 52 с.

283. Рибалова, Л.М. Теорія ймовірностей: Навчальний посібник – 7 клас. Частина друга / Л.М. Рибалова. – Суми: ВАТ «СОД», вид-во «Козацький вал», 2002. – 64 с.

284. Рибачок, А. Про посилення зв’язків між математикою та інформатикою при вивченні основ стохастики в школі / А. Рибачок // Математика в школі. – 1998. – № 4. – с 19–20.

285. Розанов, Ю.А. Лекции по теории вероятностей / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1986. – 120 с.

286. Розанов, Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика: Учебник для студ. вузов, обучающихся по специальности «Математика» и «Физика» / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1989. – 320 с.

287. Розумовский, В.Г. ЭВМ, школа и научно-педагогическое обеспечение/ В.Г. Розумовский // Советская педагогика.– 1985. – № 9. – с.12-16.

288. Романов, М.А. Сертификация школьных учителей математики в США / М.А. Романов // Математика в школе. – 2000. – № 5. – с.74-78.

289. Рубинштейн, С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. – СПб.: Питер, 1998. – 688 с.

290. Рудавський, Ю.К. Збірник задач з теорії ймовірностей: Навч. посіб. для студ. вищ. закл. освіти / Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій, І.Я. Олексів. – Львів: Видавництво НТУ «Львівська політехніка», 2000. – 242 с.

291. Савельев, Л.Я. Комбинаторика и вероятность / Л.Я. Савельев. – Новосибирск: Наука, 1975. – 423 с.

292. Севастьянов, Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука, 1982. – 255 с.

293. Столяр, А.А. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников / А.А. Столяр. – Москва: Просвещение,

1988. – 153 с.

294. Секей, Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: Перевод с английского В.В.Ульянова / Г. Секей.– М.: Мир,1990. – 240 с.

295. Система народного образования в зарубежных странах на современном этапе (капиталистические и развивающиеся страны): сб. научных трудов / редкол. Б.Ф. Мельниченко (отв. ред.) и др. – К.: ГКПИ, 1990. – 144 с.

296. Сікорський, П. Психолого-педагогічні проблеми навчання математики / П. Сікорський // Математика в школі. – 2004. – № 4. – с.5-9.

297. Скороход, А.В. Вероятность вокруг нас / А.В. Скороход. – К.: Наукова думка, 1980. – 195 с.

298. Скороход, А.В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках / А.В.Скороход // У світі математики. – 1997. – т.3. – вип. 2. – с.2-4.

299. Слепкань, З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Методическое пособие / З.И.Слепкань.– К.: Радянська школа, 1983.– 192 с.

300. Слєпкань, З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів / З.І. Слєпкань. – К.: Зодіак ЕКО, 2000. – 512 с.

301. Смірнова-Трибульська, Є.М. Використання НІТН для комп'ютерної підтримки навчання математики в польській школі / Є.М. Смирнова-Трибульська // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Випуск 5. – 2002. – с.68-73.

302. Солодовников, А.С. Теория вероятности/ А.С. Солодовников. – М.: Просвещение, 1983. – 207 с.

303. Сорока, Л.І. Використання елементів історизму в курсі теорії ймовірностей / Л.І. Сорока// Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – Т.1: Теорія і методика навчання математики. – с.209-211.

304. Справочник по теории вероятностей и математической статистике /

В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

305. Сравнительная оценка естественно-математической подготовки выпускников средних школ России. – М., 1998.

306. Сравнительный анализ математической и естественно-научной подготовки учащихся основной школы России // Под ред. Г.С. Ковалевой. – М.: Российская академия образования, 1992.

307. Стандарт основного общего образования по математике // Математика в школе. – 2004. – № 4. – с.4-9.

308. Стандарт среднего (полного) общего образования по математике // Математика в школе. – 2004. – № 4. – с.9-12.

309. Степенко, Г.В. О преподавании теории вероятностей и математической статистики в школах Японии / Г.В. Степенко. – К.: АН УССР Ин-т математики, 1974. – 23 с.

310. Сторожук, Є.А. Професіонально орієнтоване викладання математичних дисциплін при підготовці сучасного податківця / Є.А. Сторожук, Ю.В. Коляда, А.І. Муніца // Матеріали VIII–ої міжнародної конференції ім. акад. М.П. Кравчука. – К.: НТТУ (КПІ). – 2000. – с.547.

311. Стрільченко, Н. Вступ до теорії ймовірностей / Н. Стрільченко // Математика в школі. – 1991. – № 1. – с.22-27.

312. Стругов, Ю.Ф. Основы теории вероятностей: учеб. пособие / Ю.Ф. Стругов, Т.М. Стругова. – Омск: изд-во ОМ ГТУ, 2000. – 58 с.

313. Студенецкая, В.Н. Новое пособие по теории вероятностей в основной школе / В.Н. Студенецкая, О.М. Фадеева // Математика в школе. – 2004. – № 7. – с.63-71.

314. Студенецкая, В.Н. Статистика и теория вероятностей на пороге основной школы / В.Н. Студенецкая, О.М. Фадеева // Математика в школе. – 2005. – № 6. – с.64-70.

315. Супрун, А.А. Элементы теории вероятностей: Учеб. пособие для учащихся 11-х классов школ с углубленным изучением курса математики

/ А.А. Супрун, В.Н. Супрун. – Сумы: Сумск. гос. ун-т, 2002. – 103 с.

316. Стучинська, Н. Задачі зі стохастики. Природничий напрям освіти / Н. Стучинська // Математика в школі. – 2007. – № 1. – с.34-38.

317. Стучинська, Н. Теорія та практика формування стохастичної культури / Н. Стучинська // Математика в школі. – 2006. – № 7. – с.11-15.

318. Тарнопольський, В.Г. Елементи теорії ймовірностей / В.Г. Тарнопольський, В.Г. Васильченко. – К.: Рад. школа, 1972. – 72 с.

319. Таточенко, В.І. НІТН в роботі з учнями, невстигаючими з математики / В.І. Таточенко // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – Випуск 4 / Редкол. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова.– 2001.– 230 с.

320. Теорія ймовірностей. Збірка текстових завдань / В.І. Жлуктенко, О.Г. Голуб (укл.). – К.: Міжнародний науково-технічний ун-т, 1997. – 64 с.

321. Терешин, Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя / Н.А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

322. Тарнопольський, В.Г. Теорія ймовірностей / В.Г. Тарнопольський, В.Г. Васильченко. – К.: Рад. шк., 1992.

323. Триус, Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах: дис... д-ра пед. наук: 13.00.02 / Черкаський національний ун-т ім. Богдана Хмельницького. — Черкаси, 2005. — 649 с.

324. Триус, Ю.В. Проблеми вивчення математичних дисциплін у коледжах та шляхи їх подолання / Ю.В. Триус, М.Л. Бакланова // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – Випуск 6. – 2003. – с.118-137.

325. Триус, Ю.В. Інформаційні технології у викладанні прикладних математичних дисциплін / Ю.В. Триус // Информационные технологии в учебном процессе: Сборник трудов четвертого научно-методического семинара. – Одесса: ЮГПУ им. К.Д.Ушинского, 2003. – с.120-123.

326. Триус, Ю.В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін: Монографія / Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-

Україна, 2005. – 400 с.

327. Трунова, О. Про вивчення початків теорії ймовірностей та елементів статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики / О. Трунова // Математика в школі. – 2005.– № 2. – с.40-47.

328. Трунова, О.В. Навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики: дис… канд. пед. наук: 13.00.02 / НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К., 2007. – 228 с.

329. Тюрин, Ю.Н. Преподавание теории вероятностей и статистики в школе по учебному пособию Ю.Н.Тюрина и др. «Теория вероятностей и статистика» / Ю.Н. Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко // Математика в школе. – 2009. – № 7. – с.14- 31.

330. Уваренков, И.М. Элементы теории вероятностей в курсе математики средней школы: Пособие для проведения факультативных занятий по теории вероятностей в средней школе / И.М. Уваренков. – Смоленск: Смол. гос. пед. ин-т им. К. Маркса, 1974. – 93 с.

331. Уваров, А.Ю. Новые информационные технологии и реформа образования / А.Ю.Уваров // Информатика и образование.– 1994.– № 3.– с.3-15.

332. Уилкс, С. Математическая статистика/ С.Уилкс. – М.: Наука, 1967. – 632 с.

333. Устименко, О.О. Використання нових інформаційних технологій при вивченні шкільного курсу математики / О.О. Устименко, О.П. Поручинська // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць в 3-х томах. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004.

334. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер: в 2-х т.; Пер. с пересмотренного третьего англ. издания. Ю.В. Прохорова с предисловием А.Н. Колмогорова. Том 1. – М.: Мир, 1984. – 527 с.

335. Фирсов, В.В. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплины: Автореф. дисс... канд. пед. наук. (13.00.02) / В.В. Фирсов. – М., 1974. – 27 с.

336. Флейвелл, Д.Х. Генетическая психология Ж.Пиаже / Д.Х. Флейвелл. – М.:

Просвещение, 1967. – 623 с.

337. Фридман, Л.Ф. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л.Ф. Фридман. – М.: Просвещение, 1983. – 158 с.

338. Фройденталь, Г. Математика как педагогическая задача: Книга для учителя / Г. Фройденталь. – М.: Просвещение, 1983.– 192 с.

339. Хайтгмурадов, М. Изучение теории вероятностей с использованием систем средств обучения (на факультативных занятиях в IX-X классах): Автореф. дис... канд. пед. наук. 13.00.02 / М. Хайтгмурадов. – К.: НИИ педагогики УССР, 1989 – 21 с.

340. Хеннекен, П.Л. Теория вероятностей и некоторые ее приложения / П.Л. Хеннекен, А. Тортра / Пер. С.И. Залгаллер, О.В. Щалаевского; под ред. Ю.В. Линника. – М.: Наука, 1974. – 472 с.

341. Хургин, Я.И. Как объять необъятное / Я.И. Хургин. – М.: Знание, 1979. – 191 с.

342. Черкасов, Р.С. История отечественного школьного образования / Р.С. Черкасов // Математика в школе. – 1997. – № 2-3.

343. Черних, Л.О. Вивчення стохастичної лінії шкільного курсу математики з використанням НІТ / Л.О. Черних // Теорія і методика навчання математики, фізики та інформатики: Збірник наукових праць. – Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2004.

344. Чибисов, Д.М. Задачи по математической статистике / Д.М. Чибисов, В.И. Пагурова. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1990.– 171 с.

345. Чугурян, С.С. Восприятие аксиоматических основ теории вероятностей (в 6-8 классах ср. общеобразовательной школы): Автореф. дисс.... канд. пед. наук / С.С. Чугурян. – Ереван, 1975. – 23 с.

346. Чусарев, А.М., Невероятная вероятность. О прикладном значении теории вероятностей / А.М. Чусарев, В.С. Холодний. – М.: Знание, 1976. – 128 с.

347. Шавальова, О.В. Реалізація компетентнісного підходу у математичній підготовці студентів медичних коледжів в умовах комп’ютеризації навчання: дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Національний педагогічний ун-т

ім. М.П.Драгоманова. — К., 2007. — 224 с.

348. Шавальова, В.І. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання математики у вищому педагогічному навчальному закладі / В.І. Шавальова // Тези Міжнародної конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь» (16 грудня 2002 р., Київ). – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2002. – с.101.

349. Швець, В.О. Міжпредметні зв’язки математики і фізики сьогодні / В.О. Швець // Тези Міжнародної конференції «Методика в теорії диференціальних рівнянь». – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2002. – с.96.

350. Швець, В.О. Міжпредметні зв’язки математики і фізики та астрономії в школі / В.О. Швець, Л.М. Бойко // Математика в школі. – 2001. – № 6. – с.21-25.

351. Шевцов, В.Е. Французская школа готовится к 2000 году / В.Е. Шевцов // Педагогика, 1992. – с.1-2.

352. Шефтель, З.Г. Теорія ймовірностей / З.Г. Шефтель. – К.: Вища шк., 1994. – 192 с.

353. Ширяев, А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев. – М.: Наука, 1980. – 640 с.

354. Шкіль, М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10-11 кл. серед. школи / М.І.Шкіль, З.І.Слєпкань, О.С.Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 1996. – 608 с.

355. Шкіль, М. І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. з поглибл. вивч. математики в середніх закладах освіти / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, Т.М. Хмара — К: Освіта, 2003. – 310 с.

356. Шмигевський, М. Навчання математики у Франції / М. Шмигевський // Математика в школі. – 2001. – № 6. – С.36 – 38.

357. Шмигевський, М. Про досвід викладання математики в технічному ліцеї НТУ «КПІ» / М.Шмигевський // Математика в школі, 1999. – № 1. – с.7-11.

358. Шмигевський, М. Коротка історія теорії ймовірностей // Математика в школі, 2009. – № 10. – с.40-45.

359. Шолохович, В.Ф. Информационные технологии обучения / В.Ф. Шолохович // Информатика и образование, 1998. – № 2. – с.5-13.

360. Шунда, Н.М. Элементарная стохастика в курсе математики VII-IX классов основной школы / Н.М. Шунда, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова // Математика в школе, 2003. – № 3. – с.36

361. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 256 с.

362. Яглом, И.М. Не отставать от требований времени / И.М. Яглом // Сборник научно-методических статей по математике (проблемы преподавания математики в вузах). – 1974. – вып. 4. – с.17.

363. http://consumersjournal.org/dovidnik/rozmiri-odyagu.html

364. http://www.nces.ed.gov/timss

365. http://eaja.net/TIMSS.aspx

366. http://universitates.univer.kharkov.ua/arhiv/2009_1/kholin/kholin.html

367. http://matstats.ru/smirnov.html

368. http://www.mon.gov.ua/main.php?query=education/average/prog12

369. Antoch, J., Čihák, M. (2007). Teaching probability at secondary schools using computers. In: 56th Session of the International Statistical Institute, Lisboa. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/isi56/IPM46_Antoch.pdf

370. Chadjipadelis T. 2003. Children's walk in probability and statistics from childhool to youth. The Proceedings of the 19th Panhellenic Conference on Mathematical Education, Veria, Greece, 27-40.

371. Hacking, I. (2001). An introduction to probability and inductive logic. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

372. Lynn A. Richbart. Integrated Mathematics after 25 Years // http://www.nctm.org/resources/content.aspx?id=1700.

373. Malchin Christian. Stochastic networks. Discrete and continuous time models: Diss. / Fakultat fur Mathematik, Informatik und Naturwiss. der Universitat Hamburg. — Hamburg, 2008. — 181 p.

374. Mathematics Program in Japan: Kindergarten to Upper Secondary http://www.mathnet.or.kr/mathnet/kms_tex/115217.pdf

375. Perelli DIArgenzio M. P. and F. A curriculum of probability and statistic in

italian secondary school (11-14). – Padua, ltaly ICOTS 2, 1986 // http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icots2/Dargenzio.Pesarin.pdf

376. Řezanková, Hana Symbolic Computing Systems in Teaching Statistics in the Czech Republic and Poland ISI, 56th Session, 2007 // http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/isi56/IPM46_Rezankova.pdf

377. Sheynin Oscar. Theory of probability and statistics as exemplified in short dictums. — B.: NG Verlag, 2006. — 161 p.

378. Thomas W., Judson. Japan: A Different Model of Mathematics Education // Contemporary Issues in Mathematics Education. MSRI Publications. Volume 36, 1999 // http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/369/370%20-%20369

379. Yuki Miura. New Development of Statistical Education in the Secondary - Level Education in Japan // International Statistical Institute, 52nd Session, 1999. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/5/miur0363.pdf .