**НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА**

На правах рукопису

КЛІНДУХОВА Валентина Миколаївна

УДК 373.5.016:512

ВИВЧЕННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття наукового ступеня
кандидата педагогічних наук

Науковий керівник:
ШВЕЦЬ Василь Олександрович,
кандидат педагогічних наук,
професор.

Київ – 2008

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

НО – наближені обчислення
ПППЦ – правила підрахунку правильних цифр
ШКМ – шкільний курс математики
ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології
МК - мікрокалькулятор

ВСТУП

Однією з найважливіших цінностей будь-якої розвиненої країни є рівень освіти, який вона спроможна надати для забезпечення соціальної та професійної самореалізації її юних громадян. Реалії сучасності, зокрема екстремалії ринкової економіки, гостро ставлять питання про пізнавальну та психологічну підготовленість сьогоднішніх учнів, а завтрашніх повноправних членів суспільства до складних умов життєдіяльності. Сучасній школі потрібно одночасно з розвитком розумових здібностей формувати в учнів готовність до дій в умовах майбутнього, основні тенденції якого можуть значно відрізнятись від сьогодення.

Ієрархічна супідрядність цілей навчання вимагає відповідних кроків і від математичної освіти. Основні цілі та завдання навчання математики в школі представлені в офіційних нормативних документах. Зокрема, у програмі з математики 12-ти річної школи зазначається, що математичні знання і вміння є не лише ціллю навчання, а й засобом розвитку особистості школяра та забезпечення його математичної грамотності. Опанувавши шкільним курсом учні повинні розуміти роль математики у житті, вміти висловлювати обґрунтовані математичні судження, а також використовувати математичні знання для задоволення пізнавальних і практичних потреб [177].

Проголошенні таким чином завдання освітньої галузі «Математика» спрямовують педагогічну науку до пошуку шляхів реалізації у шкільній практиці принципів єдності фундаментального та прикладного математичного знання. Їх об’єктивною складовою є наближені обчислення, під якими у шкільному курсі математики розуміють обчислення, що виконуються над наближеними значеннями. Відомо, що в математиці доводиться достатньо часто оперувати наближеними значеннями чисел та величин, а в межах її прикладних застосувань числові значення мають наближених характер майже завжди. До основних джерел наближених значень у шкільній математиці відносять результати округлень, практичних вимірювань та деякі результати підрахунків. Виконання наближених обчислень передбачає, по-перше, аналіз наближених даних щодо їх близькості до істинних значень, по-друге, виконання математичних дій за встановленими правилами і, по-третє, оцінку точності отриманого результату.

Загальноосвітня значущість та прикладна цінність наближених обчислень не потребує доведення. Однак аналіз стану шкільної практики свідчить, що на сьогодні традиційна схема їх вивчення не є дієвою і не відповідає сучасним освітнім пріоритетам. Це призвело до фактичного вилучення наближених обчислень із програми з математики 12-ти річної школи [177]. Неприпустимість такого стану речей зрозуміла. Наближені обчислення є частиною математичної підготовки учнів, а також широко використовуються під час вивчення інших шкільних дисциплін природничого циклу. На сьогодні методична системи їх вивчення має бути переглянута. Її оновлення необхідно вибудовувати на основі проголошених цілей навчання математики, із врахуванням досягнень наук психолого-педагогічного напрямку, сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, а також вивчаючи та використовуючи майже сторічний досвід впровадження наближених обчислень у шкільну практику.

Наближені обчислення як один із засобів загального розвитку особистості школярів є надзвичайно важливим, але водночас недостатньо розробленим питанням методики навчання математики. Частково воно розглядалось в дисертаційних дослідженнях Н.Ф.Єлизавєтіної [99], Р.А.Хабіба [280] (середина 60 -х років) та М.М.Мадбабаєва [167] (кінець 80-х рр.). Його актуальність підтверджується шкільною практикою, а також підкреслюється науковцями. Зокрема, вченими Інституту продуктивного навчання Російської академії освіти розроблено та представлено на міжнародному рівні схему параметрів, що визначають внесок, який може зробити математика у загальний розвиток учнів. До невеликого переліку відповідних тем з математики увійшли і наближені обчислення [14]. Це ще раз підтвердило думку про те, що на часі необхідним є вивчення наближених обчислень у контексті розвивального навчання. Зокрема, дослідження та використання їх можливостей як засобу активізації пізнавальних інтересів, розвитку дослідницького та дивергентного мислення, формування загальних розумових дій тощо.

Наближені обчислення є одним із засобів реалізації прикладної спрямованості навчання математики. У вказаній якості вони неодноразово ставали предметом дисертаційних досліджень різних років. Зокрема, у середині 70-х рр. у роботах С.А.Аллабергенова [9] та Р.А.Мусаеляна [201] розв'язувалась проблема посилення прикладної орієнтації навчання наближених обчислень у відповідності з освітніми програмами та загальносуспільними пріоритетами того часу. Проблема зворотного характеру, а саме –наближені обчислення як складова прикладної спрямованості навчання математики, частково розглядалась у дисертаційному досліджені М.А.Бугайової [39]. Її актуальність ще більше загострилась на сучасному етапі розбудови математичної освіти в Україні. Це пов'язано із фактичним виключенням розділу „Наближені обчислення" із програми з математики 12 – річної школи, про яке вже згадувалось вище. На думку З.І.Слєпкань таке „розвантаження" програми унеможливлює впровадження в школі прикладної спрямованості навчання та ідеї математичного моделювання навіть на найпростішому рівні [251]. Справді, зв'язок математики з її застосуваннями здійснюється за допомогою математичних моделей, тобто спеціального наближеного опису деякої проблеми, який дозволяє при її аналізі застосовувати формально-логічний апарат математики. Донедавна уявлення про математичне моделювання розглядалися серед основних вимог до математичної підготовки учнів наприкінці основної школи. Тепер їх перенесено на початок основної школи. Зокрема, в методичних рекомендаціях до вивчення математики в 5 класі 12-річної школи говориться про важливість формування в учнів умінь та навичок моделювання життєвих ситуацій за допомогою арифметичних операцій [238]. Це вимагає не лише обов'язкового вивчення, а й перенесення на більш ранній період навчального матеріалу, безпосередньо пов'язаного із математичним моделюванням, зокрема і наближених обчислень.

Передумовою досягнення розвивальних цілей, а також реалізації прикладної спрямованості навчання математики, є фундаментальна математична підготовка учнів. Її базову основу становлять вимірювальні та обчислювальні уміння і навички школярів, складовою яких є і наближені обчислення. У такому контексті наближені обчислення розглядались у роботах О.П.Овчаренка [211], А.Набієва [202], І.І.Пак [214], Н.В.Єлизаветіної [99], В.В.Міхєєва [197], Г.П.Бевза [17], [23], А.К.Цорієвої [285], Н.Буряк [44] та інших. В них усі дослідники одностайно приходили до висновку, що відповідні уміння і навички учнів необхідно не лише ґрунтовно формувати, а й робити це вчасно. Запізнілі дії в цьому напрямку та недостатня увага до наближених обчислень протягом вивчення математики в основній школі гальмують розвиток математичної культури в цілому, часто стають на заваді в опануванні іншими дисциплінами, а іноді і майбутньою професією.

Думка про те, що заради виконання найважливіших завдань вивчення математики в школі слід, як мінімум, „повернутися обличчям" до обчислювальної культури, зокрема і до наближених обчислень, починає на часі набувати актуальності. Сучасні методисти, зокрема, Ю.М. Колягін [191, с.97], З.І.Слєпкань [255], Н.Буряк [44], М.М.Білецький [28], наголошують, що відповідні способи обчислень та усвідомлення числових значень, які відбуваються в умовах ігнорування їх наближеного характеру, мимовільно залишаються в пам'яті школярів. Вони можуть стати і стають витоком проблем їх роботи з числами у старших класах, причому не лише на уроках математики. Лише усвідомлений підхід до обчислень, вибір доцільних способів роботи з числом сприяє формуванню пошукового мислення та навичок самостійної діяльності, які позитивно впливають на якість сприйняття учнями навчального матеріалу та розвиток їх особистості учня.

Недостатня увага до наближених обчислень і як до складової фундаментальної підготовки учнів, і у контексті прикладної спрямованості та розвивального навчання математики сприяє формуванню в учнів неправильного світогляду та приводить до формування в них негативного навчального досвіду. Пов'язані з ними „хибні стереотипи" не сприяють встановленню внутрішньопредметних, міжпредметних, перспективних зв'язків та зв'язків наступності, що ускладнює сприйняття учнями навчального матеріалу.

Проблема вивчення наближених обчислень в школі розглядалась не лише в роботах вищезгаданих дослідників. Наближені обчислення як математична теорія адаптована для вивчення у навчальних закладах почала розроблятись ще наприкінці XIX – на початку XX ст. В.І.Бернсом, А.Ф.Гавриловим [64], А.Л. Гольдіним [72], П.М.Гончаровим [73], П.О.Долгушиним [91], В.Н.Єрмаковим, О. М.Криловим, А.А.Леве, Ф.Сімашко, Н.С.Соколовим, В.М.Філіповим та іншими. Пізніше у 30–х рр. XX ст. проблему вивчення наближених обчислень, як складову математичної культури взагалі і обчислювальної культури зокрема, продовжили розглядати В.М.Брадіс [10, 32-35], А.І.Іванов [108], І.М.Кавун [111], М.Л.Франк [275] та інші. У 40-60 рр. дослідження продовжились у напрямку доведення необхідності вивчення наближених обчислень у шкільному курсі, а також визначення їх змісту та місця у програмі з математики (П.С.Алєксандров, А.Н. Колмогоров [7], С.П.Алєксахін [8], Ш.Н.Асанідзе [12], Л.А.Бобильов [30], В.І. Бєляєв [27], Б.М.Брєдіхін [36], М.Г.Васильєв [47-50], Ф.А.Горбушин [74], В.У. Грибанов [76-78], А.В.Грошев [79], Б.Є.Дворкін [86], Н.В.Єлізавєтіна [98, 99], І.Б. Лобанов [162-164], В.Г.Прочухаєв [239, 240], Н.Я.Прайсман [88, 225-227], С.П. Пулькін [241], В.Г.Соболєва [256], А.В.Суткова [258-261], Р.А.Хабіб [280-282], М. Н.Швець [291] та інші). У 70-80 рр. відповідні дослідження були спрямовані на удосконалення методики вивчення наближених обчислень. Цими питаннями займались І.Г.Адішев [1], Ф.М.Барчунова [13], А.Н.Бекарєвич [26] та інші.

Вибрані питання практики, теорії та методики вивчення наближених обчислень представлені у дисертаційних дослідженнях З.І.Слєпкань [252, 254] (тригонометричні обчислення), О.С.Дубинчук [94-96], В.М.Оксмана [212], Є.А. Лодатко [165], А.І.Єсікова [100], І.П.Фролової [277] (наближені обчислення як складова системи обчислювальних, графічних та вимірювальних навичок). Значна увага наближеним обчисленням приділялась також Г.П.Бевзом [17, 22-24], Ю.М. Колягіним [191], С.П.Чашечніковим [286], Д.М.Маєргойзом, О.С.Дубинчук [183], З.І.Слєпкань [253, 255] у роботах, що присвячені загальним питанням методики навчання математики в школі.

Незважаючи на ґрунтовний характер перелічених праць та корисні методичні розробки, що в них наводяться, нові суспільні умови та відповідно нові завдання освітньої галузі „Математика” потребують корекції існуючих шляхів розв’язування проблеми вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи. Зосередженість уваги саме на основній школі не є випадковою. Зазначений період є найтривалішим та найскладнішим у процесі розвитку особистості учня. Саме в основній школі, прийнявши естафету від початкової, треба формувати міцний інтелектуальний фундамент для забезпечення профільного навчання в старшій школі. Зниження уваги на цьому етапі навчання до наближених обчислень не відповідає проголошеним цілям навчання математики. Практика навчання математики в різних школах та класах, за різними діючими підручниками та навчальними посібниками свідчить про часті випадки виникнення в учнів обчислювальної безпорадності. Вона полягає в тому, що навіть ті учні, які показують високий рівень знань, вмінь та навичок, часто не можуть самостійно визначити план розв’язування, скласти відповідну математичну модель або правильно навести обґрунтовану відповідь у тих випадках, коли завдання на певних етапах розв’язування містить міркування, що пов’язані з наближеними обчисленнями (наближеними значеннями величин або наближеними методами). Такий психологічних бар’єр гальмує пізнавальну активність учнів, не сприяє ні їх загальному розвитку, ні підвищенню математичної підготовки, а також не дає в повній мірі реалізувати можливості шкільної математики по формуванню вмінь застосовувати набуті знання на практиці.

Враховуючи усе вищезазначене, а також результати проведеного констатуючого експерименту (тестування учнів в школах Дніпропетровська, Кіровограда та Кіровоградської області, Києва та Київської області, спостереження за їх навчальною діяльністю; спілкування та практичний досвід роботи зі студентами кібернетико-технічного коледжу, педагогічного та технічного університетів; анкетування, бесіди та спостереження за роботою вчителів математики) приходимо до висновку, що вдосконалення методичної системи вивчення наближених обчислень в основній школі є актуальною проблемою методики математики на сучасному етапі розбудови освіти в Україні. Існуючі недоліки у навчанні школярів, що пов'язані з відсутністю у сучасних програмах збалансованої та науково обґрунтованої методичної системи вивчення наближених обчислень, суперечать вимогам сучасної освіти щодо якомога повнішого використання шкільної математики з метою посилення пізнавальної активності та інтелектуального розвитку учнів, а також стають на заваді здійснення прикладної спрямованості навчання шкільного курсу математики. Необхідність розв'язання зазначених проблем і зумовлюють вибір теми дисертаційного дослідження ***„Вивчення наближених обчислень в основній школі”***.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана відповідно до тематичного плану науково-дослідницької роботи кафедри математики та методики викладання математики НПУ імені М.П. Драгоманова, напрямок наукового пошуку „Система методичної підготовки вчителя математики в педагогічному університеті”, номер державної реєстрації 0103В004016.

Тему дисертаційного дослідження було затверджено Вченою радою Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова (протокол №8 від 4.03.2004. року), а також рішенням бюро Ради з координації наукових досліджень у галузі педагогіки та психології в Україні (протокол № 4 від 28.04. 2004. року).

Об'єктом дослідження є навчання математики в основній школі.

Предмет дослідження – методика вивчення наближених обчислень в основній школі.

Мета дослідження – визначити, теоретично обґрунтувати та експериментально перевірити цілі і зміст, обрати відповідні методи і організаційні форми, а також створити засоби вивчення наближених обчислень в основній школі.

В основу дослідження покладено **гіпотезу**: впровадження науково обґрунтованої методичної системи вивчення наближених обчислень в основній школі в умовах особистісної спрямованості навчального процесу сприятимуть підвищенню математичної підготовки учнів, формуванню вмінь розв'язувати прикладні задачі, формуванню позитивних мотивів та інтересу до навчання.

Для досягнення поставленої мети й перевірки сформульованої гіпотези розв'язувались **завдання**:
1. Проаналізувати психолого-педагогічну, науково-методичну та навчальну літературу з проблеми дослідження; практичний досвід вчителів; стан володіння учнями відповідними знаннями уміннями та навичками з наближених обчислень.
2. Виділити і сформулювати цілі та методичні основи вивчення наближених обчислень в основній школі.
3. Визначити місце, зміст і обсяг вивчення учнями наближених обчислень в основній школі.
4. Дослідити можливості застосування різних методів, засобів та організаційних форм навчання наближеним обчисленням, з урахуванням досягнень психологічної науки та методики навчання математики відповідно до вимог і умов навчання математики в школі.
5. Експериментально перевірити дієвість та ефективність запропонованої методики.

Для розв'язування поставлених завдань були використані такі **методи дослідження:** ***теоретичні -*** системний та порівняльний аналіз психолого-педагогічної, науково-методичної та навчальної літератури з проблеми дослідження; класифікація, систематизація та узагальнення провідних ідей, що в ній викладені; аналіз та порівняння шкільних програм з математики різних років, а також відповідних підручників і навчальних посібників; ***емпіричні -*** спостереження за роботою учнів і вчителів, вивчення і аналіз передового досвіду вчителів; бесіди з учнями, абітурієнтами, студентами та вчителями; аналіз результатів самостійних та контрольних робіт з математики; проведення педагогічного експерименту (констатуючого, пошукового та формуючого); методи математичної статистики.

Методологічною основою дослідження є: теорія пізнання, діяльністна концепція навчання, теорія проблемного та розвивального навчання (П.Я. Гальперін, В.В.Давидов, З.І.Калмикова, Д.Б.Ельконін та ін.); психологічні теорії мислення (Л.С.Виготський, С.Л.Рубінштейн та ін.); принцип урахування індивідуальних особливостей учнів (З.І.Калмикова, Н.О.Менчинська); результати досліджень з проблеми розвитку пізнавальної активності учнів у процесі навчання математики (Л.С.Виготський, Н.О.Менчинська, Н.Ф.Тализіна); методика використання інформаційних технологій навчання математики (Ю.В.Горошко, М. І.Жалдак, Н.В.Морзе, С.А.Раков та ін.); теорія і практика реалізації прикладної спрямованості навчання математики (М.Я.Ігнатенко, Л.О.Соколенко та ін.); наукові здобутки з методики математики, зокрема психолого педагогічним основам навчання математики (Л.М.Фрідман, М.І.Бурда, З.І.Слєпкань, Ю.М. Колягін, Г.П.Бевз, Я.І.Грудьонов, П.І.Сікорський); Державна національна програма „Освіта" (Україна XXI сторіччя); Державний стандарт базової і повної середньої освіти в Україні (освітня галузь „Математика"); Закон України „Про освіту" та інші нормативні документи.

Під час створення методичного забезпечення дослідження нами було використано праці українських та російських математиків, методистів та вчителів практиків: В.М.Брадіса, А.В.Суткової, Ю.М.Колягіна, Г.В.Дорофєєва, А.Г.

Мерзляка, В.Б.Полонського, М.С.Якіра, В.Р.Кравчука, Г.М.Янченко, М.В. Підручної, Г.П.Бевза, Г.М.Возняка, Г.М. Литвиненка, М.П.Маланюка та інших.

Наукова новизна дослідження полягає у визначенні цілей, змісту навчального матеріалу та його структури, виборі адекватних методів навчання, організаційних форм та засобів, що в сукупності утворюють нову методичну систему вивчення наближених обчислень в основній школі, яка відповідає сучасним освітнім пріоритетам.

Теоретичне значення дослідження визначається тим що:

- сформульовано і обґрунтовано концепцію вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи;
- визначено психолого-педагогічні та методичні передумови, що лежать в основі вивчення наближених обчислень підлітками;
- створено науково-обґрунтовану методику вивчення теми «Наближені обчислення», яка може існувати в курсі математики основної школі і як окрема змістова лінія, і як складова інших змістових ліній.

Практичне значення дослідження полягає у розробці програми вивчення наближених обчислень учнями основної школи, а також конкретних методичних рекомендацій для вчителів щодо формування відповідних навчальних досягнень учнів під час навчання математики (5-6 класи), алгебри та геометрії (7-9 класи); обґрунтуванні дидактичних, психологічних та методичних передумов навчально-дослідницької діяльності учнів. Ідеї, що розроблені в дисертації, можна використовувати у процесі створення нових та вдосконалення чинних підручників . Матеріали та результати досліджень можуть бути використані вчителями у процесі навчання математики учнів основної школи, на курсах післядипломної педагогічної освіти вчителів математики, у процесі методичної підготовки студентів педагогічних спеціальностей.

Вірогідність результатів дослідження забезпечується методологічною і теоретичною обґрунтованістю вихідних позицій дослідження; відповідністю методів дослідження його меті, гіпотезі та завданням; кількісним та якісним аналізом емпіричних даних; результатами педагогічного експерименту.

Особистий внесок дисертанта в здобуття наукових результатів дослідження полягає в здійсненні аналізу науково-методичної літератури; розробці та впроваджені методики вивчення наближених обчислень; в теоретичному обґрунтуванні основних ідей та положень досліджуваної проблеми; опублікуванні одноосібних статей і тез за дисертаційними матеріалами. У працях, що написані у співавторстві, здобувачем проаналізовано теоретичне та практичне значення проблеми вивчення наближених обчислень, сформульовано висновки та методичні рекомендації, розроблено відповідне змістове наповнення.

Апробація і впровадження результатів дослідження здійснювалися протягом 2002- 2007 рр. Основні результати дослідження доповідались, обговорювались і знайшли схвалення на Всеукраїнській науково-практичній конференції „Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики” (Київ, 2004), Науковій конференції молодих вчених НПУ імені М.П.Драгоманова (Київ, 2004), Всеукраїнській науково-практичній конференції „Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищий школі” (Кривий ріг, 2005), Всеукраїнській науково-практичній конференції „Математика, економіка, інформатика: актуальні проблеми та методика викладання” (Кіровоград, 2005-2007 рр.), Міжнародній науково-практичній конференції „ Засоби реалізації сучасних технологій навчання” (Кіровоград, 2005), Міжнародній науково-методичній конференції „Евристичне навчання математики” (Донецьк, 2005), Всеукраїнській науково-методичній конференції „Проблеми математичної освіти” (Черкаси, 2007), Міжнародній науково-практичній конференції „Засоби і технології сучасного навчального середовища” (Кіровоград, 2007), Міжнародній науково-методичній конференції „Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє” (Київ, 2007), Всеукраїнському семінарі з проблем методики навчання математики в Національному педагогічному університеті імені М.П.Драгоманова (2005-2006 рр .).

Отримані педагогічні висновки та методичні рекомендації експериментально перевірено на практиці та впроваджено в практику роботи загальноосвітніх навчальних закладів м. Кіровограду (гімназія №9, довідка №299 від 27.08.08; загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №4, довідка №123 від 29.08.08; гімназії нових технологій навчання довідка №249 від 22.08.08) та Кіровоградської області ((Петрівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів, довідка №179 від 30.08. 08; Петрівська гімназія, довідка №175 від 14.06.08; Улянівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів; довідка №127 від 5.06.08; Комінтернівська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів; довідка №153 від 28.05.08).

Публікації. Основні положення та результати дослідження опубліковано в 20 працях, серед яких: 11 статей у наукових фахових виданнях ВАК України [120, 121, 127, 128, 131, 133, 134, 292-295] та 9 – у збірниках наукових праць та матеріалах конференцій [122, 123, 124, 125, 126, 129, 130, 132, 135].

Структура дисертації. Дисертація складається із вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (303 найменування обсягом 25 сторінок), та 18 додатків (обсягом 123 сторінки). Основний зміст дисертації викладено на 193 сторінках та містить 14 таблиць, 33 рисунки. Повний обсяг дисертації становить 342 сторінку.

РОЗДІЛ І. ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Ретроспективний аналіз проблеми вивчення наближених обчислень в школі

За словами Г.В.Лейбниця той, хто хоче обмежитись нинішнім, без знання минулого, ніколи його не зрозуміє. Наближені обчислення (НО) вивчаються в школі давно. Аналізуючи навчальну, науково-методичну літературу, періодичні видання, а також програми з математики різних років, робимо висновок, що на різних історичних етапах їх представлення в шкільному курсі математики (ШКМ) різне. Під різним представленням ми розуміємо зміни, які стосувалися місця в програмі, мети вивчення та змісту навчального матеріалу НО, які знаходили своє відображення в ШКМ. Такі зміни були невипадковими. В основному вони ініціювались станом розвитку обчислювальної техніки, вимогами суспільства до математичної підготовки підростаючого покоління, а також традиціями, які в той чи інший період панували у методиці навчання математики в школі.

Комплексний вплив названих факторів виступав і причиною, і рушійною силою перебудови вивчення НО в ШКМ як складової реформування шкільної математичної освіти. Саме з огляду на загальновідомі витки реформування ШКМ нами і був проведений ретроспективний аналіз проблеми вивчення НО в школі. У результаті виділено чотири етапи її розвитку. Перший – етап фрагментарних згадок про НО у шкільній математиці до початку 60-х років. Другий - етап реформування шкільної математичної освіти на початку 60-х років. Третій - етап реформування ШКМ наприкінці 60-х на початку 70-х років. Четвертий - етап реформування шкільної математики наприкінці 70-х на початку 90-х років.

Зупинимось детальніше на аналізі усіх вищеназваних етапів. Його основною метою буде виявлення причин та наслідків, переваг та недоліків, досягнень та „глухих кутів”, які супроводжували вивчення НО в ШКМ. З’ясування цих принципових питань допоможе, по-перше, запобігти помилок минулого, а по-друге, трансформувати певні досягнення минулого в сучасний навчальний процес у відповідності до вимог сьогодення.

Початком першого етапу можна вважати середину XIX ст., тобто період, коли почали з’являтись думки про те, що НО можуть і повинні стати складовою математичної освіти. На це вказують публікації в наукових виданнях, а також навчальні посібники, які вийшли в світ у цей період. Згадка про них, їх зміст та аналіз наведено у роботах В.М.Брадіса [32], І.Б.Лобанова [163] та О.П.Долгушина [91]. Зокрема, згадується про статті „Теория численных приближений” В.І.Бернса (1857 р.); ”Вычисления по приближению” Ф.Сімашко (1857 р.); „Приближенные вычисления” А.А.Леве (1884 р.) а також „Два правила приближенных вычислений" В.Н.Єрмакова (1894 р.). Дослідники стверджують, що навчальні посібники того часу мали різний рівень доступності. Одні з них, зокрема „Краткий очерк теории приближенных вычислений, поясненный примерами и задачами из геометрии" Н.Желеховського (1880 р.) та „Лекции о приближенных вычислениях" О.М.Крилова (1911 р.), відзначались строгістю подання матеріалу і були розраховані на математично підготовлених читачів. Інші – призначалися для середніх навчальних закладів та самоосвіти вчителів. Вони містили спрощене викладення теоретичного та практичного матеріалу, яке супроводжувалось нестрогими обґрунтуваннями та численними прикладами. До останніх можна віднести „Приближенные вычисления" В.Н.Єрмакова (1894 р.) та П.М.Гончарова (1905 р.); „Вычисление формул по данному приближению" Н.С.Соколова (1898 р .); „Теория и практика элементарных приближенных вычислений" В.М.Філіпова (1909 р.) та „Практические вычисления" С.Придатко (1915 р.). Аналізуючи перші три з них і порівнюючи з аналогічними зарубіжними виданнями, П.О.Долгушин вказував, що вони були недосконалими як в науковому, так і в методичному плані , містили ряд істотних помилок та хибних висновків [91, с. 69]. В своїй же роботі він намагається уникнути вказаних недоліків, зокрема, узагальнюючи власний десятирічний досвід викладання НО, а також презентує розроблену ним теорію приросту, яка є дуже близькою до сучасного методу меж.

Відомий підручник арифметики того періоду А.П.Кисельова також містив відомості з НО. Вперше він був опублікований у 1884 році і вже починаючи з четвертого видання містив параграф „Наближені обчислення". Запропоновані в ньому правила, на думку В.М.Брадіса [32, с. 208] виявилися надто громіздкими, через що і „не прижилися на практиці". В подальших перевиданнях книги тема „Наближені обчислення" не була представлена.

На початку ХХ ст. публікуються роботи П.О.Долгушина „Вычисления по приближению" (1908 р.) та Н.М.Абрамова „Краткие сведения о приближенных вычислениях" (1909 р.). Що стосується навчальних програм, то НО окремими темами містяться у програмах 1908, 1918 рр., а також в програмах педагогічно-експериментальних періодів 20-х років.

Закономірним наслідком введення НО в ШКМ є їх поява і в курсах математики вищих навчальних закладів. Так, за дослідженнями І.Г.Булавко, відомо, що в програмі з математики для першого загальноосвітнього курсу Вітебського педагогічного інституту в 1923-24 н.р. було відведено біля 15 лекцій на ознайомлення з НО [40].

У роботах дослідників часто згадується про відображення НО в програмах з математики, які складено на основі так званої „схеми ГУСа" (Государственного ученого совета Наркомпроса) (додаток Б.1.). У програми з математики, які прийшли на зміну програмам ГУСа, НО не були включеними. У публікаціях того часу (30-ті рр. ХХ ст.), присвячених критичним оглядам нових програм, можна знайти зауваження і щодо відсутності в них НО. Так, на науково-методичній нараді вчителів математики середньої школи, яка проводилась у 1935 р., одна із доповідей була присвячена обговоренню питання про те, чи необхідно питання про НО розглядати як окремий розділ і в якому класі це слід робити [298],[299].

Аналізуючи причини виключення НО із ШКМ на даному історичному етапі, дослідники констатували наявність різних точок зору з цього приводу. На думку одних - НО є недоступними для розуміння учнів, а розробка методики їх вивчення в школі є задачею, яка принципово не може бути вирішеною. Інші вважали, що вивчення НО в школі є вкрай бажаним, але неможливим через брак часу та перевантаження навчальних програм (зокрема, такої думки дотримувались автори "Методики викладання математики" за редакцією С.Є.Ляпіна та С.В.Філічєва). І. М.Кавун [111] та А.В.Суткова [261] вважали, що основною причиною виключення НО із ШКМ стала недостатня кількість методичної літератури, а також формальний підхід при складанні програм того часу. В.М.Брадіс заперечує цю думку [32, с.8]. Натомість висуває гіпотезу про так звану "силу традицій", згідно якої НО "не вписувались" у шкільну програму з математики. На це вказує і досить великий перелік навчально-методичної літератури та публікацій того часу з НО. Зокрема дослідники згадують статті П.О.Долгушина (1925р.), В.С. Галицького (1926 р.), В.Балаліна (1928 р.), К.Вольвевра (1929 р.), В.У.Грібанова (1938 р.), а також роботи А.П.Фандер Фліта (1922), Д.Селіванова (1922р.), Е.А. Ремеза (1923 р.), А.П.Рудіна (1924 р.), І.Н.Богословського (1925р), Я.С.Безиковича та А.Фрідмана (1925, 1941р.р.), М.І.Щетініна (1926 р.), І.Н.Овчиннікова (1928р.), А.Є.Міловідова (1931 р.), Б.А.Тулінова та Я.Ф.Чєкмарьова (1940 р.). Деякі роботи того періоду збереглися і до нині, зокрема А.Л.Гольдіна [72], А.Виттінга [52], А.І. Іванова [108], А.С.Боженко [31], І.Ф.Ладона [156], Ф.Калиновича [112], М.Л. Франка [275], Н.В.Кєллуяла [229], А.Ф.Гаврилова [64] та І.М.Кавуна [111]. Остання з цих робіт вважається дослідниками найбільш повним та систематизованим курсом НО того часу. Посилання на неї можна зустріти майже в кожному дослідженні з НО і нині. Особливої уваги заслуговують роботи В.М. Брадіса, які почали виходити починаючи з 1924 р. і були розраховані як на студентство, так на учнів різного віку. Детальний аналіз робіт В.М. Брадіса наводиться ним самим [34], [32], а також в дисертаційному дослідженні І.В. Лобанова [163].

Роблячи висновок зазначимо, що по завершенню першого етапу, який хронологічно об'єднує період з середини XIX ст. по середину XX ст., так і не було створено цілісної, науково обґрунтованої методичної системи вивчення НО у ШКМ. Але епізодичні спроби викладання відомостей з НО у різних навчальних закладах, науково-дослідницька робота видатних вчених, а також їх опубліковані роботи поклали початок і стали першоосновою подальшого розвитку НО як складової ШКМ.

Початком другого етапу можна вважати публікацію відомої статті П.С. Александрова та А.М.Колмогорова [7] у 1941 році. Вона являла собою один із розділів майбутнього шкільного підручника з алгебри і містила розробку введення усіх трьох основних методів НО. Через трагічні події повоєнного періоду повернутися до розглядання проблеми вивчення НО у ШКМ стало можливим лише на початку 50-х рр. В цей період відбувається два послідовні витки реформування математичної освіти: перший в середині 50-х років, а другий - на початку 60-х (додатки Б.2., Б.3.).

У статтях, які були опубліковані до 1954 р. (тобто до початку першого реформування), автори, констатуючи невирішеність проблеми визначення місця, обсягу та методичного забезпечення НО в школі, пропонували власні методичні розробки. Спільною рисою таких розробок була прихильність виключно до методів нестрогого врахування похибок, а також критика “круглих відповідей”, які домінували в шкільних підручниках та задачниках.

Питання знаходження навчального часу на вивчення НО кожен з авторів вирішував по-своєму. Так С.В.Філічєв [273] пропонував використовувати час, що вивільниться за рахунок перенесення певної частини матеріалу із 5 в 6 класи (мова йде про 1946-47 навчальний рік). М.Г.Васильєв в серії своїх статей [47-50] пропонував систему бесід, які мають супроводжувати програмовий матеріал. В.У. Грибанов [76], [77] тему “Наближені обчислення” (15-20 год.) планував реалізувати за рахунок супутніх тем 5 класу, а також економії часу, яка, на його думку, обов’язково повинна відбутись при подальшій раціоналізації обчислень.

Усі вищеназвані автори вказували на непідготовленість вчителів до викладання НО. До їх думки приєднується також і А.В.Суткова, присвячуючи детальному аналізу цього питання один із параграфів свого дисертаційного дослідження [259, с. 178]. На цій проблемі наголошував також В.М.Брадіс. Він пропонував для її вирішення програму з елементарної математики для І курсу студентів фізико-математичних факультетів, яка містила розділ “Теорія і практика обчислень” [32, с. 22], а для вчителів-практиків методичні посібники власного авторства [33], [35]. У першому з них увага приділялася виключно методиці введення правил підрахунку правильних цифр (ПППЦ) (звісно окрім методики введення основних понять), а вже в другому – висвітлені усі три основні методи НО: ПППЦ; метод меж; метод меж похибок.

Нова програма з математики 1954 р. не передбачала введення НО. Саме тому провідною ідеєю публікацій післяреформеного періоду стала думка про те, що впровадження політехнічного навчання є неможливим без НО, а їх відсутність в ШКМ є прямим порушенням вимог нової програми щодо посилення взаємозв’язків теорії з практикою [90], [114], [157], [182]. Аналогічними ідеями були пронизані і дисертаційні дослідження цього періоду, зокрема ті з них, які частково або повністю присвячувались проблемам вивчення НО в ШКМ (В.У. Грибанов, В.М.Брадіс, О.С.Дубинчук [94], І.Б.Лобанов [163]).

Методична література міжреформеного періоду (після реформи 1954 р. і до початку 1960 р.) представлена роботами О.В.Грошева [79], Б.Є.Дворкіна [86], Б.М .Брєдіхіна [36], В.Г.Соболєвої [256] та І.К.Шевченка [297]. В своїх роботах ці автори розглядають методику введення провідних понять, а також пропонують розподіл матеріалу з НО, починаючи з п’ятого класу. Термінологія, яку використовують автори, значною мірою різниться, як власне і методи НО, які вони пропонують для вивчення. Так В.Г.Соболєва та І.К.Шевченко пропонували обмежитись вивченням лише методів з нестрогим врахуванням похибок. О.В. Грошев окрім цього припускає можливість вивчення методу меж в старших класах. Б.М.Брєдіхін та Б.Є.Дворкін розглядають в своїх роботах методи зі строгим врахуванням похибок (метод меж та метод меж похибок), а вже базуючись на них, пропонують ПППЦ, які вони як і деякі інші дослідники того часу називають практичними правилами НО.

В 1959-60 рр. відбувається публікація проекту шкільної програми з математики, а також і самої програми (додатки Б.2., Б.3.). В них розділом „Наближені обчислення" розпочиналося вивчення математики у 6 класі. Згідно проекту для цього відводилось 12 год., а вже згідно остаточної програми – 16 год. Основним і єдиним методом НО пропонувались ПППЦ.

Публікація зазначених нормативних документів супроводжувалась широким дискусійним обговоренням на сторінках періодичних видань. Майже половина статей містила позитивні відгуки щодо введення НО в ШКМ, інші – взагалі не торкалась цієї проблеми. У вказаних позитивних відгуках мали місце і певні зауваження. Зокрема йшлося про недостатню конкретику у вказівках та вимогах програми щодо поступового та систематичного ознайомлення учнів із НО протягом навчання в основній та старшій школі, а також під час розкриття джерел отримання наближених значень. Ряд інших публікацій були відображенням роботи передових вчителів та методистів. В них автори, зокрема Ф.О.Горбушин [74], К.І. Нєшков [206], М.В. Парцхаладзе [215], В.І. Бєляєв [27], С.П. Алексахін [8], М.М. Лепський та Н.Я.Прайсман [158], висвітлювали свій досвід викладання НО в школі та вносили конкретні методичні пропозиції. Щодо розподілу навчального матеріалу з НО за роками навчання, то в статтях, які передували офіційному плануванню, він є авторським і значною мірою різниться. А вже після публікації нової програми з математики автори повністю узгоджують власне планування матеріалу з офіційними вимогами.

Аналогічна тематика відображена і на сторінках методичних посібників того часу. Зокрема у роботах В.М.Брадіса [34] та В.І.Грібанова [78] після ПППЦ розглядається також і метод меж для викладання його у старших класах у зв'язку з темою „Нерівності", як це і передбачається програмою. Окрім цього, в роботі В.І .Грібанова наводиться порівняльний аналіз термінології та збірник задач з НО. Методичний інтерес являє собою також книга І.К.Андронова та В.М.Брадіса „Арифметика" [10]. За задумом авторів вона мала бути підручником для середньої школи. Однак враховуючи розбіжності її змісту з програмою, книга отримала статус посібника для вчителів. Методичні пошуки цього періоду представлені також роботами Н.П. Лещьової [160], В.Г.Прочухаєва [239] та В.М.Брадіса [32], а також дисертаційними дослідженнями Ш.Н.Асанідзе [12], Р.А.Хабіба [280], А.В. Суткової [259], Н.Я.Прайсмана [227], Л.О. Бобильова [30], Н.В.Єлізавєтіної [99]. В них значна увага приділяється історії введення НО в ШКМ, аналізу термінології та навчально-методичної літератури. Якщо у роботах В.Г.Прочухаєва [239] та В. М.Брадіса [32] представлені усі три основні методи НО, то думки авторів дисертаційних досліджень з цього приводу різняться. Більшість з них, узгоджуючись з вимогами програми (вивчення лише ПППЦ), займалися пошуками методологічних шляхів удосконалення їх впровадження. Наприклад, Р. А.Хабіб [280] пропонував систематично використовувати практичні роботи на уроках математики, а також приділяти значну увагу „навчальним джерелам НО". Інші дослідники висловлювались або із різким запереченням введення в ШКМ методів зі строгим врахуванням похибок в межах восьмирічної школи (зокрема, Л .О.Бобильов [30]), або, навпаки, вважали, що саме вони (точніше метод меж) повинні відігравати провідну роль в ШКМ (зокрема, Н.В.Єлизавєтіна [99]).

Підсумовуючи відмітимо, що по завершенню другого етапу, який ми пов'язуємо з реформуваннями 1954 та 1960 рр., було досягнуто офіційного впровадження НО у ШКМ. Однак при цьому проблема обрання змісту НО в ШКМ, а відповідно й інших елементів методичної системи навчання залишилася відкритою. Над її розв'язуванням продовжували активно працювати як вчені-методисти так і вчителі практики.

Своєрідним каталізатором модернізації шкільної математичної освіти (зокрема стосовно наявності в ній НО), а відповідно і початком третього етапу, стало ще на початку 60-х рр. оприлюднення результатів науково-методичних пошуків фахівців (наприклад Р.І.Матюгіна [180], Н.Я.Прайсман [226]), а також результатів їх практичного впровадження ([210], [218] та інші). Після невеликої перерви несміливі зауваження щодо проблемних моментів вивчення НО в ШКМ, набувають в 1964 році масштабів всесоюзної дискусії, де висловлювались діаметрально протилежні точки зору.

Зокрема, щодо змісту НО в ШКМ, то одні фахівці вважали, що ПППЦ є цілком науково та методично обґрунтованими і наполягали на їх збереженні у шкільній математиці. Інші критикували імовірнісний характер ПППЦ, вважали їх вивчення у ШКМ науково та методично недоцільним. Замість ПППЦ вони пропонували основним методом НО у ШКМ обрати метод меж.

Стосовно місця НО в ШКМ, то неякісне їх засвоєння на початку 6 класу одні з фахівців пов'язували з віковими особливостями учнів, інші - із недоліками методики введення теми. Саме тому перші з них пропонували перенести НО в 7-8 класи, а другі вважали можливим розпочинати вивчення цього розділу в 5 класі, але за певного методичного удосконалення.

Не дивлячись на розбіжність поглядів з вищенаведених питань, учасники дискусії прийшли до таких висновків. По-перше, на їх думку учні не отримували достатньої пропедевтичної підготовки, що приводило до формування хибних стереотипів, а також ускладнювало вивчення теми в подальшому. По-друге, вони вважали, що необхідно внести ряд істотних змін, спрямованих на більш раціональний відбір та розміщення відповідного програмового навчального матеріалу: засуджувалась концентрація теоретичних відомостей в межах одного розділу, а також його розміщення на початку навчального року. По-третє, за висновками дослідників програми та навчальні посібники того часу не розкривали шляхів подальшого застосування НО. Алегорично фахівці називали останній факт "відсутністю естафетної палички", за допомогою якої навички з НО починали б працювати.

У проекті програми з математики 1967 р., а також у самій програмі 1968 р. враховано перші два із вищенаведених зауважень (додатки Б.4., Б.5.): спроба пропедевтичної роботи відбувалась на початку основної школи; основний матеріал з НО певним чином розподілявся по 7 та 8 класах; вивчення НО відбувалося всередині навчального року; пропонувалося вивчення усіх трьох основних методів НО (метод меж у 7 класі, метод меж похибок та ПППЦ у 8 класі); на передові позиції виходили методи строгого врахування похибок, уособлюючи в собі як зміст навчання, так і засіб для доведення ПППЦ.

Публікація проекту програми та самої програми з математики супроводжувалась жвавими обговореннями на сторінках періодичних видань, але цього разу в жодній зі статей не зустрічаємо матеріалу, який би стосувався НО, що пов'язано із поступовістю переходу на нові програми та підручники (додаток А.1). Однією з основних задач реформування шкільної математики (у тому числі і НО) ставало встановлення відповідності ШКМ рівню наукових знань того часу і водночас усунення перевантажень школярів навчальними заняттями. У зв'язку з цим особлива увага під час навчання математики зверталась на більш наочне та елементарне введення понять, а також на необхідність збільшення кількості вправ на закріплення матеріалу.

Реформування шкільної математичної освіти кінця 60-х початку 70-х рр., так само як і реформування попереднього періоду, гальмувалося так званою „кадровою проблемою". Більшість вчителів виявились неготовими працювати за новими програмами. Впровадження нового змісту навчання з НО вимагало від них певного рівня математичної підготовки. Для майбутніх вчителів математики, тобто студентів педагогічних вузів, ця проблема розв'язувалась внесенням відповідних змін у навчальні плани. Так, за дослідженнями Ш.Н.Асанидзе [12, с. 6], в курсі елементарної математики педвузів цілий семестр почав відводитись на вивчення НО. Що ж стосувалося вчителів-практиків, вищезгадану проблему планувалось вирішити за рахунок їх активної самоосвіти. Для цього на сторінках періодичних видань велася публікація фрагментів нових підручників, тематичного планування матеріалу з математики та прикладів контрольних робіт. Відбувалося поновлення навчально-методичної літератури, яке на базі уже існуючих робіт та дисертаційних досліджень спрямовувалось на подолання численних труднощів, що виникали при вивченні НО в ШКМ.

Так, у 1971 та 1977 рр. виходять посібники з методики викладання математики Г.П.Бевза. В першому з них [22, с. 262-266] основна увага приділяється методу меж, а також робиться порівняльна характеристика вивчення НО за новими (1968 р.) та старими (1960 р.) програмами. В наступному ж виданні автор приділяє увагу усім трьом основним методам НО, підкріплюючи викладення прикладами та зауваженнями [23, с. 197-201]. Особливий інтерес становлять роботи А.Н.Бекарєвича [26], С.П.Пулькіна [241] та В.Г.Прочухаєва [240], які на нашу думку є своєрідним узагальненням практичного досвіду та науково-методичних досліджень цього періоду. Питання фрагментарної пропедевтики НО у 4 класі розглядаються у посібнику О.С.Дубинчук [95, с. 86-88], назва якого співзвучна з дисертаційним дослідженням автора [91]. Цінний досвід являють собою також методичні посібники авторів, дисертаційні дослідження яких ми розглядали раніше, зокрема Н.В.Єлизавєтіної [98], А.В. Суткової [258],[260] та Н.Я.Прайсмана [225]. Що ж стосується дисертаційних досліджень цього періоду, зокрема С.А.Аллабергенова [9], Р.А.Мусаеляна [201], І. Г.Адішева [1], то їх провідною думкою була спроба вирішення проблеми прикладної орієнтації вивчення НО.

Підводячи підсумки зазначимо, що по завершенню третього етапу, який ми пов'язуємо із модернізацією шкільної математичної освіти наприкінці 60-х рр., вважалося вирішеним питання пропедевтики, обрання та розміщення змісту НО в

ШКМ. Однак актуальними залишились проблеми подальшої розробки та удосконалення методики вивчення НО. Першочерговими з них виявилися забезпечення доступності вивчення НО в ШКМ, а також взаємозв'язок НО зі змістом загального курсу математики та інших дисциплін.

Черговому реформуванню математичної освіти, а відповідно і *четвертому етапу,* було покладено початок у зв'язку з постановою 1978 р. "Про подальше удосконалення навчання, виховання учнів загальноосвітніх шкіл та підготовки їх до праці". В ній наголошувалося на існуванні двох основних недоліків середньої освіти того часу: перевантаженість та відсутність необхідної трудової підготовки. У зв'язку з цим було вирішено організувати більш ефективне трудове навчання (збільшивши вдвічі кількість годин на його вивчення), а також скоротити зміст навчального матеріалу з інших дисциплін (у тому числі і математики).

Що стосується математичних дисциплін, то об'єктивною передумовою такого стану речей, на думку Н.Я.Віленкіна [51], виявилося порушення принципів наочності та доступності навчання. Зокрема він вказував, що строгість подання матеріалу, яка пов'язана із загальносвітовими тенденціями за "осучаснення шкільної математики та зближення її з досягненнями математичних наук", перетворилася із засобу в самоціль, що істотно вплинуло, як на зміст, так і на стиль побудови ШКМ.

Іншої думки щодо причин поспішного реформування шкільної математики, дотримувалися Р.С.Черкасов [287, с.76] та Г.Д.Глейзер [70]. Зокрема вони пов'язували його з певними політичними моментами. Саме у зв'язку з ними, на сторінках періодичних видань було організоване широке псевдогромадське засудження нових програм з математики. Прогресивна математична спільнота виступала за те, щоб певний час апробувати нові програми, з'ясувати та ліквідувати конкретні її недоліки. Але рішення високих інстанцій того часу, яке засуджувало модерністський курс математичної реформи, не підлягало перегляду. Усі постреформістські дії в наступні роки (про них піде мова далі) стали іменуватись "удосконаленням шкільних програм та підручників", методисти ж їх називали "діями по згортанню реформ в галузі викладання математики". Зокрема, на думку Р.С.Черкасова та А.К.Цорієвої, вони не тільки призупинили прогресивні тенденції розвитку, але й здебільшого відкинули назад шкільну математичну освіту нашої країни [287], [70], [285, с. 38].

Окрім політично-ідеологічного тиску, фахівці виділяють також більш глибинні причини, які негативно вплинули на впровадження програми з математики 1968 р. [70]. Першою причиною був так званий "принцип єдиності школи", тобто, говорячи мовою сучасної методики, - відсутність профільної та рівневої диференціації. Другою причиною методисти називають "невідповідність кадрового ресурсу" високому рівню оновленої математичної освіти. Зокрема вони відмічали, що спроба "стрибкоподібно" модернізувати зміст ШКМ, повідомивши при цьому більшості вчителів мінімальний обсяг окремих знань із нових розділів програми, була приречена на неуспіх: і вчителі, і учні вчилися одночасно.

Зупинимось детальніше на відображенні відомостей з НО в ШКМ того часу. Після публікації на сторінках періодичних фахових видань вищевказаної постанови, майже одразу з'являються проекти нових програм з математики. На відміну від реформувань шкільної математики попередніх періодів, таких проектів було три. З'явилися вони майже одночасно у 1978-79 рр., тому при подальшому обговоренні ці проекти отримали назви: проект 1 [232] (додаток Б.6.), проект 2 [233] (додаток Б.7.) та проект 3 [234] (додаток Б.8.). В них були відображено найрізноманітніші ставлення щодо вивчення НО в ШКМ. В контексті аналізу подій цього періоду, можна припустити, що провідним принципом, яким керувалися укладачі проектів програм з математики у виборі пріоритетності методів НО в ШКМ, було таке: обрати і, в деяких випадках обґрунтувати будь-які комбінації методів НО, при цьому в жодному разі не повторюючи програми з математики 1968 р.. При обговорені цих проектів проблеми вивчення НО в ШКМ майже не підіймалися.

Перед публікацією вищевказаних проектів програм з математики в чинній програмі того часу було зроблено ряд змін. Зокрема, рекомендовано спочатку часткове скорочення, а потім і остаточне виключення відомостей про НО із курсу алгебри 8 класу [208], [170], [172]. Часткове скорочення планувалось за рахунок виключення із теми "Наближені обчислення" питання "Оцінка похибок результатів дій", а також вивчення дій з наближеними даними за ПППЦ без посилань на теореми про границі похибок. А вже через місяць було вирішено повністю сконцентрувати матеріал з НО у курсі алгебри 7 класу у вигляді окремого розділу. В ньому залишилося лише два методи НО: метод меж і ПППЦ. Їх наявність вважалась цілком достатньою для створення можливості виконання НО при розв'язуванні відповідних задач в курсі математики та суміжних дисциплін. Виключення із програми методу врахування границь похибок коментувалося його невідповідністю віковим можливостям семикласників. Саме в такому вигляді (додаток Б.9., Б.10.) з певними незначними корективами НО продовжили своє існування у ШКМ до середини 80-х років. Причому корективи вносились щорічно у вигляді методичних листів, які публікувались на сторінках журналу "Математика в школі" і мали термін дії – один навчальний рік.

Однією з причин цих коректив було впровадження у шкільний навчальний процес мікрокалькуляторів (МК) (початок 80-х) та комп'ютерів (середина 80-х років). На цьому особливо наголошували Н.Я.Віленкін [51,с. 13] та Ю.М.Колягін, [139]. Питання використання МК під час вивчення НО частково розглядатись в роботах А.К.Цорієвої [285, с.161], З.М.Литовченко та Н.В.Єлизаветиної [161], В.П .Демковича та Н.Я.Прайсмана [88], С.С.Мінаєвої [195], а також відображалися у шкільних програмах з математики 1985 р. [235] та нормативних документах [209]. Однак на практиці питання співіснування НО та МК в ШКМ фактично залишалося відкритим. Спроба розкриття методологічного підґрунтя цього питання наведена у дисертаційному дослідженні Дао Тхай Лай [84].

Вищезгадана програма з математики 1985 р. потребує окремої уваги. Її впровадження відбувалося ще більш нетрадиційно, ніж попереднє реформування. По-перше, була опублікована одразу програма з математики, а не її проект, так як це робилося традиційно. По-друге, чітко вказувалась дата переходу на ці нові програми – 1986/87 н.р. (тобто вже наступний навчальний рік), що робило, на думку методистів, безглуздим сам факт обговорення цієї програми [244], [198]. І, по-третє, опубліковане тематичне планування навчального матеріалу з математики, дата якого збігалася як з виходом самої програми, так і з датою переходу на ці програми, ніяким чином не узгоджувалась з новою програмою 1985 р. (додаток Б.10, Б.11.). Навіть структурою, представлення НО в них є різним . Згідно програми воно має бути окремою темою, а згідно реального тематичного планування, навчальний матеріал розподілено по різних класах (згідно чергової редакції чинних підручників).

Аналогічний розподіл матеріалу з НО по різних класах та залежність від чинних альтернативних (варіативних) підручників для 5 та 6 класів спостерігається і в програмах 1989 та 1992 рр. (додатки Б.12., Б.13.) [236], [237]. Така сама залежність, але ще більш виражена властива і програмі з математики 1996 року (три підручники для 5 та 6 класів; два підручники для 7, 8 та 9 класів).

Характерною рисою цих програм є невизначеність щодо методів НО, які повинні вивчатися у ШКМ. Так у програмах 1989 року спостерігається чітка вказівка щодо вивчення ПППЦ. Що ж стосується методу меж, то про його наявність в програмах можна судити лише за непрямими вказівками [236, с. 54, с. 65]. Аналогічна ситуація з методом меж спостерігається і у програмах 1992 року, але при цьому відсутні вказівки про ПППЦ [237]. Звернення до методичної літератури того часу також не дає однозначної відповіді на ці питання. Так, в роботі Г.П.Бевза згадується, що у кінці 8 класу з учнями розглядаються ПППЦ [24 , с. 226], а О.С.Дубинчук констатує їх вивчення на початку 7 класу і наводить відповідні розробки уроків [96, с. 77]. Що стосується методу меж, то про нього не йдеться в жодній з цих робіт.

Згідно сучасної методичної літератури [253, с. 16], до 1991/92 навчального року школи України працювали за програмами, затвердженими Міністерством освіти СРСР, які у 1986 році було розроблено з урахуванням потреб модернізації ШКМ і досвіду впровадження попередніх програм. У 1991 р., спираючись на чинну програму, в Україні запропонували перехідну програму, розраховану на найближчу перспективу. Програма передбачала скорочення часу на вивчення математики у 5-9 класах, а також вивчення окремих тем курсу з різним ступенем повноти. Майже весь матеріал з НО стає не обов’язковим для вивчення усіма учнями (теми записано у квадратних дужках). Цьому передують методичні рекомендації фахівців щодо розвантаження програми за рахунок оглядового вивчення теми “Наближені обчислення”: „При вивченні теми можна відмовитись від вироблення навичок знаходження абсолютної та відносної похибок, а також виконання дій над наближеними значеннями” [192].

Публікації на сторінках періодичних видань, що супроводжували етап реформування шкільної математичної освіти кінця 70 - початку 90 рр., в основному стосувалися тематичного планування навчального матеріалу з урахуванням щорічних коректив до програми та особливостей викладання за новими підручниками, які перевидавалися в цей період тричі. Зустрічалися також і статті іншого характеру, наприклад, з методичними розробками та дидактичними матеріалами до окремих питань НО [109], [110], [45]; з ілюстрацією взаємозв’язків навчального матеріалу старшої школи з вивченням НО [11], а також використання НО в геометрії [186].

Щодо навчально-методичної літератури цього періоду то проблема вивчення НО в ШКМ ґрунтовно розглядалася в роботах вчених, які в недалекому минулому присвятили їм свої дисертаційні дослідження (Н.В.Єлизаветіна, З.М. Литовченко [161], Н.Я.Прайсман та В.П.Демкович [88]). Інтерес викликають також роботи О.С.Дубинчук [96], Г.Д.Глейзера [69], Г.П.Бевза [24], С.С.Мінаєвої [195], С.М.Чашечнікова [286], Д.М.Маєргойза [183], в яких НО є складовою частиною загальнометодичних посібників для вчителів. Серед дисертаційних досліджень цього періоду можна виділити роботи М.М.Мадбабаєва [167], Дао Тхай Лай [84], які повністю присвячені проблемам вивчення НО в ШКМ, а також роботи А.К.Цорієвої [285], В.М.Оксмана [212], Є.А.Лодатко [165], І.П.Фролової [277], А.І.Набієва [202], І.І.Пак [214], які розглядають НО як елемент системи обчислювальних, графічних та вимірювальних навичок.

Враховуючи усе вищезазначене робимо висновок про те, що по завершенню четвертого етапу, який охопив кінець 70-х - початок 90-х рр., виникла потреба чергового перегляду питання формулювання цілей та обрання змісту навчання НО. Однак в силу того, що вказаний період супроводжувався процесами глобальних перебудов у суспільному житті та освіті, такого перегляду не відбулося. В результаті, згідно методичної літератури того часу, програм та інших нормативних документів, НО набули в ШКМ невизначеного статусу. Зокрема йдеться про відсутність чітких коментарів щодо відправних моментів побудови методичної системи навчання НО. Наслідком такої ситуації став відносний спад відповідних науково-методичних пошуків. З часом ці процеси, посилюючись та поглиблюючись, призвели до методично-інформаційного вакууму навколо НО, який має місце до нині.

Проаналізувавши досвід вивчення НО в ШКМ ми дійшли висновків, що вони були і є складовою загальноосвітньої математичної підготовки школярів. Це підтверджується і часом, і результатами численних досліджень. Понад півсторіччя велися науково-теоретичні, методичні та практичні пошуки спрямовані на досягнення офіційного впровадження НО в ШКМ. Наступні півсторіччя - розв’язувались питання побудови відповідної методичної системи вивчення НО в ШКМ. Обидва ці періоди супроводжувались реформами шкільної освіти, зокрема і математичної, та неодноразовою зміною освітніх пріоритетів.

Ретроспективний аналіз проблеми вивчення НО в школі дав змогу виявити ключові моменти, які слід враховувати, створюючи відповідну методичну систему. Однак окремого дослідження потребують умови, в яких її доведеться реалізовувати на практиці. Тому розглянемо детально сучасний стан вивчення НО в школах України.

1.2. Сучасний стан вивчення наближених обчислень в школах України

Протягом сучасного періоду (починаючи з 2000 р.) вивчення математики в школах України відбувалося за програмою 2001 р. [176], після чого у 2005-06 навчальному році відбувся перехід на програми з математики 12-річної школи [177].

Згідно програми 2001 р. вибрані питання НО традиційно вивчалися у пропедевтичному курсі математики (5-6 класи) та під час вивчення теми „Нерівності” (9 клас). Основні відомості з НО зосереджувались у розділі

„Елементи прикладної математики”, який мав місце наприкінці вивчення алгебри основної школи (додаток Б.14). На вивчення усього розділу відводилось 10 годин А на вивчення безпосередньо НО, як свідчить шкільна практика, 2-3 години.

В цей час, після тривалої перерви, що була пов’язана з необхідністю розв’язування глобальних питань шкільної математики, до проблеми вивчення НО в ШКМ звернулися сучасні дидакти. Досліджуючи шкільну практику З.І. Слєпкань [251], В.Г.Бевз [15], Г.О.Корінь [142], [143] відмічають, що загальний стан вивчення НО знаходиться на неприпустимо низькому рівні, не задовольняє вимогам сьогодення, гальмує реалізацію прикладної спрямованості навчання математики, процес формування навичок культури обчислень, а також розвиток загальної математичної культури. В сучасній науково-методичній літературі питання НО висвітлюються недостатньо. Для переважної більшості вчителів та учнів НО залишаються найнеприємнішим розділом (вираз автора статті [15, с.13]). Психологічний бар’єр у сприйнятті НО стримує процес засвоєння учнями навчального матеріалу. Необхідність та важливість його подолання, створення психологічного комфорту вивчення відповідного навчального матеріалу підкреслюється як сучасними психологами та педагогами (у загальних випадках) [216, с. 16], так і дослідниками минулого (безпосередньо з приводу вивчення НО). Ще М.І.Кавун вказував, що для нормалізації ситуації, яка склалася навколо вивчення НО, необхідно, щоб у вчителів з’явилось бажання, а разом з тим і можливість надати відомості з НО у такій формі, щоб вони стали доступними та звичними для учнів [111, с. 7].

Як вказувалося вище, 2005-06 навчальний рік став першим роком практичного впровадження програми 12-ти річної школи. Аналіз програми з математики та проектів, що передували її остаточному варіанту, показав, що проблема вивчення НО в сучасному ШКМ не залишилася поза увагою дидактів, які брали участь в її розробці. В проекті програми 2004 р. було запропоновано перенесення теми „Наближені обчислення” з курсу алгебри 9 класу до пропедевтичного курсу математики 6 класу. Знайомитись вперше з НО наприкінці основної школи справді запізно. Володіння відповідними знаннями, вміннями та навичками потрібні значно раніше для засвоєння як курсу математики, так і інших шкільних дисциплін, зокрема фізики. Але механічне, неадаптоване перенесення вивчення теми „Наближені обчислення” на три роки раніше, на думку укладачів програми, не стало вирішенням проблеми. В результаті із курсу алгебри 9 класу НО були вилучені. Що ж стосується їх включення до курсу математики 6 класу, то воно неоднозначне: у програмі яка вийшла в світ окремим виданням у 2005 році [177] НО немає, а до програми, що була надрукована на сторінках журналу „Математика в школі” [204], НО внесено. Вони містяться у розділі „Звичайні дроби”, але при цьому вимог до загальноосвітньої підготовки учнів, які б стосувалися НО, не наводиться. Запропоноване перенесення вивчення НО на початок основної школи відображено у деяких нових підручниках [175] і впроваджено у деяких навчальних закладах з поглибленим вивченням математики . Одним із прикладів може слугувати програма поглибленого вивчення математики для проліцейних класів політехнічного ліцею Національного Технічного Університету „КПІ” (додаток Б.15.).

Відсутність окремо виділеної теми „Наближені обчислення” у програмі 12-ти річної школи не означає відсутність самих НО у ШКМ, а тим більше не означає зникнення проблеми необхідності їх методичної розробки. За словами М.І .Кавуна НО є природним та неминучим явищем в шкільній математиці [111, с. 105]. Вони є невід’ємною складовою загальної обчислювальної культури та прикладної спрямованості навчання математики, що об’єктивно пов’язує їх з багатьма традиційними темами ШКМ. Як відмічалося дослідникам минулого, вивчення НО в межах відокремленої теми не дає бажаних результатів навчання. З ними треба знайомитись поступово, а займатись систематично, використовуючи широкі можливості міжпредметних та внутрішньопредметних зв’язків. Одним з перших цей тезис було висунуто В.А.Крогіусом на Першому Всеросійському з’їзді викладачів математики, після чого він згадувався та підтримувався в усіх подальших роботах присвячених дослідженням проблеми вивчення НО в ШКМ. Зокрема вказувалось, що ознайомлення з НО слід починати якомога раніше і проводити потім, поступово розвиваючи, через увесь курс шкільної математики, звертаючи особливу увагу при цьому на їх роль при опрацюванні дослідних даних [228, с. 27].

Витоки незадовільного стану вивчення НО на сучасному етапі, з метою їх оцінки та врахування, слід шукати в самій структурі математичної діяльності учнів по засвоєнню провідних понять та методів НО. За А. Столяром [257, с.106] та Л. Фрідманом, [276, с.26] математичну діяльність школярів можна представити як активну пізнавальну діяльність у процесі вивчення математики, що охоплює наступні етапи: математична організація емпіричного матеріалу; логічна організація математичного матеріалу, накопиченого в результаті першого етапу; застосування математичної теорії на практиці. Проаналізуємо названі етапи, доповнивши їх етапом мотивації навчального матеріалу.

Основою нашого аналізу є результати анкетування вчителів, спілкування з ними, спостереження за навчальною діяльністю учнів, зрізи знань учнів, а також аналіз підручників. Підручники є основним засобом навчання математики в школі . В них викладено основи знань і способів діяльності відповідно до цілей навчання, визначених програмою. З початку 2000-х років та на момент проведення констатуючого та пошукового етапів педагогічного експерименту, а відповідно і нижчевикладеного аналізу, вивчення алгебри у 9 класі в основному ведеться за одним (або кількома одночасно) із трьох підручників. Їх авторами є Г. П.Бевз [16], Г.М.Возняк, Г.М.Литвиненко [55], В.Р.Кравчук, М.В.Підручна, Г.М. Янченко (за редакцією З.Слєпкань) [148].

Аналіз кожного з етапів математичної діяльності учнів доцільно провести за критеріями, що пов’язані із провідними поняттями НО. Зокрема зупинимо увагу на особливостях викладення навчального матеріалу та формуванні уявлень учнів про наближені значення, про числові характеристики наближених значень та методи наближених обчислень.

Психологи вказують, що початковим моментом будь-якої діяльності, в тому числі і математичної є мотивація, тобто сукупність потреб, які спонукають до діяльності. Сучасними дидактами, авторами підручників підкреслюється важливість мотивації навчального матеріалу вже починаючи з 5 класу (Г.П.Бевз, В.Г.Бевз [25], А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір [189]). Також наявність засобів мотивації учіння є однією з дидактичних вимог до наукової системи підручника математики [253, с.93].

Найбільш природною мотивацією ознайомлення учнів з наближеними значеннями є наголос на об'єктивності їх існування та з'ясування причин їх наближеності. Дослідниками неодноразово наводилася і доводилася думка про те, що чим більше і прискіпливіше приділятиметься увага формуванню в учнів уявлень про наближені значення (зокрема, джерела їх отримання) тим успішніше відбуватиметься оволодіння усіма іншими поняттями, правилами та методами НО . Тому ознайомлення учнів з наближеними значеннями набуває непересічної важливості. Однак систематизованих відомостей відносно усіх трьох традиційних джерел (деякі результати лічби, результати практичних вимірювань та округлень) одержання наближених значень в жодному підручнику не наводиться. Їх введення (або усіх трьох [148], або лише деяких з них [16], [55]) відбувається за допомогою одного-двох прикладів, які не відображають об'єктивність існування наближених значень. Домінування випадкових відокремлених відомостей, які не завжди узагальнюються, а також конкретно-індуктивних методів суперечить пізнавальним мотивам старших підлітків. Відомо, що їм властивий низький рівень розвиненості здатності до узагальнень. Водночас спостерігається пік динаміки у напрямку збільшення інтересу до закономірностей, порівняно з інтересом до окремих фактів (табл. 1.4.1.). За такої мотивації (точніше її відсутності) введення поняття про наближені значення в учнів формуються уявлення, що звернення до них відбувається або для спрощення викладок, або із міркувань певної доцільності, або взагалі з невідомих причин.

Друге місце у переліку провідних понять НО посідають числові характеристики наближених значень. Відомо, що наближення, яке задане лише своїм числовим значенням, не має практичного змісту. Невідомою є ступінь довіри до нього, яка асоціюється зі ступінню близькості наближеного значення до істинного. Основний мотив введення числових характеристик наближених значень - дати уявлення про цю близькість. Загальні мотиви введення числових характеристик наближених значень величин в підручниках не висвітлюються. Частково цього питання торкаються лише в одному з них [55, с. 126] (додаток Д.4). Традиційно в підручниках мотивується введення лише окремих числових характеристик. Розглянемо їх.

Основним мотивом для введення поняття „точність" [148, с.179] (або „границя абсолютної похибки" [16, с. 257], або „межа абсолютної похибки" [55, с. 127]) є незнання точного значення величини, що автоматично унеможливлює знаходження абсолютної похибки. В одних підручниках зазначена мотивація відбувається виключно за допомогою теоретичних вказівок [16]. В інших – виключно за допомогою прикладів [148] та доцільних задач, пов'язаних з обчислювальною та вимірювальною практикою [55].

Аналогічно в деяких підручниках вводиться і поняття „відносна точність" [148] або „межа відносної похибки" [55]. Вони наводяться як об'єктивні характеристики якості наближення. Відповідна мотивація представлена лише в одному з підручників [55]. В інших – або взагалі не вводяться поняття про якісні числові характеристики [16], або вводиться у додатковому матеріалі у рубриці „Для тих, хто хоче знати більше” і мотивується лише в дуже вузькій якості призначення, а саме як засіб для порівняння якості вимірювань однорідних величин різного порядку [148].

Методи наближених обчислень позиціонуться в ШКМ як правила виконання дій над наближеними значеннями. Мотивація їх введення полягає у відповіді на запитання: „Чому над наближеними значеннями величин треба виконувати дії якось по-особливому?”. У підручниках мотивів для введення методів НО не наводиться. Спостерігаються лише деякі пов’язані з ними твердження некатегоричного характеру (додаток Д.5). Останні в уяві учнів ставлять під сумнів правомірність та доцільність НО, породжують підозру в їх надуманості та сумніви щодо подальшого застосування.

Як вказувалось вище, першим етапом математичної діяльності школярів є математична організація емпіричного матеріалу. Вона полягає в накопиченні учнями фактів, що прямо чи непрямо пов’язані з НО. Відбуватися цей процес може в ході спостережень, індивідуального навчального досвіду, ознайомлення з навчальною та довідковою літературою. При вивченні НО етап математичної організації емпіричного матеріалу охоплює період навчання в початковій школі та майже усій основній школі. В цей час повинен відбуватися тривалий процес формування інтуїтивного підґрунтя для подальшого засвоєння формально-логічної теорії НО, який в методиці навчання математики називають попереднім досвідом. Його складовими є життєвий та навчальний досвід. За дослідженнями сучасних дидактів вплив попереднього досвіду на засвоєння знань може мати як позитивний так і негативний характер [255, с. 82]. Позитивний вплив попереднього досвіду є своєрідною пропедевтикою НО. А негативний – може виражатись у безпідставному переносі попереднього досвіду в нові умови, а також конфліктах нових знань з уже набутими.

Перші кроки по формуванню відповідного попереднього досвіду робляться вже на початку 5 класу: вводяться знак та поняття наближеної рівності; вперше вживаються поняття: „наближений результат” [174, с.14], „наближення”, „наближене значення” [18, с.163], [57, с.14]. Залишаючись без активного вживання, зазначена термінологія починає знову зрідка зустрічатись у 6 класі при ознайомленні та використанні числа π [19, с.108], [149, с.165]; у 8 класі при вивченні розділу „Квадратні корені. Дійсні числа” та теми „Стандартний вигляд числа”[147, с.74, 87], [56, с.52; 75], [16, с.128].

Під час вивчення математики в основній школі із трьох основних джерел наближених значень представлені лише результати округлення. З ними учні зустрічаються як у відповідних темах 5 класу („Порівняння і округлення натуральних чисел”, „Порівняння і округлення десяткових дробів”), так і дидактичному матеріалі інших тем. Звичайно, в ШКМ домінують приклади зі штучно дібраними точними відповідями, але зустрічаються і з наближеними. В них, як правило, вказується, до якого розряду слід проводити округлення (наприклад задачі 1-5, додаток В.1.), але є і виключення (наприклад задачі 6-7, додаток В.1). У останньому випадку робиться спроба формування поняття про доцільність округлення з огляду на зміст даних та інші особливості конкретних задач. Цікаво, що у нових підручниках з математики для 5, 6 класів [20], [175], які ми аналізували та використовували під час формуючого етапу педагогічного експерименту, частка таких задач значно збільшилась, що свідчить про увагу сучасних методистів до проблеми вивчення НО.

Окрім округлення до традиційних джерел наближених значень величин відносять також лічбу та практичні вимірювання.

Існує кілька традиційних прикладів, за допомогою яких в навчальній та науково-методичній літературі впроваджувалась думка про наближений характер деяких підрахунків: приклади про вік старовинної вази; про кількість дерев у лісі та про населення міста. У підручниках з математики для 5, 6 класів не наводиться жодних міркувань з приводу наближеності результатів деяких підрахунків, але зрідка можна зустріти „відголоси" вищезазначених традиційних прикладів ([18, с. 164], [57, с.14], [174, с.11 (№31)].

Стосовно вимірювальної практики, то в сучасному курсі математики 5-6 класів вона представлена цілими блоками завдань. При цьому про наближеність практичних вимірювань у жодному з підручників зауважень не наводиться. У вищевказаних завданнях вимірювання слід виконувати або за готовими малюнками (наприклад задачі 17-18, додаток В.2), або за малюнками чи моделями , які пропонується виконати самостійно (наприклад, задачі 19-20, додаток В.2). У останньому випадку відповіді до завдань не наводяться. Це принципово неможливо зробити, оскільки учнями виконуються різні малюнки. Відповіді не наводяться також і до завдань, що пов'язані з готовими малюнками. З приводу останнього можна висунути гіпотезу, що, з одного боку, автори не можуть навести результати вимірювань у вигляді точних значень величин, з іншого – вони і не можуть навести їх у вигляді наближених значень, так як відповідних теоретичних зауважень не робиться. Але на сторінках підручників ми зустрічаємо „аргумент", який суперечить висунутій гіпотезі: авторами наводяться розв'язання задач, в яких і результат вимірювань, і результат дій над ними виражається точними значеннями (додаток Д.1). Такий стан речей формує уявлення, які в перспективі конфліктуватимуть з категоричними твердженнями про те, що результати практичних вимірювань – завжди наближені. Нехтування наближеним характером практичних вимірювань, призводить не лише до перспективних, а й до внутрішньотематичних конфліктів. Виникають вони між теоретичними твердженнями та практично отриманими результатами вимірювань, коли результати вимірювань мають принциповий характер (наприклад, задачі 21-22, додаток В.3). Такі конфлікти не слід недооцінювати оскільки вони можуть призвести до підсвідомого фіксування у зоровій та дійовій пам'яті хибних математичних уявлень.

Пізніше, під час вивчення теми „Масштаб", результати вимірювань в задачах необхідно не лише знаходити, а й застосовувати. Автори одних підручників продовжують при цьому нехтування наближеним характером практичних вимірювань, що є логічним продовженням їх початкової позиції [174, с.226]. Автори інших – не створюючи відповідного теоретичного підґрунтя, починають їх опрацьовувати як наближені значення [57, с.220; 80].

Ще Р.А.Хабіб наголошував на тому, що розуміння причин наближеності чисел та величин базується на підсвідомих, інтуїтивних уявленнях про похибки (мається на увазі на понятті про числові характеристики наближених значень). Тому при педагогічно доцільно побудованому вивченні основних джерел наближених значень величин в учнів підсвідомо формується уявлення і про їх похибки [228, с.70].

Спроба врахування таких внутрішньотематичних зв'язків має місце в сучасних підручниках. Нажаль вона пов'язана лише з одним джерелом наближених значень, про яке згадується в основній школі. Мова йде про результати округлень. Точніше про ілюстрацію доцільності округлення з доповненням шляхом знаходження та порівняння похибок округлення. В деяких підручниках для 5 класу ([57, с. 14, 217], [174, с. 13], [18, с. 164]) вводиться поняття „похибка", що багатьма дослідниками вважається доцільним та педагогічно виправданим (зокрема Р.А.Хабібом [228, с.70], В.М.Брадісом [32], Ю. М.Колягіним [191, с. 98]). Ознайомлення учнів лише з округленням (а з не усіма основними джерелами наближених значень) приводить до відповідної обмеженості і в уявленнях про числові характеристики наближених значень. Вона пов'язана з тим, що серед широкого спектру похибок, які виникають з різних причин, лише похибка округлення є керованою та усувною (російською «управляемой и устранимой»). Мається на увазі, що, по-перше, округлювати можна з різною точністю. По-друге - часто можна взагалі не округлювати, а залишати точні дані, наприклад …. За такого підходу автоматично залишається поза увагою об'єктивний характер виникнення похибок, що є неприпустимим. Одним із шляхів розв'язування цієї проблемної ситуації є доповнення навчального матеріалу відомостями про інші джерела наближених значень (лічбу та практичні вимірювання), що і реалізується у пропонованій методиці (п. 2.3.2.).

В підручниках зустрічаються задачі, які можна розглядати, як пропедевтичні кроки по формуванню понять про відносну похибку (26-27, додаток В.4) та точність (наприклад задача 26а, додаток В.4). Термін „точність" починає активно вживатись у курсі алгебри 7-8 класів: на зміну словам „округлити до десятих" пропонується - „округлити (або обчислити, або знайти) з точністю до десятих (або до 0,1)". Його використання має формальний характер і не формує перспективних зв'язків, тобто уявлень про точність як якість, що відображає близькість результатів до істинного значення. Учні не звертають на нього уваги. Зустрічаючи в теоретичних міркуваннях словосполучення „точніше", „більша точність" тощо, вони асоціюють їх із уявленнями про правильність, обчислювальну „охайність", тобто послуговуються небагатим життєвим досвідом з цього приводу.

У курсі математики основної школи зрідка зустрічаються відокремлені відомості і про методи НО. Так у 5-6 класах їх можна зустріти у вигляді задач, в яких наводяться наближені математичні моделі (наприклад, задача 25в додаток В.5) або провідною думкою яких є неможливість прямого вимірювання доступними засобами. Останні можуть бути пов'язані або з готовими малюнками (наприклад, задачі 24-25, додаток В.5), або із самостійно створеними моделями (наприклад, задача 23, додаток В.5). Там же, а також у курсі алгебри 8 класу, зустрічаються завдання по формуванню початкових уявлень про виконання дій над наближеними значеннями за ПППЦ (наприклад задача 25а, 25в, додаток В.5.), зокрема, використання правила попереднього округлення, яке, до речі, не вводиться під час вивчення ПППЦ у 9 класі. В курсі алгебри 7-8 класів учні зустрічаються з такими наближеними методами як графічний спосіб розв'язування рівнянь та графічний спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь. В підручниках одних авторів ці методи не пов'язуються з уявленнями про НО [150, с. 129], [147, с. 181], [56, с. 166]. Інші автори навпаки: неодноразово наголошують (і у 7-му, і у 8-му класах), що графічним способом знаходять наближені розв'язки, які можуть випадково виявитися і точними [16, с.78; 178].

Відомо, що наближений характер можуть мати і остаточні результати, і проміжні значення результатів, і вхідні данні задачі. В останніх двох випадках їх розв'язування вимагає залучення методів НО. Але реалізувати це виявляється неможливим із-за вивчення НО аж наприкінці 9 класу. Наближеним характером числових даних в цих задачах доводиться просто нехтувати. Створений таким чином тривалий досвід приводить до конфлікту, який виникає при вивченні основного матеріалу з НО наприкінці 9 класу. Він полягає в тому, що учні не розуміють чому задачі, які ними раніше розв'язувались без врахування наближеного характеру даних, тепер (під час вивчення теми „Наближені обчислення") раптом треба розв'язувати якимись особливими методами (наприклад, задачі 9 і 10, додаток В.6).

У більшості вищезгаданих задач наближений характер вхідних даних або випливає із фабули (наприклад задача 12, додаток В.7), або явно підкреслюється авторами (наприклад задача 11, додаток В.7). Відповіді до них у підручниках або не наводяться взагалі, або наводяться за допомогою знаку наближеної рівності, або навіть і без нього (додаток В.7).

Наведення відповідей із використанням знака „≈" має на меті згладжувати потенційне виникнення конфлікту між тривалим нехтуванням наближеного характеру відповідних чисел і величин та необхідністю його врахування при розв'язуванні задач, а також сприяти виникненню позитивного навчального досвіду. Нажаль цього не відбувається через нечасте відображення такого підходу на сторінках підручників. У більшості випадків відповіді до таких задач взагалі не наводяться, що не формує правильних уявлень про результати дій над наближеними значеннями величин, але і не формує неправильних. Таке замовчування суперечить одній із основних вимог до математичної підготовки учнів, яке полягає в знанні учнями правил подання відповідей до прикладних задач [176, с.42]. Іноді воно набуває і не зовсім зрозумілих масштабів, коли в навчальних посібниках з алгебри для 9 класу повністю відсутні відповіді до розділу „Наближені обчислення" [55], [116]. «Приємним виключенням» є нові підручники з математики для 5, 6 класів [20], [175], які розраховані на навчання за програмою з математики 12-річної школи. В них автори пропонують для розв'язання значну кількість задач із наближеними даними, а відповіді до них наводять із використанням знака «≈».

Найбільш небажаною є ситуація, коли відповідь до задачі наводиться без знаку наближеної рівності, тобто у відповіді наводяться точні значення. Таким чином відбувається активне формування в учнів хибних уявлень, що є неприпустимим (наприклад, задачі 13-16, 25в додаток В.7, В.5).

Чергова спроба створення позитивного навчального досвіду відбувається при ознайомленні учнів з числом π. Автори підручників наводять приклади розв'язування завдань з його використанням для знаходження довжини кола, площі круга тощо. В своїх міркуваннях вони використовують знак «≈» або записують наближене значення числа π у вигляді подвійної нерівності. Так формуються уявлення учнів про те, що результат дій над наближеними значеннями чисел також є наближеним. Якихось тверджень або пояснень при цьому не наводиться, а культура використання знака «≈», а також форма запису остаточної відповіді у різних авторів є різною [149, с.165], [19, с.108].

Другим етапом математичної діяльності школярів є логічна організація математичного матеріалу. Вона полягає у виділені із накопиченого емпіричного математичного матеріалу первісних понять та основних тверджень, які є основою для дедуктивної побудови теорії. Більшість тем ШКМ зосереджується навколо основних змістових ліній і таким чином концентрично розвиваються. Стосовно НО такого поступового розвитку не відбувається. Майже весь матеріал з НО, який передбачено програмою, зосереджується в межах 1-3 годин наприкінці навчального року (9 клас) за умов необхідності підготовки до державної атестації. Завелика концентрація відомостей з НО, її відокремленість від традиційних питань ШКМ призводять до понятійного перевантаження теми, що ускладнює та формалізує її засвоєння учнями. Ускладнює ситуацію також те, що перелік провідних питань з НО, а також термінологія та символіка, що застосовується для їх позначення, в чинних підручниках значною мірою різниться.

Зупинимось детальніше на логічній організації математичного матеріалу, що пов'язаний із провідними поняттями НО.

Лише в одному з чинних підручників з алгебри для 9 класу системно наводяться усі три основні джерела виникнення наближених значень [148]. Однак при цьому не робиться акцент на тому, що результатом практичних вимірювань завжди є наближені значення. Також висвітлюючи тезу про те, що наближені значення можуть бути одержані при підрахунку предметів, спостерігається певна обмеженість причин наближеності. В учнів формуються уявлення, що вони полягають виключно в суб'єктивізмі людських відчуттів, а також пов'язані виключно з великою кількістю предметів. В інших підручниках не спостерігається жодних спроб щодо узагальнення чи схематизації основних джерел виникнення наближених значень. В одному з них [16] через гіпотетичний приклад із практики вимірювань виводяться основні поняття НО, в тому числі і наближені значення. При цьому акцентується увага лише на одному з трьох джерел одержання наближених значень – вимірюваннях. В другому [55] - конкретно-індуктивним методом наводяться лише деякі зауваження некатегоричного характеру (додаток Д .2).

Щодо числових характеристик наближених значень, то вони в сучасних підручниках представлені під різними назвами. При цьому для їх понятійного об'єднання використовується така термінологія: „оцінки точності наближення” [55]; „поняття, що характеризують наближені значення чисел і величин” [148]. В методичній літературі згадані числові характеристики поділяють на якісні та кількісні. У прикладній діяльності, що пов'язана з реальними предметами та явищами, і якісні, і кількісні числові характеристики знаходять рівноправне відображення. У шкільній же практиці традиційно якісним числовим характеристикам приділяється незаслужено менша увага порівняно з кількісними. Лише в одному з трьох чинних підручників якісні числові характеристики розглядаються разом з кількісними [55]. В двох інших вони або взагалі не згадуються [16], або наводяться у додатковому матеріалі [148]. Термінологія, символіка та представленість числових характеристик наближених значень різна (додаток Ж.1). Різним є також і представлення логічних зв'язків між ними, яке пропонуються авторами підручників у символьній формі (додаток Ж.2).

Комплексний аналіз змісту програми, чинних підручників [16], [55], [148] та шкільної практики дозволяє зробити висновок, що хоча фактично в ШКМ було представлено два методи НО: метод меж та ПППЦ, але змістовий акцент та відповідне дидактичне наповнення при цьому робиться на останньому. Такий підхід традиційно зберігся ще за часів позиціонування ПППЦ як ефективного засобу раціоналізації обчислень. Чітко про розподіл основних методів НО „на виконання дій з точним урахуванням похибок і без точного урахування похибок” (термінологія автора підручника) йдеться лише в одному з підручників [16]. В інших - вищезгаданий розподіл можна зрозуміти із контексту. ПППЦ пропонується як основний метод НО. В одних підручниках його називають правилом підрахунку цифр [16], [55], в інших відповідної назви не вводиться. Стосовно методу меж, то його аналітична сторона детально розглядається в розділі „Нерівності” як застосування властивостей числових нерівностей для оцінювання значення виразів. Ні термінологія, ні практичні завдання (за єдиним виключенням, №44 [55]) запропонованого матеріалу не пов'язуються з НО. При викладенні основного матеріалу з НО в розділі „Елементи прикладної математики” метод меж фігурує неявно. Відповідна термінологія не наводиться (окрім [148]). У випадках, коли про метод меж говориться у підручниках, він позиціонується учням як приклад методів зі строгим урахуванням похибок, як альтернатива ПППЦ у «найбільш відповідальних обчисленнях» [16], а також «там, де потрібна висока точність» [55] (терміни та вирази авторів підручників). В одному з підручників, хоча і наводиться термін „метод меж” [148], однак його представлення робиться виключно за допомогою розв'язаного прикладу, який міститься навіть не в пункті „Дії над наближеними значеннями величин”. У самому ж пункті робиться лише зауваження (додаток Д.3).

Завершальним етапом математичної діяльності школярів є застосування математичної теорії. Її важливість підкреслювалась, А.Н.Менчинською [184], [185], А.А.Столяром [257], З.І. Слєпкань [253], [255] та іншими дидактами. Зокрема ними вказувалось, що саме уміння застосовувати поняття вважається показником їх засвоєння. Недостатня увага до застосування набутих знань вважається традиційним недоліком сучасного навчання математики [255, с.93] і навчання НО не є винятком. На думку З.І.Слєпкань, саме недостатня увага до застосування НО приводить до їх формального вивчення в ШКМ [253, с.193].

Дидакти по різному трактують поняття „застосування знань”. В основному його розглядають на внутрішньопредметному та міжпредметному рівнях. Про внутрішньопредметне застосування НО частково йшлося раніше, коли розглядалися питання, пов’язані з математичною організацією емпіричного матеріалу. Що ж до застосування НО після логічної організації математичного матеріалу, то воно принципово унеможливлюється у зв’язку із особливостями розміщення теми „Наближені обчислення” (кінець 9 класу).

Внутрішньотематичне застосування навчального матеріалу, в тому числі і НО, відбувається за допомогою системи вправ на підведення під поняття (або розпізнавання) та навпаки, на відшукання наслідків (від факту належності об’єкта до поняття приходять до системи властивостей, що притаманні даному об’єкту) [255, с.93]. За умов жорсткої часової обмеженості, а також усіх вищезазначених недоліків математичної організації емпіричного матеріалу та логічної організації математичного матеріалу з НО, така система вправ не може бути належним чином представлена на сторінках сучасних підручників. По мірі їх оновлення дидактичне наповнення теми «Наближені обчислення» все більше починає прямувати до вищевказаних вимог, однак певні некоректні моменти продовжують мати місце. Зупинимось на них детальніше.

Задачі, що стосуються основних джерел наближених значень величин, здебільшого містять дані, які є наближеними з невідомих причин. Такі завдання мають формальний характер і не сприяють формуванню ідеї про об’єктивне існування наближених значень (додаток В.8). Невиправдано велика кількість завдань присвячена немотивованому округленню. Здебільшого вони дублюють аналогічні приклади, які пропонувались на початку основної школи (наприклад , задачі 27-28, додаток В.9). При цьому вони можуть доповнюватись вимогою знаходження певних числових характеристик (наприклад, задачі 29, додаток В.9), а можуть і ні (наприклад задачі 30, додаток В.9).

Майже всі задачі, що стосуються числових характеристик наближень, спрямовані на формування навичок переходу від їх запису у формі умовної рівності у подвійну нерівність і навпаки (№ 290, 292 [16]; №386-388 [55]; №787, 793, 794 [148]). Деякі інші переходи наводяться в ході викладення теоретичного матеріалу. В силу вікових особливостей підліткам важко узагальнювати та систематизувати такі відомості, а тим більше усвідомити синонімічність відповідних символьних тверджень (додаток Ж.2).

Міжпредметне застосування НО настільки широке, що може стати темою окремого дослідження. Частково ці питання розглядаються сучасними дидактами [253, с.27], [15], [54]. За умов запізнього вивчення НО воно, звичайно, не є і не може бути в достатній мірі реалізованим. У своєму дослідженні ми відобразимо лише деякі моменти застосування НО в курсі фізики основної школи, яке відбувається за підручниками авторського колективу Є.В.Коршак, О.І. Ляшенко, В.Ф.Савченко [270-272] (додатки З.1 – З.3).

Підсумуємо виконаний нами аналіз стану вивчення НО в сучасній шкільній практиці.

Мотивація навчального матеріалу з НО є недостатньою. Твердження, які мають на меті спонукання до опанування відомостей з НО, вирізняються не категоричністю, нечіткістю та мають випадковий характер. Наслідком цього є те, що учні по-справжньому не включаються у навчальний процес, а оволодіння відповідним матеріалом не набуває для них значущості.

Відокремлені відомості з НО, які зустрічаються в основній школі здебільшого носять обмежений, суперечливий та конфліктний характер, що створює скоріше негативний ніж позитивний навчальний досвід. Відповідний навчальний матеріал є не систематизованим та не структуризованим, що значною мірою ускладнює його усвідомлене сприйняття та застосування

, а також призводить до формального вивчення учнями НО. В учнів не вистачає ні життєвого досвіду, ні необхідних базових знань для його сприйняття.

Логічній організації математичного матеріалу з НО властивою є логічна незавершеність та понятійна перевантаженість. Вони є наслідками невдалого вибору змісту навчального матеріалу та його розміщення. Останнє випливає не лише із результатів наших досліджень, а і підтверджується провідними сучасними дидактами, зокрема З.І.Слєпкань [251, с.3].

Вищезазначені суперечності математичної діяльності учнів по опануванню відомостей з НО в жодному разі не можна розцінювати як недоліки підручників або недоліки роботи вчителів-практиків. Не слід забувати, що їх основне завдання забезпечувати можливість оволодіння учнями навчальним предметом у відповідності до програмових вимог. Тобто така ситуація зумовлена вимогами програми. Тому і вирішення вона вимагає шляхом створення оновленої методичної системи вивчення НО в основній школі та здійснення відповідних коректив у програмі. Їх відправними моментами є визначення цілей, а також методологічних основ обрання та структурування змісту вивчення НО в основній школі, які б відповідали сучасним освітнім пріоритетам, рівню розвитку інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) та віковим особливостям учнів.

1.3. Цілі і зміст вивчення наближених обчислень в курсі математики основної школи

Першочерговим етапом створення методичної системи навчання НО в основній школі є з'ясування мети їх вивчення, а також вибір змісту і структури навчального матеріалу. Про інші складові методичної системи, зокрема методи, організаційні форми та засоби навчання йтиметься у другому розділі.

Аналіз цілей навчання шкільної математики, а також дослідження сучасного стану НО в основній школі, дозволяє зробити висновок щодо мети їх вивчення. Полягає він в тому, що систематичне і цілеспрямоване оволодіння учнями основної школи логічно завершеною системою відомостей з НО має виконувати двоєдину мету. Сприяти, по-перше, загальному розвитку особистості учнів, по-друге, забезпеченню повноцінної математичної підготовки учнів .

Дослідження та використання НО які засобу загального розвитку школярів є вимогою сьогодення. Актуальність цієї проблеми неодноразово підкреслювалась сучасними дидактами, зокрема З.І.Слєпкань [251] та М.І.Башмаковим [14]. Пов'язано це з тим, що саме формування різнобічно розвиненої особистості є основною метою школи. Сучасні дидакти вказують, що засобами ШКМ у процесі навчання можливо сприяти розвитку особистості учнів. Але для того, щоб це сталося, необхідно, по-перше, визначити розвивальні можливості кожної окремої теми і, по-друге, - педагогічно доцільно їх використати (З.І.Слєпкань [255, с.31], Г.В.Дорофєєв [92], П.І .Сікорський [250]).

Навчальний матеріал з НО володіє потенціалом щодо розвитку учнів [131]. В силу своєї предметної та практичної значущості він цілком відповідає провідному типу діяльності підлітків та соціальній ситуації їх розвитку (детальніше про це йтиметься у п. 1.4). Наприклад, володіння учнями понятійним апаратом НО дозволяє реалізовувати проективну та навчально-дослідницьку діяльність підлітків, задовольняти їх прагнення до самостійності, сприяти підвищенню їх пізнавальних інтересів тощо. Усі названі складові сприяють загальному розвитку учнів основної школи. Більше того, деякі з них є його необхідною передумовою. Так, зокрема, І.С.Коном наводиться думка із останніх робіт Ж.Піаже про те, що свої розумові здібності підлітки розвивають вибірково, лише в тих сферах діяльності, що є для них найбільш цікавими [141, с.71]. До думки психологів приєднуються також і сучасні дидакти, які вважають що зацікавленість учнів предметом слід включати у самі принципи відбору змісту шкільної математичної освіти. До таких принципів, відносять пізнавальну ємність, під якою розуміють максимальне використання можливостей для формування, підтримки та розвитку інтересу учнів до вивчення математики на кожному етапі навчання (за Г.В.Дорофєєвим [92]).

Одним із внутрішньопредметних засобів забезпечення активізації пізнавальних інтересів учнів є вчасно сформоване вільне володіння категоріальним апаратом НО. Воно дозволяє залучати до процесу навчання математики цікавий практичний навчальний матеріал, а також широкий спектр різних методів, засобів та організаційних форм навчання. Змістові особливості навчального матеріалу з НО дозволяють враховувати новоутворення у сфері пізнавального розвитку учнів, зокрема сприяти формуванню дослідницького та дивергентного мислення. А доцільний вибір методів, організаційних форм та засобів навчання дозволяє використовувати НО для формування загальних і специфічних прийомів розумової діяльності (детальніше про це йтиметься у п. 1.4).

Практична реалізація розвивальної функції НО відбувається, зокрема, і за рахунок відповідного дидактичного наповнення теми. Домінуючою ціллю під час розв'язування учнями задач стає не тільки і не стільки сприяти закріпленню знань та тренуванню в їх застосуванні, скільки формувати дослідницький стиль розумової діяльності [255, с.133]. При цьому на основні позиції виступає якісний, а не кількісний підхід. На думку М.І.Башмакова учням (навіть у слабкому класі або за умов браку часу) треба пропонувати змістовну, цікаву та розгорнуту математичну діяльність. Вона не розрахована на можливість її репродукції у подальшому. Але досвід, який під час неї набувається учнями, може виявитися більш важливим (і на довше запам'ятається) ніж тренування виконання простих операцій [14, с.6].

Розвивальна складова мети вивчення НО ставала предметом дослідження фахівців і раніше. Зокрема це питання розглядалось в дисертаційних дослідженнях Н.Ф.Єлизавєтіної [99], Р.А.Хабіба [280] (в середині 60-х рр.) та М.М.Мадбабаєва [167] (наприкінці 80-х рр.). З різних причин вони не набули практичної реалізованості. Одна з них пов'язана із загальними цілями навчання математики того часу, а саме із пріоритетом освітніх цілей над розвивальними. Інша – із цілями вивчення безпосередньо НО: вони розглядалися перш за все як засіб раціоналізації обчислень. У зв'язку із перебудовою сучасної шкільної математичної освіти, а також розвитком обчислювальних засобів, вищенаведені причини втратили свою актуальність. Більше того нині з одного боку є можливості, а з іншої - потреба спрямовувати вивчення НО саме у русло досягнення розвивальних цілей.

Розвивальна мета вивчення математики, зокрема і НО, не витісняє загальноосвітню. Більше того, практично вона є недосяжною без оволодіння учнями базовими компонентами математичного знання та навичками їх застосування. Об'єктивно існуючою складовою фундаментальної математичної підготовки учнів основної школи є і НО. Саме цим і обумовлюється загальноосвітня складова мети їх вивчення. По-перше, НО становлять частину обчислювальної та вимірювальної культури школярів. По-друге, без НО неможлива прикладна спрямованість навчання математики. Їх ігнорування у складі базової математичної підготовки школярів не відповідає принципам добору змісту шкільної математичної освіти, зокрема, принципу соціальної ефективності та принципу інтелектуальної ємності. За Г.В.Дорофеєвим [92] та М.І.Бурдою [42-43] вони полягають у тому, що обсяг набутих учнями математичних знань має бути достатнім для продовження навчання або кваліфікованої праці Вказана невідповідність обмежує навчальний досвід школярів та робить його логічно незавершеним. Виражаючись алегорично, вона „залишає білі плями" у математичній підготовці учнів.

Кожна складова загальноосвітньої мети вивчення НО в ШКМ має певні особливості, зупинимось на них детальніше.

Формування обчислювальної культури було і залишається одним із ключових завдань навчання математики. На тому, що її складовою є НО, які вимагають відповідної уваги до себе (дивись рис. 1.1), наголошували В.Г.Бевз [17], Г.П.Бевз [15], Н.Буряк [44], Г.О.Корінь [142, 136], З.І.Слєпкань [251, 246], А.К.Царієва [285].

			Обчислення можна розрізняти					
За методом обчислень								

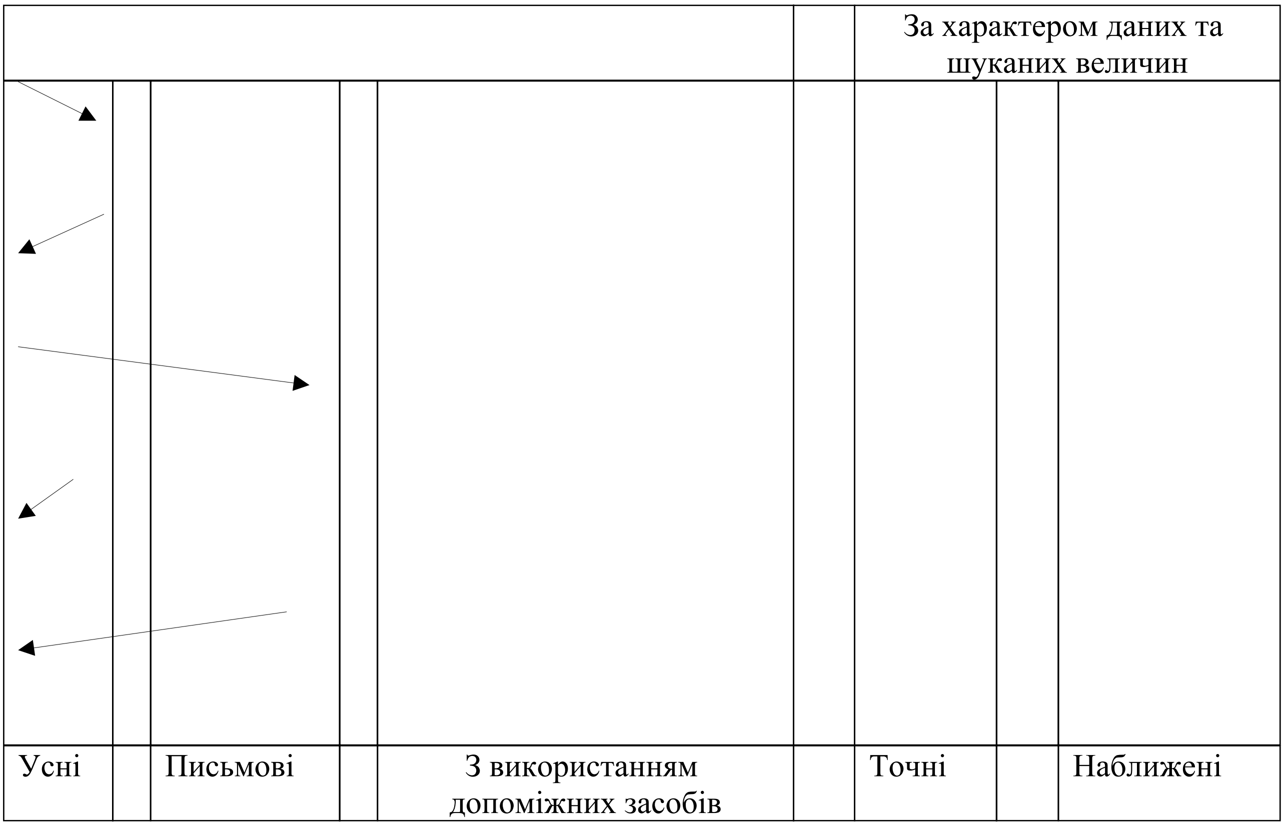


Рис.1.1. Види обчислень у ШКМ

Аналіз сучасних підручників з математики (п.1.2), результати констатуючого експерименту показали, що їх ігнорування у практиці навчання створює негативний навчальний досвід, гальмує усвідомлений підхід до обчислень, а також сприяє „обчислювальній безпорадності" учнів. Остання полягає в тому, що навіть ті учні, які показують високий рівень знань з теорії та практичних вмінь, часто не можуть самостійно визначити етапи розв'язування, скласти відповідну математичну модель або правильно навести обґрунтовану відповідь у тих випадках, коли завдання на певних етапах розв'язування містить міркування, пов'язані з НО (наближеними значеннями або наближеними методами).

Щодо вимірювальної культури, то традиційні методичні підходи навчання НО у контексті її формування спричинюють виникнення ряду суперечностей (п.1.2.). Вони пов'язані з існуванням двох нетотожних категорій:

1) „теоретичні вимірювання" (термін Н.Ф.Єлизавєтіної [98],[99]) або „істинні значення вимірюваних величин" (термін В.В.Міхєєва [197]);

2) „практичні вимірювання" або „дійсні значення вимірюваних величин".

Досліджуючи ці поняття, вищевказані методисти особливу увагу звертають на їх власні взаємозв'язки, а також їх зв'язки з НО. Мова йде про те, що будь-яка величина має визначений єдиний розмір, який існує об'єктивно незалежно від наших знань про нього. Виходячи з цього, значення, яке ідеально відображає розмір величини (наприклад в результаті теоретичного дослідження) прийнято називати істинним значенням вимірюваної величини або результатом теоретичних вимірювань. Дійсним же значенням вимірюваної величини або результатом практичних вимірювань називають значення величини, яке отримується за допомогою вимірювальних засобів. Отримане таким чином числове значення величини є наближеним і залежить від численних факторів, зокрема і випадкових, які і визначають його точність.

Під час вивчення математики в основній школі домінують „теоретичні вимірювання", а при вивченні інших предметів (наприклад, фізики) та у життєвій практиці доводиться користуватись здебільшого „практичними вимірюваннями". У першому випадку (в межах ШКМ) відповідні арифметичні дії виконуються за допомогою точних обчислень, хоча і не завжди правомірно (дивись додатки В.2 (задачі 19, 20); В.3; В.5 (задачі 23, 25); Д.1), а у другому – за правилами НО. Зазначена неправомірність пов'язана з фактичною належністю вищенаведених задач до „практичних вимірювань", а відповідно і необхідністю їх опрацювання засобами НО. Таким чином учні із різних навчальних джерел отримують суперечливі відомості. У кращому випадку ці відомості не залишаються в їх пам'яті, гальмуючи тим самим розвиток вимірювальної культури. У гіршому - сприяють формуванню хибних стереотипів, чим спричинюють конфлікти міжпредметного та внутрішньопредметного рівнів (п.1.2).

Основну проблему становить, не наявність двох поглядів на вимірювання (вони є об'єктивними незалежно від нашого до них ставлення), а їх взаємо ізольованість. Завдяки їй учні відчувають суперечність між тим, що вони вивчають на уроках математики і тим, з чим їм доводиться зустрічатись за стінами школи або під час вивчення інших предметів.

Усі вищезазначені проблеми, що пов'язані із формуванням обчислювальних та вимірювальних умінь школярів, потребують розв'язання, як для забезпечення власної логічної завершеності, так і для забезпечення можливості їх подальшого застосування.

НО є складовою прикладної спрямованості навчання математики. За В.В.Фірсовим [274] вона полягає у здійсненні цілеспрямованого змістового та методологічного зв'язків математики з практикою, що передбачає введення у шкільну математику специфічних моментів, які характерні для дослідження прикладних проблем математичними методами. Серед таких моментів виділяють зокрема і можливість експериментальної перевірки результату; використання неформалізованих і «розмитих» понять; наближену прикидку результату; оцінку похибки.

З.І.Слєпкань [251, с.4], [253, с.192] наголошуючи на важливості вивчення НО в межах сучасної математичної освіти, називала їх першоосновою реалізації прикладної спрямованості навчання школярів. Зокрема вказувалось, що відсутність НО у ШКМ, а відповідно і несформованість в учнів навичок у користуванні їх методами, унеможливлює не лише загальну прикладну спрямованість навчання математики, а й впровадження моделювання навіть на найпростішому рівні. Справді, математична модель є лише наближеним описом деякої проблеми. Побудова моделі, внтрішньомодельне розв'язання, інтерпретація одержаного розв'язання задачі і застосування його до вихідної ситуації безпосередньо пов'язані з НО. Дані прикладних задач, якими оперують на першому етапі математичного моделювання, в більшості випадків мають наближений характер. Їх точність, спосіб отримання, а також точність, що пред'являється до майбутніх результатів, суттєво впливають на вибір математичної моделі, та визначають вибір алгоритму внутрішньомодельного розв'язування. НО можуть мати місце і на другому етапі процесу математичного моделювання як при точних, так і при наближених значеннях вхідних даних. В обох випадках важливим є оцінювання точності одержаного результату як з метою його подальшого застосування, так і з метою остаточного усвідомлення.

Формулювання цілей вивчення НО дозволяє перейти до питання визначення їх змісту. За Г.В.Дорофєєвим зміст шкільної математичної освіти є дидактично обґрунтованим відображенням певної сукупності компонентів математичної науки в навчальному предметі „Математика". Це вичленення з усього комплексу математичних знань (понять, тверджень, прийомів та методів) своєрідної достатньо представницької сукупності елементів, систематизація яких на основі психолого-педагогічних, дидактичних і логічних вимог, дозволяє реалізувати сучасні вимоги до шкільної математичної освіти [92].

Зміст НО визначається обранням основної задачі (або задач) та провідного методу (або методів) НО.

Загальновідомими є дві основні задачі НО. Їх називають прямою і оберненою задачами або задачами першого і другого типу. Пряму задачу НО зазвичай формулюють так: „Відома точність даних, над якими треба проводити математичні дії. Яка буде точність результату?". А обернену - „Відома точність результату. З якою точністю треба взяти вхідні дані, над яким будуть виконуватись математичні дії?". Можливості математичного апарату основної школи дозволяють в її межах розглядати лише пряму задачу НО. Обернена задача НО може бути розглянута в старшій школі. З'ясування доцільності останнього, враховуючи профільне навчання в старшій школі, є складним та багатогранним питанням, що може стати темою окремого дисертаційного дослідження.

Провідному методу НО підпорядковуються усі інші ключові питання вивчення НО, а саме спосіб подання наближених значень, а також їх числових характеристик. Основою нашого дослідження є думка про те, що його вибір буде виправданим лише в тому випадку, якщо цей метод як мінімум, органічно поєднуватиметься з традиційним програмовим навчальним матеріалом, а як максимум підсилить його можливості у розв'язувані загальних проблем математичної освіти.

В ШКМ виділяють три основні методи НО: правила підрахунку правильних цифр (ПППЦ), метод меж та метод меж похибок. Останні два належать до методів зі строгим врахуванням похибок, а перший – є методом нестрогого врахування похибок.

Досвід вивчення методу меж похибок у 8 класі, згідно програм часів модернізації шкільної математики, дозволив дидактам зробити висновок про те, що цей метод не відповідає віковим можливостям сприйняття учнів основної школи (п.1.1).

Введення ПППЦ потребує залучення додаткового понятійного апарату і для пропедевтичного забезпечення, і для введення основного блоку понять, і для їх подальшого закріплення. Сприйняття учнями цього матеріалу ускладнюється численними методичними нюансами, пов'язаними з імовірнісним характером ПППЦ, а також його ізольованістю (відсутністю логічних зв'язків) від традиційних питань ШКМ.

В програмі, яка передувала сучасній, змістовий акцент робився саме на ПППЦ. Такий підхід традиційно зберігся ще за часів позиціонування ПППЦ як універсального засобу раціоналізації обчислень. Розвиток обчислювальних засобів спричинює необхідність перерозподілу пріоритетів між методами зі строгим та нестрогим врахуванням похибок, яка прогнозувалась вченими ще на початку та в середині XX ст. Зокрема К.Нєшковим вказувалось, що у зв'язку з розвитком техніки, з одного боку зростатиме потреба, а з іншого можливість у строгому врахуванні похибок [228, с.13]. А.Гольдін ще в 1928 р. наголошував, що як би швидко не було виконане обчислення (нагадаємо, що ПППЦ позиціонувались перш за все як фактор економії часу), воно «нікуди не годиться, якщо є занадто грубим» [72]. ПППЦ вважалися методистами не найкращим, а найбільш прийнятним інструментарієм для обробки наближених значень за умов врахування рівня розвитку обчислювальних засобів тих часів. Д.Маєргойз та О. Дубинчук [183, с.306] називали його примхливим, а Р.Мусаєлян методично некоректним методом НО [190, с.26]. Навіть В.Брадіс уважав ПППЦ своєрідним компромісом між зручністю та точністю [32, с.105]. Він та інші дидакти того часу – прибічники та популяризатори впровадження ПППЦ у ШКМ - визнавали перевагу саме методу меж. Так, наприклад, В.Брадіс вказував, що метод меж є найбільш простим та доступним для учнів, а тому повинен обов'язково вивчатися у ШКМ.

Завдяки методу меж практичні застосування математики набувають тієї завершеності, яка є характерною для математики як для точної науки. Метод меж яскраво демонструє процес накопичення обчислювальних похибок, а також задовольняє зростаючим вимогам сьогодення щодо точності отриманих результатів. Застосування методу меж дозволяє по-новому сприймати теорію нерівностей і закріплювати її на доступній для учнів прикладній основі. Єдиною вадою, яка інкримінувалась методу меж раніше, була громіздкість, пов'язана з необхідністю ведення подвійних обчислень. Нині відповідні проблеми втратили свою актуальність в результаті розвитку обчислювальних засобів.

Основним аргументом при виборі методу меж у якості основного методу НО на сучасному етапі, є його об'єктивний зв'язок з теорією нерівностей, що робить його найбільш природним методом НО для ШКМ. Не виникає потреби введення додаткового понятійного апарату, оскільки усі потрібні відомості для введення методу меж представлені у програмі. Необхідною є лише переструктуризація відповідних наявних відомостей. А саме, принципове переосмислення логічних зв'язків методу меж з теорією нерівностей. Зупинимось на цьому детальніше.

Протягом останніх тридцяти років метод меж обґрунтовувався правилами виконання дій над подвійними нерівностями, які в свою чергу обумовлювались властивостями числових нерівностей. Іншими словами метод меж розглядався як застосування властивостей числових нерівностей. Така позиція не вкладається в запропоновану концепцію через протиріччя, що виникає між необхідністю раннього впровадження обчислювальних навичок з НО та вивченням нерівностей на початку 9 класу. Розв'язати цю проблему допоможе бачення та відповідна побудова вивчення методу меж як пропедевтики теорії нерівностей. На перших етапах (в курсі математики 5-6 класів) теоретичною основою методу меж мають стати відомості про порівняння чисел, властивості арифметичних операцій, інтуїтивні уявлення та відчуття учнів. На наступних етапах (у курсах алгебри та геометрії 7-8 класів) в учнів мають поступово сформуватись відповідні уміння і навички під час розв'язування задач, що пов'язані із традиційним навчальним матеріалом. А вже у 9 класі метод меж повинен отримати строге математичне доведення та обґрунтування на основі властивостей нерівностей.

Ідея раннього ведення методу меж, його обґрунтування за допомогою арифметичних міркувань та наочних геометричних моделей досліджувалась І.М.Кавуном [111], Н.Ф. Єлизавєтіною [98], а також згадується в роботах В.М.Брадіса [32] та Д.М.Маєргойза [183]. Результати досліджень дидактів вказують на те, що запропонований підхід до вивчення методу меж відповідає особливостям сприйняття учнів даної вікової категорії. Не суперечить цій ідеї і матеріал, представлений в сучасній навчальній літературі. Так підручники з математики для 5-6 класів різних авторів містять багатий дидактичний матеріал де є подвійні нерівності. Запропоновані завдання мають різноманітний характер і при відповідній обробці та подачі можуть слугувати пропедевтикою провідних понять НО, (зокрема меж наближених значень), а також сприяти залученню наочних образів для їх сприйняття (наприклад, задачі 34-35, додаток В.10). Зосередження уваги саме на подвійних нерівностях пов'язане з тим, що за умов позиціонування методу меж як провідного методу НО, основною формою представлення наближених значень стає вказування їх меж, в тому числі і за допомогою подвійних нерівностей (п.2.2).

Методологічною основою розміщення змісту навчального матеріалу з НО в ШКМ ми обрали принципи концентризму та фузіонізму (за М.І.Бурдою [42]). Вони є загальновідомими і широко представленими в науково-методичній літературі. Зупинимось на них детальніше у контексті вивчення НО у курсі математики основної школи.

Загальновідомо, що усвідомлення і міцність засвоєння знань, умінь та навичок краще забезпечується за умови концентричного розвитку основних змістових ліній. Про це свідчить досвід зарубіжної та вітчизняної школи, а також висновки провідних дидактів та методистів. НО не є офіційно визнаною в нормативних документах окремою змістовою лінією, але вона більшою або меншою мірою є складовою багатьох з них. Найбільш явно НО представлені у змістових лініях „Числа і дії над ними" та „Геометричні величини, їх вимірювання та обчислення". Аналіз досвіду вивчення НО в школі показав, що саме нехтування принципом концентризму було основним недоліком їх представлення в програмах з математики (п.1.1.-1.2). Цей недолік підкреслювався усіма дослідниками, хто займався проблемою вивчення НО.

Адаптуючи цінний досвід дослідників до реалій сучасної математичної освіти відмітимо, що запобігання формування навчального досвіду, який не відповідає оточуючій дійсності, внутрішньопредметним та міжпредметним зв'язкам, вимагає раннього, поступового та систематичного ознайомлення учнів з НО. Основою такого висновку є те, що відомості з НО не засвоюються учнями одразу у завершеному вигляді. Для цього потрібний тривалий час та систематична активна робота учнів, в тому числі і самостійна. Розкриття сутності провідних понять НО повинно розпочинатись з найпростіших уявлень із поступовим їх розширенням та теоретичним переосмисленням по мірі зростання рівня математичного та загального розвитку учнів. За словами Дж. Брунера, які наводяться З.І.Слєпкань [255, с.86], коли основні поняття пропонуються для засвоєння одразу у формалізованому вигляді, то вони недоступні дитині, якщо вона не засвоїла їх спочатку інтуїтивно. Відомо, що процес навчання саме тим і відрізняється від чисто наукового подання результатів дослідження, що в ньому наперед, до строгого введення поняття, проводиться певна пропедевтична робота по інтуїтивному або явному формуванню правил, означень, зв'язків, які потім створюють цілісний образ об'єкта, що вивчається.

Звернемо увагу на вищезазначені вимоги раннього, поступового та систематичного ознайомлення учнів з НО.

З огляду на ступінь абстрактності провідних понять НО, складну логічну структуру їх означень, а також особливості внутрішньопредметних зв'язків, умова раннього вивчення НО може бути реалізована лише за рахунок дидактичного адаптування їх змісту. Адаптування елементів знань до вікових можливостей учнів є закономірною складовою процесу трансформації наукових математичних знань у навчання. Відомо, що чим ближче складні математичні конструкції наближаються до вікових можливостей учнів, тим більше втрачається їх математична строгість, рівень узагальненості та обґрунтування [250]. Концентричний розвиток вивчення НО дозволяє компенсувати ці втрати за рахунок подальшої поступової корекції навчального матеріалу та включення їх у нові внутрішньопредметні зв'язки. Вимога адаптування елементів знань цілком відповідає логіці розвитку світової системи математичної освіти. Зокрема з трибун форумів міжнародного рівня, зарубіжними фахівцями вказується наступне: проблемою математичної освіти є не забезпечення строгості подання програмового матеріалу, а проблема розвитку в учнів „відчуття", „способу існування" математичних об'єктів [243]. Звичайно беручи на озброєння такий підхід важливо глибоко відчувати міру та педагогічну доцільність.

Реалізувати поступовість та систематичність вивчення НО в основній школі можна організовуючи навчання учнів у активному та фоновому режимах (детально їх аналіз представлено Н.А.Тарасенковою [262], [263]), а також дотримання принципу фузіонізму. З'ясуємо про що йде мова.

Навчальний матеріал з НО поділяється на смислові частини. Вони „вживлюються" у традиційний матеріал ШКМ, там де це доречно, тобто є відповідні змістові передумови. Ці смислові частини мають статус явних для учнів об'єктів засвоєння, яке здійснюється в активному режимі за допомогою методичних прийомів прямого навчання. В основній школі час між їх вивченням може бути достатньо тривалим. В силу вікових пізнавальних можливостей підлітків, а також враховуючи своєрідність навчального матеріалу з НО, ці тривалі перерви приводять до забування учнями відповідного навчального матеріалу. Тому доцільно організовувати навчання у фоновому режимі, де відомості з НО вже мають статус неявних об'єктів засвоєння або повторення. Подібна форма навчання НО пропонувалась у 70-х рр. С. Аллабергеновим, зокрема ним вживався термін „змістовий фон" [9]. Навчання у фоновому режимі є цілеспрямованим і керованим процесом. Організаційні форми, засоби та методи, які при цьому використовуються, є різними і будуть детально представлені у другому розділі. Основна ж ідея навчання НО у фоновому режимі така: під час формування умінь, визначених програмою, систематично створювати ситуації, які б вимагали звернення до категоріального апарату або методів НО.

Фузіонізм – з французького fusion - „злиття", від латинського fusio – плавлення. Під фузіонізмом у вузькому значенні розуміють максимальне зближення або навіть злиття математичних об'єктів. А в широкому –тісний зв'язок між математикою й іншими предметами та взаємне їх проникнення. Здебільшого в загальноосвітній школі ідею фузіонізму використовують створюючи інтегрований курс математики (без членування його на алгебру та геометрію) або інтегрований курс геометрії (без членування його на планіметрію та стереометрію) [42], [43]. У контексті вивчення НО частковий фузіонізм полягає в синхронному ознайомленні учнів із виконанням арифметичних дій як з точними так і з наближеними значеннями. Відомості, що отримані шляхом такого ознайомлення, поступово корегуються, узагальнюються та розширюються у процесі ознайомлення с новими числовими множинами. Можливості та ефективність часткового фузіонізму при вивченні НО досліджувались у 60-х рр. І.Б.Лобановим [163] та В.Г.Проухаєвим [239]. Штучне відокремлення ознайомлення учнів з арифметичними діями над наближеними та точними значеннями не відповідає оточуючий дійсності. За словами С.Л. Рубінштейна, створюється ніби дві ізольовані системи знань про одні й ті ж самі об'єкти: система знань, яка вивчається в школі, і система знань, яка обслуговує життєву практику [245]. Нехтування фузіоністським характером НО ускладнює звернення до інтуїції учнів, їх життєвого та навчального досвіду. За словами Я.М.Жовніра, виникає несправедливе співвідношення між інтуїцією та логікою математичних викладок. На його думку, фузіоністський підхід є найбільш природним методом для вивчення деяких тем шкільної математики. Він є не самоціллю, а засобом, не розкішшю, а органічною потребою ефективного навчання [106, с.11,26]. Його використання під час вивчення НО дозволяє значною мірою запобігти ізольованості НО, яка традиційно складалася у навчальному процесі між ними та іншими питаннями ШКМ, а також між ними та іншими предметами.

Сформулювавши мету вивчення НО, визначивши ключові питання змісту навчального матеріалу та методологічні засади їх розміщення, ми розробили програму вивчення НО в основній школі (додаток С). У програмі визначено де і в якому обсязі повинні бути представлені відомості з НО в курсі математики основної школи, а також конкретизовано цілі їх вивчення, тобто визначено і сформульовано систему уявлень, знань і умінь, якими повинні оволодіти учні.

Ефективність методики вивчення НО в основній школі (як і будь-якої конкретної методики навчання), залежить від узгодженості із результатами психолого-педагогічних досліджень. Без їх вивчення та врахування неможливо розробити вірогідні, обґрунтовані та педагогічно доцільні методичні рекомендації. З'ясуємо в наступному параграфі психолого-педагогічні передумови вивчення НО в ШКМ основної школи.

1.4. Психолого-педагогічні передумови вивчення наближених обчислень

Вивчення НО в основній школі має враховувати, по-перше, основні вікові та індивідуальні особливості суб'єктів учіння; по-друге, можливості навчального матеріалу НО у розвитку інтелектуально–пізнавальних процесів та вихованні учнів.

Вивчення вікових та індивідуальних особливостей учнів відбувається за теорією розвитку вищих психічних функцій Виготського-Блонського, яка отримала подальший розвиток у роботах О.М.Леонтьєва, А.В.Запорожця, П.І.Зінченка, П.Я.Гальперіна, Л.І.Божович, а також у теорії періодизації вікового розвитку Д.Б.Ельконіна [59, 65, 85, 205, 216, 246]. Згідно останньої учнів основної школи відносять до середнього шкільного віку, який ще називають підлітковим. Хронологічні границі та тривалість підліткового віку є нестабільними через їх історичну та соціальну обумовленість. В традиційній сучасній періодизації умовно вважається, що підлітковий вік охоплює період від 10-11 до 14-15 років, що відповідає 5-9 класам основної школи. За висновками досліджень вищезгаданих фахівців у сфері вікової та педагогічної психології, характеризуючи вікові та індивідуальні особливості учнів, слід враховувати соціальну ситуацію та основні новоутворення їх розвитку, а також провідний тип діяльності [53], [155, с.40].

Під соціальною ситуацією розвитку розуміють систему відносин, в якій знаходиться дитина, та її орієнтація в ній. Соціальна ситуація розвитку підліткового періоду є наскрізь пронизаною численними багатоплановими протиріччями, які широко представлені у курсах вікової психології. Найзагальнішим та найважливішим серед них є те, що з одного боку підлітковість – це вік активної соціалізації та афіліації (прагнення людини до спілкування, до взаємин з іншими людьми, потреба належати до певної групи), а з іншого - це вік індивідуалізації, відкриття та ствердження власного унікального і неповторного «Я» [53, с.178]. Відбувається виникнення та розвиток так званого чинника «само», яким пронизуються і соціальна, і інтелектуально-пізнавальна сфери життя дитини. Зокрема мова йде про самостійність у прийнятті рішень, самостійність мислення, самоповагу, самоусвідомлення, самоконтроль власної поведінки та перебігу основних психічних функцій навчально-пізнавальної сфери. Несформованість зазначеного чинника гальмує нормальний психічний розвиток особистості підлітка [219, с.7], тому його врахування є важливим та необхідним.

Сприяти самостійності підлітків під час вивчення математики можна різними шляхами. В ході нашого дослідження зосереджувалась увага на тих, які враховують умови психологізації навчання (термін П.І.Сікорського [250]) НО. Мова йде про особливості вивчення відповідного навчального матеріалу, зокрема з НО, і водночас використання його можливостей для реалізації розвивальних функцій навчання. За таких умов виняткової педагогічної доцільності набувають методи проблемного навчання, зокрема дослідницький метод та метод доцільних задач. Одразу зауважимо, що йдеться не про їх тотальну універсальність під час вивчення НО. Але зв'язок НО з теоретичними та практичними вимірюваннями, а також їх предметна та практична значущість справді вимагають поміж інших методів навчання приділяти підвищену увагу навчально-дослідницькій діяльності учнів. Її впровадження у навчальний процес може відбуватися на різних етапах і у різних статусах: і як методу активізації уваги учнів, і як методу викладу нового матеріалу, і як методу закріплення знань і вмінь, і як методу навчання розв'язування задач [21]. Доцільність такого підходу підкреслювалась багатьма дослідниками, а саме В.М.Брадісом [35, с .162], К.І.Нєшковим [228, с.28], Р.А.Хабібом [280], [228, с.55], І.Г.Адішевим [1], Л.А. Бобильовим [30], Ю.М.Колягіним [191, с.97], А.І.Єсіковим [100] і підтримується нами.

Існують різні технології практичної реалізації дослідницького методу. Зокрема В.А. Крутецьким та М.С.Лукіним наводяться кілька послідовних рівнів та ступенів такої реалізації, яка є виправданою саме для підлітків [153, с.223]. Їх вибір обумовлюється конкретними умовами реального процесу навчання і деталізуватиметься нами у другому розділі.

Доцільність педагогічно виваженого використання дослідницького методу підкреслюється і методистами, і психологами. Така їх позиція обумовлюється тісними зв'язками дослідницького методу з інтересами підлітків. Наголос на такому зв'язку не випадковий. За Л.С.Виготським [62] саме проблема інтересів є джерелом всієї проблеми психологічного розвитку підлітка. Створюючи методичну систему навчання НО ми, враховували цей зв'язок. Він полягає в тому, що пізнавальні інтереси підлітків хоча з часом і змінюються (див. табл. 1.4.1), однак здебільшого носять пошуковий характер. Учням основної школи властивий інтерес не лише до самих знань, але і до способів їх одержання. Інтерес до навчання у підлітків виникає тоді, коли вони самі безпосередньо роблять „відкриття". Тобто, коли в результаті значного напруження розумових сил, актуалізації відповідного навчального або життєвого досвіду, учень самостійно „відкриває" певну закономірність, правило, спосіб дії або отримує уявлення про певні поняття. Готові знання, готові висновки не задовольняють підлітка, він їх заучує формально. Натомість розумовий продукт, отриманий дослідницьким методом, органічно включається у розумову структуру підлітка і стає невід'ємним здобутком його інтелекту [153, с.204]. Невипадково дослідницькі підходи у навчанні математики нині вважаються ключем для вдосконалення математичної освіти. Більше того, на думку сучасних фахівців, логіка розвитку світової системи математичної освіти вимагає саме дослідницькі підходи обрати у якості стратегічних напрямів її вдосконалення в Україні [242].

Акцент на дослідницькому методі та проблемному навчанні (не принижуючи, значення інших методів навчання математики під час вивчення НО) робиться нами у зв'язку з важливістю не лише постановки перед підлітком пізнавальної задачі, а й необхідністю викликати прагнення її розв'язати. Таке прагнення можна викликати надаючи, за допомогою прийомів дослідницького методу, ролі джерела навчальної мотивації самій навчальній роботі. Актуальність цього питання, а також вищезазначена спроба його розв'язання, у загальних випадках підкреслювалась Г.С.Костюком [146, с.202], А.К.Марковою та іншими, а щодо вивчення безпосередньо НО - Р.А.Хабібом [280]. Зауваження Р.А.Хабіба з цього приводу стосувались як змісту навчального матеріалу, так і організаційних форм та методів навчання. На його думку, вивчення НО для учнів стає виправданим тільки тоді, коли під час навчання математики (зокрема, при вивченні тем, які на перший погляд не пов'язані із НО) вони змушені звертатися до НО. Таке звернення, як правило, відбувається внаслідок попередньо створеної проблемної ситуації. При цьому важливо, щоб складність проблемної задачі не перевищувала наявні інтелектуальні можливості учнів і водночас вимагала напруженої мисленевої діяльності.

Розмаїття окремих прийомів дослідницького методу створює передумови особистістно зорієнтованого вивчення НО. По-перше, підлітки можуть самі побачити пізнавальну задачу, враховуючи особливості та провідну підструктуру їх математичного мислення. По-друге, вони можуть власними темпами просуватись у опануванні навчальним матеріалом. Створюється ситуація, коли вчитель не нав'язує учневі той спосіб і темп міркувань, що властивий йому самому. Це дає змогу не пригнічувати, а розвивати математичну індивідуальність учня, а також враховувати інтереси учнів з різним рівнем навченості. Більш детально питання виявлення та функціонування підструктур математичного мислення учнів представлені у дослідженнях І.Я. Каплунрович та Т.А.Пєтухової [117].

Використання дослідницького методу під час вивчення НО в основній школі відповідає також і новоутворенням пізнавальної сфери підлітків. Як відомо із курсу вікової психології, усі вони (особливості сприйняття, уваги, мислення та пам'яті) у підлітковому віці набувають кількісних і якісних змін, а також супроводжуються певними труднощами. Ці труднощі спричиняє нерівномірність перебігу процесів, що пов'язані із зазначеними новоутвореннями, а також ротація пізнавальних і соціальних інтересів, мотивів та потреб підлітків (див. табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Динаміка розвитку деяких вікових особливостей підлітків

	5-6 класи	7-8 класи	8 - 9 класи
Сфера пізнавальних інтересів підлітків (за Р.А.Хабібом)	Безпосередній інтерес до нових фактів та явищ, що пов'язані з відомостями, які учні отримують на уроці	Домінує інтерес до істотних властивостей предметів та явищ	Формується інтерес до причинно-наслідкових зв′язків, з′ясування закономірностей і встановлення загальних наукових принципів, що пояснюють різні явища
Мотиви спілкування підлітків	Домінує бажання знаходитись у середовищі однолітків, разом щось робити; намагання заручитися підтримкою вчителя, заохочення до навчання, поведінки та шкільної праці	Відчувається необхідність посісти певне місце у колективі ровесників; намагання до особистісного спілкування з учителем, оцінка його професійних та особистісних якостей	Намагання реалізувати прагнення до автономії у колективі однолітків і пошук визнання цінності власної особистості в очах однолітків; потреба у спілкуванні з дорослими (вчителями) "на рівних"
Соціальні потреби та мотиви підлітків (за Д.І. Фельдштейном)	Спостерігається загострена потреба у визнанні дорослими	Спостерігається потреба у суспільному визнанні , у соціально схваленій діяльності, прагнення відчувати свою корисність	Спостерігається готовність проявити себе, застосувати свої сили

Перехід учнів у 5 клас не означає, що для всіх них одночасно настає підлітковий період розумового розвитку. Частина з них ще залишається на рівні молодшого шкільного віку, інші (з раннім розвитком інтелекту) наближаються за розвитком до учнів 7-8 класів.

Вивчаючи НО в основній школі слід мати на увазі ті ускладнення, які зазнають підлітки під час запам'ятовування навчального матеріалу. Пам'ять молодших підлітків здебільшого є механічною і лише набуває поступової інтелектуалізації. Важливо, щоб навички застосування спеціальних мнемічних приймів, які при цьому формуються, все ж таки набули достатнього рівня. Однак у шкільній практиці непоодинокі випадки, коли вони так і не набувають достатньої сформованості. Так деякі учні 7-9 класів не відчувають потребу у логічній пам'яті. Ті речі, які необхідно зрозуміти, вони намагаються завчити напам'ять, іноді навіть як окремі фрази, не розуміючи логічний зв'язок між ними. Відомі випадки, коли зрозумівши марність своїх намагань, старші підлітки взагалі відмовляються запам'ятовувати навчальний матеріал. В таких ситуаціях потрібно вчасно допомогти учням усвідомити, що спочатку слід зрозуміти матеріал, а вже потім запам'ятовувати.

Використання дослідницького методу допомагає розв'язувати проблеми мнемічної діяльності під час вивчення НО на початку основної школи. Згідно запропонованої нами методичної системи, в курсі математики 5-6 класів закладаються базисні основи вивчення усіх провідних понять НО, які шляхом концентричного розвитку та накопичення отримають в курсі алгебри відповідне узагальнення, корекцію та систематизацію. Правильне засвоєння цих відомостей є відповідальним та відправним моментом. Механічна пам'ять, яка домінує у молодших підлітків, може „не впоратись" із таким навантаженням, а логічна – ще не сформувалась. Тому доцільним є використання прийомів дослідницького методу. Така доцільність базується на експериментально встановлених психологами фактах про те, що у пам'яті людини залишається до 90% знань, які вона здобула самостійно; до 50% відомостей, що вона бачить, і лише 10% - тих, що вона чує [222]. Так у „Великій дидактиці" Я.А.Коменський закликав вчителів навчати своїх учнів так, щоб вони досліджували і пізнавали самі предмети та явища, а не тільки пам'ятали чужі спостереження та пояснення [140].

Дослідницьке включення нового матеріалу в систему знань є одним із ефективних прийомів запам'ятовування. Відповідні розумові зусилля, способи мислення не лише сприяють міцному запам'ятовуванню, але і стають основою результативного згадування, продуктивність якого забезпечується організацією систематичного повторення [153].

Дослідницький метод є засобом розвитку не лише пам'яті підлітків, а і їх мислення, яке характеризується зміною співвідношення між конкретно-образним та абстрактно-теоретичним. З розвитком абстрактного мислення конкретно-образна компонента не зникає, а продовжує відігравати істотну роль в загальній структурі мислення. Одне із основних завдань сучасної методики навчання математики полягає в тому, щоб досягти максимального розвитку логічного мислення учнів за мінімального стримування і навіть розвитку образного мислення. Активізацію останнього в основному пов'язують із наочністю, яка сприяє утворенню зрозумілих образів сприйняття. Її роль при формування математичних понять детально викладена на сторінках науково - методичної літератури [255, с.68-77]. Розвиток аналітико-синтетичного сприйняття, якого вимагає вивчення курсу алгебри (залучення символіки, використання складного математичного апарату тощо), неможливий без відповідної наочності. Для того, щоб сприйняття елементів знань було точнішим і повнішим, слід використовувати різні засоби навчання математики. Вони детально досліджувались і досліджуються сучасними методистами, зокрема Н.А.Тарасенковою [262].

У запропонованій нами методичній системі, вивчення НО починається на початку основної школи і вимагає відповідного наближення навчального матеріалу до вікових особливостей сприйняття підлітків. Виконуючи відповідне адаптування ми керувалися думкою про необхідність спрощення в меншій мірі змісту НО, а в більшій - його подання. При цьому поміж інших засобів навчання (про них йтиметься у другому розділі) основний акцент ми робимо на логіко-графічній схематизації (або структуруванні) навчального матеріалу. Під останнім дидакти розуміють психологічно грамотне перетворення навчальних текстів у схеми [97]. Такий підхід обумовлюється результатами досліджень сучасних вітчизняних та зарубіжних фахівців (Н.А.Тарасенкова [262], Н.Г.Салміна [247], А.П.Егидес [97], О.І.Пометун [222], М.С ілбермен [303]). Зокрема в них вказується, що показники сприйняття та запам'ятовування наочного матеріалу вищі чим показники словесного. Навіть за високої концентрації уваги (а у підлітків вона є досить нестійкою) людина може сприйняти приблизно половину вербальних відомостей. Використання ж візуальних засобів дозволяє втроє поліпшити результати. Крім того така презентація матеріалу вимагає на 40 % менше часу та підсилює ефективність усної подачі матеріалу [222], [303].

Сприйняття невербального навчального матеріалу з НО, зокрема навчальних текстів (правил, властивостей, прикладів тощо), супроводжується численними труднощами. Вони пов’язані із внутрішньологічною структурою НО, невизначеністю із загальноприйнятою термінологією та символікою, а також іншими проблемами локального характеру. Говорячи мовою сучасної психології, традиційне викладення навчального матеріалу НО володіє „слабкою гештальтністю” („гештальт” – від німецького „образ”). Іншими словами учням важко охопити структуру, внутрішньотематичні зв’язки, особливості та властивості понятійного апарату НО. Активність учнів «витрачається» на відстеження змістових вузлів теми, а не на їх сутності. В результаті подолання відповідних труднощів, які вимагають додаткової роботи психіки, настає втома. Увага притупляється, робота стає менш продуктивною. Підліткам, яким ще важко самостійно з’ясовувати причинно-наслідкові зв’язки, „губляться” у навчальному матеріалі НО, а в результаті - втрачають інтерес до нього. Відбувається, як кажуть психологи, підсвідоме „втікання від роботи”.

Методично доцільним за таким умов, ми вважаємо цілеспрямоване посилення гештальтності навчального матеріалу НО шляхом його логіко-графічної схематизації (або структурування). Грамотні, „сильні” гештальти сприяють і розумінню, і мисленню, і запам’ятовуванню, і відтворенню матеріалу. За Н.Г.Салміною [60], [247] переклад тексту на знаково-символьну мову, в тому числі на мову логіко-графічних схем, робить видимими зв’язки та відношення, які заховані в тексті, сприяючи тим самим пошуку та з’ясуванню його структури. Мета такого перекладу отримати нові відомості, статус та роль яких визначається локальними цілями навчання. Під час вивчення НО логіко-графічні та логіко-дидактичні схеми можуть використовуватись на різних етапах навчання і як засіб викладу нового матеріалу, і як засіб закріплення знань і вмінь, і як засіб узагальнення та систематизації теоретичних відомостей. Але основною метою їх використання є активізація післядовільної уваги підлітків.

З курсу педагогічної психології відомо, що увага є основою для виникнення та реалізації усіх психічних процесів, що пов’язані з пізнавальною діяльністю, зокрема вона є необхідною передумовою сприйняття навчального матеріалу. Увагу можна тренувати та розвивати. Якщо людина свідомо „допомагає” своїй увазі, то діяльність максимально ефективна; якщо ж „заважає” їй, то діяльність ускладнюється настільки, що стає практично неможливою. Під час вивчення НО підтримці сконцентрованості довільної та післядовільної уваги сприяють не лише логіко-графічні засоби, а і практичні дії учнів. Окремі з цих дій пов’язані із навчально-дослідницькою діяльністю учнів (про це йшлося вище), а окремі – із діяльністю учнів по самостійному створенню логіко-графічних засобів.

Не кожний навчальний матеріал та спосіб його подачі учням, може і має бути цікавим та „гештальтним”. Навпаки перед вчителем стоїть важливе завдання – розвити потребу підлітків до пізнання, бажання вивчати не лише те, що цікаво та просто, але й те, що нецікаво і складно [153, с.196]. Врахування інтересів та особливостей сприйняття підлітків - лише передумова цього процесу. Поступово їх зацікавленість набуває стійкості і переростає у сталий інтерес до математики.

Підлітковий період є періодом численних пізнавальних можливостей. Підлітки оволодівають, зокрема, здатністю до дискусійного та гіпотетико-дедуктивного (здатність висувати, перевіряти та оцінювати гіпотези) мислення, а також схильністю до експериментування. Розвиток та кульмінація останньої перепадають на 5-7 класи. Потім вказана схильність поступово згасає і у підлітків з'являється більше довіри до досвіду інших [246, с.219]. Усі ці можливості є потенціалом особистості. Вони можуть ним і залишитись, після чого поступово зникнути. А можуть, завдяки їх використанню, набути чинної дієвості. Саме у останньому випадку вони стануть рушійною силою загального розвитку мислення.

Зазначені можливості виділені не випадкового. З одного боку вони створюють сприятливі психолого-педагогічні передумови для вивчення НО, з іншого – навпаки, самі НО можуть сприяти розвитку зазначених якостей мислення, забезпечуючи педагогічно доцільне їх використання. Одним із засобів практичної реалізації цих зв’язків (в обох напрямках) є прийоми дослідницького методу та відповідні організаційні форми навчання.

Починаючи з 5 класу важливо поряд з індивідуальними, організовувати групові форми проведення занять, екскурсії, дидактичні або рольові ігри, дискусії, практичні та лабораторні роботи [221]. Важливість останніх двох особливо підкреслюється як сучасними дидактами (З.І. Слєпкань [255, с.164], М.А.Бугайовою [39]) в контексті прикладної спрямованості та розвивального навчання математики, так і методистами минулого в контексті вивчення безпосередньо НО (Л.А.Бобильовим [30, с.95], Н.Я.Прайсманом [225, с.7], [220], С.Г. Первухіною [217], Р.А.Хабібом [228, с.56], [274], І.Г.Адішевим [1, с.8], Н.Ф.Єлизаветіною [98], [99], Ю.І.Мальованим та З.І.Слєпкань [171], Т.В.Малковою та іншими [190]).

У методичній літературі відсутня єдина думка, щодо трактування понять „лабораторна робота" і „практична робота". Дослідники, зокрема М.А.Бугайова [39], під практичною роботою розуміють самостійне розв'язування учнем математичної задачі, наприклад, прикладного характеру, яка може навіть не містити числових даних і вимагає від нього позаматематичних дій. Такі роботи можуть бути тренувальні та пізнавальні. Поняття практична робота є ширшим поняттям ніж лабораторна робота чи розв'язання прикладної задачі. Але у будь-якому випадку, за будь-яких означень, і це підкреслюється фахівцями, зазначені організаційні форми безпосередньо пов'язані з НО [255, с.104].

Впровадження лабораторних та практичних робіт під час вивчення НО відповідає поглядам сучасних дидактів щодо ролі наочності при формуванні математичних понять. Вони, аналізуючи багатий досвід вітчизняної та зарубіжної педагогічної психології, наголошують, що наочність (особливо в підлітковому віці) може мати як позитивний так і негативний вплив [255, с.70], [153]. За таких умов великого значення набуває активна предметна діяльність самого учня, коли задіяні не лише мислення учнів, а й руки: поєднуються безпосередні практичні дії учня з роботою його мислення. В результаті такої діяльності відбувається не лише зорове та слухове, а й всебічне сприйняття матеріалу. Пропонована організація навчання повніше задовольняє потреби різних учнів, чий домінуючий спосіб сприйняття матеріалу також є різним.

Вже в 5-6 класі є передумови для педагогічно доцільного впровадження практичних робіт. Це підтверджується, зокрема, і їх наявністю у нових підручниках [20], [175]. Однією з умов проведення практичних робіт є відносна простота закладених в них математичних моделей. Останні не повинні відволікати учнів від основного змісту навчального матеріалу та відповідних етапів розв'язування. Життєвого та навчального досвіду учнів повинно бути достатньо для самостійної побудови цих моделей, а також їх внутрішьомодельного розв'язування [39]. Поступово з ускладненням математичного навчального матеріалу ускладнюються і пропоновані математичні моделі. Такий підхід, за В.В.Давидовим [82], відповідає конкретно-образному мисленню молодших підлітків (особливо коли йдеться про лабораторні роботи) і водночас сприяє розвитку їх абстрактно-теоретичного мислення.

Проведення лабораторних та практичних робіт під час вивчення НО відповідає соціальним та пізнавальним мотивам підлітків, які в цьому віці набувають істотних змін (див. табл. 1.4.1). Психологи зазначають, що підлітки втрачають інтерес до навчального матеріалу, а відповідно і до навчальної діяльності, якщо не відчувають їх практичної значущості. Навчання підлітків ефективне тоді, коли воно пов'язане із життям, коли підлітки розуміють призначення того, що вивчають [53, с.216,307], [153, с.190]. НО мають тісні зв'язки з життєвою практикою. Дослідників завжди цікавило питання як їх найдоцільніше використати під час вивчення НО. Вони ставили під сумнів продуктивність виключно вербального звернення до життєвого досвіду підлітків із-за його неоднорідності та недостатності. Вважаючи вищевказані дії непереконливими, методисти одностайно визнавали ефективність залучення «життєвих питань» під час виконання учнями лабораторних та практичних робіт (Ю.М.Колягін та ін. [191, с.97], Т.В.Малкова, Р.А.Мусаелян та ін. [190, с.65], Р.А.Хабіб [228, с.55], М.М.Мадбабаев [167,с .3]).

Впровадження у навчальний процес практичних робіт створює реальні можливості для діалогу між учасниками педагогічного процесу, зокрема для ділового спілкування та інтелектуального співробітництва типу „учень-учень", „учень-учитель". Відомо, що спілкування для підлітків набуває непересічного значення у зв'язку із особливостями їх провідної діяльності. Так, на думку Д.Б.Ельконіна та Т.В.Драгунової, спілкування, зокрема інтимно-особистісне, власне і є провідною діяльністю підлітків [59, с.8]. А Р.С.Немов доповнює ідею провідного типу діяльності ідеєю провідного типу спілкування [205]. Згідно неї для підліткового віку властиве професійно-особистісне спілкування (комбінація спілкування на особисті теми і спільної групової діяльності за інтересами).

Діяльність дитини – складна система, у якій різні її типи, види, форми, знаходяться у ієрархічних зв'язках. Вважається, що у вищезазначеній системі діяльностей виділяється одна, яка є визначальною для розвитку особистості дитини в межах даного вікового періоду. Саме їй підпорядковуються інші види діяльності. Таку діяльність і називають провідною. Не дивлячись на велику кількість досліджень, одностайної думки щодо провідної діяльності підлітків не існує . Більше того, психологи відмічають, що уявлення про провідну діяльність для підліткового віку є дещо абсолютизованими і може виступати лише як загальний орієнтир [65, с.172], [53, с.205-206], [246, с.109]. Таким орієнтиром для розвитку особистості підлітка повинна стати лише особлива організація освітнього процесу, а саме спільна продуктивна діяльність.

Своєрідним узагальненням існуючих теорій з приводу провідної діяльності підлітків є дослідження сучасного психолога К.Н.Поліванової [220]. Підтримуючи тезу про те, що не існує єдиної думки з приводу провідної діяльності підлітків, вона висуває ідею проективної діяльності. Остання полягає в тому, що освітянський простір (термін Б.Д.Ельконіна [278]) повинен бути орієнтованим на створення умов для розгортання повного циклу авторських дій підлітків: задум; аналіз умов реалізації задуму; реалізація задуму, тобто отримання певного продукту (термін К.Н.Поліванової [220]). Як свідчать спостереження психологів, перші два етапи вищезгаданого циклу виникають у підлітків спонтанно. А продуктивність – ключова характеристика авторської дії – не може виникнути у підлітків стихійно без спеціально спроектованих умов. Підлітки об'єднуються в невеликі групи і займаються «придумуванням» та спробами реалізації придуманого. Згідно задуму, вони розподіляють обов'язки, обговорюють образ майбутнього продукту, постійно спілкуються з приводу задуму, але так і не доводять його до логічного завершення.

За дослідженнями П.Полянського [221], В.Голобородька, В.Гнєдашева [71] результати проективної діяльності для підлітків досить часто є другорядними, на перше місце в них виступає сам задум (проект). По мірі реалізації задуму підлітки з різних причин поступово втрачають інтерес до нього і переключаються на новий проект. На думку психологів саме в систематичній нереалізованості задумів і полягає основна проблема підліткового віку. Тому шкільне життя підлітків повинно будуватися як серія проектів, які розробляються у традиційних навчальних курсах (або як доповнення до них). Проект повинен виконуватись групою дітей під керівництвом або при участі дорослих. Складність практичного впровадження проективної діяльності полягає в тому, що авторська дія (як складова проективної діяльності) не може бути спланованою заздалегідь. Вона може бути лише ініційована дорослими. Дорослі мають разом з підлітками пройти весь шлях від задуму (хоча можливо і „підставного") до його реалізації, частково беручи на себе технологічні труднощі проекту.

Проективна діяльність підлітків не витісняє і не заміщує навчальну. Навпаки – їх протиставлення є необхідною умовою усвідомлення підлітком проективного характеру роботи та захоплення нею. Сучасними дидактами підкреслюється зростаюча роль проективної діяльності. На їх думку виконання, реалізація та захист проектів спрямовані на створення в навчальному закладі атмосфери активної пізнавальної та самостійної пошукової діяльності учнів [71], [288], [224]. Детальніше питання пов'язані із проективною діяльністю учнів представлені у роботах М.С.Коган [138], дисертаційних дослідженнях А.В. Ходірєвої [284], С.Г.Лесншової [159], І.С.Булах [41]. Питання про ведення учнями проективної діяльності під час вивчення ними НО конкретизуються у другому розділі. Зокрема будуть чітко виділені мета, місце, суть та основні етапи реалізації проектів. Один із прикладів розгорнутої організаційної моделі проективної діяльності учнів, яка велась ними під час навчання за розробленою методикою, наведено у додатках (додаток Л).

Неважко побачити, що на базі далеко не кожного навчального матеріалу курсу математики основної школи можна розгорнути проективну діяльність підлітків. НО є своєрідним винятком. Завдяки своїм змістовим та психолого-педагогічним особливостям (про які йшлося вище) вони природно вкладаються у окреслені рамки проективної ідеї. Подача навчального матеріалу, що відбувається під час проективної діяльності, дозволяє реалізовувати діяльнісний підхід вивчення НО в основній школі. Вимога „слухати і запам'ятовувати", а не „діяти" завжди гальмувала продуктивність засвоєння НО. Підлітки не хочуть бути пасивними слухачами. В рамках же проективної діяльності, „діяти" не лише можна, а й необхідно. При цьому прийоми, методи та організаційні форми можуть бути різними.

Навчальна діяльність учнів за такого підходу часто продовжується і в позаурочний час. Зняття часового фактору позитивно впливає на процеси сприйняття матеріалу НО, тобто дозволяє певним чином його індивідуалізувати. Найголовнішим психологічним параметром сприйняття вважається його усвідомленість. Якщо навчальна діяльність не свідома, то усі зусилля, що спрямовані на сприйняття навчального матеріалу, виявляються малоефективними. Зокрема, сприйняття та відтворення відомостей з НО перетвориться на «розумову акробатику» з поняттями, термінами та числами. Усвідомлене ж сприйняття навчального матеріалу приводить до того, що нові відомості учні починають сприймати критично, ставлять питання, не з усіма висновками погоджуються. Вони можуть сперечатись, розмірковувати, а в результаті прийти до кращого розуміння та засвоєння знань. Навчальний матеріал НО ініціює виникнення дискусій та обговорень, які сприяють розвитку не лише самостійного, а і творчого мислення. Ці риси особистості є нині найбільш соціально важливими, а їх формування необхідним.

У реальному навчальному процесі розвитку самостійного мислення підлітків заважають готові „трафарети". Вони пропонуються для використання учнями в умовах дефіциту навчального часу. Такі підходи спрямовані на формування алгоритмічної культури, але вони не привчають учнів до самостійних дій, тим самим гальмуючи розвиток самостійного мислення та формування загальних розумових дій.

Складовими творчого мислення є дивергентне мислення (від пізньолатинського divergentia – розходження), а також його антипод – конвергентне мислення. При цьому дивергентність не виділяється у чистому вигляді, говорять лише про її домінування або перевагу. Дивергентне та конвергентне мислення взаємопроникають і взаємодоповнюють одне одного, а також є нерозривними складовими в єдиному потоці розумової діяльності (І.В. Коробова [144, с.29], О.Матюшкін [181]). Конвергентне мислення (логічне, послідовне) виявляється в задачах, які мають єдину правильну відповідь. В його межах припускається „націлення" на відповідь, на відміну від охоплення всіх можливих випадків при дивергентному мисленні. Останнє передбачає здатність (певною мірою інтуїтивну) бачити усі можливості, усі атрибути об'єкта. Алегорично таке багатоаспектне мислення називають „вільно фонтануючим" (К.Текекс [264, с.57] Дж. Хассардом [302, с.111]). За Дж.Гілфордом дивергентне мислення спирається на уяву і слугує засобом породження оригінальних ідей та самовираження. Воно припускає, що на одне питання може бути декілька чи навіть безліч правильних відповідей (М. Карне [118, с.217]). Традиційному навчальному матеріалу ШКМ у переважній більшості властивим є саме конвергентний характер. За словами Я.Бродського та О.Павлова [37] таке домінування утискує мислення учнів у тісні межі системи з двома наслідками „так” і „ні” або „істина” і „хибність”, що не може відобразити різноманіття навколишнього світу. Певна частина навчального матеріалу з НО має дивергентний характер. Зупинимось детальніше на цьому питанні.

Про своєрідність „арифметики наближених обчислень” говорили А.Л.Гольдін [72, с.7], М.М.Швець [291, с.144], А.Н.Бекаревич [26, с.15,36] та В.М.Брадіс [32, с.79]. Зокрема А.Л. Гольдін називав її обчислювальною філософією у вигляді теорії наближених обчислень та роз’яснював свою думку на такому прикладі. Якщо правильною відповіддю до деякої задачі, або результатом виконання деяких дій є число 45, то з цього випливає, що число 50 не може бути правильною відповіддю. Саме з такими математичними переконаннями і виходять учні із школи, ніколи навіть не розмірковуючи над питанням: а чи так це насправді? Чи не буває на практиці випадків, коли і 45, і 50 можуть бути правильними відповідями, але з різним ступенем точності? Зазначимо, що на практиці такі випадки як раз і домінують, вони є скоріше нормою ніж виключенням. Відбувається це тому, що у житті нечасто доводиться мати справу з абстрактними числами. Зазвичай вони відображають числові значення величин, отриманих в результаті конкретної практичної діяльності (підрахунків, вимірювання, теоретичних припущень та міркувань тощо), що припускає різні їх тлумачення.

На наш погляд, включення НО до традиційного курсу математики, а також надання завданням дивергентного характеру, не лише активізує пізнавальну діяльність учнів, розвиває здатність до дискусійного (розмірковуючого) мислення, але й створює сприятливі умови для виховання культури мовлення. Отримуючи різні правильні відповіді підлітки мають змогу вербально відстоювати свою позицію, активно та свідомо використовуючи математичну термінологію та реалізовуючи бажання спілкуватися. При цьому розвиток мовлення не є другорядним питанням. З психології відомо, що мислення та мова людини взаємообумовлені і цей факт має бути врахованим і в методиці. Важливість практичної реалізації такого зв’язку при вивченні математики підкреслювалась Т.М.Хмарою [283, с.5], Я.І.Грудьоновим [80, с.211], Н.О. Буряк [44]. Ними вказувалось, що успіхи учнів у вивченні математики знаходяться у прямому зв’язку з культурою їх усного та письмового мовлення. У процесі оволодіння математичною мовою та при її використанні розвивається математичне мислення, формуються специфічні для математики мовні конструкції і відповідні розумові дії.

Певна дивергентність закладена в НО не лише на рівні гіпотетичних міркувань, а й на рівні виконання арифметичних операцій методами наближених обчислень. Мова йде про неоднозначність відповіді, яка отримується при розв’язуванні деяких задач різними способами. Прикладом цього є ті випадки, коли елементарні перетворення приводять до різних відповідей. Це властиве як методам з нестрогим врахуванням похибок (ПППЦ) через їх ймовірністно-статистичний характер, так і методам зі строгим врахуванням похибок (зокрема методу меж). Причини цього, їх математичне обґрунтування (залежність від кількості дій та порядку їх виконання), а також відповідні приклади представлені у роботах А.Н.Бекаревича [26, с.15,36] та В.М.Брадіса [32, с.79].

Аналіз психолого-педагогічних передумов вивчення НО дозволяє зробити висновки про те, що їх включення у курс математики основної школи цілком узгоджується з віковими новоутвореннями соціальної та когнітивної сфер підлітків, враховує індивідуальні особливості, а також відповідає мотивам їх діяльності, прагненням та інтересам. За умов активного навчання , діяльнісного підходу та посиленої уваги до дослідницьких методів, НО вдало доповнюють традиційні питання ШКМ, а також створюють можливості для розвитку особистості учнів.

Розглянуті вище психолого-педагогічні передумови є відправним пунктом нашого дослідження і першочерговим складовим компонентом його методологічної основи.

Висновки до першого розділу

Дискусія про роль та місце НО у системі середньої освіти має понад сторічну історію. Її актуальність не втрачається, а навпаки загострюється у періоди реформування ШКМ. Таке періодичне пожвавлення методичної думки є невипадковим: змінюються освітні пріоритети, відповідно змінюються цілі вивчення математики, а тому й цілі вивчення окремих тем. Вони є відправним під час добору змісту та планування навчального матеріалу. Так, на початку 60-х рр ., в період домінування політехнічних цілей вивчення математики, на передові позиції вийшли ПППЦ. Вони вивчались на початку основної школи. А наприкінці 60-х рр., у період зближення математичної науки та освіти, акценти змінились. Методи з нестрогим врахуванням похибок (ПППЦ), хоча і залишилися в ШКМ, але поступилися „головуючим" місцем. Його зайняли методи зі строгим врахуванням похибок: метод меж та метод меж похибок. Вони вивчались наприкінці основної школи.

Зміст НО та його розміщення в межах ШКМ часто змінювались, що не давало можливості розробити відповідні методи, організаційні форми та засоби навчання, забезпечити проведення пропедевтичної роботи та систематичного їх застосування. Проблема загострилась ще більше у зв'язку із появою і у життєвій, і у навчальній практиці спочатку мікрокалькуляторів, а потім ІКТ.

Через відсутність методичного забезпечення, НО було вилучено із програми з математики 12-річної школи. Таке вилучення умовне. НО мають нерозривні, глибокі логіко-математичні та методичні зв'язки із традиційним програмовим матеріалом. Воно не знімає, і навіть, не знижує актуальність проблеми створення оновленої методичної системи вивчення НО, а навпаки вивільняє необхідний для нього простір.

Згідно сучасних освітніх тенденцій, метою вивчення НО в основній школі є сприяння, по -перше, загальному розвитку особистості учнів, по-друге, повноцінному розвитку їх математичної підготовки. Розвиваюча складова цілей вивчення НО обумовлюється основною метою сучасної школи: формування різнобічно розвиненої особистості. НО володіють розвивальним потенціалом, який відповідає пізнавальним інтересам, соціальним мотивам та основним новоутворенням пізнавальної сфери підлітків. За умов домінування активного навчання, діяльнісного підходу, посиленої уваги до дослідницьких методів, розвивальні можливості НО можуть і повинні бути реалізовані. Загальноосвітня складова цілей вивчення НО обумовлюється тим, що вони є невід'ємним елементом фундаментальної підготовки учнів (обчислювальної та вимірювальної культури), а також передумовою прикладної спрямованості навчання математики.

В основній школі, згідно можливостей її математичного апарату, розв'язується пряма задача НО. А саме, формулюються вміння за відомою точністю даних, над якими треба проводити математичні дії, знаходити точність результату.

Ключовим моментом добору змісту НО є вибір провідного методу НО, якому підпорядковуються усі інші змістові питання, а саме спосіб подання наближених значень, а також їх числових характеристик. Основою нашого дослідження є думка про те, що вибір методу НО буде виправданим лише в тому випадку, якщо цей метод, як мінімум, матиме потенціал для органічного поєднання з існуючим змістом, як максимум підсилить його можливості у розв'язуванні загальних проблем математичної освіти. Таким вимогам відповідає метод меж.

Методологічними основами розміщення змісту НО є ідеї раннього, поступового та систематичного вивчення НО; принципи концентризму та фузіонізму, а також принцип логічно завершеної математичної діяльності учнів. Засобами реалізації цих принципів є дидактичне адаптування навчального матеріалу НО до вікових можливостей сприйняття підлітків, а також вивчення НО як в активному, так і у фоновому режимах.

Визначення мети, змісту та психолого-педагогічних передумов вивчення НО обумовлюють теоретичну складову створення методичної системи їх вивчення. Практична складова забезпечується обранням доцільних методів, організаційних форм та засобів навчання. Про них, про їх особливості та реалізацію на практиці йтиметься у другому розділі.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [125-128, 125, 129-131, 133].

РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

2.1. Структурна модель вивчення наближених обчислень в основній школі

Перш ніж переходити до висвітлення пропонованої нами методики вивчення НО в основній школі, зупинимось на принципових моментах її структурної побудови, а також деяких особливостях, що пов'язані із шкільною практикою. Частково це було зроблено у першому розділі. Зокрема були висвітлені та обґрунтовані цілі, а також методологічні основи обрання і розміщення змісту НО. У цьому параграфі з'ясуємо основні напрямки та межі розгортання навчального матеріалу НО.

Вивчення НО в курсі математики основної школи пропонується проводити в три етапи. Перший – у 5-6 класах (інтегрований курс математики); другий – у 7-8 класах (курс алгебри і геометрії); третій –у 9 класі (курс алгебри і геометрії). В курсах математики та алгебри ознайомлення з НО має відбуватись здебільшого в активному режимі, а в курсі геометрії домінує фоновий режим вивчення НО. Детально навчання у активному і фоновому режимах представлено Н.А.Тaресенковою [262], [263], а особливості їх організації під час вивчення НО в основній школі наводились у п. 1.3.

Доцільність такого триступеневого навчання НО обґрунтовується виділеними нами раніше методологічними основами їх вивчення (п.1.3), а також віковими особливостями пізнавальної сфери підлітків (п.1.4). Цілі та зміст кожного із виділених етапів наводяться у додатках (додаток М). Вони обумовлені загальним змістом навчального матеріалу з НО.

Методологічною основою впровадження будь-якої змістової лінії є системний підхід. Він має місце і у пропонованій нами методиці вивчення НО, передбачаючи при цьому наступні вимоги до організації навчання:

• неперервність та наступність у вивченні НО: впровадження НО у курс математики основної школи, передбачає не вивчення окремих понять і фактів, а розвиток відповідних уявлень та умінь, які накопичуючись та об'єднуючись, повинні сприяти формуванню наукового світогляду учнів, а також формувати певні прийоми практичної діяльності;

• цілісність та інтегрованість: ця вимога полягає у встановленні та використанні тісних внутрішньотематичних та внутрішньопредметних зв'язків. Відсутність цілеспрямовано створеної їх мережі призводить до того, що учні сприймають НО не як цілісну теорію, а як добірку мало пов'язаних між собою фактів та рекомендацій, які важко осмислюються та запам'ятовуються. До такого висновку ми дійшли під час проведення констатуючого експерименту. На той час навчання математики велося за програмою 2001 р. Вивчення НО відбувалось окремими порціями на початку 5 класу та наприкінці 9 класу і було неефективним [135], [255]. Тому провідним принципом поетапного розподілення смислових частин навчального матеріалу з НО повинно стати дослідження, виявлення та використання внутрішньопредметних зв'язків між НО та традиційним програмовим матеріалом, які називають також змістовими передумовами. У загальному випадку вони (за В.О.Далінгером [83 , с.4]), розподіляються на логіко-математичні та методичні. Під логіко-математичними зв'язками розуміють об'єктивні, глибокі органічні зв'язки, які випливають із логіки та змісту навчального предмета. Методичні ж зв'язки виконують виключно дидактичні функції. Вони встановлюються з метою ілюстрації, порівняння, співставлення, а найголовніше - з метою адаптації навчального матеріалу (про неї ми частково згадували у п.1.3.) до вікових та індивідуальних особливостей учнів;

• структурованість і спіральність (або концентризм, про який йшлося у п.1.3.): мова йде про неодноразове повернення до провідних понять НО на якісно нових рівнях, з опорою на вже засвоєні поняття і НО, і традиційного програмового матеріалу. Під час вивчення НО поступово повинен підвищуватись теоретичний рівень (зокрема рівень абстрактності та обґрунтованості) та ускладнюватись задачі, що пропонуються для розв'язування.

Зазначені вимоги обумовлюють цілі та зміст кожного етапу вивчення НО і лежать в основі загальної структурної моделі вивчення НО в основній школі за пропонованою нами методикою. Її елементами, окрім визначених трьох етапів вивчення НО, є провідні поняття НО.

Під провідними поняттями НО ми розуміємо три взаємообумовлені базисні групи понять НО: наближені значення, їх числові характеристики та методи наближених обчислень. Їх вибір є традиційним. Він випливає із досвіду вивчення НО в ШКМ, а також тлумачень таких висхідних понять як «наближені обчислення» та «виконання наближених обчислень» (детальніше про них буде йтиметься у п.2.2).

Традиційна структурна модель вивчення НО в основній школі мала послідовний характер (вона проілюстрована на рис. 2.1), що обумовлювалось вимогами чинних програм з математики (див. п.1.1).

Рис. 2.1. Традиційне представлення провідних понять наближених обчислень

У пропонованій нами методиці вона має інший вигляд, який представлено на рис. 2.2. Кожний етап, згідно нашої методики, володіє домінуючою проблематикою щодо формування понятійного апарату НО (на схемі вони виділені прямокутниками). Цілі і зміст вивчення НО на кожному з етапів представлено у додатках (додаток М).

Зі схеми видно, що навчальний матеріал, який відповідає кожному з етапів вивчення НО, не є ізольованим (на це вказують перетини відповідних кругів). З'ясуємо, що означає кожен з цих перетинів.

Під перетином -1- мається на увазі те, що хоча у 5-6 класах і не вводиться поняття про числові характеристики наближених значень, але на цьому етапі поступово, на інтуїтивному рівні формуються уявлення про близькість наближених значень до істинних. Цей перетин символізує і обернений зв'язок: хоча на другому етапі вже не відбувається цілеспрямованого формування поняття про наближені значення, але відбувається їх доповнення щодо форм запису, а також узагальнення та систематизації їх основних джерел.

Перетин -2- означає, що хоча на першому етапі формально про методи НО відомостей не наводиться, однак на наочно-оперативному рівні формуються навички виконання чотирьох арифметичних операцій над наближеним значеннями. Обернений зв'язок полягає в тому, що у 9 класі відбувається доповнення відомостей про форми запису наближених значень. Зокрема, їх запис за допомогою правильних цифр та із використанням знака модуля.

Рис.2.2. Представлення провідних понять наближених обчислень, яке пропонується в нашому дослідженні

Зміст перетину -3- полягає у тому, що хоча на третьому етапі вже не відбувається вивчення відомостей про числові характеристики у активному режимі, однак їх доводиться доповнювати уявленнями про точність наближених значень, які записані правильними цифрами . Обернений зв'язок означає розширення і поглиблення уявлень про виконання дій над наближеними значеннями, яке відбувається під час вивчення тем „Степінь з натуральним показником" та " Степінь з цілим показником".

Перетин -4- відображає те, що на кожному етапі в активному або у фоновому режимах, на формальному або на інтуїтивному рівнях, у стадії ознайомлення або у стадії застосування відбувається залучення усіх трьох базисних груп провідних понять НО. Інакший підхід не є можливим: усі базові групи провідних понять та відповідні їм елементи знань є складовими цілісного розділу ШКМ „Наближені обчислення", а їх умовне поетапне розподілення є лише практичною реалізацією методичних внутрішньо предметних зв'язків НО.

2.2. Тезаурус понятійного апарату наближених обчислень

Передмовою розробки методики вивчення НО є визначеність із науково та методично виправданим введенням провідних понять НО.

З'ясуємо зміст поняття „наближені обчислення". За одними енциклопедичними джерелами наближеними називають обчислення, в яких дані і результат (або принаймні тільки результат) є наближеними [68, с.192]. За іншими - під НО розуміють сам процес одержання наближених розв'язків різноманітних математичних задач, до яких приводить математичне моделювання реальних процесів та явищ [203, с.192]. В науковій та навчально - методичній літературі тлумачення поняття „наближені обчислення" наводяться по різному і мають в основному описовий, конкретно-індуктивний характер. Їх аналіз та узагальнення ми проводили керуючись думкою, обґрунтованою Г.О.Михаліним [194], про те що навчання математики навіть учнів основної школи повинно відповідати принципу науковості, який, враховуючи сучасний рівень математичної науки не тільки не знижує доступність, а навпаки розкриває ширші можливості для реалізації принципу доступності. В результаті прийшли до висновку, що вивчаючи НО в ШКМ під ними слід розуміти обчислення, які виконуються над наближеними або точними значеннями методами НО. Виконання НО передбачає, по-перше, аналіз вхідних даних задачі щодо їх наближеності та точності (близькості до істинних значень); по-друге, знаходження результату через виконання необхідних математичних дій; по-третє, оцінку точності отриманого результату.

У даному пункті основну увагу приділимо методичним підходам введення двох провідних понять НО, а саме наближеним значенням та числовим характеристикам наближених значень. Щодо методів НО, то відповідні питання ми розглядали у п.1.3., а конкретні методичні вказівки будуть наведені у пп. 2.3.-2.4.

У курсах обчислювальної математики та у методиці навчання математики наближеним значенням (наближенням) деякого числа А називають число а, яке є близьким до числа А і замінює його при виконання певних дій (обчислень). Якщо А є значенням певної величини (функції), то а називають наближеним значення цієї величини (функції). Оскільки кожне число А є значенням функції f(x)=x, то під наближеним значенням числа А розумітимемо наближене значення цієї функції f(x) у точці А (Б.П.Демкович [87], Л.К.Богут [63], А.В.Суткова [261]). На сьогодні у шкільній практиці вважається доцільним вживати словосполучення «наближене значення», під яким слід розуміти скорочену назву понять як «наближене значення числа» або «наближене значення величини (функції)».

Наближені значення класифікують за джерелами їх одержання. За однією із класифікацій виділяють первинні (результати практичних вимірювань та деяких підрахунків) та математичні джерела наближених значень (округлення). За іншою – ті джерела, в результаті яких завжди одержують наближені значення (практичні вимірювання та округлення) та ті, в яких іноді одержують наближені, а іноді - точні значення (лічба).

Не з усіма джерелами наближених значень учні знайомляться одночасно. З лічбою та вимірюваннями вони ознайомлюються ще у початковій школі. В основній школі отримані ними знання доповнюються, уточнюються, узагальнюються та систематизуються. Що стосується поняття „округлення”, то з ним учні вперше зустрічаються на початку основної школи, хоча початкове ознайомлення відбувається і у початковій школі під час вивчення теми „Ділення з остачею”.

Окрім традиційних трьох вищевказаних джерел отримання наближених значень деякі методисти також згадують і про так звані імовірнісні наближення. Вперше цей термін разом із відповідними методичними зауваженнями щодо їх вивчення у 6 класі, можна зустріти в роботах Н.В.Єлизаветіної [98], [99], які датуються 60-ми роками. Сама ж ідея впровадження імовірнісних наближень, як пропедевтики вибіркового методу, висловлювалась також і іншими дослідниками. Зокрема у 30-х рр. А.Віттінгом [52], а також у 60-х та 80-х роках В.П. Демковичем та Н.Я.Прайсманом [88]. Провідна ідея імовірнісних наближень базується на тому, що одержання результатів деяких підрахунків, практичних вимірювань та інших даних часто є важкодосяжним або навіть неможливим. У таких випадках їх отримують непрямими методами. Зокрема із деякої великої сукупності об’єктів, які володіють випадковою ознакою, обирають окрему сукупність і виконують вимірювання (або інші дії) тієї чи іншої величини, що пов’язана з цією випадковою ознакою. Після цього отримані висновки переносять на повну сукупність об’єктів. Н.В.Єлизаветіною імовірнісні наближення пропонуються для вивчення в основній школі як четверте джерело одержання наближених значень чисел та величин. За нашою методикою вивчення НО вони розглядаються як один із аспектів, як розширений погляд на традиційні джерела, про які йшлося вище.

Окремої уваги потребує питання про запис наближених значень. Як вже вказувалось, в межах пропонованої нами методики провідним методом НО обрано метод меж. З цього випливає, що основною формою запису наближених значень є їх запис у вигляді подвійних нерівностей. Окрім нього учні знайомляться також і з іншими формами запису, наприклад із записом у вигляді умовних рівностей та за допомогою знаку наближеної рівності (перший стовпець табл.2.1). Ці форми запису є загальноприйнятими, як у ШКМ та інших дисциплін, так і на побутовому рівні. Доцільно також ознайомити учнів і з іншими формами запису наближених значень, зокрема тими, які часто використовуються у житті (другий стовпець табл. 2.1).

Необхідність ознайомлення учнів із формами запису наближених значень, які зустрічаються у побуті, випливає із прикладної спрямованості навчання математики. Відповідні записи зустрічаються на сторінках сучасних підручників та іншої навчально-довідкової літератури, наприклад:

1. Діаметр болта лежить у межах від 1,7 см до 1,8 см. …. [148, с.181 (№795)].
2. Літаки зазвичай підіймаються … на 13-22 км над поверхнею Землі [300, с.3].

Особливої уваги потребує зовнішня схожість знаку дефісу із знаком мінус, яка може заплутати учнів. Однак, як показали результати пошукового експерименту та експериментального навчання, цього не відбувається. Учні, ведучи активну предметну діяльність із широким залученням предметного моделювання (опрацювання макетів та реальних об’єктів), неодноразово на практиці зустрічаються із такими записами і правильно розуміють їх зміст. Більше того, те що риска може означати не лише мінус, добре відомо учням із предметів гуманітарного циклу.

Таблиця 2.1

Форми запису наближених значень чисел та величин (приклади)

Приклади запису наближених значень математичною мовою	Приклади запису наближених значень побутовою мовою
1. 5 м/с ≤ V ≤ 10 м/с, де V- швидкість вітру. *2.* V=7,5 з точністю до 2,5м/с. *3.* V=7,5 ±2,5 м/с. *4.* V=7,5 м/с ±33,4%. *5.* V ≈7,5 м/с.	*1.*Швидкість вітру дорівнює 5 - 10 м/с. *2.*Швидкість вітру дорівнює від 5 м/с до 10 м/с. *3.*Швидкість вітру дорівнює 5 … 10 м/с.

Методичні підходи та обґрунтування запису наближених значень у вигляді подвійних нерівностей широко представлені на сторінках методичної та навчальної літератури різних років та для різних вікових категорій. Однак усі вони стосуються таких джерел наближених значень, як округлення та одноразові практичні вимірювання. Що ж стосується результатів лічби та багаторазових рівноточних практичних вимірювань, то це питання потребує уваги.

Відомо, що на початку 60-х рр. розділ „Наближені обчислення” пропонувався для вивчення на початку основної школи, а провідним методом НО вважались ПППЦ (п.1.1). Наближений результат лічби та багаторазових рівноточних вимірювань подавався у вигляді значення, представленого правильними цифрами. Першим кроком цього процесу було обчислення самого наближеного значення як середнього арифметичного відомих (або знайдених) даних. Другим кроком було з’ясування його точності. За методичними традиціями того часу (дотримання принципу Крилова-Брадіса) необхідно було відповісти на питання: «Скільки цифр записати у відповіді?». Пропонувалося два шляхи, до яких наводились детально розв’язані приклади [34, с.14], [78, с.52]. Перший – ретельний аналіз кожної цифри отриманих результатів, щодо їх відповідного збігу із вихідними даними. Другий - знаходження середнього арифметичного відхилень, яке ще називали середньою похибкою. Під відхиленнями розуміли модуль різниці між кожним із відомих даних та їх середнім арифметичним. Величини середнього арифметичного вихідних даних і середнього арифметичного відхилень аналізувались і робили остаточний висновок щодо відповіді. Обидва шляхи супроводжувались міркуваннями некатегоричного характеру на кшталт: «… щоб уникнути непорозумінь відповідь краще записати так …», а також залученням додаткової термінології: «безумовно надійна цифра», «не зовсім надійна цифра», «зовсім не надійна цифра» тощо. У різних посібниках згадана термінологія була різною. Громіздкість таких міркувань та ведення відповідних записів була зрозуміла вже в ті часи, тому ми знаходимо такі викладки здебільшого у методичній, а не навчальній літературі.

Пізніше, у 70-80 рр., тема „Наближені значення” вивчалась на початку основної школи, а розділ „Наближені обчислення” наприкінці. Провідним методом на той час вважався метод меж , окрім якого входили до навчальних програм також і ПППЦ, і метод меж похибок. У відповідних темах діючих на той час підручників лічба позиціонувалась, як одне із джерел наближених значень. Однак запис наближених значень у вигляді подвійних нерівностей розглядали без згадки про лічбу: або на прикладі одноразових вимірювань, або на прикладі округлень. У методичних посібниках тих часів, зокрема у роботі В.У.Прочухаєва [240, с.38], зустрічалися з цього приводу певні вказівки та наводились відповідні приклади. Вони були логічним продовженням вищевказаних підходів, які панували у 60-х рр. Так за нижню межу пропонувалося приймати різницю між середнім арифметичним відомих даних та середнім відхиленням, а за верхню межу – їх суму.

Зрозуміло, що зазначений підхід адаптовано втілював у собі імовірнісно-статистичну природу НО, зокрема, результати лічби сприймались як випадкові дискретні величини, а їх наближене значення та точність як математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення відповідно. Позиція методистів минулого обумовлювалась відсутністю в ШКМ ймовірнісно-статистичної змістової лінії. Тепер, коли вона є, відповідні поняття можна називати своїми іменами, але у свій час, тобто у старшій школі, як це і передбачено програмою 12-річної школи [177].

Під час пошукового експерименту ми робили спробу впровадження вищезазначеного підходу. Однак окрім громіздкості, ми зустрілися з труднощами його сприйняття учнями, що і стало причиною нашої остаточної відмови від нього. Наведемо приклад. Обравши за наближене значення М середнє арифметичне усіх відомих (або знайдених) даних, а за точність h – середнє арифметичне відхилень, ми нанесли отримані результати на координатну пряму. З’ясувалося, що в отриманий таким чином h–окіл точки М не ввійшли деякі із відомих (або знайдених) даних. Такий стан речей виявився не зрозумілим і не сприйнятим для учнів основної школи. Міркування вчителя про отримання більш надійного імовірного околу місцезнаходження істинного значення виявились непереконливими і не дали очікуваного ефекту. Учні так і не зрозуміли, чому реально існуючі (або отримані) наближені значення залишились поза увагою при формуванні відповіді? Чому верхньою (нижньою) межею обрано «якесь» число, якщо чітко видно, що є і більші (менші) за нього наближені значення величини?

Більшу педагогічну доцільність виявив інший підхід, ефективність якого була перевірена нами під час експериментального навчання. Цей підхід задовольняє принципам доступності та природовідповідності навчального матеріалу (за П.І.Сікорським [250]), а також забезпечує єдиний підхід до запису та опрацювання усіх джерел наближених значень. Полягає він у тому, що за межі наближених значень приймаються найбільше та найменше із отриманих або заданих наближених значень: a1, a2, …, an; amin ≤ x ≤amax. Отримані таким чином межі (як і ті, які підпорядковувались вищевказаним методичним поглядам 60-х років) мають імовірнісний характер. Він цілком узгоджується із об’єктивною неоднозначністю, яка властива межам наближених значень у їх традиційному розумінні. Мова йде про те, що для будь-якого числа А теоретично існує безліч наближень ak і bk: ak ≤ A ≤ bk , k=1, 2, 3, …. Але на практиці намагаються максимально зменшити відстань між нижньою та верхньою межею, тобто між ak і bk.

Теоретичною основою такого підходу є твердження про існування двох типів інтервалів, що визначаються верхньою та нижньою межами наближених значень. Перший тип - це інтервали із твердими, або з безумовними межами в тому сенсі, що ні за яких умов наближене значення не вийде з цього інтервалу. Саме такі інтервали традиційно використовують для запису результатів округлення та практичних одноразових вимірювань. Другий тип - це інтервали з м’якими, або умовними (імовірнісними, довірчими чи вірогідними) межами у тому сенсі, що наближене значення знаходиться у цьому інтервалі лише з певною ймовірністю [193, с.63]. За нашою методикою саме такі інтервали ми використовуємо для запису наближених результатів лічби та багаторазових рівноточних практичних вимірювань. Деякі дослідники, зокрема М.М.Швець, через вищезазначені особливості меж наближених значень називали їх межами невизначеності відповідного точного значення. Маючи при цьому на увазі, що саме точне значення ніякої невизначеності не містить, невизначеним є лише наше знання про нього [291, с.26].

Зупинимо увагу на понятті про числові характеристики наближених значень. Відомо, що серед них виділяють абсолютні похибки, відносні похибки та їх межі. Їх означення наведені у курсах обчислювальної математики [63, 87, 104, 105], так і у шкільних підручниках [55, с.126], [148, с.178], [16, с.257] . Абсолютну похибку та її межу, яку ще називають точністю або граничною абсолютною похибкою, вважають кількісними числовими характеристиками наближених значень. А відносну похибку та її межу, яку ще називають відносною точністю або граничною відносною похибкою, – якісними. У пропонованій методиці, керуючись термінологією, яка присутня у сучасних підручниках, за основу обрано такі терміни як точність та відносна точність. Однак, як показали результати пошукового експерименту, повна відмова від інших термінів недоцільна, оскільки вони також часто зустрічаються в навчальній літературі . Тому з ними додатково також слід ознайомити учнів.

Важливим є вербальне сприйняття учнями вказаних термінів. Результати констатуючого та пошукового етапів експериментального навчання свідчать, що 55-65 % учнів сприймають вимогу щодо «збільшення точності» або «підвищення точності» наближеного значення як збільшення числового значення величини точності, хоча насправді йдеться про його зменшення . Тому під час експериментального навчання замість вищевказаних ми використовували словосполучення «поліпшити точність», «покращити точність». Аналогічні асоціації виникали в учнів також у зв’язку із деякими традиційними запитаннями до задач. Так, наприклад, учні під час пошуку відповіді на питання: «Яке із наближених значень є більш точним?» хибно орієнтувалося на більше числове значення точності. Тому в ході експериментального навчання ми вважали за доцільне вживати інші формулювання на кшталт «Яке із наближених значень є точнішим?».

Формуючи поняття учнів про кількісні числові характеристики згідно традиційної методичної схеми першими вводять поняття про абсолютну похибку (або про похибку і абсолютну похибку), а вже потім про її граничне значення. Ми пропонуємо спочатку формувати уявлення про точність (детально про це йдеться у п. 2.4.2), а вже потім про похибки, як про її окремі випадки. Такий підхід обумовлюється обранням у якості провідної форми запис наближених значень у вигляді подвійних нерівностей. Таким чином в учнів формується думка про те, що у переважній більшості випадків нам невідоме істинне значення того чи іншого наближення, а відомі лише його межі. Більше того, часто ми навіть не можемо сказати до якої з меж є ближчим істинне значення величини. Таким чином в учнів поступово, починаючи з 5-6 класів формуються інтуїтивні уявлення, які в більшій мірі є спорідненими із уявленнями про точність, ніж із уявленнями про абсолютну похибку.

Під час введення поняття про кількісні числові характеристики за традиційною схемою ми зіткнулись із труднощами сприйняття їх учнями. Наведемо деякі з них. По-перше, під час ознайомлення із означенням абсолютної похибки учням важко було зрозуміти, навіщо взагалі оперувати категоріями НО, якщо відоме істинне значення величини. По-друге, формуванню в учнів відповідних уявлень не сприяло «вузьке коло» наближених значень для яких може мати місце поняття «абсолютна похибка». Саме через такі та інші труднощі сприйняття та формування в учнів уявлень про абсолютні похибки, їх називали «фіктивними числами та непрактичними поняттями» (за А.М.Бекаревичем [26]).

Відмовляючись у пропонованій методиці від традиційної методичної схеми у контексті вивчення числових характеристик наближених значень, ми керувались не лише результатами пошукового експерименту, а і досвідом таких методистів як І.К.Шевченко [297], А.М.Бекаревич [26], І.Ф.Ладон [156], та інших [230].

Традиційно формування в учнів поняття про числові характеристики наближених значень відбувалося у другій половині або наприкінці основної школи. У різні роки методистами критикувався такий підхід. Вони вважали таке ознайомлення запізнім (Р.А.Хабіб [228], В.М.Брадіс [32], І.М.Кавун [111] та інші методисти [86], [46], [156]). Що ж до його перенесення на більш ранні періоди, то відповідний навчальний матеріал вимагає певної адаптації до вікових особливостей сприйняття молодших підлітків (детальніше про це говорилось у п.1.3). При цьому доцільно керуватись загальнометодичним принципом про доцільність спрощення не самої ідеї, а її викладення. Тому формуючи початкові уявлення учнів про числові характеристики наближених значень у 5-6 класах не слід вводити відповідну термінологію, а звертатись безпосередньо до інтуїції учнів, наочності та використовувати асоціативні зв’язки з практикою. Говорячи про точність або про абсолютні похибки на першому етапі доцільно послуговуватись словосполученнями: «близькість наближеного значення до точного» (традиційне тлумачення поняття про точність прийняте в метрології та інших спеціальних теоріях [193,с.63]). А пізніше, на другому етапі, вводити чіткі означення відповідних понять, символіку та формули.

Підсумовуючи зазначимо, що усі зауваження та твердження щодо числових характеристик наближених значень, які наведені вище, є справедливими і для кількісних, і для якісних числових характеристик.

З’ясування ключових питань, що пов’язані із методикою введення провідних понять НО, дозволяють перейди до питань розгортання навчального матеріалу НО, відповідного дидактичного наповнення, а також вимог до підготовки учнів на кожному з етапів.

2.3. Вивчення наближених обчислень у курсі математики 5-6 класів

2.3.1. Вимоги до математичної підготовки учнів та шляхи їх досягнення.

Перший етап вивчення НО за нашою методикою є досить відповідальним. На цьому етапі треба забезпечувати реалізацію принципу наступності між початковою та основною школою, сприяти адаптації дітей до основної школи і водночас враховувати перспективи навчання в 7-9 класах. Усе зазначене відображене у цілях та змісті вивчення НО в 5-6 класах (додаток М). З них випливає, що на цьому етапі має відбуватись перше ознайомлення з усіма провідними поняттями НО. Від того наскільки воно буде методично та науково коректним, доступним і цікавим залежить ефективність вивчення НО на наступних етапах.

Проведене нами дослідження підтвердило думку про те, що уявлення, які стосуються провідних понять НО, мають формуватись на різних рівнях. Ці рівні відповідають запропонованій структурній моделі вивчення НО в основній школі (п.2.1), а також основним вимогам до математичної підготовки учнів, які наводяться у розробленій нами програмі (див. додаток С). Згідно них найбільш ґрунтовний характер повинні мати уявлення учнів про наближенні значення. Здебільшого інтуїтивний характер повинні мати уявлення учнів про числові характеристики наближених значень. Випереджальний характер повинні мати уявлення учнів про методи НО. Вони обумовлюються формуванням на наочно-оперативному рівні навичок виконання чотирьох арифметичних дій над наближеними значеннями чисел.

Формування усіх зазначених уявлень, а також відповідних їм умінь і навичок, повинно відбуватись в 5-6 класах шляхом концентричного розвитку. Вони поступово мають розширюватись та залучатись у нові зв’язки. Відбуватись це повинно як за рахунок розгортання самої змістової лінії НО, так і за рахунок традиційного програмового матеріалу, зокрема, розширення уявлень учнів 5-6 класів про числові множини. Мова йде про поступове опанування ними уявлень про раціональні числа та дії над ними: натуральні, дробові (звичайні та десяткові) та від’ємні числа.

Відомо, що планування результатів навчання учнів неможливе поза їх зв’язком із передбачуваними шляхами їх досягнення, а саме обранням методів, організаційних форм та засобів навчання. Тому в основу організації експериментального навчання були покладені результати досліджень сучасної методики навчання математики, які підтвердили свою педагогічну доцільність і під час вивчення НО в 5-6 класах за пропонованою методикою.

Зокрема ефективним виявилося використання конкретно-індуктивного та пояснювально-ілюстративного методів, а також методу доцільних задач. При час їх застосування основний акцент робився на наочності, інтуїції, а також навчальному та практичному досвіді учнів, зокрема тому, що отриманий у початковій школі (додаток Б.16).

Враховуючи інформаційну насиченість в нашій методиці змісту НО у 5-6 класах, а також специфіку провідних ідей, в основу навчальної діяльності учнів було покладено навчально-дослідницьку діяльність. Під час експериментального навчання було з'ясовано, що саме вона здатна забезпечити гармонійне „вплітання" НО у традиційний програмовий матеріал, не приводячи при цьому до його понятійної перевантаженості. Важливо, щоб перехід до нового кола ідей, якими є для математики 5-6 класів НО, було здійснено мотивованим, зрозумілим та доступним для учнів способом. Таким способом є навчально-дослідницька діяльність. Роблячи на ній основний акцент, ми керувалися відомою думкою про те, що пізнавальні мотиви частіше і легше за все виникають і ефективно реалізуються в спеціально створених проблемних ситуаціях, коли учні мають застосовувати нові і вже засвоєні знання та способи дій у практичній діяльності [255, с.221]. Під час експериментального навчання навчально-дослідницька діяльність учнів мала здебільшого активний предметний характер через вікові особливості мислення та сприйняття учнів, а іноді проходила і у вигляді імітаційних експериментів. При цьому відбувалося звернення до навчального та життєво-практичного досвіду учнів, враховувався інтерес молодших підлітків до нових фактів і явищ, а також їх зв'язків із навчальним матеріалом.

Із курсу методики навчання математики відомо, що вивчення математики в 5-6 класах ведеться на індуктивній основі лише із не частим використанням дедуктивних міркувань. Тому під час експериментального навчання ознайомлення учнів з теоретичним матеріалом НО в основному відбувалось на наочно-інтуїтивному та наочно-оперативному рівнях. Поняття вводились описово та індуктивним методом. Математичні методи і закони формулювались у вигляді правил, алгоритмічних приписів та схем-орієнтирів.

Враховуючи педагогічну ефективність у цьому віці методу доцільних задач, а також зважаючи на неможливість строгого теоретичного подання матеріалу НО, як засіб розкриття відповідних понять ми використовували задачі. Ефективність такого підходу була підтверджена у ході дослідження і цілком відповідає методичним ідеям про те, що задачі у навчанні математики є і об'єктом вивчення, і засобом навчання. Під час експериментального навчання ми в основному орієнтувались на синтетичний метод розв'язування задач (міркування учнів відбуваються від умови, виводячи певні наслідки, до шуканого). Через специфіку навчального матеріалу з НО відповідна діяльність учнів відбувалась ніби „навпомацки". Ставилося за мету виховання в учнів „навчальної сміливості": учні не повинні боятися помилитись, або висунути хибну гіпотезу.

Розробляючи методику вивчення будь-якої теми, в тому числі і НО, завжди постає питання вибору таких організаційних форм навчальної діяльності учнів та засобів навчання, які б підсилювали обрані методи та прийоми навчання, відповідали віковим особливостям учнів та психолого-педагогічним особливостям навчального матеріалу.

Під час експериментального навчання найбільшу ефективність показала фронтальна робота та деякі види групової діяльності; менш ефективною виявилась індивідуальна навчальна діяльність учнів. У ході дослідження підтвердилась думка про те, що різні форми фронтальної роботи надають можливість колективного розв'язування дослідницьких та проблемних задач, які ми здебільшого і використовували при ознайомленні учнів з НО. Саме під час фронтальної роботи відбувалося колективне обговорення проблем, які стосуються матеріалу НО, а також висунення гіпотез по їх розв'язуванню. Такий підхід виявив найбільшу педагогічну доцільність. Тільки у такий спосіб, тільки в результаті „живого" спілкування нам вдалося сформувати в учнів заплановані уявлення, а також перевірити їх наявність у школярів. Під спілкуванням ми маємо на увазі не лише вербальні відносини, а і спільну предметну діяльність, зокрема виконання фронтальних демонстраційних, лабораторних та практичних робіт. Зазначені підходи дозволили нам за обмежену кількість часу (що є особливо актуальним) донести інформацію до значної кількості дітей. Також вони сприяли створенню ситуацій, які допомагали учням 5-6 класів проявити ініціативу, «мати право» на помилку, на власну думку, а також брати участь у спільній діяльності. В методиці навчання математики виділяється цілий ряд недоліків фронтальної роботи. Ми також з ними зіткнулись під час пошукового експерименту. Так при вивченні НО іноді спостерігалось самоусунення учнів від участі в спільній роботі. Причиною цього виявився вибраний однаковий темп просування у навчальному матеріалі: слабші учні не встигали опановувати матеріал, а сильніші, навпаки, бачили на декілька кроків вперед та відверто нудьгували. Під час експериментального навчання ми компенсували зазначені недоліки за рахунок залучення у навчальний процес дидактичних та рольових ігор, а також деяких видів групової діяльності, зокрема парної та сумісно-розподільної. Їх ефективність була підтверджена в ході дослідження. Згадані види діяльності надали можливість учням оволодівати навчальним матеріалом з НО не лише з використанням підручника та за допомогою учителя, але й через спілкування між собою.

Аналізуючи недостатню ефективність індивідуальної навчальної діяльності учнів по опануванню ними відомостей з НО, було з'ясовано, що учні 5-6 класів ще мають загальні слабкі навички самостійної роботи. Під час неї вони швидко втомлюються, часто математично неграмотно виконують записи в зошитах, а також не володіють на достатньому рівні навичками роботи з підручником. Враховуючи це, а також специфічність навчального матеріалу з НО, у 5-6 класах ми рідко до неї зверталися, за виключенням випадків коли вона була нетривала, нескладна, а учні були до неї попередньо підготовлені.

Розвиток шкільної освіти потребує особливої уваги до засобів, що пов'язані з ІКТ. На думку сучасних вчених, зокрема М.І.Жалдака [101], П.А.Гевала [66], С.А.Ракова [242], О.В. Шавальової [289], їх запровадження не повинно бути самоціллю. Воно має бути педагогічно виправданим, розглядатися перед усім з позицій педагогічних переваг, які воно може забезпечити порівняно з традиційною методикою навчання. Слід уникати надмірного захоплення, необдуманого використання комп'ютера і пам'ятати про ті негативні наслідки, які можливі внаслідок нераціонального використання засобів ІКТ. Саме таких принципів ми і дотримувались під час проведення експериментального навчання. На першому етапі пропонованої нами методики засоби ІКТ використовуються з метою підсилення та унаочнення висновків, що отримані дослідним шляхом (додаток У.1). Що стосується використання калькуляторів під час вивчення НО у 5-6 класах, то наша позиція узгоджується з тими підходами, які існують у педагогічній практиці та обумовлені вимогами чинної програми.

Під час експериментального навчання широко використовувались засоби наочності. Зокрема виявилося ефективним використання засобів предметного моделювання, коли учні опрацьовували макети чи реальні об'єкти. Менш ефективним було використання засобів образного моделювання, коли учні мали подумки виконати осмислення та перетворення деяких об'єктів, що пов'язані з навчальним матеріалом НО. Їх використання під час впровадження пропонованої методики обумовлено перш за все загально розвиваючими (зокрема поступовий розвиток абстрактного мислення), а вже потім загальноосвітніми цілями вивчення НО в основній школі (п.1.3). Окремі недоліки образного моделювання були компенсовані за рахунок широкого використання графічних засобів моделювання, а саме малюнків, схем, схем-орієнтирів, тощо. Вони виявили не лише високу ефективність, але й педагогічну та методичну доцільність як основні засоби адаптації навчального матеріалу з НО до вікових особливостей сприйняття учнів 5-6 класів. В ході пошукового експерименту були виявлені деякі труднощі при практичному впровадження цих підходів. Зокрема учні не завжди на належному рівні сприймали знаки та символи, які використовувались у схемах орієнтирах. Спроба доповнити їх алгоритмічними приписами не в повній мірі вирішувала цю проблему через недостатнє володіння учнями навичками опрацювання навчальних текстів (про це вже згадувалось раніше). Більш ефективним виявився вибір раціональних організаційних форм навчання, зокрема ігрової діяльності. Впроваджуючи їх під час експериментального навчання ми керувались дослідженнями Л.В.Тополі [267], В.Г.Коваленка [136] та інших.

Нами з’ясовано, які уявлення повинні бути сформовані в учнів 5-6 класів щодо провідних понять НО, а також вказано загальні шляхи їх досягнення. У наступному пункті зазначені твердження будуть конкретизовані методичними рекомендаціями та розробками, а також детальним висвітленням процесу формування відповідних знань і умінь.

2.3.2. Подання навчального матеріалу з наближених обчислень.

Навчальний матеріал 5 класу має пропедевтичних характер і щодо курсу математики 6 класу, і щодо систематичних курсів алгебри та геометрії 7-9 класів. У першій половини 5 класу учні мають розпочати формування уявлень про усі провідні поняття НО. У методиці навчання математики цей крок трактують як виникнення відчуттів, що пов’язані із певними предметами та їх властивостями у процесі відповідної навчальної аналітико-синтетичної діяльності. Другим кроком є їх сприйняття [255, с.52]. За пропонованою методикою останнє доцільно планувати на другу половину 5 класу та на весь 6 клас, де отримані початкові уявлення учнів з НО розширююся та поглиблюються.

Аналіз навчально-методичної літератури та шкільна практика показали, що зміст навчального матеріалу початку 5 класу володіє і методичними, і змістовими передумовами для педагогічно виваженого впровадження НО. Так матеріал першої теми 5 класу „Натуральні числа. Геометричні фігури і величини” переважно вже відомий учням із початкової школи. Тому вчителям важко підтримувати пізнавальний інтерес учнів як на уроках, так і під час виконання ними домашніх завдань. Засобом забезпечення мотивації навчання та підвищення пізнавального інтересу у цій ситуації вважається розв’язування задач практичного змісту [253, с .148], які безпосередньо пов’язані з НО. Узявши за основу цю думку під час експериментального навчання, ми виявили, що ознайомлення учнів із відомостями з НО вносить новизну у навчальний процес, а також викликає інтерес у п’ятикласників і своїм змістом, і шляхами його донесення. Зупинимось детальніше на відповідних методичних розробках.

За традиційною програмою першою темою 5 класу є тема „Натуральні числа”. Вона методично пов’язана з одним із джерел наближених значень, а саме із лічбою. Це випливає із твердження, яке описує поняття „натуральні числа”. Нагадаємо його: „Числа 1, 2, 3, ..., що використовуються під час лічби предметів, дістали назву натуральних”. Під час вивчення вказаної теми, учні частково-пошуковим методом, а саме в ході евристичної бесіди, були підведені до висновків про те, що результати лічби можуть виражатись і точними, і наближеними значеннями, а причини наближеності можуть бути найрізноманітнішими. Точний результат можемо отримати лише при проведенні підрахунків у сприятливих умовах, наприклад, коли об’єкти лічби не рухаються, чітко визначені, їх добре можна розрізнити та охопити поглядом, тощо. Якщо ж умови не сприятливі, то зазвичай отримують наближений результат підрахунків. В ході пошукового експерименту було з’ясовано, що пояснювально-ілюстративний метод під час викладення вищевказаних міркувань, навіть із залученням цікавих фактів, не виявляє достатньої ефективності. Тому для її підвищення, а також для з’ясування питання: «Як зрозуміти, коли в результаті лічби отримують точні, а коли наближені значення?», проводиться короткочасна фронтальна демонстраційна лабораторна робота (в основу її розробки лягли ідеї Я.І.Грудьонова [80], Ю.М. Колягіна та інших [191]) . Суть роботи полягала в тому, що учні мали, не роблячи графічних поміток, підрахувати кількість кругів на двох рисунках (рис. 2.3 та рис. 2.4).

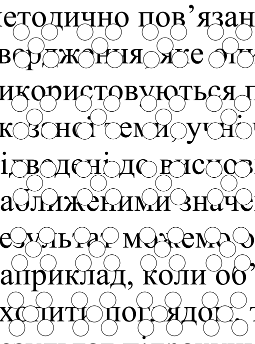


Рис.2.3 Рис.2.4

Для першого рисунка усі учні одразу отримали однакову відповідь: 100 кругів. Для другого – різні: 96, 98 ,…, 102, 103. Підсумовуючи результати дій учнів, вчитель ознайомлює їх із достатньою ознакою наближеності результатів підрахунків, яка звучить так: «Результат підрахунків є наближеним, якщо при повторних підрахунках отримують різні відповіді. Тому результатом підрахунку кругів на першому рисунку є точне значення, а на другому – наближене». В учнів виникає запитання: «Як записувати наближені значення?». Вчитель повідомляє, що серед отриманих результатів обирають найменше значення 96, його домовились називати нижньою межею наближеного значення, та найбільше 104 – його домовились називати верхньою межею наближеного значення. Невідоме точне значення для зручності позначають буквою, наприклад x, після чого записують подвійну нерівність: $96\leq x\leq 103$. Учням також повідомляється, що існують й інші форми запису наближених значень. Наприклад побутовою мовою відповідь до вищенаведеної задачі може звучати так: «Рисунок 2 містить приблизно 96-103 круги, або від 96 до 103 кругів». Ознайомлення ж з усіма іншими формами запису відбувається пізніше.

По завершенню виконання вказаної роботи, вчитель має ініціювати ведення евристичної бесіди про підрахунок великої кількості предметів. Поштовхом для її проведення у нашому дослідженні слугувало таке запитання: „Розв'язуючи приклади з підручника, ми оперуємо дуже великими числами, що мають розряди мільйонів, мільярдів, сотень мільярдів… Як можна полічити таку велику кількість предметів? Адже щоб полічити лише до мільйона потрібен майже місяць, а помилитись можна і підраховуючи навіть набагато меншу кількість предметів... ". Анонсуючи розв'язування цих питань на наступному уроці, вчитель пропонує для виконання учням домашнє завдання у вигляді практичної роботи [127].

Підсумовуючи результати практичної роботи, вчитель формує не лише попередні уявлення учнів про виконання дій над наближеними значеннями, а й уявлення про імовірнісні наближення, які пізніше під час вивчення учнями елементів теорії ймовірностей та математичної статистики ляжуть в основу їх уявлень про вибірковий метод. Вони мають вигляд такого правила-орієнтира: «Щоб полічити велику кількість предметів, слід розділити їх на декілька рівних (або умовно рівних) частин. Полічити в одній з них кількість предметів. Помножити кількість предметів в одній частині на кількість частин». Важливо акцентувати увагу учнів на тому, що в таких підрахунках ми можемо отримати в результаті як точні, так і наближені значення. Прикладом цього слугує завдання про кульки. Наближені значення отримують, якщо частини є лише приблизно рівними або якщо кількість предметів в одній частині можна визначити лише наближено.

Для закріплення отриманих уявлень під час експериментального навчання учням для розв'язування пропонувалися задачі, наприклад 1, 2 (додаток П). Наведемо приклад однієї з них .

Задача 2.1. Онуки приїхали до бабусі на літні канікули. Вона доручила їм порахувати курей, які бігали по подвір'ю. Маринка налічила 22 курки, Микола -25, Петрик – 26, а дідусь, який вийшов допомогти онукам, налічив 24 курки. Скільки приблизно курей знаходилась на подвір'ї?

Коментарі до розв'язування задачі: Учні, володіючи уявленнями про запис наближених значень через вказування їх меж, записують відповідь мовою математики: $22 \leq x\leq 26$, де x- кількість курей на подвір'ї; та побутовою мовою: на подвір'ї знаходиться десь 22-26 курки. Такі задачі мають на меті сприяння формуванню в учнів елементарних вмінь "перекладу" практичних задач на мову математики та навпаки – адаптування отриманих математичних результатів відповідно до запитання задачі. Вони стають складовою інтуїтивного знайомства учнів із етапами математичного моделювання, яке передбачається методичними рекомендаціями до вивчення математики в 5 класі 12-річної школи [238].

Під час експериментального навчання вивчення наступної теми „Вимірювання і побудова відрізків" розпочинається ознайомленням учнів із практичними вимірюваннями як із другим джерелом наближених значень. Згідно традиційної методики в цей час мають формуватись уявлення учнів лише про теоретичні вимірювання. Наша мета - доповнити їх відомостями і про практичні вимірювання.

Мотивом для виникнення в учнів відчуття та подальшого сприйняття (терміни З.І. Слєпкань [255, с.52]) основних ідей, що пов'язані з практичними вимірюваннями, має бути активна предметна діяльність навчально-дослідницького характеру. В ході експериментального навчання вона організовувалась наступним чином. Під час вивчення тем „Відрізки. Ламані та їх довжини" або «Відрізок. Довжина відрізка." учням було запропоновано за допомогою лінійки з поділками відміряти та відрізати 33 см мотузки. Отримані таким чином „відрізки" (частини мотузки) у різних учнів у більшості випадків не співпадали при накладанні, що і підштовхнуло учнів дізнатися причину таких „дивних" результатів своєї діяльності.

До аналогічної навчально-дослідницької діяльності учні залучались і під час вивчення теми „Вимірювання та побудова кутів". Так після формування основних знань і умінь, передбачених чинною програмою, учні повинні були розширити свої уявлення про наближений характер вимірювань. Тобто усвідомити те, що наближений характер мають не лише вимірювання лінійних розмірів, але і вимірювання кутів. Зокрема учням було запропоновано побудувати кут 1270, відкласти на його сторонах відрізки по 10 см, починаючи від вершини кута, сполучити їх кінці та вирізати отриманий таким чином трикутник. Виконуючи вищезазначене завдання доречно використовувати папір різного кольору. Як і у випадку з мотузкою, при накладанні «кути» здебільшого не співпадали.

Привернувши у такий спосіб післядовільну увагу учнів, вчитель, не вживаючи відповідної термінології та будь-яких означень, має поясними учням відмінність між результатами теоретичних та практичних вимірювань. На окремому аспекті цієї проблеми акцентується увага в сучасній методичній літературі. Зокрема дидакти вважають важливим, щоб учні розуміли, що точка і відрізок є поняттями абстрактними. У природі немає ні точок, ні відрізків, а є об'єкти, які умовно вважаються точками і відрізками [188, с.12]. Адаптуючи цю думку до конкретного прикладу, можна сказати, що справді, будь-які відрізки довжиною 33 см є рівними між собою, а довжина кожного з них є точним значенням, яке дорівнює 33 см. Що ж стосується реальних об'єктів, побудованих за допомогою вимірювальних засобів, то їх рівність є наближеною. Тому говорять, що довжина кожного з них лише наближено дорівнює 33 см, а пишуть AB≈33 см. Тому розв'язуючи задачі, в яких довжини відрізків є заданими за умовою, їх вважають точними значеннями і виконують відповідним чином арифметичні дії над ними. А результати практичних вимірювань є наближеними значеннями, тому необхідно з'ясувати, як їх слід записувати та виконувати арифметичні дії над ними.

Передумовою вирішення цих питань є наочна та різнобічна ілюстрація наближеного характеру практичних вимірювань. Частково це вже було зроблено на прикладі з відрізуванням мотузки. Таким чином було унаочнено наближений характер відмірювань, тобто відтворення заданих розмірів, зокрема побудови відрізка заданої довжини.

Змістовими та методичними передумовами для унаочнення наближеного характеру вимірювань володіє наступна програмова тема «Координатні промені і шкали». Під час експериментального вивчення цієї теми учням було запропоноване домашнє завдання практичного характеру. Учні повинні були виготовити із паперу для заклеювання вікон «кравецький метр». Тобто нанести на папір шкалу з ціною поділки 1см. На наступному уроці учні отримали завдання виміряти ним довжину парти. У переважній більшості результатом вимірювань виявилося не ціле число сантиметрів. З цього було зроблено висновок про те, що результати таких вимірювань є наближеними, а відповідно остаточний результат було записано у вигляді подвійної нерівності, про які учні вже отримали уявлення раніше. Визначення верхньої та нижньої межі результату вимірювань відрізнялось від аналогічного процесу під час лічби, тому на цьому слід акцентувати увагу учнів та контролювати зроблені ними записи у робочих зошитах. Згадана відмінність полягає в тому, що результати лічби записувались учнями у вигляді подвійних нерівностей, а під час запису результатів практичних вимірювань учні повинні ознайомитись також із формою запису наближених значень із використанням знаку наближеної рівності. За наближене значення обирають одну з його меж. Керуючись бажанням зробити найменшу помилку обирають ту, яка знаходиться ближче до справжнього значення довжини парти. На розумінні зазначених міркувань доцільно особливо акцентувати увагу учнів, оскільки саме вони повинні стати основою їх сприйняття поняття про точність наближених значень у 7 класі, а у найближчій перспективі - сприяти формуванню уявлень про округлення. Переслідуючи вказану мету, учням для розв'язування пропонувались задачі (задачі 4-6, додаток П), в основу яких покладено малюнок 154 із чинного підручника для 5 класу [20, с. 272].

В ході пошукового експерименту було з'ясовано, що така фронтальна практична робота не переконує учнів остаточно у наближеному характері будь-яких вимірювань. Доповнення її бесідою про джерела можливих похибок, які виникають під час практичних вимірювань, виявило більшу, але все ж таки недостатню ефективність. Зокрема сумніви одних учнів базувались на тому, що результатом їх вимірювання було ціле число сантиметрів, чому тоді його слід вважати наближеним? Інші учні виказували думку про те, що коли збільшити точність виготовленої ними вимірювальної стрічки (тобто нанести ще й міліметрові поділки), то вони б отримали точне значення.

Вчителеві важливо активізувати міркування учнів з цього приводу, а вже після цього робити зауваження про те, що навіть за таких умов ми все одно отримуємо не точні, а лише точніші значення. Засобом підтвердження зазначеного слугує така практична робота. Її суть полягала в тому, що кожен з учнів по-черзі вимірював ширину стола вчителя своєю лінійкою. Результати вимірювань записувались у заздалегідь приготовлену таблицю, за допомогою кодопозитива або медіа проектора. Отримані учнями числові данні виявилися різними, хоча деякі і повторювалися. Створена таким чином ілюстративна аналогова модель, в основу якої була покладена достатня умова наближеності результатів, підтвердила думку про наближений характер результатів практичних вимірювань. Записавши остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності, аналогічно до того, як це робилось із результатами лічби, доцільно підсумувати отримані відомості про практичні вимірювання у вигляді бесіди.

Під час експериментального навчання було виявлено, що вказана практична робота не лише сприяє формуванню уявлень учнів про наближений характер практичних вимірювань, а й дозволяє приділити увагу багаторазовим рівноточним практичним вимірюванням.

Під час вивчення програмової теми «Координатний промінь» уявлення учнів про наближені значення отримують подальшого розвитку. Під час розв'язування задач (наприклад задача 7, додаток П), відбувається їх унаочнене відображення. Водночас до відповідної мислиневої діяльності долучається зорова та дієва пам'ять, що підвищує її ефективність.

За чинною програмою далі учні повинні розпочати вивчення теми «Додавання і віднімання натуральних чисел. Властивості додавання». Згідно принципу фузіонізму, який ми обрали однією із методологічних основ розміщення навчального матеріалу з НО в основній школі (п.1.3.), тут повинно відбуватись і ознайомлення учнів і з правилами додавання і віднімання наближених значень.

Фрагмент уроку „Додавання наближених значень чисел та величин”

1. Актуалізація опорних знань про точні та наближені значення величин та їх форми запису .

2. Мотивація розв'язування задачі.

Учитель: На минулих уроках ми з'ясовували як можна додавати та віднімати будь-які натуральні числа. А чи можна виконувати ці дії і з наближеним значеннями? Для відповіді на це питання розглянемо наступну задачу.

3. Постановка задачі.

Задача 2.2: Дмитро та Павло вирішили полічити скільки птахів мешкає на двох ставках у міському зоопарку. Спостерігаючи за першим ставком, хлопці з'ясували, що їх не менше 30, але не більше 35. На другому ставку птахів було не менше 15, але не більше 17. Скільки птахів на обох ставках?

4. Розв'язування задачі

Учитель: Запишемо наближені значення кількості птахів на ставках у вигляді подвійних нерівностей, ввівши відповідні позначення. Наведемо приклади того скільки птахів може бути на першому ставку, на другому ставку та на обох ставках разом (табл. 2.2)

Таблиця 2.2

Таблиця гіпотез обчислення остаточного результату задачі

Кількість птахів на першому ставку	$30 \le x \le 35$	34	32	27	31	35	36	33	35	29	30
Кількість птахів на другому ставку	$15 \le y \le 17$	16	17	15	14	18	15	17	15	19	16
Кількість птахів на обох ставках	$? \le x+y \le ?$	50	49	-	-	-	-	50	50	-	46

	30	31	32	33	34	35
15	45	46	47	48	49	50
16	46	47	48	49	50	51
17	47	48	49	50	51	52

Рис.2.5

Учням пропонується перевірити правильність запропонованих прикладів. У разі наявності помилок, ці приклади викреслюються із схеми, а причина їх викреслення пояснюється учнями або учителем.

Увага учнів зосереджується на тому, що лише за окремими значеннями кількості птахів на ставках не можна відповісти на запитання задачі. Необхідно перебрати усі можливі випадки. Пропонується зробити це за допомогою обчислювальної таблиці (рис.2.5).

Заповнюючи її, учні можуть користуватись такою властивістю додавання: при збільшенні доданка на кілька одиниць, на стільки ж одиниць збільшується і сума.

Учитель: Виберемо у таблиці серед результатів додавання (рис. 2.5) найменше та найбільше значення. Це й будуть межі наближеного значення, яке виражає кількість птахів на обох ставках . Запишемо відповідь: $45 \le x+y \le 52$. Її можна також представити на побутовій мові: на обох ставках мешкає приблизно від 45 до 52 птахів або 45-52 птахів.

5. Аналіз отриманих результатів.

$$
\begin{array}{ll}
 & 30 \le x \le 35 \\
+ & \\
 & 15 \le y \le 17 \\
 & \\
 & 45 \le x+y \le 52
\end{array}
$$

Рис.2.6

Учитель: Звернемо увагу на те, яким чином отримались межі відповіді, тобто числа 45 та 52. Число 52 (найбільше значення відповіді, верхня її межа) є сумою верхніх меж наближених значень x та y, а 45 (найменше значення відповіді, нижня її межа) – нижніх меж. Запишемо це у вигляді схеми (рис.2.6).

Отже виявляється, що для того, щоб додати два наближених значення, які записані у вигляді подвійних нерівностей, необов'язково додавати усі їх можливі значення, а після цього робити висновки. Слід додати лише їх відповідні межі, отримавши таким чином межі остаточного результату. До речі, до аналогічного висновку про те, що арифметичні дії слід виконувати лише над межами наближених значень ми вже приходили, коли підраховували кількість печинин.

6. Узагальнення, висновки.

Учитель: Замінимо у нашій схемі конкретні числа на букви (рис.2.7). Отриману таким чином схему можна використовувати для додавання будь-яких наближених значень, записаних у вигляді подвійних нерівностей. Запишемо правило, яким при цьому треба керуватись (рис.2.7).

$a \le x \le b$

$+$

$c \le y \le d$

$a+c \le x+y \le b+d$

Додавання наближених значень:

1. Запишіть наближені значення у вигляді подвійних нерівностей в стовпчик одне під одним.
2. Додайте нижні межі наближених значень (найменші їх значення). Отримане число є нижньою межею суми наближених значень.
3. Додайте верхні межі наближених значень (найбільші їх значення).Отримане число є верхньою межею суми наближених значень.
4. Запишіть остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності

Рис. 2.7. Правило-орієнтир для виконання додавання наближених значень

Окремої уваги потребують випадки, коли один із доданків є точним значенням, а інший наближеним. Їх можна розглянути на цьому або на наступному уроці, також використовуючи метод доцільних задач (див. задачу 2.3., рис. 2.8).

Задача 2.3. Дідусь зібрав у саду повний кошик яблук, а його четверо онуків зірвали по одному яблуку. Скільки всього яблук зібрали дідусь та його онуки, якщо в кошику може поміститись приблизно 25-30 яблук?

	25	26	27	28	29	30
4	29	30	31	32	33	34

$25 \le x \le 30$

$+$

$4 = 4 = 4$

$29 \le x+4 \le 34$

Рис.2.8. Обчислювальна таблиця та схема до розв'язування задачі

$25 \le x \le 30$

$+$

4

$29 \le x+4 \le 34$

4

$+$

$25 \le x \le 30$

$29 \le x+4 \le 34$

Рис.2.9

Під час пошукового експерименту нами робилась спроба введення для таких випадків (тобто коли один із доданків, співмножників, зменшуване або від'ємник, ділене або дільник є точними значеннями) окремих схем-орієнтирів та відповідних їм алгоритмічних приписів. Зокрема для наведеної задачі вони мали вигляд, який зображено на рисунку 2.9. Вказана спроба виявилася невдалою в силу особливостей мнемічної діяльності учнів, яка, як відомо (п. 1.4), перебуває у молодших підлітків у стані перебудови.

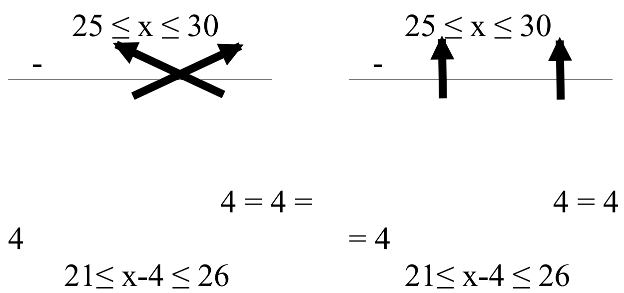


Рис.2.10

Учні плутались у пропонований схемах-орієнтирах та не запам'ятовували їх. Тому виявилося доцільним звести кількість пропонованих схем-орієнтирів до двох: одну для прямих (додавання та множення) операцій, в них стрілки розташовані вертикально; другу для обернених (віднімання та ділення), в них стрілки розташовані «навхрест». Зрозуміло, що для останнього випадку стрілки можуть бути і вертикальними, і «навхрест» (рис. 2.10), але ми керувались тим, що для однієї арифметичної дії має бути одна схема-орієнтир.

Аналогічні задачі (додаток Н) із виведенням відповідних схем-орієнтирів та алгоритмічних приписів пропонуються і для дій віднімання, множення та ділення під час подальшого вивчення відповідних тем діючої програми. Зрозуміло, що ступінь розгортання відповідних коментарів може бути різною. Під час експериментального навчання вона відповідала рівню навченості учнів кожного конкретного класу.

Для дії ділення відповідні схема-орієнтир та алгоритмічний припис лише повідомляються, так як обмеження лише натуральними числами під час його виведення виглядало штучно і не сприяло формуванню в учнів відповідних уявлень. Дослідження правильності пропонованих тверджень, які стосуються ділення наближених значень, відбудеться пізніше під час ознайомлення учнів із десятковими дробами та правилами їх округлення. На цьому етапі, добираючи числові дані до текстових задач, особливу увагу слід звертати на подільність відповідних числових значень.

Під час вивчення наступного програмового навчального матеріалу (зокрема таких тем, як «Прямокутник, квадрат та їх периметри», «Трикутник, його периметр. Види трикутників») відбувається формування в учнів умінь виконувати додавання та віднімання наближених значень у контексті вивчення геометричного матеріалу. Розв'язування завдань, на кшталт нищенаведеним (задачі 2.4, 2.5), які містяться в сучасних підручниках математики для 5-6 класів, хоча і спрямоване на формування вмінь виконувати практичні вимірювання та арифметичні дії над їх результатами, виявляється недостатньо ефективним.

Задача 2.4. Накресліть довільний трикутник; виміряйте його сторони та обчисліть периметр.

Задача 2.5. Виміряйте довжини сторін чотирикутника, який зображено на малюнку, і знайдіть його периметр.

Виконуючи вимірювання лінійкою з ціною поділки 1 мм, учні через особливості зору просто не бачать те, що кінець відрізка часто міститься між поділками. Під час пошукового експерименту з'ясувалось, що подібні завдання заплутують учнів. З одного боку, учні явно не вбачають наближеного характеру таких вимірювань, а відповідно і не володіють чіткою впевненістю щодо їх запису. З іншого - вивчений навчальний матеріал вимагає від них опрацьовувати результати практичних вимірювань як наближені значення. Нами досліджувався й інший методичний шлях. Він полягав у тому, що учням пропонувались для розв'язування задачі, в яких результати практичних вимірювань вже були задані за умовою у вигляді наближених значень. Такі задачі часто зустрічаються у сучасних підручниках з алгебри для 9 класу (наприклад, задача 2.6). Вони не викликали достатньої уваги та інтересу учнів. І, як показали подальші контролюючі заходи, не виконали покладеного на них завдання по формуванню та закріпленню відповідних вмінь.

Задача 2.6. Відомі межі довжини a і ширини b прямокутника (у см): 5,6<a<5,7 і 4,8<b<4,9 . Оцініть: а) периметр прямокутника; б) площу прямокутника [55, с.19].

Більшу ефективність виявив інший підхід. Під час експериментального навчання учнів залучали до практичної групової діяльності, яка мала проективний характер (п. 1.4). Вона полягала в тому, що учні об'єднувались у невеликі гетерогенні групи (3-4 учні) і отримували завдання: виміряти будь-яким вимірювальним засобом (або засобами) довжину і ширину класу та обчислити периметр прямокутника, яким наближено можна вважати класну кімнату. Для кожної групи було обране окреме приміщення. Учням повідомлялось, що на практиці під час таких вимірювань враховуються лише сантиметри, тобто отримавши значення довжини кімнати 5 м 76 см 4 мм ми записуємо результат наступним чином: 5 м 76 см < x < 5 м 77 см. Отримані таким чином данні були включені і до умов інших задач, які пропонувались для розв'язування під час розгляду теми «Площа прямокутника. Площа квадрата». Зокрема учням пропонувалось визначити площу «свого» приміщення, попередньо перевівши значення його довжини і ширини у сантиметри.

Під час вивчення тем, пов'язаних із вимірюванням кутів (в деяких підручниках вони мають назву „Кути трикутника і чотирикутника" [20]), учні залучались до навчально-дослідницької діяльності. Її мета - подальший розвиток уявлень про наближений характер практичних вимірювань, а також формування початкових уявлень про ступінь близькості наближених значень до істинних. Так, під час експериментального навчання проводилась гра-лото „Найкращий вимірювач". Вона полягала в тому, що учням пропонувалось 10 трикутників різного кольору. Вони розрізались на три частини (рис. 2.11) так, як це показано в одному з чинних підручників [20, с.146] або на сторінках іншої навчально-методичної літератури [166, с. 34]. Отримані різнокольорові „кути" перемішувались. Кожен з учнів отримував один такий „кут", вимірював його, записував на зворотному боці отриманий результат і своє прізвище після чого здавав ведучому гри. Учні отримували для заповнення таблицю (табл. 2.3), яка після закінчення гри повинна бути вклеєна у зошит для проектів (результатів проективної діяльності).

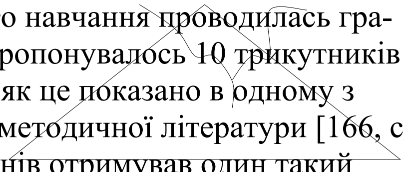


Рис. 2.11

Таблиця 2.3.

Результати практичних вимірювань учнів

Колір трикутника	Числові величини кутів трикутника			Сума отриманих значень	Величина похибки
	1	2	3		
Червоний	1210	190	380	1780	20
…	…	…	…	…	…

Ведучий гри витягає по одному „кути", називає їх колір та числове значення величини кута. Учні записують їх у таблиці, а вчитель у аналогічну контрольну таблицю (доцільним є використання інтерактивної дошки або кодоскопу). Учні підраховують суму значень всіх кутів трикутника і записують результат у відповідний стовпчик таблиці. Вони вже знають, що сума всіх кутів будь-якого трикутника має дорівнювати 1800, а також те, що коли виконуються практичні вимірювання, то отримуються лише наближені результати. Тому школярі „бачать" величину відхилення результатів практичного вимірювання від дійсного значення величини (1800), безпомилково її обчислюють та записують у відповідний стовпчик.

Підсумовуючи хід гри, вчитель акцентує увагу учнів на тому, що хоча похибки і є цілком природним супроводженням будь-яких практичних вимірювань, проте слід прагнути, щоб вони були якомога меншими. Аналізуючи останній стовпчик таблиці, учні самі бачать переможців та призерів гри (учні, у яких вимірювання точніші). Остаточне ж їх виголошення та нагородження проводилось по закінченню гри. Проводячи таку гру окрім навчальної та розвивальної мети, ми переслідували і виховний її вплив. Він полягав у тому, що серед переможців гри часто опинялись учні із середнім і навіть низьким рівнем навченості, що сприяло підвищенню їх інтересу до математики.

Під час вивчення теми «Дробові числа" повинні розширитись уявлення учнів про наближені значення та виконання арифметичних дій над ними на прикладі десяткових дробів. Серед інших питань, які представлені в темі, є питання „Округлення десяткових дробів". Саме тут і повинно відбуватись ознайомлення з округленнями як із третім джерелом наближених значень. Воно продовжиться і у 6 класі під час вивчення теми „Десяткові наближення звичайного дробу".

Висвітлення відомостей про округлення вдало представлене у чинних підручниках, де чітко спостерігаються їх зв'язки з НО, зокрема із наближеними значеннями та уявленнями про їх точність. Під час експериментального навчання ми використовували цей навчальний матеріал та доповнювали його. Зупинимось на цьому детальніше.

Викладені міркування авторів підручників, що спрямовані на формування уявлень учнів про округлення, ми доповнювали відповідними унаочненнями на координатному промені. Метою зазначеного доповнення було те, щоб учні не лише прочитали або почули, що, наприклад, число 6,3 є ближчим до числа 6, а не до числа 7, а й побачили це на координатному промені, по-можливості попередньо побудувавши його та зробивши відповідні позначення. Таке залучення зорової та дієвої пам'яті сприяє активізації логічної пам'яті та відповідних розумових дій. Реалізуючі у навчальній практиці зазначений підхід, ми переслідували як перспективні цілі, так і цілі, пов'язані із навчальним матеріалом 5 та 6 класів. Перспективні цілі полягали у пропедевтиці поняття про точність наближених значень, зокрема підсвідоме зорове фіксування уявлень про величину похибки. Що ж стосується безпосередніх цілей, то унаочнення міркувань про округлення сприяє глибшому розумінню учнями змісту дії округлення, що дозволяє їм не лише правильно округлювати числа, а й вміти пояснювати чому вони так роблять. Таке розуміння створює передумови для сприйняття учнями відомостей про те, що округлення з доповненням (тобто за правилом, яке наводиться у чинних підручниках) є не єдиним способом округлення, а найкращим з точки зору отриманої точності (тобто найточнішим із двох можливих). На практиці ж часто, враховуючи реальну ситуацію, цього правила не дотримуються, а виконують округлення з надлишком, або з недостачею. Відповідний навчальний матеріал вдало представлено у посібнику для 5 класу авторського колективу Г.М.Возняк, Г.М.Литвиненко, М.П.Маланюк [57, с.218], яким ми і користувались під час експериментального навчання. Зокрема основна увага в ньому приділяється текстовим задачам, розв'язування яких передбачає обов'язкове виконання округлення. Таким чином відбувається мотивація вивчення округлення та анонс його подальшого використання. Наведемо приклади задач, якими ми доповнили задачі наявні у чинних підручниках. Під час їх складання ми використовували дослідження та методичні рекомендації А.В.Суткової [259-261].

Задача 2.7. Скільки потрібно ящиків для упакування 223 кг яблук, якщо місткість кожного ящика становить 20 кг?

Коментарі до розв'язування задачі. У даному випадку результат треба округлювати з надлишком (223:20=11,15≈12), бо коли взяти результат з недостачею (як цього вимагає правило округлення з доповненням), то залишаються не упаковані яблука.

Задача 2.8. 26 учням класу доручено посадити не менше ніж 63 дерева. Скільки дерев повинен посадити кожен учень, якщо вони вирішили посадити дерев порівну?

Коментарі по розв'язуванню задачі. У даному випадку результат треба округлювати з надлишком (63:26=2,423...≈3), бо коли округлювати з недостачею (як цього вимагає правило округлення з доповненням) то буде посаджено менше дерев чим вимагається умовою задачі.

Задача 2.9. Побудувати квадрат, периметр якого 9,3 см.

Задача 2.10. Розграфити лист паперу шириною 85 см на 6 колонок.

Коментарі по розв'язуванню задач. В обох випадках ми виконуємо округлення результату з доповненням, а розрядом округлення обираємо десяті, оскільки за допомогою лінійки з поділками ми можемо виконати вимірювання і відмірювання лише з точністю до 1 мм (9,3:4=2,325≈2,3 (см); 8,5:6=1,4166...≈1,4 (см)).

Як бачимо, і в наведених задачах, і в задачах, що представлені у посібнику [57, с.218], не вказується розряд округлення. Важливість та розвивальні можливості такого підходу особливо

0 0,1 0,2 0,3 Рис.2.12 0,4 0,5

підкреслювалась В.М.Брадісом [35, с.162]. Зокрема, він сприяє формуванню в учнів навичок самостійного визначення ступеня точності, який підказується умовою задачі або практичною ситуацією.

Переслідуючи розвивальну мету вивчення НО (п. 1.3), під час формування уявлень про округлення, деякі задачі ми спрямовували на формування в учнів специфічних (за термінологією Н.Ф.Тализіної) або конкретних (за термінологією О.І.Раєва) розумових дій. Зокрема мова йде про дію виведення наслідків, коли від факту належності об'єкту до певного поняття переходять до системи властивостей, які притаманні даному об'єкту [255, с.52]. Приклади відповідних задач наведено у додатках (додаток П: задачі 23-26).

Наступною темою чинної програми є „Додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів", під час вивчення якої продовжується у фоновому режимі формування в учнів вмінь округлювати десяткові дроби:

Задача 2.11. Скільки можна купити зошитів по 55 к. на 2 грн. 65 к. ?

Коментарі до розв'язування задачі. У даному випадку результат треба округлювати з недостачею ($2{,}65:0{,}55=4{,}8\approx4$), бо коли округлювати з надлишком (як цього вимагає правило округлення з доповненням), то для купівлі п'яти зошитів не вистачить 10 копійок.

Тут же у фоновому режимі також ведеться формування в учнів умінь виконувати арифметичні операції над наближеними значеннями на прикладі десяткових дробів. Після формування в учнів основних знань і умінь, передбачених програмою, доцільно розглянути задачі, які передбачають виконання дій із наближеними значеннями. Приклади відповідних задач наведено у додатках (додаток П: задачі 27-28).

Оволодіння учнями матеріалу, що пов'язаний з округленням натуральних чисел та десяткових дробів, дозволяє розглянути питання про округлення меж наближених значень, яке набуває особливої актуальності саме під час вивчення питань про „Ділення десяткових дробів". Воно має дві складові: по-перше, слід з'ясувати як робити округлення (за яким із правил) і, по-друге, – до якого розряду. Зупинимось на них детальніше.

Пошук відповіді на питання: «Як округлювати межі наближених значень?» відбувався за допомогою наступних прикладів. Метою першого з них було підведення учнів до висновку про необхідність округлення з надлишком верхньої межі. А другого - округлення з недостачею нижньої межі.

Приклад 2.1. Для пошиття учнівських штанів потрібно приблизно від 0,72 м до 0,92 м тканини, тобто: $0{,}72$ м $\le x \le 0{,}92$ м. З певних потреб необхідно округлити вказані данні до десятих. Округлюючи межі за правилом округлення з доповненням отримаємо: $0{,}7$м $\le x \le 0{,}9$м. Але таке округлення не відповідає умові задачі: 0,9 м тканини може не вистачити для пошиття штанів. Висновок: верхню межу наближеного значення не можна округлювати з недостачею, тобто відповідь слід записати так: $0{,}7$ м $\le x \le 1{,}0$ м

Приклад 2.2. Нехай потяг прибуває на станцію рівно о 20 год 17 хв. Пасажиру відомо, що його зупинка триває приблизно 10-20 хв. О котрій він повинен прийти на станцію, щоб встигнути на потяг? За умовою час відправлення потягу t приблизно дорівнює 20 год 27 хв $\le t \le$ 20 год 37 хв. Округлюючи межі за правилом округлення з доповненням до десятків хвилин отримаємо, що 20 год 30 хв $\le t \le$ 20 год 40 хв. Таке округлення не відповідає умові задачі: пасажир, прийшовши у 20 год 30хв, може запізнитись на потяг, який цілком міг відправитись у 20 год 27хв. Висновок: нижню межу наближеного значення не можна округлювати з надлишком, тобто відповідь слід записати так: 20 год 20 хв $\le t \le$ 20 год 40 хв.

Розглянувши вищевказані приклади робимо висновок, що при округленні меж наближених значень слід керуватись наступним правилом: верхня межа наближених значень округлюється завжди з надлишком, а нижня - з недостачею.

В результаті розгляду вищенаведених прикладів в учнів можуть сформуватись уявлення, що сформульоване правило є справедливим лише для деяких задач. Тому важливо проілюструвати його об'єктивний характер.

Узявши за основу відповідні дослідження З.М.Литовченко, Н.В.Єлизаветіної [161, с.17], покажемо це на координатному промені (рис. 2.12). Нехай маємо наближене значення

$\le x \le$, виразивши його десятковими дробами отримуємо 0,266…≤ x ≤ 0,444…. Округлення меж з доповненням 0,3≤ x ≤ 0,4, тобто дії всупереч наведеному правилу, звужують числовий проміжок, який описує множину наближених значень. Поза увагою залишається частина значень, серед яких цілком може опинись і справжнє значення. Натомість округлення меж за сформульованим правилом охоплює усі можливі випадки для наближеного значення х.

Повернемося до питання про розряд округлення . На першому етапі вивчення НО учням слід повідомити, що як правило, округлюють до того розряду, з якого починається розходження цифр однакових розрядів. Якщо ж дія, що виконується є проміжною, то межі результату округлюють із збереженням однієї або двох запасних цифр. Детальніше це питання буде розглянуто на другому етапі вивчення НО, тобто у 7-8 класах. Але вже на першому етапі під час розв'язування задач в учнів слід формувати уявлення про те, що коли немає гострої необхідності округлювати межі наближених значень, то цього можна і не робити.

Наступною темою програми є „Відсотки. Знаходження відсотків від даного числа. Знаходження числа за його відсотками”. Під час її вивчення продовжується у фоновому режимі формування в учнів умінь виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями на прикладі десяткових дробів. Наприклад після формування в учнів основних знань та умінь, що передбачені програмою, можна розглянути такі задачі:

Задача 2.12. За тиждень в їдальні витратили приблизно 63,5-64,3 кг цукру. З них 20-25 % було витрачено в понеділок. Скільки приблизно кілограм цукру було витрачено в понеділок?

Коментарі до розв'язування. Під час розв'язування учні „перекладають” дані з побутової мови на мову математики: 63,5 кг≤x≤64,3 кг, 20 %≤y≤25 %, де x- тижневі витрати цукру, y- виражені у відсотках витрати цукру в понеділок. Учням слід визначити, скільки кілограм

становить 1 % тижневих витрат цукру , та обчислити витрати цукру в понеділок (рис . 2.13):

63,5кг≤x≤64,3кг

÷

100=100=100

0,635кг≤ ≤0,643кг

0,635кг≤ ≤0, 643кг

×

20% ≤ y ≤ 25%

12,700кг≤ ≤16,075кг

Рис. 2.13. Схеми для виконання обчислень під час розв'язування задачі

Формулюючи остаточну відповідь, учні повинні висунути пропозиції щодо округлення меж отриманого результату. Під час експериментального навчання вони були різними. В основному, інтерпретуючи результат до умови задачі, учні пропонували відповідь - «прямий наслідок правила»: 12-17 кг цукру; або більш вільне його трактування: 12,7-16,1 кг цукру.

Окрім подібних задач під час експериментального навчання, пропонувались також і інші. Зокрема задачі, які мали на меті формування пропедевтичних уявлень учнів про відносну точність.

Задача 2.13. Число 0,857 округли до десятих і обчисли, на скільки відсотків утворене число більше за дане (№ 933 [57]).

Тема „Масштаб”, яка вивчається далі, має безпосередні логіко математичні та методичні зв'язки [81, с.4] з НО. Під час вивчення цієї теми виявилось доцільним залучення учнів до проективної діяльності, в основу якої були покладені ідеї М.А.Бугайової [39, с.82]. Метою такої діяльності було визначення наближених площ територій європейських країн або областей України (детальна розробка представлена у додатку Л.). В деяких експериментальних класах вона відбувалася із залученням ІКТ (з демонстраційною метою), в деяких - ні. В обох випадках відбувалося звернення до навчального досвіду учнів по володінню ними вмінь знаходити площу за допомогою палетки.

Навчальний матеріал 6 класу має узагальнюючий та уточнюючий характер, щодо курсу математики 5 класу, і в той самий час залишається пропедевтичним щодо систематичних курсів алгебри та геометрії 7-9 класів. Ознайомлення з НО у 6 класі здебільшого відбувається у фоновому режимі.

Розпочинається вивчення математики 6 класу темою «Подільність чисел». В її межах повинно відбуватись повторення поняття про межі наближених значень, їх запис у формі подвійних нерівностей та зображення на координатному промені. Приклади задач, які доцільно розв'язувати на цьому етапі навчання НО, наведені у додатках (додаток П: задачі 29-31).

Під час вивчення наступної теми «Звичайні дроби» повинно продовжитись формування навичок виконання арифметичних дій з наближеними значеннями на прикладі звичайних дробів. Передумовою для цього є повторення схем-орієнтирів та відповідних їм алгоритмічних приписів, з якими учні ознайомились протягом навчання у 5 класі. Враховуючи вікові особливості сприйняття та мнемічної діяльності учнів, організація такого повторення під час експериментального навчання відбувалася в ігровій формі. Гра може бути пов'язаний або із НО, або із будь-яким традиційним програмовим матеріалом (на розсуд вчителя), але у будь-якому випадку у ній мають брати участь дві команди. Мета гри – активізувати дієву та зорову пам'ять учнів у контексті вивчення НО. Ідея актуалізації відомостей з НО може бути реалізована вже на підготовчому етапі. Полягає вона в тому, що учні класу об'єднуються у 10 гетерогенних груп. Кожна з них отримує завдання, основою якого є виконання певних дій над наближеними та точними значеннями величин (додаток К.2). Під час аналізу виконання запропонованих завдань , з'ясовується, що перші чотири та інші шість команд користувалися «майже однаковими» схемами-орієнтирами. Відповідні групи об'єднують у дві команди, а їх емблемами обирають відповідні узагальнені схеми (додаток К.2). Подальший хід гри проходить за обраною темою та метою.

Актуалізувавши таким чином уявлення учнів про виконання дій над наближеними значеннями, їм пропонуються завдання, які безпосередньо пов'язані з ними та із програмовою темою «Звичайні дроби» (додаток П: задачі 32-33).

У цій темі за традиційною програмою відбувається і розгляд питання про десяткове наближення звичайного дробу. Тут важливо підкреслити об'єктивність існування округлення як одного із джерел наближених значень, а також продовжити формування вмінь виконувати округлення із вказаною точністю. Під час експериментального навчання учнями розв'язувались завдання, де розряд округлення конкретно не вказувався, а випливав із умови задачі або інших практичних міркувань (приклади аналогічних задач для 5 класу наводились раніше). А також завдання, які мали на меті продовжити формування уявлень про близькість наближених та дійсних значень величин, наприклад:

Задача 2.14. Яке із десяткових наближень 0,3 чи 0,4 точніше відображає значення дробу ?

Наступною темою, що вивчається у 6 класі за чинною програмою, є тема «Відношення і пропорції". Наведемо приклад однієї із задач, що пропонувались учням для розв'язування під час вивчення цієї теми. Приклади інших задач наведені у додатках (додаток П: задачі 35-39).

Задача 2.15. Необхідно з'ясувати кількість риб у ставку. Для цього у ставок випустили 100 мічених риб. Яка наближена кількість риб у ставку, якщо із 50 риб, що спіймали 3 виявились міченими?

Коментарі по розв'язуванню задачі. Нехай у ставку х риб, тоді:

у ставку 100 мічених риб - х риб у ставку всього

спіймали 3 мічені риби - всього в ставку спіймали 50 риб тому: x ≈ (100·50):3≈ 1666,66...

Слід обов’язково звернути увагу учнів на культуру використання знаку наближеної рівності. Зокрема на те, що наближену відповідь ми отримуємо не через округлення, яке доведеться робити далі, а через наближений характер самих міркувань. Так актуалізуються уявлення учнів про імовірнісні наближення, що доцільно у зв’язку з ознайомленням учнів з елементами теорії ймовірностей. Окремої уваги потребує округлення результату. Під час експериментального навчання учням пропонувалось самостійно обрати розряд округлення та спробувати поясними свій вибір. При цьому учням повідомлялось, що до задачі може бути кілька правильних відповідей. Такий підхід підвищував розвиваючі можливості навчального матеріалу з НО та інтерес учнів до нього, а також сприяв розвитку математичного мовлення та дивергентного мислення. Серед варіантів відповідей учнів до вказаної задачі були такі: 1700 риб; 1670 риб; 1667 риб.

Рис.2.13

Питання з геометрії, що містяться в темі «Коло. Довжина кола. Круг. Площа круга» мають безпосередні логіко математичні зв’язки з НО через необхідність практичного використання числа π. В чинних підручниках та навчально-методичній літературі учням пропонується виконати практичну роботу по знаходженню наближеного значення числа π, визначивши відношення довжини та діаметра довільних кіл, зокрема кіл різних діаметрів та відповідних предметів побуту. Під час експериментального навчання ми також проводили аналогічну практичну роботу. Серед наближених значень числа π, що отримали учні, були обрані найбільше та найменше. Вони стали відповідно верхньою та нижньою межею наближеного значення числа π. Обчисливши їх середнє арифметичне, учні порівняли його із справжнім значенням числа π=3,1415926…, яке повідомив їм вчитель, наголосивши на тому, що воно є десятковим нескінченним, неперіодичним дробом. Таким чином в учнів продовжується формування уявлень про те, що результати практичних вимірювань є наближеними, а також розпочинається формування уявлень про точність наближених значень. Числове значення похибки виконаних вимірювань та відповідних їм обчислень буде знайдене у вигляді десяткового нескінченого, неперіодичного дробу. Для зручності його округлюють. Округлення похибок обов’язково виконується з надлишком, на цьому твердженні слід акцентувати увагу учнів. Отримане таким чином число хоча і не відображає точного значення величини отриманої похибки, однак дає достатньо чіткі уявлення про неї, зокрема про те її значення, яке похибка не може перевищувати.

Курс математики 6 класу завершується темою «Раціональні числа та дії над ними”. Під час її вивчення, зокрема під час та після ознайомлення з питаннями про „Координатну пряму” та „Порівняння раціональних чисел”, розширюються та поглиблюються уявлення учнів про наближені значення на прикладі додатних та від’ємних чисел. Приклади відповідних задач наведені у додатках (додаток П: задачі 42-44). Фабули таких задач у контексті вивчення НО доцільно пов’язати з температурою. Температура може лише підвищуватись або знижуватись на певне точне або наближене значення. Тому над від’ємними наближеними значеннями учні виконують дії додавання та віднімання. Що ж стосується виконання дій другого степеня над нерівностями, які містять від’ємні числа, то воно потребує залучення достатньо складного математичного апарату, а відповідно не може мати місця у 6 класі. Повернення до цього питання стане можливим лише в курсі алгебри 9 класу.

Наприкінці 6 класу відбувається формування в учнів уявлень про координатну площину [177]. Це дає можливість за допомогою ІКТ показати справедливість правил виконання арифметичних дій над наближеними значеннями, що були виведені лише для натуральних чисел і поширені на усі раціональні числа (окрім дій другого степеня для від’ємних чисел). Під час експериментального навчання виявилося доцільним проведення обчислювальних експериментів та унаочнення їх результатів за допомогою створення відповідних динамічних моделей (ППЗ GRAN 2D new). Відповідні розробки наведені у додатках (додаток У.1).

Ознайомленням із навчальним матеріалом 6 класу, який передбачено чиною програмою з математики, а також системою відомостей з НО, яка передбачена пропонованою методикою, завершується перший етап вивчення НО. Його результатом слугує перелік знань, умінь і

навичок, якими мають оволодіти учні протягом навчання у 5-6 класах. Зокрема учні повинні:
• навчитись розпізнавати та наводити приклади наближених значень; записувати та читати їх у різних формах; володіти навичками їх знаходження та відповідного позначення на координатному промені та прямій.
• вміти аналізувати ступінь близькості наближеного значення до точного; порівнювати їх для кількох наближених значень і в окремих випадках знаходити.
• володіти навичками обчислення суми та різниці наближених значень; добутку та частки додатних наближених значень; суми та різниці наближених та точних значень; добутку та частки додатних наближених та точних значень.

Сформованість в учнів вказаних уявлень, знань і умінь надає можливість переходу до другого етапу, який за пропонованою методикою має розпочатись у 7 класі.

2.4. Вивчення наближених обчислень у курсах алгебри та геометрії 7-9 класів

2.4.1. Методичні особливості викладення навчального матеріалу з наближених обчислень в 7-9 класах.

Вивчення НО під час другого та третього етапів охоплюють і курс «Алгебри», і курс «Геометрії» 7-9 класів. У курсі алгебри протягом окремих періодів проходить доповнення уявлень учнів з НО (ознайомлення з новими поняттями, правилами, властивостями). Воно має відбуватись у активному режимі. Протягом же інших періодів, а також у курсі геометрії, проходить систематичне застосування знань і умінь учнів з НО. Воно має відбуватись у фоновому режимі там, де є для цього або відповідні змістові передумови, або прямі вказівки у чинній програмі, наприклад:
- 8 клас. Тема 4. Розв’язування прямокутних трикутників: … Прикладні задачі;
- 9 клас. Тема 6. Початкові відомості з стереометрії: …Розв’язування задач на обчислення площ поверхонь і об’ємів, у тому числі прикладного характеру.

Опанування учнями відомостями у активному режимі і їх застосування у фоновому режимі на кожному етапі має свої особливості.

Можливості учнів щодо застосування знань і умінь перебувають у постійній динаміці. На другому етапі вони достатньо обмежені. Проективна діяльність, розв’язування задач прикладного змісту та інші завдання передбачають виконання лише чотирьох арифметичних дій над наближеними значеннями, розширюючи при цьому (порівняно з першим етапом) застосування різних форм запису наближених значень. Передбачається також використання на репродуктивному внутрішньопредметному рівні уявлень учнів про числові характеристики наближених значень та вмінь виконувати «нові» дії над наближеними значеннями (піднесення до степеня з натуральним та цілим показником, добування арифметичного квадратного кореня).

На третьому етапі ситуація якісно змінюється. Учні вже ознайомлені з усіма провідними поняттями НО та відповідними елементами знань. У 9 класі має місце лише обґрунтування деяких з них (метод меж), незначне доповнення (ПППЦ, запис наближених значень правильними цифрами) та узагальнення. Тому протягом третього етапу вивчення НО доцільно зосереджуватись в основному на застосуванні НО, зокрема під час розв’язування прикладних задач, яке передбачено чинною програмою [177]. Реалізувати зазначене на практиці дозволяє загальне вдосконалення формально-оперативних алгебраїчних умінь учнів, ознайомлення їх із відсотковими розрахунками, відомостями з тригонометрії тощо.

Як вказувалось вище, вивчення НО у активному режимі на кожному з етапів також має свої особливості. Так відомості з НО, що пропоновані для опанування учнями на другому етапі, майже не представлені в чинній програмі. Тому ознайомлення учнів з відповідним навчальним матеріалом відбувалось під час експериментального навчання за рахунок залучення додаткового часу, а також додаткових засобів навчання, в тому числі підручників з алгебри 70-80 рр. [2], [3] та авторських розробок.

Щодо третього етапу, то значна частина навчального матеріалу, ознайомлення з якою передбачається пропонованою методикою, має місце в чинній програмі і представлена в діючих підручниках. Зокрема мова йде про відомості з теорії нерівностей, ПППЦ, інші пов’язані з ними властивості, правила, означення та приклади. Таким чином створюються передумови для того, щоб на початку 9 класу логічний акцент робити на «алгебрі НО», а саме на обґрунтуванні та доповненні основних положень методу меж. Необхідність такого підходу обумовлюється, по-перше, психолого-педагогічними особливостями старших підлітків, зокрема підвищенням їх інтересу до причинно-наслідкових зв'язків, до з'ясування закономірностей та ознайомлення із загальними науковими принципами. По-друге, важливістю надання випускникам основної школи відповідної математичної підготовки.

Окрім відмінностей другий та третій етапи мають і спільні риси. Зокрема обидва вони виконують структуруючу роль стосовно відомостей з НО, з якими учні були ознайомлені на попередніх етапах. Їх мета - забезпечити гештальтність навчального матеріалу (п. 1.4), тобто чітке бачення та розуміння учнями його структури. Під розумінням структури навчального матеріалу маємо на увазі глибоке розуміння всіх основних взаємозв'язків у ньому. Воно є передумовою формування навичок не лише простого використання знань, а й перенесення відповідних узагальнених принципів та відношень на міжпредметний та практичний рівень (Дж .Брунер).

Важливість та необхідність уваги до структурування опанованого учнями навчального матеріалу у загальному випадку неодноразово підкреслювалась науковцями, зокрема Дж. Брунером [38], Н.А.Тарасенковою [262], А.П.Єгідесом [97] та іншими. На їх думку старші підлітки вже володіють потенційною здатністю мислити логічно та системно, але для того, щоб вона набула розвитку та «запрацювала» необхідний поштовх у вигляді спеціально організованої відповідної навчальної діяльності. Під час експериментального навчання учні залучались до такої діяльності (детальніше про це йтиметься у наступних пунктах). Її доцільність у контексті вивчення була не лише підтверджена, але й виявилася вкрай необхідною. Це пов'язано з тим, що опанування учнями уявленнями про провідні поняття НО відбувається шляхом нерівномірного концентричного нашарування, поступового розширення та систематичного уточнення відповідних відомостей. Тому якщо своєчасно не приділити увагу структуруванню навчального матеріалу з НО, то в учнів не сформується правильної системи уявлень з НО. Замість неї в пам'яті залишиться лише набір, відокремлених фактів, тверджень, формул та правил. Нажаль, такий досвід уже мав місце у практиці вітчизняної школи (п.1.1).

Як засоби структурування навчального матеріалу, зокрема засоби моделювання його внутрішньотематичних зв'язків, ми використовували логіко-дидактичні схеми (термін А.П. Єгідеса) та інші знаково-символьні засоби (термін Н.А.Тарасенкової). У більшості випадків вони створювалися разом з учнями. Приклади деяких з них наведені у додатку К. Психолого-педагогічними передумовами такого підходу є поступовий розвиток логічного мислення та абстрактного сприйняття учнів. Нагадаємо, що вказані засоби частково вже мали місце і на першому етапі у вигляді обчислювальних таблиць, схем-орієнтирів тощо. На другому та третьому етапах їх використання набуває більших обсягів та більшої складності.

За словами вітчизняних методистів, поступово математичним апаратом для учнів 7-9 класів повинна стати і стає словесно-символьна мова [96, с.12,26]. Зокрема набувають подальшого розвитку уявлення учнів про використання букв для запису виразів; про використання символів та креслень для запису правил та закономірностей; про позначення та зображення на числовій прямій та координатній площині; про діаграми, таблиці та графіки. На другому та третьому етапах в учнів зростає досвід звернення до ІКТ, що дозволяє їх використовувати і як засіб унаочнення, і як засіб оперативного інформаційного супроводження.

Передумовою ефективного структурування навчального матеріалу є актуалізація відомостей з НО. Її важливість була підтверджена і врахована під час експериментального навчання. В методиці навчання математики необхідність актуалізації опорних понять пов'язують з тим, що наявність розривів у часі між вивченням спорідненого матеріалу, природно ускладнює забезпечення наступності у процесі опанування учнями новим навчальним матеріалом. Тому має зростати увага до актуалізації та повторення раніше вивченого. Його організації під час експериментального навчання сприяло використання схем-орієнтирів, алгоритмічних приписів та інших засобів, а також залучення учнів до ігрової та проективної діяльності, мета і хід яких описано у наступних пунктах. Під час актуалізації опорних понять уже відомий учням матеріал постає перед ними в іншому вигляді та в інших зв'язках, що, на думку методистів, може викликати певні труднощі і в учнів, і в учителів.

В методиці навчання математики пропонують два шляхи уникнення такої ситуації. За одним – не слід акцентувати увагу на зв'язках нових відомостей із навчальним матеріалом 5-6 класів. А за іншим – учитель повинен знати і використовувати відповідні «точки дотику» (між курсом «Математики» 5-6 класів та курсами «Алгебри» та «Геометрії» 7-9 класів), а також спиратися на наявні в учнів знання, уміння та досвід їх навчальної діяльності. Ми дотримуємось другого погляду на зазначену проблему.

Говорячи про структурування навчального матеріалу мається на увазі не лише раніше вивчений матеріал, а і той, яким мають оволодіти учні у 7-9 класах. Нагадаємо, що згідно із запропонованою нами структурною моделлю вивчення НО, у 5-6 класах уявлення учнів, які стосуються провідних понять НО, мали бути сформованими на різних рівнях. Відповідно вони повинні продовжити своє формування з різних «стартових» позицій у 7-9 класах. Зокрема, що стосується відомостей про наближені значення, то їх основні джерела мають бути систематизовані, а уявлення учнів доповнитись уявленнями про нові форми запису наближених значень. Інтуїтивні уявлення учнів про числові характеристики наближень повинні отримати подальший розвиток: в учнів мають сформуватись відповідні поняття про якісні та кількісні числові характеристики, терміни, які їх описують та формули, що відображають зв'язки між ними. Повинні розширитись уміння учнів виконувати дії над наближеними значеннями, зокрема підносити наближені значення до степеня з натуральним та цілим показником, добувати арифметичний квадратний корінь із наближених значень. Мають отримати уточнення та доповнення уявлення учнів про методи НО: йдеться про обґрунтування основних положень методу меж та ознайомлення із ПППЦ.

Процес формування перелічених знань і умінь з НО підпорядковується загально методичним теоріям. Зокрема з методики навчання математики відомо, що процес формування понять розділяється на два ступені: чуттєвий і логічний [96]. Згідно цих міркувань на другому етапі провідні поняття НО повинні поступово набути остаточної сформованості на чуттєвому рівні і розпочати своє формування на логічному рівні. На третьому етапі - формування понять на логічному рівні має продовжитись, а для окремих понять набути завершеності. Нагадаємо, що на чуттєвому рівні утворюються відчуття, сприйняття і уявлення, а на логічному – здійснюється перехід від уявлень до понять за допомогою узагальнення та абстрагування. Причому основний акцент у 7-8 класах за нашою методикою робиться саме на узагальненні, попередньо приділивши достатню увагу розширенню та уточненню уявлень учнів, які стосуються провідних понять НО і були сформовані в них у 5-6 класах. А вже в наступних класах (зокрема у 9 класі та у старших класах) пріоритети змінюються на користь абстрагування. Цьому передує доповнення та систематизація уявлень учнів з НО, що були сформовані в них у 5-8 класах. Формування понять НО на логічному рівні забезпечується поступовим підвищенням теоретичного рівня навчального матеріалу, а також поступовим посиленням ролі дедуктивних висновків та абстрактно-теоретичних обґрунтувань, при цьому не принижуючи значення індуктивних міркувань.

Як і на першому етапі в основу експериментального навчання другого етапу були покладені результати досліджень сучасної методики навчання математики, які підтвердили свою педагогічну доцільність під час вивчення НО в 7-9 класах за пропонованою методикою [96], [253], [255]. Мова йде про обрання педагогічно доцільних методів, організаційних форм та засобів навчання.

Ефективним виявився поступовий перехід від використання конкретно-індуктивного до абстрактно-дедуктивного методу. Хоча, як показали результати пошукового експерименту, у 7 класі викладення матеріалу з НО слід ще залишати переважно на індуктивному рівні. А ознайомлення учнів з теоретичним матеріалом НО продовжувати пояснювально-ілюстративним методом на наочно-оперативному рівні. Поняття доцільно вводити в основному індуктивним методом, а математичні твердження формулювати у вигляді правил, умовних погоджень, формул та схем-орієнтирів.

І у 7 класі, і пізніше, тобто у 8-9 класах, не зважаючи на підвищення теоретичного рівня, на думку методистів, до якої ми приєднуємось, доцільно, не вдаватись до зайвого «теоретизування» відомостей з НО, а зосереджувати увагу на принципово нових моментах теми . Рівень строгості застосованих міркувань має відповідати можливостям сприйняття учнів, навчальному досвіду, який був отриманий ними на першому етапі, та їх пізнавальним інтересах. Так, через домінування у старших підлітків інтересу до дослідження істотних властивостей предметів та явищ (п. 1.4), у пропонованій методиці не знижується увага до навчально-дослідницької діяльності учнів, до методів проблемного навчання (частково-пошуковий (евристична бесіда) та дослідницький методи) та методу доцільних задач. Їх використання (порівняно з попереднім етапом) більше спирається на навчальний досвід учнів, їх вміння опрацьовувати навчальну та довідкову літературу, інші засоби навчання, а також має ряд певних особливостей. Зокрема, під час використання перелічених методів проводиться цілеспрямована робота по формуванню в учнів уміння висловлювати припущення. Відповідна діяльність складається з таких етапів: 1) спостереження (експеримент) шляхом обчислень, перетворень, співставлень; 2) формулювання гіпотези, одержаної внаслідок спостереження, яка стверджує певну закономірність; 3) перевірка або підтвердження гіпотези.

Під час ведення вищезгаданої діяльності та на інших етапах навчання велика увага приділялась формуванню в учнів вмінь використовувати та встановлювати аналогії. Відомо, що аналогія і як логічний прийом, і як прийом розумової діяльності, і як евристичним метод, стає тим поштовхом, який робить мислення активним. Вона, забезпечуючи уявне перенесення певної системи знань і вмінь з відомого об’єкта на невідомий, оперує та сама стає джерелом асоціацій, які забезпечують глибоке і міцне засвоєння та запам’ятовування відомостей в тому числі і з НО. Посилена увага до нього під час вивчення НО не лише підвищує його ефективність, але і діє із загальнорозвиваючою метою.

Динаміка мотивів спілкування та соціальних потреб старших підлітків (п. 1.4.) вносить відповідні корективи щодо вибору ефективних організаційних форм навчання. Зокрема, основну увагу доцільно приділяти груповій та індивідуальній діяльності учнів із поступовим перенесенням акценту саме на індивідуальну діяльність. Останнє пов’язано з тим, що коли на другому етапі учні прагнуть лише посісти певне місце у колективі ровесників, то на третьому етапі вони вже виявляють готовність проявити свої сили. Внаслідок цього учні прагнуть визнання цінності власної особистості в очах однолітків, а також певної автономії у колективі ровесників. Вказаним особливостям підпорядкована ігрова та проективна діяльності учнів, а також виконання ними лабораторних та практичних завдань. Як і у 5-6 класах вони продовжують проводитись на різних етапах навчання, переслідуючи не лише освітню і практичну, а і виховну та розвиваючу мету.

Посилення прикладної спрямованості навчання математики, в тому числі і НО, а також ускладнення математичного апарату, який має використовуватись під час виконання практичних завдань, ведення проективної діяльності тощо, вимагає посиленої уваги до засобів навчання. Мета їх використання - активізувати розумову діяльність підлітків не відволікаючи їх від суті основного завдання. Це стає можливим, оскільки розвивається увага старших підлітків: збільшується її обсяг, вибірковість та мобільність (швидкість переключення). Згідно досліджень сучасних психологів та методистів засоби, що використовуються у процесі навчання, мають бути різними. Традиційний їх розподіл за віковою ознакою не є достатньо ефективним. Фахівці пов’язують це з тим, що канали сприйняття учнями нових відомостей або пригадування раніше отриманих (за будь-якою із існуючих класифікацій, наприклад, аудіали (слухання), візували (бачення) та кінестетики (дотик)) не знаходяться у прямій залежності від віку дитини, а обумовлені переважно індивідуальними особливостями розумової діяльності дитини. Тому під час другого та третього етапів продовжують використовуватись і засоби образного, і засоби предметного моделювання, а саме схеми, малюнки, реальні предмети, їх фотографії, макети тощо.

Певних змін набуває діяльність учнів пов’язана з побудовою та використанням схем-орієнтирів, зокрема для виконання дій над наближеними значеннями. Їх оновлений варіант містить не лише висновки, але і основні етапи їх створення. Мета таких кроків в окремих випадках – використати, в окремих випадках – сприяти переходу від конкретно-образного до абстрактно-теоретичного мислення, а також від механічної до логічної пам'яті у підлітків.

Зміни пов'язані із змістом традиційного програмового матеріалу (вивчення питань про побудову та дослідження графіків функцій; про розв'язування систем двох лінійних рівнянь графічним способом; про розв'язування основних геометричних задач на побудову; про декартові координати на площині тощо) спричинюють зміни і у організації лабораторних робіт. Зокрема доцільно, щоб у 7-9 класах проводились лабораторно-графічні роботи. Їх характерними особливостями вважається: побудова графіків та їх застосування; використання креслярських, вимірювальних та обчислювальних засобів; обчислювальна обробка результатів; порівняння результатів вимірювань і обчислень, тощо [96, с.65]. Під час їх виконання ефективним є використання ІКТ, зокрема програмно-методичного комплексу GRAN 1. Мета такого використання - унаочнення певних об'єктів та інтенсифікації навчального процесу.

Набуває змін і проективна діяльність учнів 7-9 класів. Так якщо в 5-6 класах домінували монопредметні проекти (проекти у межах одного навчального предмета), то тепер їх змінюють надпредметні проекти, які виходять за межі шкільних предметів і мають характер дослідження. Процес підготовки проектів, ускладнюється і вимагає збільшення самостійної роботи учнів, а також консультативної роботи вчителя. В основу організації проективної діяльності закладаються мотиви спілкування старших підлітків. У 7-8 класах вони в основному полягають у прагненні до особистісного спілкування із вчителем, а вже у 9 класі переростають у потребу спілкування «на рівних». Якщо виконання лабораторних та практичних робіт на другому та третьому етапах в основному мають на меті освітні цілі (оволодіння учнями відповідних знань та умінь з НО), то під час проективної діяльності пріоритети надаються розвивальним цілям (освітні досягаються внаслідок індивідуально-консультативної роботи з учителем, а також у результаті спілкування з колегами по проекту). Одним із основних завдань є формування організаційної культури особистості учнів. Її складовими є вміння ставити проблему та осмислювати способи її розв'язування; вміння висувати гіпотези; вміння опрацьовувати друковані та електронні джерела; навички планування як власної діяльності, так і роботи групи; комунікаційні вміння; вміння виступати перед аудиторією та інше [138].

Нами було з'ясовано методичні особливості подання навчального матеріалу з НО у 7-9 класах, а також намічено загальні напрямки математичної підготовки учнів у контексті вивчення НО. Відомо, що їх досягнення значною мірою залежить від організації, розгортання та подачі навчального матеріалу з НО на уроках алгебри та геометрії, а також відповідного дидактичного наповнення. Саме цим питанням, а також конкретним методичним розробкам буде приділено увагу у наступних пунктах.

2.4.2. Розгортання навчального матеріалу з наближених обчислень у 7-8 класах та його дидактичне наповнення.

Навчальний матеріал 7-8 класів, згідно логіки розгортання програмового матеріалу, має перехідний характер. У цей період відбувається перехід від навчального матеріалу з алгебри та геометрії, що розглядався в інтегрованому курсі «Математики» 5-6 класів та загалом мав пропедевтичний характер, до системного вивчення курсів алгебри та геометрії, яке набуде свого продовження у 9-му та старших класах [177, с.5]. Як і на першому етапі, педагогічно виважене та доцільне «вкраплення» відомостей з НО відбувається шляхом дослідження та використання відповідних методичних і змістових передумов.

Першою темою 7 класу є тема „Лінійні рівняння з однією змінною”. Під час її вивчення за пропонованою методикою повинно відбутись повторення та систематизація уявлень про основні джерела наближених значень. А також розпочатись формування уявлень про числові характеристики наближених значень, відчуття та сприйняття яких на інтуїтивному рівні, зокрема як «міри» близькості наближених значень до істинних, мало місце у 5-6 класах. Згадане повторення та систематизацію доцільно провести у формі проективної діяльності. Під час експериментального навчання вона мала назву «Бюро знахідок». Її підготовчий етап мав позаурочний характер. Учні класу, об'єднавшись у невеликі групи (3-4 учні), отримували завдання: знайти та зафіксувати дані, які виражені наближеними значеннями. Для цього кілька груп отримали «відрядження» у продуктову торгівельну мережу; кілька – у будівельну; кілька – на консультацію до вчителів з інших предметів, а декільком було запропоновано проаналізувати телепередачі, газети та журнали. Результати своєї діяльності учні спочатку обговорювали у індивідуальному порядку з учителем, а потім офіційно презентували на уроці. Мета попереднього обговорення полягала в корекції даних, що були отримані учнями: необхідно, щоб на офіційній презентації учнями були представлені усі джерела та усі форми запису наближених значень.

Отримані учнями данні (додаток Т) мали різні форми запису. По-перше, ті, з якими учні вже були ознайомленні у 5-6 класах – запис наближених значень шляхом вказування їх меж. Наприклад, температура повітря від -50 С до -80 С; за рецептом слід класти у страву від 4 до 5 дольок часнику; амурські тигри мають масу 250-280 кг; напис на банці з фарбою: вистачить для фарбування 12,5- 15,0 м2; коефіцієнт тертя ковзання гуми по твердому ґрунту 0,3-0,5. По-друге, ті, ознайомлення з якими планується у 7-8 класах - запис наближених значень у вигляді умовної рівності. Наприклад, напис на пакеті з цукром: маса нетто 1000г±2 %; напис на пачці з вівсяними пластівцями: маса нетто 0,400±0,005 кг; напис на пачці з серветками: 200±2 шт. По-третє, ті, ознайомлення з якими відбудеться у 9 класі – запис наближених значень правильними цифрами. Наприклад, вага людського мозку приблизно дорівнює 1,4 кг; минулого року торгівельний центр «Україна» відвідало майже 1 млн. осіб.

У першому випадку актуалізовані уявлення учнів були доповнені відомостями про запис наближених значень у вигляді подвійних нерівностей. У останньому - учням повідомлялось, що про таку форму запису наближених значень мова буде йти у 9 класі (формування перспективних зв'язків). Другий випадок доцільно використати як мотив для продовження вивчення числових характеристик наближених значень, яке було розпочато на інтуїтивному рівні у 5-6 класах.

Результати проективної діяльності, тобто «знахідки» учнів були обговорені, абстраговані від конкретних прикладів, згруповані та структуровані у вигляді логіко-дидактичних схем із залученням відповідної символіки (див додаток К.1.). Схема, що присвячена запису наближених значень, є не повною і отримає відповідне доповнення (запис наближених значень із використанням знаку модуля) у 9 класі. Рівень розвитку сприйняття учнями знаково-символьних засобів дозволяє основну увагу у 7-8 класах приділити записам наближених значень математичною мовою, а не побутовою, превалюванням якої характеризувався перший період вивчення НО. Саме тим і пояснюється відсутність у схемі «нематематичних» записів наближених значень.

Як вже вказувалось, повторення відомостей про наближені значення спричинило розгляд питань про їх точність. У цій темі недоцільно вводити ні відповідну термінологію, ні відповідні означення. Що ж стосується числового значення, яке міститься після знаку «±», то його слід позиціонувати як величину найбільшої похибки, яка виникає при заміні точного значення наближеним.

Під час систематизації відомостей про джерела наближених значень учні повинні навчитись порівнювати числові характеристики наближених значень (наприклад задача 45, додаток П), у деяких практичних завданням знаходити величину похибки (наприклад задача 46, додаток П), а також набути вмінь (на наочно-оперативному рівні) виконувати перехід між записами наближених значень у вигляді умовних рівностей до подвійних нерівностей (наприклад задачі 47-49, додаток П). Останнє має супроводжуватись широким використанням наочності, зокрема координатної прямої, що активізує роботу дієвої та зорової пам'яті. Однак в багатьох задачах фігурують достатньо великі числові значення, що унеможливлює їх унаочнення на координатній прямій. У таких випадках відбувається звернення до образного моделювання, тобто до уяви учнів, яка на цей період має бути достатньо розвиненою.

Безпосередньою метою актуалізації відомостей з НО є підготовка учнів до формування в них уявлень про точність та відносну точність. Формуючи уявлення про числові характеристики, ми керувались дослідженнями вітчизняних методистів про те, що у 7 класі

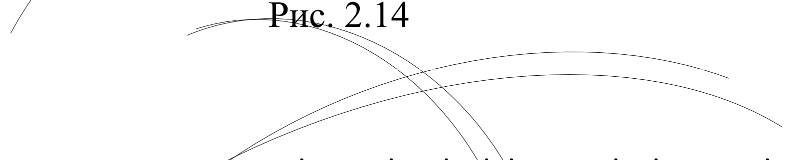


Рис. 2.14

методологічно і психологічно доцільно вводити поняття і про кількісні, і про якісні числові характеристики одночасно [96, с.91].

Ознайомлення учнів із точністю наближених значень доцільно розпочинати методом проблемного викладу відповідного навчального матеріалу. Нагадаємо, що під час проективної діяльності учні дійшли висновку про існування кількох різних форм запису наближених значень. Їх увага спрямовується вчителем на дві з них. А саме, на форму запису наближених значень у вигляді подвійної нерівності, яка відома учням ще з 5-6 класів, а також на форму запису наближених значень у вигляді умовної рівності, з якою учні найчастіше зустрічались під час проективної діяльності. Після цього формулюється проблема: як за відомими межами наближеного значення знайти ступінь його близькості до точного значення. Або у більш вузькому форматі: як виконати перехід від запису наближених значень у вигляді подвійної нерівності $HM \leq x \leq BM$ до запису у вигляді умовної рівності: $x=a\pm h$. Уявлення про перехід оберненого характеру слід формувати в учнів на наочно-оперативному рівні за допомогою задач 47-49 (додаток П), № 787, 793, 794 [148], № 285-287 [55]. Відповідні відомості легко сприймаються учнями, а виконання відповідних дій не викликає в труднощів.

Розв'язання вказаної проблеми необхідно проводити конкретно-індуктивним методом. Як стверджували і стверджують методисти [286], [253], його ефективності значною мірою сприяє залучення наочних образів, у нашому випадку - координатної прямої. Відповідний матеріал вдало представлено у підручниках для 7 класу 70-80 рр. Він був використаний нами під час експериментального навчання. В ході формування умінь учнів переходити від запису наближених значень у вигляді умовної рівності до запису у вигляді подвійної нерівності, учитель має акцентувати увагу учнів на тому, що точне значення (говорять також істинне або дійсне) міститься між числами, які описують межі наближеного значення. А за наближене значення можна приймати будь-яке числове значення із цього проміжку. Подальші міркування доцільно вести конкретно-індуктивним методом. Зокрема, під час експериментального навчання було залучено навчальний досвід, який був отриманий учнями у 6 класі під час практичного знаходження числа π. Оперуючи даними однієї з учнівських робіт (або власними записами) вчитель нагадує, що в результаті вимірювань та обчислень були отримані певні наближені значення числа π. Як і у 6 класі, серед них обирають верхню та нижню межу, після чого переходять до аналізу похибок, які припущені для кожного із отриманих наближених значень числа π. З рисунку видно (див. рис. 2.14), що їх величини, тобто відстані між наближеними та точними значеннями числа π, є різними. Однак у всіх випадках їх довжина не перевищує довжину відрізка, кінцями якого є межі наближеного значення.

Водночас учні вже мають уявлення про те, що за наближене значення, як правило, обирають середнє арифметичне його меж (на рис. 2.14. середнє арифметичне меж наближеного значення позначено С.А). Тому їм пропонується проаналізувати величину помилки, яка буде отримана у цьому випадку. Виявляється, що вона не перевищуватиме половини відрізка, кінцями якого є межі наближеного значення. Тому, керуючись бажанням отримати меншу помилку, саме останній випадок і беруть за основу під час запису наближених значень у вигляді умовної рівності. Відповідну логіко-дидактичну схему (додаток К.3), де підсумовуються вищенаведені міркування, поміщають до постійно діючого стенду.

У цей час важливо формувати в учнів навички правильного читання умовної рівності $x=a\pm h$, а також одного із її варіантів, який зазвичай зустрічається у підручниках: $x\approx a$ з точністю до h: «Говорять, що число a є наближеним значенням числа x з точністю до h».

Ознайомивши учнів із правилами знаходження складових умовної рівності

, слід розпочати формування в них відповідних умінь. Під час експериментального навчання учням пропонувалось практичні завдання, подібні до нищенаведених, а також № 388 [55], № 786, 792 [148].

Задача 2.16. Чергові підраховували кількість учнів школи, що були присутні на першому уроці. Перший з них отримав результат – 729 учнів, другий -734 учні, третій -725 учнів, а четвертий і п'ятий по 730 учнів. З якою точністю були виконані підрахунки?

Коментарі до розв'язування задачі: Під час розв'язування задачі ставиться дві мети По-перше, формування в учнів умінь знаходити точність наближених значень. По-друге, створення проблемної ситуації, результатом розв'язування якої є формулювання певних правил. Так під час розв'язування задачі учні приходять до некоректного результату:

. Його некоректність полягає в тому, що отримана кількість осіб і точність, з якою вона наведена, виражена не натуральними числами. Тому необхідним є округлення отриманих результатів до розряду одиниць. Під час округлення наближеного значення 729,5≈730, виникає похибка округлення 730-729,5=0,5. Її необхідно додати до числа, що виражає точність наближеного значення. Застосувавши наведене правило до задачі отримаємо: 4,5+0,5=5, тоді х=730±5 (осіб) – остаточна відповідь до задачі.

Сформувавши в учнів навички знаходження точності наближених значень, слід звернути їх увагу на ті окремі випадки, коли мова може вестись не про найбільше можливе значення помилки (тобто точність), а про її точне значення. У таких випадках помилку називають абсолютною похибкою і знаходять як модуль різниці між точним та наближеним значеннями. Під час експериментального навчання використовувалась традиційна методична схема формування уявлень учнів про абсолютні похибки, яка представлена на сторінках сучасної навчально-методичної літератури [253]. Формування вмінь учнів знаходити абсолютні похибки наближених значень відбувалось і на уроках алгебри (№ 382-384, 389, 390 [55], № 785, 788-791 [148]), і на уроках геометрії. Зокрема, під час вивчення теми «Суміжні та вертикальні кути, їх властивості». Послідовність та хронологічна узгодженість вивчення цих питань відповідає чинній програмі з математики 12-річної школи [177]. Приклади відповідних задач наведені у додатках (додаток П: задачі 57-58). Наведемо кілька зауважень до їх розв'язання. Не дивлячись на сформовані в учнів у 5-6 класах уявлення про наближений характер практичних вимірювань, школярі, як правило, знаходяться під «впливом» тих результатів, які «треба» отримати, зокрема за властивостями суміжних та вертикальних кутів. Тому під час експериментального навчання нами використовувалась парна форма роботи: одну частину завдання виконував сам учень, а другу - його сусід по парті. Відповідальність за якість роботи ніс кожен учень окремо, що ставало на заваді їх сумісному підганянню під «правильну відповідь». Під час експериментального навчання зустрічались випадки, коли отримані учнями результати вимірювань збігалися із теоретично необхідними. У таких випадках учні приходили до висновку, що отримана абсолютна похибка дорівнює нулеві.

Наступною темою у 7 класі є тема «Цілі вирази». Під час її вивчення, за пропонованою методикою має відбутись розширення уявлень учнів про виконання дій над наближеними значеннями (піднесення до степеня з натуральним показником), а також формування в них уявлень про відносну точність. Передувати цьому повинна актуалізація певних відомостей, з якими учні були ознайомлені у 5-6 класах. Під час експериментального навчання вона відбувалась в ході ведення ними проективної діяльності, в основу якої були покладені ідеї М.А. Бугайової [39, с.84].

Таблиця 2.4

Довідкові данні для ведення учнями проективної діяльності

Вид діяльності	Кількість енергії, яка витрачається протягом 1 хв .
1.Біг	36-40 кДж
2.Ходьба	8-10 кДж
3.Гімнастика	20-30 кДж

4.Стрибки	28-30 кДж
5. Спортивні ігри	40-60 кДж

Учням було запропоновано за допомогою таблиці 2.4 скласти комплекс вправ для уроку фізичного виховання. Затрати енергії при цьому не повинні були перевищувати nДж (значення n для кожного з учнів було інше). Обчислення, до яких припускалися учні під час ведення проективної діяльності, в основному стосувались таких дій, як додавання наближених значень, а також їх множення на натуральне число. Під час підведення підсумків проективної діяльності учні разом з учителем створюють узагальнюючу схему (додаток К.5), яка містить усі чотири відомі учням схеми-орієнтири для виконання дій
над наближеними значеннями. Така актуалізація відомостей з НО дозволяє під час ознайомлення учнів із традиційним навчальним матеріалом теми «Степінь з натуральним показником» доповнити його правилом піднесення до степеня наближених значень. Під час проведення пошукового експерименту доповнення відбувалося двома способами: перший із залученням частково-пошукового методу, другий - із використанням методу доцільних задач.

У першому випадку учням нагадувалось про існування точних та наближених значень. Після чого вони підводились до думки про те, що коли існує правило піднесення до степеня з натуральним показником для точних значень, то воно повинно існувати і для наближених значень. Аналізуючи означення вузлового поняття навчальної теми, наведену до нього у чинному підручнику схему-орієнтир, а також схему-орієнтир для множення наближених значень (повторення якої відбулося напередодні), учні разом з учителем «створюють» відповідну схему-орієнтир для піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником. Міркування учнів доцільно супроводжувати та підтримувати за допомогою логіко-дидактичних схем. Один із її варіантів наводиться у додатках (додаток К.6). Остаточним варіантом схеми-орієнтиру для піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником доповнюють узагальнюючу схему (додаток К.5).

V= a3
↓
3,20<a<3,
25
↓
×
↓
3,20<a<3,
25

×

3,20<a<3,25

(3,20)3< a3< (3,25)3

…

Рис.2.15

У другому випадку до уваги учнів пропонувалася наступна задача.

Задача 2.17. Бак має форму куба. Під час вимірювання з’ясувалось, що його ребро а має довжину 3,20м<а<3,25м.Чи поміститься в бак 24,5 т бензину (густина бензину 710 кг/м3).

Під час її розв’язування шляхом індуктивних міркувань учні робили таке спостереження: межами наближеного значення, піднесеного до куба, є його межі, також піднесені до куба (рис. 2.15). Це дозволило їм висунути припущення про те, що для піднесення до степеня з натуральним показником наближеного значення слід піднести до цього степеня його межі. Підтверджуючи гіпотезу учнів, учитель разом з ними, як і у попередньому випадку, виводить відповідну схему-орієнтир.

В обох випадках увага учнів повинна бути зосереджена на тому, що отримані ними висновки, справедливі лише для тих випадків, коли межі наближених значень є додатними числами.

Порівнюючи описані два способи відмітимо, що перший з них більше відповідає в стилю викладення програмової теми у чинному підручнику. Мова йде про домінування абстрактних прикладів, а не текстових задач. Натомість другий спосіб, залишаючи викладення матеріалу переважно на індуктивному рівні, відповідає ідеї прикладної спрямованості навчання та реалізації міжпредметних зв’язків.

Обидва підходи виявили ефективність під час експериментального навчання. Вони переслідували не лише дидактичну мету, але і розвивальну. При цьому дидактична мета полягала в ознайомленні школярів із відповідними питаннями навчальної теми, а розвивальна - у формуванні в учнів уміння висловлювати припущення про існування певних закономірностей. Про важливість та етапи такої роботи говорилось у попередньому пункті, а також на сторінках методичних видань [96, с.34].

Під час вивчення теми «Цілі вирази» розпочинається формування уявлень учнів про відносну похибку та відносну точність наближених значень. Цьому має передувати актуалізація відомостей про абсолютні похибки, яка відбувається на геометричному матеріалі. Приклад задачі, яка пропонувалась для розв’язування, зокрема під час вивчення теми «Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною», наведено у додатках (додаток П: задача 59).

Ознайомлення учнів із поняттям про відносну похибку під час експериментального навчання відбувалося в ігровій формі, що було ефективним та педагогічно доцільним. Гра називалась «Хто найкращий вимірювач?». Її назва невипадково співзвучна із грою, що y=2x+8

Рис. 2.16

y=-1,5x+11

рекомендувалась для проведення у 5 класі (п.2.2.2). В її межах для порівняння якості наближених значень однакових величин однакового порядку пропонувалось використовувати абсолютну похибку (її там називали похибкою). Мета гри у 7 класі – показати, що абсолютна похибка не завжди може слугувати «мірилом» для порівняння точності наближених значень однакових величин, але різного порядку. Водночас отримані результати вмотивовують введення поняття відносної похибки. Організаційна модель гри наведена у додатках (додаток Р).

Формування уявлень учнів про відносні похибки, відбувається за традиційною методичною схемою, що представлена у навчально-методичній літературі [253], [55], [148]. Особливу увагу учнів при цьому слід зосереджувати на таких принципових моментах.

По-перше, відомо, що відносна похибка може визначатись як відношення абсолютної похибки до точного або наближеного значення. Отримані результати в обох випадках мало відрізняються один від одного. Однак учням важлива визначеність у цьому питанні. Тому знаходження, або інші дії та операції з відносною похибкою доцільно підпорядковувати наступним правилам: якщо відоме і точне, і наближене значення, то для обчислення відносної похибки треба використовувати точне значення; якщо відоме лише одне з них (або точне, або наближене значення), то його і використовують для обчислення відносної похибки.

По-друге - слід зосередити увагу учнів на тому, що аналогічно до того як існують два поняття «абсолютна точність» та її окремий випадок «абсолютна похибка», існують також і такі два поняття як «відносна точність» та її окремий випадок «відносна похибка». Особлива увага при цьому приділяється відповідній формі запису наближених значень x= a ± ε%, з якою учні неодноразово зустрічались під час проективної діяльності на початку 7 класу.

По-третє, відносна похибка та відносна точність, як і абсолютна похибка та точність округлюються лише з надлишком.

Формування вмінь знаходити відносні похибки наближених значень доцільно продовжити під час розв'язування практичних завдань з алгебри та геометрії. Їх прикладом можуть слугувати № 802, 803 [148], № 389-394 [55], а також задачі 53, 60, 61 (додаток П).

На базі програмового алгебраїчного матеріалу (додаток П: задачі 54-56), зокрема, під час вивчення теми: «Лінійна функція, її графік та властивості», «Лінійне рівняння з двома змінними та його графік», «Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом» доцільно формувати вміння обчислювати абсолютні похибки. При цьому важливо наголошувати, що графічним способом знаходять лише наближені розв'язки (відповідний матеріал вдало представлено у підручнику [16, с.78]), які можуть виявитися і точними. З'ясувати це можна, підставивши отримані значення в дану систему рівнянь або отримавши нульове значення абсолютної похибки. Розв'язуючи задачі, пов'язані з графічними побудовами, слід обмежуватись знаходженням лише кількісних числових характеристик наближених значень. Про методичну некоректність знаходження у таких випадках якісних числових характеристик йшлося у публікації [120]. Під час експериментального навчання було з'ясовано, що завдяки НО, вказані задачі, окрім репродуктивного, набувають ще й розвиваючого характеру. Проілюструємо сказане за допомогою однієї з них.

Задача 2.18 (Тема: «Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом»). Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом та способом підстановки. Обчисліть абсолютну похибку результатів, що отримані графічним способом:

Коментарі до розв'язання задачі. Під час експериментального навчання виявилось, що у контрольних класах учні, як правило, маючи підсвідому звичку до «зручних»

відповідей, отримують результат (1;10) (точним розв'язком є) (рис. 2.16). Що стосується експериментальних класів, то в них спостерігалась дещо інша картина. Учні чітко усвідомлювали можливість отримання похибок, що пов'язані із веденням «власноручних побудов». Вони не лише припускали існування, але і отримували різні відповіді, зокрема (0,9;10), (1;10,1) тощо. Учні активно відстоювали свою позицію, водночас сприймаючи альтернативні відповіді, отримані іншими учнями. Тобто організоване таким чином навчання сприяє розвитку самостійного та водночас дивергентного мислення учнів.

Приклади розв’язування подібних завдань із застосування ІКТ наведені у додатку У.2.

Першою темою 8 класу є тема «Раціональні вирази». Під час ознайомлення з нею, знання учнів про виконання дій над наближеними значеннями повинні доповнитись уявленнями про піднесення їх до степеня з цілим показником. Змістовою передумовою для цього є програмова тема «Степінь із цілим показником та його властивості». Під час опанування програмовим матеріалом в учнів виникає припущення: якщо до степеня з цілим показником можна підносити точні значення, то мабуть такі дії можна виконувати із наближеними значеннями. Відповідний навчальний матеріал з НО позиціонується як перевірка цієї гіпотези. Як і під час вивчення теми «Степінь з натуральним показником» у 7 класі, заплановане доповнення традиційного навчального матеріалу є природним та ефективним за умови актуалізації відомостей з НО, з якими учні були ознайомлені у 5-7 класах (мова йде про виконання арифметичних дій над наближеними значеннями).

Повторення відповідного навчального матеріалу доцільно провести у формі проективної діяльності, що і було зроблено під час експериментального навчання. Проект мав назву «Екскурсія вихідного дня». Окрім вищевказаного завдання він також мав на меті формування в учнів умінь опрацьовувати умовні рівності, що містять відносну точність. Під час ведення проективної діяльності учні повинні були вибрати об’єкт екскурсії та скласти кошторис по її практичній реалізації за певними критеріями наданими вчителем (перший стовпчик таблиці 2.5).

Під час оцінювання презентації враховувались не лише правильність складеного кошторису, але і цікава історична довідка про об’єкт екскурсії, фотографії тощо. Це надавало розвиваючого характеру проективній діяльності.

Для економії часу та формування навичок самостійної діяльності доцільно, щоб підготовчий та виконавчий етапи проективної діяльності відбувалися у позаурочний час, а безпосередня презентація проектів – на одному з уроків математики.

Для планування, оформлення та представлення власних проектів учнів об’єднували у невеликі групи по 4-5 осіб. Основою групування у вказаному проекті слугували індивідуальна сумісність учнів та їх гетерогенність у контексті навчальних досягнень. В кожній групі обирався відповідальний керівник проекту, а участь у безпосередній презентації брали участь усі члени групи. Приклад розрахунку кошторису, який був складений учнями наведено у таблиці 2.5.

Під час проективної діяльності учні, дістаючи необхідні відомості, часто отримували їх у вигляді умовних рівностей де містилась відносна точність. Наприклад, у бізнес-довідці, їм повідомили таку ціну на пальне: 3,80грн.±2,6% за 1л. Така форма запису наближених значень відома учням із 7 класу, але в них ще не сформовані навички знаходження величини абсолютної точності за відомим значенням відносної точності. Тому після створення таким чином мотиваційного ефекту один із наступних уроків треба присвятити формуванню цих навичок. Під час нього доцільно розв’язувати завдання, запропоновані як вчителем, так і самими учнями. Їх основою, повинні стати «реальні проблеми», з якими зустрілись учні під час проективної діяльності.

Таблиця 2.5

Фрагмент звітних паперів, які складались учнями під час проективної діяльності

<table>
<tr><th>Напрям витрат</th><th>Межі витрат</th><th colspan="2">Розрахунки витрат</th></tr>
<tr><td>1.Оренда автобуса (b)</td><td>175-250 грн</td><td rowspan="3">1.Обчислення витрат на пальне (a=xyz):
$20 \le x \le 25$
$\times\ 0,8 \le y \le 0,9$</td><td rowspan="3">2.Обчислення загальної вартості екскурсії (d=a+b+c):
$175 \le b \le 250$
$+\ 59,2 \le a \le 87,75$</td></tr>
<tr><td>2. Витрати пального на 100км (x)</td><td>20-25 л</td></tr>
<tr><td>3.Ціна пального (z)</td><td>3,70-3,90 грн</td></tr>
</table>

		3,70 ≤ z ≤ 3,90 59,20 ≤ a≤ 87,75	200 ≤ c ≤ 250 434,20 ≤ d ≤ 587,75
4.Відстань до об'єкту екскурсії (y)	80-90 км	3.Обчислення загальної вартості екскурсії з урахуванням знижки (m=d-kd):	
5. Послуги гіда (c)	200-250 грн	434,2 ≤ d ≤ 587,75 × 0,03 ≤ k ≤ 0,05 13,026 ≤ dk ≤ 29,3775	434,2 ≤ d ≤ 587,75 - 13,026 ≤ dk ≤ 29,3775 404,8225 ≤ m ≤ 574,724
6.Знижка від загальної вартості (k)	3-5 %		
7.Кількість екскурсантів (n)	28-32 учнів	4.Вартість екскурсії для одного учня (fm:n): 404,8225 ≤ m≤ 574,724 : 28 ≤ n ≤ 32 12,65 ≤ f ≤ 20,53	

Наведемо коментарі до розв'язування «задачі про пальне». Учні самостійно або за допомогою вчителя згадують, що для виконання дій над наближеними значеннями треба представити їх у вигляді подвійних нерівностей: НМ≤x≤ВМ, тобто a-h ≤ x ≤ a+h (такому пригадуванню сприяє звернення до відповідних схем-орієнтирів та логіко-дидактичних схем, додаток К.1, К.3). Із останнього запису випливає, що для знаходження меж наближеного значення треба знати його точність, а отже необхідно пригадати формулу, що пов'язує

абсолютну і відносну точності: , де h – точність наближеного значення; ε – відносна точність наближеного значення (3,80грн.±2,6%); a – наближене значення (3,80грн.±2, 6%). Після цього учні легко виконують відповідні обчислення:

, інтерпретують отримані результати та використають їх у проективної діяльності: 3,80±0,10грн або 3,70-3,90грн - ціна пального за 1л.

Подальше формування умінь по опрацюванню умовних рівностей, які містять відносну точність повинно відбуватись під час розв'язання учнями задач, приклади яких наводяться у додатках (додаток П: задачі 62-64).

Проведена актуалізація відомостей з НО переконує учнів у об'єктивному існуванні наближених значень, а також дає можливість пригадати правила виконання дій над ними. Вона дозволяє доповнити традиційний навчальний матеріал теми правилом піднесення наближених значень до степеня з цілим показником та правилом добування квадратного кореня із наближених значень. Хід міркувань, методи, засоби унаочнення, що при цьому використовувались є аналогічними до тих, які мали місце під час формування в учнів уявлень про піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником.

Ознайомлення із правилом піднесення наближених значень до степеня з цілим показником слід розпочати з аналізу означення вузлового поняття навчальної теми, а також нагадування схем-орієнтирів для ділення наближених значень та піднесення їх до степеня з натуральним показником (додаток К.6). «Створення» схеми-орієнтиру для піднесення наближених значень до степеня із цілим показником (додаток К.4) доцільно супроводжувати евристичною бесідою. Потім її заносять до підсумовуючої схеми (додаток К.5).

Ознайомлення учнів із правилом добування арифметичного квадратного кореня із наближеного значення та «створення» відповідної схеми-орієнтиру слід виконувати методом доцільних задач під час вивчення теми «Квадратні корені. Дійсні числа». Навчальний матеріал, який міститься у цій темі, зокрема питання «Квадратний корінь. Рівняння $x2=a$. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа.» безпосередньо пов'язані із наближеними значеннями . Цей зв'язок вдало представлено у діючих вітчизняних підручниках [147], [56], [16], а також сучасних російських підручниках [5], [17]. Під час експериментального навчання, ми доповнили його певними акцентами та ілюстраціями на координатній прямій. Зокрема, доцільно донести до учнів думку про те, що записуючи все нові, і нові цифри після коми у ірраціональному числі ми все ближче наближаємось до нього зліва. Цей процес може тривати нескінченно, але так і не приведе нас до з'ясування точного значення ірраціонального числа: виписати його повністю неможливо. Тому практичні дії над ірраціональними числами замінюються діями над їх наближеними значеннями, точність яких або задається умовою задачі , або приймається з певних практичних міркувань. Для формування в учнів відповідних практичних умінь, їм слід запропонувати завдання із чинних підручників для 8 та 9 класів (№409, 410, 503, 504, 509-514 [147] та №37, 38 [55]). Як показало експериментальне навчання їх варто розв'язувати двічі: перший раз - у 8 класі, а другий – у 9-му для актуалізації відповідних відомостей із НО.

Як вже вказувалось, за пропонованою методикою програмовий навчальний матеріал має бути доповнений відомостями про добування квадратного кореня із наближених значень. Так, після формування в учнів знані і умінь, що передбачені програмою, учням пропонується задача, аналогічна до тієї, яка традиційно наводиться у підручниках на початку вивчення теми «Квадратні корені та дійсні числа» [147]:

Задача 2.19. Спортивний зал має форму квадрату площею 215м2. Під час виконання реконструкції його площа може змінитись не більше ніж на 1%. Якими будуть розміри спортивного залу після реконструкції?

Коментарі до розв'язування задачі: Учні аналізують умову задачі. Записують її «мовою НО»: $S=215м2\pm1\%$; $S=(215\pm215\cdot0{,}01)м2=(215\pm2{,}15)м2$, де S – площа спортивного залу після реконструкції. Далі переходять до внутрішньомодельного розв'язування, тобто до знаходження сторони квадрата:

$$212{,}85м2 \le S \le 217{,}15м2;$$

$$212{,}85м2 \le a2 \le 217{,}15м2, \text{ де } a \text{ – розміри спортивного залу після реконструкції}$$

$$?\ \ м\ \ \le a \le\ \ ?\ \ м$$

Подальші міркування учнів потребують актуалізації відомостей про піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником. Під час експериментального навчання з'ясувалося, що актуалізація має носити індуктивно-дослідницький характер і привести учнів до такого висновку: «…якби були відомі межі для сторони квадрата (для зручності позначимо їх змінними x та y), то значення площі $S=a2$ ми б отримали за відомим алгоритмом піднесення до другого степеня. Межі наближеного значення площі квадрата є квадратами меж наближеного значення сторони квадрату. Тому, щоб знайти межі для сторони квадрата, необхідно розв'язати рівняння $x2 =112{,}85$ та $y2=217{,}15$, тобто добути квадратні корені із відповідних меж площі. Активізує та спрямовує діяльність учнів створення відповідної логіко-дидактичної схеми (додаток К.7).

Отримавши остаточну відповідь та проаналізувавши виконання відповідних дій, вчитель разом з учнями мають «створити» відповідну схему-орієнтир для добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень та занести її до узагальнюючої схеми (додаток К.5).

Під час розв'язування вищенаведеної задачі в учнів виникне запитання: до якого розряду слід округлювати межі наближеного значення? У пошуках відповіді на нього відбувається актуалізація уявлень учнів про те, що межі наближеного значення зазвичай округлюють до того розряду, з якого починається розходження цифр однакових розрядів. Нагадаємо, що вони були

Рис. 2.17

сформовані в учнів у 5 класі, а відповідне твердження наводилось у вигляді правила. Розвиток дискусійного мислення, а також схильність підлітків до експериментування (п. 1.4), призводять до виникнення в них сумнівів щодо істинності такого твердження. Учні висувають припущення про те, що чим більше ми залишимо десяткових знаків для опису шуканого наближеного значення, тим точнішим воно буде. Для перевірки цієї гіпотези учням доцільно запропонувати провести обчислювальний експеримент (на базі попередньої доцільної задачі). Він полягає в обчисленні для кожного із випадків значення точності та відносної точності наближення (додаток К.8). Ілюстрація отриманих результатів за допомогою діаграми показала, що виписування десяткових знаків, які слідують після тих, на які вказує правило, майже не впливає на поліпшення точності отриманого результату. Водночас, якщо записати менше десяткових знаків, ніж вимагає правило, то це значною мірою погіршить точність отриманого результату.

Підсумовуючи результати експерименту вчитель обов’язково має зосередити увагу учнів на тому, що виписування зайвих десяткових знаків вважається невиправданим та непотрібним, але не неправильним. Більше того, в деяких випадках до нього свідомо припускаються, тобто залишають одну або дві запасні цифри.

Доцільно зосередити увагу учнів на таких двох випадках. Перший - дія, що виконується, є проміжною (про це говорилось у 5 класі). Другий - межі (або хоча б одна з меж) є близькими до одних числових значень, а правила вимагають їх округлення до інших числових значень.

Зупинимось детальніше на другому випадку. Нехай наближене значення а міститься у межах 63,9212…≤ а ≤64,4821…(рис. 2.17). Розходження цифр починається з розряду одиниць, тому згідно правила, округлення слід виконувати до одиниць. Нескладно помітити, що числове значення нижньої межі є близьким до 64, а правила округлення меж наближених значень вимагають округлення з недостачею, тобто до 63. У таких випадках пряме слідування правилу, тобто округлення до одиниць, призводить до невиправданого розширення меж наближених значень (див. рис. 2.17) А збереження однієї запасної цифри дозволяє цього уникнути, а також значною мірою поліпшити якість наближення (відносну точність): 63≤ а ≤65; а=64±1; а=64±1, 57%, проти 63,9≤ а ≤64,5; а=64,2±0,3; а=64,2±0,47%

Проілюструвавши зазначене за допомогою координатної прямої (рис. 2.17), робимо висновок, що відповідь до «задачі про спортивний зал» може бути сформульована одним зі способів 14,5≤а ≤14,8 або 14,58≤ а ≤14,74.

У 8 класі (як і у 7 класі) формування навичок знаходження відносної похибки має відбуватись здебільшого на геометричному матеріалі. Змістовими передумовами для цього володіють усі чотири теми, якими представлено в діючій програмі навчальний матеріал з геометрії 8 класу. Відповідні задачі доцільно розв’язувати різними способами та порівнювати отримані результати. Наприклад задачі на ділення відрізка навпіл, одні учні повинні розв’язувати за допомогою циркуля, а інші - за допомогою лінійки. Перші, як правило, отримують точніший результат.

Розв’язуючи запропоновані задачі, учням важко позбутися бажання отримати «потрібні» відповіді (аналогічна ситуація спостерігалася і у 7 класі). Як запобіжний засіб ефективною залишається парна робота учнів. Також доцільною є ігрова діяльність учнів. Вона дає можливість переключити увагу учнів, тобто зосередити її на бажанні перемогти у грі. Приклади задач, які слід пропонувати учням для розв’язування, наведені у додатках (додаток П: задачі 67, 68, 73, 74). Наведемо приклад та коментарі до однієї з них.

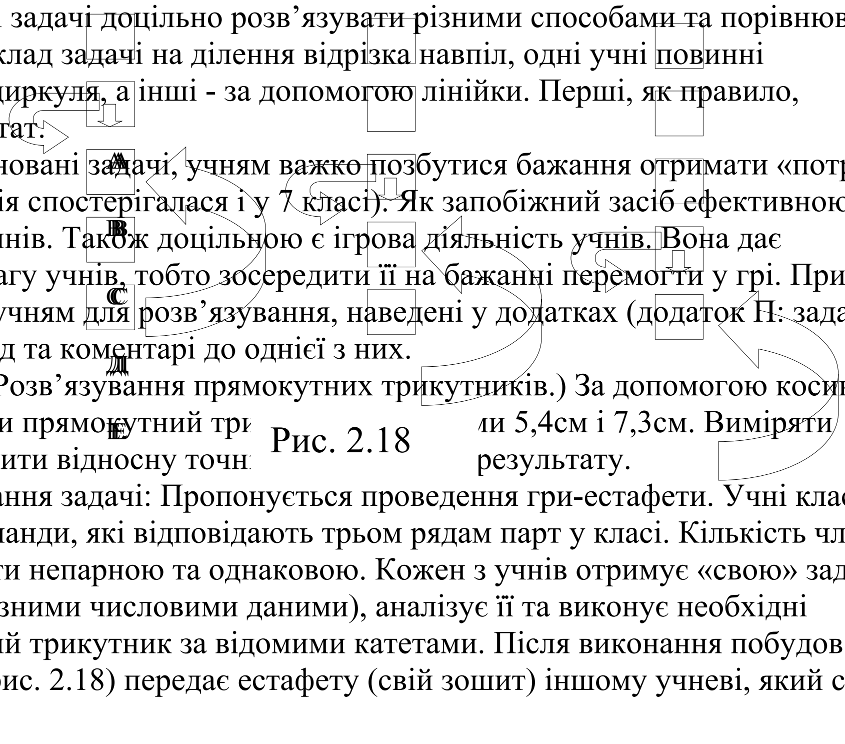


Рис. 2.18

Задача 2.20. (Тема 4. Розв’язування прямокутних трикутників.) За допомогою косинця або транспортира побудувати прямокутний три… ми 5,4см і 7,3см. Виміряти довжину гіпотенузи. Обчислити відносну точн… результату.

Коментарі до розв’язання задачі: Пропонується проведення гри-естафети. Учні класу мають об’єднатись у три команди, які відповідають трьом рядам парт у класі. Кількість членів кожної команди повинна бути непарною та однаковою. Кожен з учнів отримує «свою» задачу (точніше, однакові задачі з різними числовими даними), аналізує її та виконує необхідні побудови: будує прямокутний трикутник за відомими катетами. Після виконання побудов кожен учень (наприклад, С рис. 2.18) передає естафету (свій зошит) іншому учневі, який сидить попереду через одну парту (наприклад А). Його мета: виміряти гіпотенузу, записати поряд з трикутником отриманий результат (із використанням знака ≈) і передати естафету далі, а саме учневі, який сидить позаду нього (наприклад В). Його завдання, згідно умови, обчислити за теоремою Піфагора довжину гіпотенузи, записати результат поряд з трикутником і передати естафету далі, а саме учневі, який сидить позаду нього (наприклад С). Так зошит повертається до господаря, який обчислює величину відносної похибки і піднімає руку. Виграє та команда, усі члени якої першими отримають результат. Під час гри задіяні усі учні. Зі схеми (рис. 2.18) видно, що коли над опрацюванням задачі учня С працює учень А, а потім В, він (учень С) виконує такі самі дії спочатку для учня Е, потім для учня Д, після чого до нього повертається його задача, замикаючи таким чином цикл. Підсумовування результатів гри має проходити в два етапи. Кожна з команд отримує певну кількість очок за швидкість одержання відповідей. А вже після перевірки учнівських робіт вчителем, вона може зменшитися внаслідок нарахування штрафних балів за неправильно проведені обчислення.

Під час опанування учнями традиційним навчальним матеріалом курсу алгебри 8 класу, відбувається їх ознайомлення з графіками та властивостями функції , а також із квадратними рівняннями. Як показало експериментальне навчання, зазначений матеріал слід доповнити завданнями, метою яких є, по-перше, формування в учнів знань і умінь , які передбачені програмою, по-друге, подальший розвиток навичок ведення графічних міркувань (термін Г.В.Дорофєєва [92]). Формування останніх було розпочато під час ознайомлення учнів у 7 класі з графіком та властивостями лінійної функції. Реалізація зазначеного підходу сприяла підвищенню інтересу учнів до програмового навчального матеріалу. Увага учнів зосереджувалась на тому, що графічні міркування (графічне розв'язування рівнянь, знаходження за графіком нулів функції тощо) дозволяють робити наближені кількісні висновки, а також певні якісні висновки, зокрема, перевіряти наявність коренів, їх кількість, вказувати проміжки, яким вони належать.

Зазначимо, що в сучасних підручниках містяться завдання спорідненого характеру, але без вимоги знаходження абсолютної похибки (№869, 870, 877, 878, 883, 892, 893, 901, 902 та інші [147]). Під час експериментального навчання наближений характер цих розв'язків до цих завдань був зрозумілим учням експериментальних класів (на відміну від учнів контрольних класів). Вони наводили відповіді із використанням знака «≈» або у вигляді подвійних нерівностей. Учні контрольних класів не сприймали наближений характер відповідей, отриманих за графіком, або графічно, хоча про це і йдеться у діючих підручниках [16, с.178], [147, с189] Вони «підганяли» їх під відповіді, отримані алгебраїчно, і, як наслідок, отримували результати з двома - трьома десятковими знаками при одиничному відрізку в одну клітинку.

Окрім вищевказаних прикладів із чинних підручників, учням доцільно пропонувати задачі 69-72 а також завдання аналогічні до задач 54-56 (додаток П). Під час їх розв'язування доцільним виявилося використання програмно-методичного комплексу GRAN, зокрема GRAN1 . Відповідні розробки наведені у додатках (додаток У.3). За допомогою вказаного програмно-педагогічного засобу швидше будуються графіки функцій. Це дозволяє урізноманітнювати пропоновані завдання, зосереджувати увагу учнів на питаннях, пов'язаних безпосереднього із точністю наближених значень [103], [196].

Ознайомленням з навчальним матеріалом 8 класу, який передбачено чиною програмою з математики та пропонованою методикою, завершується другий етап вивчення НО. Представимо його результати переліком знань, умінь та навичок, якими мають оволодіти учні протягом навчання у 7-8 класах. Зокрема, в учнів повинні бути сформовані:
• поняття про основні джерела отримання наближених значень та форми їх запису; навички взаємопереходу між різними відомими їм формами запису наближених значень, в тому числі умовними рівностями;
• уявлення про точність та відносну точність наближених значень, а також їх окремі випадки: абсолютну та відносну похибки; учні мають опановувати навичками їх знаходження, розпізнання, порівняння та взаємопереходу від кількісних числових характеристик до якісних і

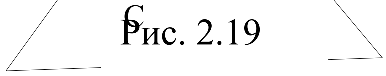


Рис. 2.19

навпаки;
• вміння підносити наближені значення до степеня з натуральним та цілим показником, а також добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень.

Сформованість в учнів вказаних уявлень, умінь та навичок надає можливість переходу до завершального третього етапу, який за пропонованою методикою має розпочатись у 9 класі.

2.4.3. Вивчення наближених обчислень у курсах алгебри та геометрії 9 класу.

Навчальний матеріал 9 класу має підсумовуючий характер: його опануванням завершується базова математична підготовка школярів. Рівень сформованих в учнів знань і умінь має бути достатнім для подальшої професійної чи освітньої самореалізації учнів.

На відміну від перших двох етапів навчальний матеріал, передбачений чинною програмою, містить не лише методичні та змістові передумови для педагогічно виправданого вкраплення відомостей з НО та розв’язування відповідних завдань, але й певний навчальний матеріал з НО у явному вигляді, тобто опанування якого заплановано чинною програмою.

Згідно з діючою програмою першою темою 9 класу є тема «Нерівності». Під час її вивчення (зокрема, питань «Основні властивості числових нерівностей. Почленне додавання і множення нерівностей. Застосування числових нерівностей для оцінювання значення виразу») обґрунтовуються усі, вивчені протягом попередніх двох етапів, дії над наближеними значеннями. Відповідний навчальний матеріал вдало представлено у діючих підручниках, де теоретичні міркування доповнені практичними завданнями. Одні з них спрямовані на формування відповідних формально-оперативних умінь (№ 35, 36, 44-46, 50, 64-69 [148], №43 [55]), в інших - акцент робиться на наближеному характері даних, що задіяні у задачах (№ 37-42, 44-46 [54], 47, 48,70,71 [148]). Наведемо приклади цих задач.

Задача 2.21. Відомо, що -2<c<5. Оцініть значення виразу: а) 1,5х-3; б) -х; в) 1,5-3х (№44 [148]).

Задача 2.22. Оцініть довжину середньої лінії трапеції з основами a та b, якщо 16,5<a<16,6 і 7,3<b<7,4 (№42 [55]).

Задачі другого виду володіють більшим дидактичним та розвиваючим потенціалом. Під час експериментального навчання було з’ясовано, що вони, порівняно із задачами першого виду , викликали більшій інтерес в учнів експериментальних класів. Володіння учнями уявленнями про наближений характер результатів практичних вимірювань, десяткових наближень дійсних чисел тощо, дозволило їм глибше зрозуміти умови запропонованих задач. Таким чином їх увага та навчальні зусилля сконцентровувались безпосередньо на виконанні алгебраїчних дій, а також усвідомленні та коректному записі остаточних відповідей.

У контрольних класах спостерігалась інша ситуація. Володіючи уявленнями лише про теоретичні вимірювання (п. 1.3), учні не розуміли змісту умови запропонованих задач та не завжди коректно інтерпретувати остаточну відповідь. Водночас, виконуючи формально-оперативні дії по розв’язування задач першого типу, вони діяли на такому самому рівні, як і учні експериментальних класів. Такі результати спостережень підтверджують необхідність ведення пропедевтичної роботи з НО протягом 5-8 класів, яка передбачається пропонованою нами методикою.

Під час експериментального навчання найбільшого дидактичного ефекту було досягнуто , коли учні розв’язували не лише обидва види задач, але і спеціально підібрані задачі з геометрії . Їх розв’язування мало на меті формування знані і умінь з геометрії, що передбачені програмою , і водночас удосконалення умінь учнів виконувати дії над наближеними значеннями.

Першою програмовою темою з геометрії є тема «Розв’язування трикутників». Наведемо приклад однієї із задач, яка пропонувалась учням для розв’язування під час її вивчення.

Задача 2.23. Частина трикутника пошкоджена (рис. 2.19). Обчисліть площу трикутника, яку він мав до пошкодження, виконавши необхідні вимірювання. Обчислити відносну точність отриманого результату.

Коментарі до розв’язування задачі. Під час експериментального навчання учні, як правило, висували наступні пропозиції, щодо розв’язування задачі. Перша - виміряти ті кути та сторону, що «збереглися». Обчислити площу трикутника за двома сторонами і кутом між ними, попередньо визначивши розміри необхідних для цього елементів за допомогою теореми синусів . Друга – добудувати «пошкоджену» частину трикутника, після чого виміряти довжини всіх сторін та використати для обчислення площі трикутника формулу Герона. Перша пропозиція була обрана для практичної реалізації в урочний час. Друга - запропонована для домашнього виконання. На наступному уроці точність, отриманих таким чином результатів, порівнюється та робляться відповідні висновки. Наведемо орієнтовний хід міркувань учнів у обох випадках. Перший випадок. Внаслідок позначень та вимірювань учнями були отримані наступні

результати , 5,1см≤AB≤5,2см. Робочою формулою для обчислення площі

трикутника учні обрали формулу , де пошкоджену сторону AC знаходять

за теоремою синусів , тобто ; а

, . За допомогою таблиці Брадіса учні визначають межі синусів кутів трикутника: 0,5592 ≤ sinA ≤ 0,5736; 0,9703 ≤ sinB ≤ 0,9744; 0,9397 ≤ sinC ≤ 0,9455 після чого продовжують розв'язання задачі:

Відповідь: .

Другий випадок. Після добудов, позначень та вимірювань учнями були отримані наступні довжини сторін 5,1см ≤ AB ≤ 5,2см; 5,2 ≤ AC ≤ 5,3; 3,0≤BC≤3,1. Визначивши границі півпериметра (6,65≤p≤6,80) та відповідних піврізниць (1,45≤p-AB≤1,70; 3,55≤p-BC≤3,80; 1,35≤p -AC≤1,60) підставляємо отримані значення у формулу Герона:

Відповідь:

Порівнюючи відносну точність отриманих результатів спостерігаємо, що у другому випадку вона майже втричі більша. Увагу учнів доцільно зосередити на причинах такого погіршення точності. Воно пов'язане з тим, що у другому випадку до похибок вимірювання додались ще і похибки, пов'язані із виконанням добудов.

Під час вивчення цієї ж теми учнів доцільно залучити до виконання практичної роботи. Кожен з них отримував план-схему одного з районів міста та текст задачі. Її розв'язування передбачало побудову відповідної математичної моделі, виконання додаткових вимірювань за допомогою засобів вимірювання (транспортира, лінійки тощо), використання відомих тригонометричних тотожностей та чотиризначних таблиць Брадіса, а також перевірку одержаної ними відповіді за допомогою електронної карти. Наведемо приклад такої задачі.

Задача 2.24. Пішохід знаходиться на розі вулиць Тростянецької та Горлівської. Який шлях він має подолати пішки, якщо йому найшвидше потрібно дістатися до станції метро «Харківська»? Скільки часу він на це витратить, йдучи зі швидкістю 5-6 км/год? Попередньо було з'ясовано (за показниками приладів автомобіля), що частина вулиці Тростянецької (між вулицями Горлівською та Ревуцького) має довжину 750-800 м, а частина вулиці Ревуцького (між вулицями Тростянецькою та М.Бажана) має довжину1400-1450 м (див. додаток Ф.1).

Коментарі до розв'язання задачі. Увагу учнів слід зосереджена на вимозі «найшвидше дістатися» до об'єкта, тому наближеною траєкторією руху необхідно обрати пряму. Наближеність траєкторії пов'язана із неможливістю руху крізь будівлі, які мають місце на шляху пішохода.

Аналіз умови задачі, зокрема виділення відомих даних, приводить до створення її математичної моделі (трикутника) та відповідного внутрішньомодельного розв'язування: дві сторони трикутника відомі за умовою (1,40км≤AC≤1,45км; 0,75км≤BC≤0,80м); кут між ними можна виміряти за допомогою транспортира (   ); а невідому сторону трикутника знайти та теоремою косинусів. Числове значення cosC є від'ємним. Це створює проблемну ситуацію: відомі учням правила виконання дії другого ступеня є справедливими лише для додатних чисел. Її виникнення слугує мотивацією для ознайомлення учнів із правилами виконання дій другого ступеня над довільними числами, що відбудеться у курсі алгебри. На даному ж етапі для розв'язання задачі необхідно виконати ряд перетворень:
AB2=AC2+BC2-2AC·BC·cosC

AB22+BC2-2AC·BC·cos(1800-α), де
AB22+BC2+2AC·BC·cosα, де 0,3907< cosα <0,4067, тоді

.3

1,828379…<AB<1,919907….

Враховуючи, що   , а 5 км/год≤V≤ 6 км/год, маємо

Відповідь: Пішохід має подолати шлях 1,82-1,92 км і витратити для цього 18-24 хвилини.

Під час експериментального навчання учні, інтерпретувавши отриманий ними результат відповідно до умови задачі, виявили бажання перевірити його правильність. За допомогою електронної карти міста Києва вони визначили наближене значення шуканої відстані (додаток Ф.2), що в межах математичної моделі позначена відрізком АВ. Отриманий результат надав можливість зробити висновок про правильність і створеної ними математичної моделі, і внутрішньо модельного розв'язування: 1,82км<1,84км<1,92км.

Розв'язування учнями завдань, що є подібними до вищенаведених спрямоване не лише на удосконалення навичок виконання дій над наближеними значеннями, а і відповідає вимогам чинної програми з математики, зокрема вимозі застосовувати алгоритми розв'язування трикутників до розв'язування прикладних задач [177,с.39].

Як вже вказувалось, на початку 9 класу, за чинною програмою учні ознайомлюються із темою «Нерівності». Під час вивчення в її межах основних властивостей нерівностей слід не лише обґрунтувати раніше вивчені правила виконання дій над наближеними значеннями, але і доповнити їх. Зокрема для логічної завершеності змістової лінії НО, необхідно розглянути питання про множення і ділення наближених значень, межі яких містять не лише додатні числа. Навчальну діяльність учнів щодо формування відповідних уявлень доцільно організувати у вигляді індуктивного дослідження. В його основу були покладені ідеї С.М.Чашечникова та інших [286, с.190]. Змістовими передумовами навчально-дослідницької діяльності учнів послужило їх ознайомлення з поняттям про «Об'єднання та переріз числових проміжків» [55], [148], а психолого-педагогічними – відповідний рівень розвитку абстрактно-теоретичного мислення підлітків, який дозволяє їм вести міркування без «прив'язки» до конкретної задачі або конкретних величин.

Учням доцільно запропонувати два загальні випадки. Перший – межі кожного із наближених значень мають однакові знаки. Другий – межі хоча б одного із наближених значень мають різні знаки

Рис. 2.21 $0<x\le 1,0$ Рис. 2.22 Рис. 2.20

Зупинимось детальніше на цих випадках, навівши приклади розв'язувань відповідних завдань.

Задача 2.25. Знайдіть межі значення виразу , якщо 1,0≤x≤5,1 та -14,7≤y≤-5,3.

Коментарі до розв'язання задачі. Серед заданих наближених значень x та y обираємо ті, межами яких є від'ємні числа. У даній задачі - це y. Множимо відповідну подвійну нерівність на (-1): 5,3≤-y≤14,7. Виконуємо ділення наближених значень x на (-y) за відомим правилом 0,06

≤ ≤0,97. Множимо отриману подвійну нерівність на (-1).

Відповідь: -0,97≤ ≤-0,06

Задача 2.26. Знайдіть межі значення виразу , якщо -5,1≤x≤1,0 та 5,3≤y≤14,7.

Коментарі до розв'язання задачі: Оберемо ту з нерівностей, яка містить межі різних знаків: -5,1≤x≤1,0. Поділимо множину значень, які їй задовольняють, на три підмножини: від'ємні, нульові та додатні (рис. 2.20). Розглянемо окремо кожен із трьох випадків (рис. 2.21) і об'єднаємо отримані розв'язки.

1. Нехай -5,1≤x<0 та 5,3≤y<14,7. Тоді множимо першу нерівність на (-1): 0<-x≤5,1. За

відомим правилом знаходимо межі частки : 0< ≤0,97 та множимо отриману подвійну

нерівність на (-1): -0,97≤ <0.

2. Нехай x=0 та 5,3≤y<14,7, тоді =0.

3.Нехай 0<x≤1,0 та 5,3≤y<14,7. Тоді, за відомим правилом, знаходимо межі частки : 0<

≤0,19.

Множиною розв'язків є об'єднання значень , що були отримані в кожному з трьох випадків (рис.2.22).

Відповідь: -0,97≤ ≤0,19

Задача 2.27. Знайдіть межі значення виразу xy, якщо -5,1≤x≤1,0 та -14,7≤y≤5,3

Коментарі до розв'язання задачі. Поділимо множину значень кожної з нерівностей на підмножини, аналогічно до попередньої задачі: від'ємні, нульові та додатні (рис. 2.23). Для кожного з трьох випадків значень x можна підібрати по три випадки значень y. Розглянемо окремо кожен із дев'яти випадків і об'єднаємо отримані розв'язки.

1. Нехай -5,1≤x<0 та -14,7≤y<0. Тоді помножимо обидві нерівності на (-1): 0<-x≤5,1; 0<-y≤14,7 та обчислимо межі добутку (-x)·(-y)=xy за відомим правилом 0<xy≤74,97.

2. Нехай -5,1≤x<0 та y=0, тоді xy=0.

3.Нехай -5,1≤x<0 та 0<y≤5,3. Тоді множимо першу нерівність на (-1): 0<-x≤5,1. За відомим правилом знаходимо межі добутку (-x)·y: 0<-xy≤27,03 та множимо отриману подвійну нерівність на (-1): -27,03≤xy<0.

4. Нехай x=0 та -14,7≤y<0, тоді xy=0.

5. Нехай x=0 та y=0, тоді xy=0.

Рис. 2.24

6. Нехай x=0 та $0<y\le 5{,}3$, тоді xy=0.

7. Нехай $0<x\le 1{,}0$ та $-14{,}7\le y<0$. Тоді множимо другу нерівність на (-1): $0<-y\le 14{,}7$. За відомим правилом знаходимо межі добутку $x\cdot(-y)$: $0<-xy\le 14{,}7$ та множимо отриману подвійну нерівність на (-1): $-14{,}7\le xy<0$.

8. Нехай $0<x\le 1{,}0$ та y=0, тоді xy=0.

9. Нехай $0<x\le 1{,}0$ та $0<y\le 5{,}3$, тоді $0<xy\le 5{,}3$.

Множиною розв’язків є об’єднання значень xy, які отримали в усіх дев’яти випадках (рис. 2.24)

Відповідь: $-27{,}03\le xy\le 74{,}97$

Під час експериментального навчання було з’ясовано, що сприйняття першого випадку не викликає особливих труднощів в учнів. Тому вміннями користуватися алгоритмом перетворення від’ємних меж наближених значень у додатні має оволодіти переважна більшість учнів (при цьому степінь допомоги вчителя учням – індивідуальна). Сприйняття учнями другого випадку викликає певні труднощі. Тому з ним слід ознайомити лише учнів із середнім та високий рівнем навченості. В ШКМ основної школи доцільно розглядати другий випадок не в повному обсязі. Зокрема дію ділення необхідно вводити лише для тих комбінацій, де межі дільника описуються числами однакових знаків.

Розв’язування прикладів, аналогічних до вищенаведених, сприяє узагальненню уявлень учнів про виконання дій над наближеними значеннями та удосконаленню відповідних навичок. Воно є корисним і у контексті вивчення традиційного програмового матеріалу. Зокрема відбувається подальший розвиток уявлень про застосування нерівностей для оцінки значень виразу, пропедевтика розв’язування сукупностей нерівностей, а також актуалізації сформованих раніше комбінаторних уявлень учнів.

Пізніше, під час активного застосування методу меж до розв’язування практичних та прикладних задач, не доцільно проводити такі громіздкі міркування для виконання дій над наближеними значеннями. Вони відволікають увагу учнів від суті задач та вимагають значних витрат навчального часу. Тому до уваги учнів слід довести узагальнені правила множення та ділення наближених значень, які були запропоновані Г.О.Михаліним під час обговорення пропонованої методики вивчення НО.

Множення наближених значень.

1. Записати наближені значення x та y у вигляді подвійних нерівностей $a\le x\le b$, $c\le y\le d$.
2. Обчислити добутки ac, ad, bc, bd.
3. Нехай А – найбільший із добутків ac, ad, bc, bd, а В - найменший. Тоді $B\le xy\le A$

Ділення наближених значень.

1. Записати наближені значення x та y у вигляді подвійних нерівностей $a\le x\le b$, $c\le y\le d$, де

   .

2. Обчислити частки .
3. Нехай А – найбільша із часток , а В - найменша. Тоді В≤ ≤А.

Під час опанування учнями темою «Нерівності» за пропонованою методикою має відбутись їх ознайомлення з формою запису наближених значень із використанням знака модуля. Змістові та методичні передумови для цього з’являються під час розгляду питань, які в чинних підручниках носять назву «Нерівності, що містять модулі» [55, с.30] або «Нерівності з однією змінною. Числові проміжки» [148, с.22]. У них авторами акцентується увага на рівносильності нерівностей, на кшталт, $|x|\le 3$ та $-3\le x\le 3$. У цей час доцільно ініціювати висунення учнями припущення, яке може звучати так: «Відомо, що наближені значення можна записувати у вигляді подвійної нерівності. Можливо їх можна записувати і з використанням знака модуля?». Вказана гіпотеза виникає в учнів внаслідок співставлень та спостережень за перетвореннями, які виконувались ними з вищевказаними нерівностями.

Учням із високим рівнем навченості було запропоновано самостійно, використовуючи вивчені раніше властивості числових нерівностей, дослідити правильність чи хибність виказаного припущення. Учні із середнім та нижче середнього рівня навченості виконували відповідні дії разом з учителем (див. табл. 2.6).

Після отримання остаточного висновку увагу учнів необхідно зосередити на доповненні відповідної логіко-дидактичної схеми (додаток К.1) ще однією формою запису наближених значень.

Навички виконувати взаємоперехід між різними формами запису наближених значень доцільно формувати під час розв’язування задач, що наведені у чинних підручниках (№97а,в, №98б,в [148], №96-98, 101-104 [55]).

Ознайомлення учнів з формою запису наближених значень за допомогою знака модуля надає можливість сформувати означення поняття точності наближених значень, як це передбачається традиційною методичною схемою [55, с.127]. Ознайомлення з ним сприяє логічній завершеності формування в учнів 9 класу поняття про числові характеристики наближених значень.

Таблиця 2.6

Орієнтовний хід міркувань учнів

Можливі міркування учнів	Символьне відображення міркувань учнів
Згадаємо, які існують форми запису наближених значень у вигляді подвійних нерівностей	$HM \le x \le BM$ $a-h \le x \le h+a$
Нам необхідно, щоб з обох сторін подвійної нерівності були протилежні числа. На роль такого числа у нас два претенденти a і h. Розглянемо ці випадки:	
a в обох частинах подвійної нерівності містяться з однаковим знаком, що нас не влаштовує.	$a \le \ldots \le a$
h в обох частинах подвійної нерівності міститься з різними знаками, що нас цілком влаштовує	$-h \le \ldots \le h$
Позбавимось від зайвих складових, які міститься у обох частинах подвійної нерівності	$a-h \le x \le h+a$ - $a = a = a$ $-h \le x-a \le h$
Виконаємо остаточні перетворення	$\|x-a\| \le h$

Під час експериментального навчання було з’ясовано, що запис наближених значень із використанням знаку модуля краще не вживати у контексті прикладних задач чи задач практичного змісту (додаток П: задачі 77-78). Учні лише повинні розуміти зміст наведеного запису та вміти його опрацьовувати.

Наступними темами, з якими учні ознайомлюються згідно чинної програми в курсі алгебри є «Квадратична функція», а в курсі геометрії - «Правильні многокутники», «Декартові координати на площині» та «Геометричні перетворення». Під час їх вивчення учням доцільно запропонувати задачі на застосування вмінь знаходити числові характеристики наближених значень. Приклади таких задач та розв’язування деяких з них наведені у додатках (додаток П: задачі 79, 83, 85, 86).

Розв’язування завдань, які передбачають ведення графічних міркувань (термін В.Г. Дорофєєва [92]), доцільно проводити із використання ІКТ, зокрема програмних засобів GRAN 1 та EXEL [103], [196]. Відповідні розробки наведені у додатках (додаток У.4).

Далі в курсі алгебри 9 класу вивчається тема «Елементи прикладної математики». Під час опанування навчальним матеріалом, що в ній представлений, необхідно доповнити уявлення учнів про форми запису наближених значень та методи НО. Зокрема, учні мають ознайомитись із записом наближених значень правильними цифрами (поступове формування попередніх уявлень про нього відбувалося починаючи з 5 класу). Означення правильних цифр наближеного значення, приклади переходу від запису наближених значень правильними цифрами до запису у вигляді умовної рівності вдало представлені в чинних підручниках з алгебри для 9 класу [148, с.183], [55, с.131]. Нагадаємо, що у методиці навчання математики існують поняття про правильні цифри у широкому розумінні, а також у вузькому розумінні. Згідно них правильною цифрою називають цифру будь-якого розряду, якщо абсолютна похибка наближеного значення не перевищує одиниці цього розряду (у широкому розумінні) або половини одиниці цього розряду (у вузькому розумінні). Наприклад, якщо температура плавлення міді 1084,50 С (приклад узято із чинного підручника [148, с.183]), то у широкому розумінні правильних цифр її можна записати у вигляді (1084,5±0,1)0 С, а у вузькому - (1084, 5±0,05)0 С. У своєму дослідженні ми вважаємо за доцільне, висвітлювали це питання так, як воно представлено у чинних підручників, тобто керуватись першим означенням.

Під час експериментального навчання виявило ефективність взаємо доповнення навчального матеріалу, який представлено у чинних підручниках [16], [55], а також доповнення його певними акцентами та методичними зауваженнями. Головним серед них було визначення пріоритетів серед методів НО. Метод меж повинен продовжувати позиціонуватись у якості провідного методу НО, у тому числі і для наближених значень записаних правильними цифрами. Водночас учні мають отримувати уявлення і про ПППЦ як про метод НО, яким керуються під час виконання «невідповідальних» обчислень (термін узято із чинних підручників [16]). Відповідний навчальний матеріал наведено у чинних підручниках з алгебри для 9 класу [148], [55], а також в окремих підручниках з математики для 6 класу [175].

Формування умінь, що пов'язані із методом меж, має відбуватись під час виконання практичних завдань. Приклади їх розв'язання наведені у сучасних підручниках [55, с.132]. Детальніше їх дослідження виявило необхідність додаткової уваги до певних питань, що пов'язані із записом наближених значень правильним цифрами, а також відсотковими розрахунками, в яких задіяні наближені значення. Зупинимось на них детальніше на прикладі наступних задач.

Задача 2.28. Підприємство протягом місяця витрачає приблизно 16 мотків спеціальної вірьовки, довжина кожної з яких 100 ± 3% футів (виробництво Великобританія). Скільки коштів треба запланувати на вказані витрати, якщо 1м такої вірьовки коштує 1,30-1,50 грн.? Відомо, що один метр становить приблизно 3,30 футів.

Коментарі до розв'язування задачі. Наближені данні задачі представлені у різних формах . Така подача матеріалу не дивує учнів. Під час власної проективної діяльності вони неодноразово зустрічались з такою ситуацією. Учні розуміють, що різний запис наближених значень пояснюється різними джерелами отримання відомостей або іншими факторами.

Аналізуючи деякі з наближених значень, зокрема 16 та 0,30, учні приходять до висновку, що вони, можливо, записані правильними цифрами. Зазначене припущення приймається як правильне, тому що повніших відомостей про точність вказаних наближених значень немає. Наближені значення позначають змінними, записують їх у вигляді подвійних нерівностей та виконують нескладні арифметичні дії (див. табл. 2.7).

Особливу увагу учнів слід зосередити на значенні 0,30, тобто на значенні, яке містить наприкінці серед десяткових знаків нуль. Відомо, що під час запису або виконання дій над точними значеннями такі нулі відкидають. Коли ж мова йде про наближені значення - вони обов'язково мають зберігатись, незалежно від обраного методу НО. Вони є правильними цифрами наближеного значення, а відповідно несуть відомості про його точність: $c \approx 3,30$; $c=3,30 \pm 0,01$. Неправомірне ж відкидання таких нулів спотворює відомості про точність наближених значень: $c \approx 3,30=3,3$; $c=3,3 \pm 0,1$.

Рис. 2.25

Виконавши відповідні арифметичні дії (див. табл. 2.7), учні інтерпретують отриманий результат у відповідності до питання задачі.

Таблиця 2.7

Орієнтовний хід міркувань учнів по розв’язанню задачі

Позначення даних задачі	Запис даних у вигляді подвійних нерівностей	Виконання арифметичних дій
a – кількість мотків, що витрачається	a ≈ 16 шт., тоді припускаємо, що a=16±1 шт., тобто 15шт ≤ a ≤ 17шт	Відповідь: підприємству слід запланувати на вказані витрати 799 грн.
b – довжина вірьовки у кожному мотку	b=100±3%, тоді b=100±3футів, тобто 97футів ≤ b ≤ 103футів	
c – кількість футів в одному метрі	c ≈ 3,30м, тоді припускаємо, щос =3,30±0,01м, тобто 3,29м ≤ c ≤ 3, 31м	
d – ціна одного метру вірьовки	1,30грн ≤ d ≤ 1,50грн	

Задача 2.29. Світло, розповсюджуючись зі швидкістю приблизно 300 000 км/с, проходить відстань від Сонця до Землі близько 8,3 хв. Обчислити відстань від Землі до Сонця на момент отримання вказаних даних. Перевірити правильність отриманої відповіді, якщо відомо, що вказана відстань протягом року змінюється приблизно від 146998000 км до 152 002 000 км.

Коментарі по розв’язуванню задачі. Проводячи міркування аналогічним чином як і у попередній задачі, учні зустрічаються з іншою проблемою: який із розрядів у наближеному значенні 300 000 слід вважати розрядом точності (рис. 2.25)?

В методиці навчання математики ця проблема, широко обговорюючись, не знаходить остаточного розв’язання [78, с.17]. Наприклад, дослідники минулого пропонували усі такі нулі вважати незначущими цифрами. Сучасні методисти пропонують записувати такі наближені значення у стандартному вигляді. Однак аналіз навчально-методичної літератури та підручників показав, що останнього принципу одні з авторів дотримуються, а інші - ні. У своєму дослідженні під час експериментального навчання ми керувалися думкою про те, що такі випадки потребують додаткового дослідження. Без нього неможливо зробити більш-менш коректні та обґрунтовані висновки. Так у пропонованій задачі, учням треба дати додаткове завдання знайти у довідниках або інших джерелах відомості (чи хоча б згадки) про швидкість світла. Результатами таких «пошуків» виявилися значення 300 тис. км/с; 299 793 км/с; та деякі інші. Тому відповідну умовну рівність можна записати у вигляді c=(300000±1000) км/с, тобто

, де c- швидкість розповсюдження світла.

Зрозуміло, що , де S – відстань від Землі до Сонця, а t- час проходження світла від Землі до Сонця. Одиницями виміру c є км/с, тому t необхідно також виразити у секундах: t =(8,3±0,1)хв., тобто або . Виконавши відповідні обчислення отримуємо .

Отримане значення за умовою задачі необхідно порівняти із заданим:

. Числове значення величини S1, а також данні для обчислення числового значення величини S є результатами певних практичних спостережень та вимірювань. Відомо, що для порівняння результатів вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини слід порівняти інтервали, що їх описують. Якщо ці інтервали перетинаються, то різницю між результатами вважають незначною. Якщо не перетинаються, то різниця між результатами вважається значною, а про результати вимірювань говорять, що вони не збігаються. Порівнявши та , бачимо, що відповідні інтервали перетинаються, а тому робимо висновок про правильність отриманих нами результатів.

Відповідь:

Задача 2.30. На рисунку 2.26 зображена стовпчаста діаграма розподілу ділянок лижної дистанції у кілометрах. Знайдіть довжину лижної дистанції, яка включає в себе спуски, підйоми та прямолінійні ділянки. Скільки відсотків становить кожна з них до загальної довжини лижної дистанції.

Коментарі до розв'язування задачі: Учні з різною точністю записували данні задачі, які представлені на діаграмі. Одні – з точністю до 5 км, інші – з точністю до 2,5км. За цією ознакою доцільно об'єднати учнів у дві групи, а результати їх діяльності порівняти.

Для ведення подальших обчислень необхідно ввести такі позначення: x - довжина спусків; y – довжина підйомів; z – довжина прямолінійних ділянок; S=x+y+z - загальна довжина лижної дистанції. Тоді склавши пропорції та виконавши відповідні обчислення визначаємо, що

спуски до довжини загальної лижної дистанції становлять , підйоми - , а

прямолінійні ділянки - .

Наведемо результати обчислень, що були отримані учнями кожної з груп:
- перша група: 60км≤ x ≤70км, 20км≤ y ≤30км, 40км≤ z ≤ 50км, 120км≤ S ≤150км, тоді спуски становлять 40%-59%, підйоми - 13%-25%, а прямолінійні ділянки – 26%-42%;
- друга група: 65км≤ x ≤70км, 20км≤ y ≤25км, 40км≤ z ≤ 45км, 125км≤ S ≤140км, тоді спуски становлять 46%-56%, підйоми - 14%-20%, а прямолінійні ділянки – 28%-36%.

Під час розрахунків, що пов'язані із відсотками, учні «мають звичку» перевіряти правильність отриманих ними відповідей. Зокрема, отримавши вищенаведені результати, вони під час експериментального навчання пропонували з'ясувати чи складатимуть разом усі ділянки лижної дистанції 100%. Після виконання відповідних дій учні першої групи з'ясували, що усі ділянки лижної дистанції складають 78%-126%, тобто приблизно 102%, а учні другої групи - 88%-112%, тобто приблизно 100%.

Отримані результати потребують додаткових пояснень. Для учнів першої групи - чому замість очікуваних 100% ми отримали 102%? Для учнів другої групи – чому перед очікуваними 100% ми ставимо знак наближеної рівності? Для відповіді на ці питання з учнями має бути проведена короткочасна бесіда про те, що в результаті виконання арифметичних дій над наближеними значеннями ми отримуємо також наближені значення. Їх близькість до істинного значення може бути різною. Причому чим «вужчі» межі ми обираємо для «вхідних» наближених значень, тим ближчим виявляється остаточний результат до істинного.

Змістові передумови для підведення підсумків, щодо вивчення НО в основній школі, є у темі «Початкові відомості з стереометрії», де чинна програма передбачає розгляд питання «Розв'язування задач на обчислення площ поверхонь і об'ємів, у тому числі прикладного характеру» [177, с.40]. Під час формування відповідних знань та умінь доцільно запропонувати учням виконання лабораторних робіт (див. додаток Х) або завдань практичного змісту. Наведемо приклад однієї із задач, яка було покладена в основу згаданої лабораторної роботи.

Задача 2.31. Скільки пачок солі поміститься у запропоновану посудину (рис. 2.27).

Коментарі до розв'язування задачі: Розв'язування задачі доцільно провести у формі лабораторної роботи. Для ї SHAPE * MERGEFORMAT ї виконання учні об'єднуються у гетерогенні групи по 3-4 особи. Задачі, що пропонуються кожній із груп є різними (різні речовини, посудини різної форми), але мають однаковий алгоритм внутрішньомодельного розв'язання, а саме:

1. Визначити об'єм посудини: V_1.
2. Визначити об'єм речовини, яка містилась у пакунку: V_2.
3. Обчислити частку та зробити відповідні висновки.

Наприклад надана ємкість (рис. 2.27) має циліндричну форму, тому її об'єм учні мають знайти за формулою . Радіус та висоту циліндра вимірюють. Кожен із розмірів вимірюють по 4-5 рази в різних місцях, після чого записують відповідні наближені значення у вигляді подвійних нерівностей. Радіус знаходять за непрямими вимірювання: або за допомогою лінійки знаходять діаметр, який потім ділять навпіл; або за допомогою нитки чи паперової стрічки визначають довжину кола, яку потім ділять на 2π.

Рис.2.27

Для обчислення об'єму речовини, яка міститься у пакунку, учні використовують формулу

, що відома їм із курсу фізики 7 класу [270]. При цьому значення густини ρ знаходять за таблицею або з інших джерел, а маса m вказана на пакунку у вигляді умовної рівності.

На кінець 9 класу, тобто по завершенню третього етапу навчання за пропонованою методикою, в учнів має сформуватись логічно завершена система уявлень з НО, а також система відповідних їм умінь і навичок. Зокрема учні повинні:

- володіти поняттям про основні джерела наближених значень, а також про побутові та математичні форми запису наближених значень; вміти виконувати взаємоперехід між різними формами запису наближених значень, аналізувати їх;
- володіти поняттям про кількісні та якісні характеристики наближених значень; вміти знаходити точність та відносну точність наближених значень, виконувати взаємоперехід між ними;
- володіти уявленнями про метод меж як один з методів НО, а також сферу його застосування; вміти виконувати додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з цілим показником та добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень, а також обґрунтовувати їх за допомогою властивостей числових нерівностей;
- вміти застосовувати знання та уміння з НО під час розв'язування практичних та прикладних задач.

Формування уявлень, знань і умінь учнів з НО має відбуватись протягом п'яти років на основі особистісно-діяльнісного спрямування навчального процесу. Використання пропонованої методики навчання НО сприяє покращенню фундаментальної математичної підготовки учнів, виникненню інтересу в учнів до навчання, а також забезпеченню прикладної спрямованості навчання математики.

Створена модель вивчення НО є базовою і передбачає подальше удосконалення, дидактичне наповнення та подальший розвиток у старшій профільній школі.

2.6. Експериментальна перевірка результатів дослідження

Дослідження, створення, корекція та перевірка ефективності запропонованої методики вивчення НО учнями основної школи здійснювалась нами у процесі проведення педагогічного експерименту. Він проходив у три етапи: 2001-2002 рр. - етап констатувального експерименту; 2002-2004 рр. – етап пошукового експерименту; 2004-2008 рр. - етап формувального експерименту.

Основною метою констатуючого експерименту було вивчення стану проблеми дослідження та визначення його основних завдань. Відповідні дії проводились нами у двох напрямках: теоретичному та практичному.

Теоретичний аналіз проблеми полягав у вивченні психолого-педагогічної, наукової та методичної літератури, навчальних програм, підручників, посібників та публікацій у періодичних виданнях. Результати проведеної роботи дали змогу:

• обґрунтувати психолого-педагогічні передумови та методологічні основи розробки методики вивчення НО в основній школі;

• виділити та сформулювати вимоги до організації навчання НО в умовах особистісно-орієнтованого та діяльнісного спрямування освітнього процесу.

Під час практичного дослідження нами використовувались обсерваційні методи (спостереження за діяльністю учнів та вчителів на уроках) та діагностичні методи (анкетування та опитування учнів та вчителів). Для їх проведення нами було відвідано понад 150 уроків в різних школах і різних класах та проанкетовано близько 190 вчителів.

Спостереження за реальним навчальним процесом відбувалось як у 9 класах, де за чиною на той час програмою мало місце вивчення теми НО, так і у інших класах основної школи. Під час нього ми помітили, що в учнів різних вікових категорій існує стійкий психологічний бар'єр у сприйнятті наближених значень, які виникають в результаті виконання проміжних дій або під час формулювання остаточної відповіді. Учні переважно, незалежно від рівня навченості, панікують, стають безпорадними, переглядають по декілька разів хід розв'язування, з метою виявлення помилки, висувають припущення про помилку в умові задачі, часто взагалі припиняють виконувати завдання.

Вчителі, знаючи про вказані особливості, намагаються вилучити завдання, які спричиняють такі ситуації, із масивів дидактичного забезпечення або відшліфовують відповідним чином їх умову. В результаті цих дій дидактичний матеріал збіднюється, а розв'язування таких задач не відповідають ні розвивальним цілям, ні прикладній спрямованості навчання математики. Розуміючи неможливість і непотрібність повної ізоляції від НО, вчителі у різний спосіб ознайомлюють учнів із окремими найнеобхіднішими відомостями з НО. Таке знайомство відбувається стихійно і не сприяє формуванню чітких, логічно завершених уявлень про основні поняття та методи НО. Фактично вони не формуються і під час 1-2 годин, які були відведені за чинною на той час програмою на їх вивчення наприкінці 9 класу. Детальніше це питання, разом із причинами та наслідками такого стану вивчення НО, представлені у п.1.2.

Опитування вчителів проводилось особисто, а анкетування - як особисто так і за допомогою працівників інститутів післядипломної підготовки працівників освіти. У результаті зібрано данні з різних регіонів України, зокрема м. Кіровограду та Кіровоградської області, м. Дніпропетровська, м. Києва та Київської області. Серед респондентів виявилося вчителів із педагогічним стажем до 10 років – 16 %; від 10 до 20 років – 58 %; більше 20 років – 26 %. Категорії «спеціаліст» та ІІ кваліфікаційну категорію мали 20 % вчителів, І – 32 %, вищу – 48 % .

Результати анкетування (зразок анкети наведено у додатку Ц) та безпосереднє спілкування з учителями показали, що переважна більшість з них не володіють у достатній мірі поняттям про НО як складову ШКМ. Приблизно 30 % респондентів виявилося складно відповісти на запитання щодо розуміння структури та основних задач НО у ШКМ. Половина з них ілюструвала свої уявлення прикладами. Інша половина відмовилася від відповіді. Близько 70 % вчителів у своїх твердженнях зводили поняття про НО до одного з їх провідних понять або навіть окремих елементів знань НО. Зокрема 20 % з них вважали, що НО - це правила округлення; 25 % - ототожнювали їх із правилами знаходження похибок, які на їх думку треба вивчали у курсі фізики; 25 % - говорячи про НО мали на увазі правила, за якими оцінюють числові значення виразів. Як бачимо, кожен з цих поглядів відображає лише окремі структурні елементи НО і не відображає цілісних уявлень ні про мету їх вивчення, ні про їх загальноосвітню та прикладну значущість НО. Коментуючи свої відповіді більшість вчителів (

78 %) визнавали недостатність власного рівня підготовленості з НО, пояснюючи це відсутністю мотивів та можливостей глибшого ознайомлення з відповідними питаннями. Відсутність мотивів вони обґрунтовували короткотривалістю вивчення НО наприкінці 9 класу, тим більше в умовах необхідності підготовки учнів до державної атестації. Відсутність можливостей – браком відповідної літератури, через що вчителі, навіть за умов виникнення професійної, пізнавальної або практичної необхідності, не мають змоги приділити більше уваги НО ні у контексті навчання учнів, ні у контексті власної самоосвіти.

Оцінюючи стан вивчення НО у ШКМ переважна більшість респондентів вказували на невдале розміщення навчального матеріалу з НО. Зокрема у відповідях близько 80 % вчителів мала місце думка про те, що вивчення НО слід віднести на більш ранні періоди і опановувати відповідними знаннями та уміннями упродовж тривалішого терміну часу. Близько 50 % вважали, що зміст НО у ШКМ є ізольованим і від традиційного програмового навчального матеріалу, і від їх прикладних застосувань. Він потребує перегляду та якісно нового дидактичного супроводження. 46 % виказували думки про те, що за традиційних методів та організаційних форм НО вивчати нецікаво і неефективно. Необхідно яскравіше підкреслювати їх практичну значущість.

Аналіз матеріалів, отриманих в ході ведення констатуючого експерименту, підтвердив думку про необхідність удосконалення методики вивчення НО в основній школі. Виявлені суперечності, недоліки та нерозв'язані питання, а також ряд інших фактів дозволили виділити основні завдання дослідження та сформулювати його гіпотезу. Основні результати констатуючого експерименту висвітлені нами у першому розділі дисертаційного дослідження та у публікаціях [122, 126, 128, 130, 132, 134, 135].

Наступним етапом педагогічного експерименту був пошуковий експеримент. Він тривав протягом 2002-2004 рр. і збігся з періодом розробки та обговорення програми з математики 12-річної школи. Його метою було створення, апробація та відповідна корекція методичної системи вивчення НО в основній школі. Для досягнення цієї мети було уточнено цілі вивчення НО, розроблена структурна модель їх вивчення, апробувались найбільш прийнятні форми включення елементів знань з НО у традиційний програмовий матеріал. Особливо ретельно досліджувались змістові передумови вказаного включення, а також питання відбору змісту НО, зокрема вибору основного методу НО та змістового наповнення провідних понять НО (вибір термінології, форм запису, тощо). Обґрунтовувався порядок їх вивчення та перевірялась доступність їх сприйняття підлітками. Розроблялись та коректувались методичні рекомендації і дидактичні матеріали. Перевірялась їх посильність, доцільність та ефективність. Досліджувались можливості ІКТ як засобу підвищення ефективності впровадження пропонованої методики. Здійснювався добір доцільних, ефективних та педагогічно вивірених методів, організаційних форм та засобів навчання. Велось активне спілкування та консультативна робота з учителями, які мали брати участь у формуючому експерименті. З метою удосконалення пропонованої методики велося спостереження за динамікою успішності та якості математичної підготовки учнів, за формуванням в них позитивних мотивів до навчання, за окремими етапами їх діяльності: спостерігали хід міркувань, фіксували час, з'ясовували що викликає труднощі, сумніви, зацікавленість, тощо.

Результати пошукового етапу педагогічного експерименту висвітлені у попередніх підрозділах, а також у публікаціях [120, 121, 123, 124, 125, 127, 129, 131]. Вони дозволили започаткувати впровадження розроблених методичних рекомендацій у шкільну практику.

Перевірка дієвості та ефективності розробленої методики здійснювалась під час формуючого експерименту. Він проходив у двох напрямках:
• впровадження розробленої методики навчання НО (розпочалося у 2004/05 н.р., відбувається до нині);
• перевірка результатів педагогічного експерименту за допомогою статистичних методів (2008 рік) [75].

Експериментальною базою для впровадження розробленої методики було обрано загальноосвітню школу І-ІІІ ступенів №4, гімназію №9, гімназію нових технологій навчання (м.

Кіровоград); Петрівську, Комінтернівську, Улянівську загальноосвітні школи I-III ступенів, Петрівську гімназію (Кіровоградська область). Для участі в експерименті було залучено 733 учні, які ми розділили на три групи. Учні першої групи розпочали навчання за експериментальною методикою у 5 класі, другої групи – у 6 класі, а третьої групи – у 7 класі. Планувалось, що в результаті спостереження за ними та діагностиці їх навчальних досягнень виявляться певні стійкі тенденції, які дозволять зробити висновки про ефективність розробленої методики.

Серед учнів нами були виділені такі вибірки експериментальних (ЕК) та контрольних (КК) класів для проведення формуючого експерименту (табл. 2.8).

Уроки в КК і ЕК проводились як одним, так і різними вчителями. Останні мали різний педагогічний стаж та досвід роботи. Такий вибір обумовлюється необхідністю отримати більш об’єктивну оцінку пропонованої методики. Навчання у КК відбувалось за чиною програмою та за методикою, яка склалася у процесі педагогічної діяльності вчителя. У ЕК навчання відбувалось за пропонованою методикою, тобто традиційний програмовий матеріал було доповнено відповідними відомостями з НО та відповідними організаційними заходами. Для проведення такого експериментального навчання у кожному ЕК навчальний час було збільшено на 1 годину на місяць. На початку формуючого експерименту вчителі були ознайомлені з метою, задачами та методикою його проведення. Кожен з них отримав пакет матеріалів (методичні розробки, дидактичний матеріал) та методичні рекомендації щодо їх використання. Отримані матеріали корегувалися учителями, з урахуванням особливостей власної педагогічної діяльності, а також особливостей учнівської аудиторії.

Таблиця 2.8

Вибірки експериментальних (ЕК) та контрольних (КК) класів

Класи	Перша група	Друга група	Третя група	Усього учнів
ЕК	123	118	129	370
КК	116	128	119	363
Усього учнів	239	246	248	733

Розгортання навчального матеріалу з НО в кожній групі мало свої особливості. Учні ЕК першої групи працювали за розробленою методикою без змін. У навчальну діяльність ЕК другої та третьої груп були внесені корективи. Вони полягали в тому, що учні мали в більш інтенсивному темпі просуватись у експериментальному навчальному матеріалі. Зокрема, ЕК другої групи – за один рік навчання у 6 класі мали опанувати матеріалом з НО за 5 та 6 клас, після чого продовжити навчання у 7-9 класах за розробленою методикою у тому темпі, який нею передбачено. ЕК третьої групи – протягом навчання у 7-8 класах мали опанувати матеріалом з НО за 5-8 клас, після чого завершити навчання у 9 класі за розробленою методикою у тому темпі, який нею передбачено. З огляду на вказані корективи результати роботи саме першої групи було прийнято вважати найбільш надійними, тобто такими, що відображають суть пропонованої методики. Результати роботи другої та третьої груп мали, по-перше, підсилити (або навпаки – спростувати) припущення, які лягли в основу гіпотези дослідження. По-друге – представити розгорнуту картину впровадження розробленої методики в цілому по основній школі.

Для доведення ефективності пропонованої методики вивчення НО, а також з метою перевірки основних гіпотез дослідження розв’язувались такі завдання:

1) довести позитивний вплив розробленої методики на успішність та якість навчання, а також формування вмінь розв’язувати прикладні задачі;
2) дослідити відповідність розробленої методики навчально-пізнавальним можливостям учнів та віковим особливостям їх сприйняття.

Розв’язання першого завдання забезпечувалось виконанням учнями підсумкової контрольної роботи. У більшості випадків тести або контрольні роботи, призначені для діагностики сформованості певних якостей або вмінь, перевіряються за допомогою завдань подібних до тих, за допомогою яких вони формувались. Але застосовувати такий підхід у нашому дослідженні некоректно. Адже природно чекати, що пропоновану перевірочну роботу, складену на базі матеріалу НО, учні ЕК (в яких відповідні компетенції з НО цілеспрямовано формувались) виконають краще, ніж учні КК (в яких вони не формувались). Тому на цьому етапі експериментальної перевірки ми відмовилися від НО як засобу діагностики. По завершенню третього та четвертого року експериментального навчання проводились підсумкові контрольні роботи. Вони складалася з п'яти завдань. Перші чотири з них містили програмовий матеріал, а п'яте – містило задачу прикладного змісту. Оцінювалось виконання усіх п'яти завдань. Ця оцінка приймалась до уваги учнями та вчителями. Для експериментальної перевірки робота учнів оцінювалась іншим чином. Перевірялось окремо виконання перших чотирьох завдань і окремо виконання п'ятого завдання. Узагальнені результати виконання учнями перших чотирьох завдань підсумкових контрольних робіт (табл. 2.9) дозволяють з'ясувати чи впливає (і якщо впливає, то як) розроблена методика на успішність (учні набрали 4 і більше балів) та якість (учні набрали 7 і більше балів) навчання.

Таблиця 2.9

Результати підсумкової контрольної роботи

Класи	Усього учнів	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості знань
		10-12 балів	7-9 балів	4-6 балів	0-3 бали		
КК	363	50	84	172	57	-	-
	100 %	13,8 %	23,1 %	47,4 %	15,7 %	84,3 %	36,9 %
ЕК	370	83	112	160	15	-	-
	100 %	22,4 %	30,3 %	43,2 %	4,1 %	95,9 %	52,7 %
Всього	733	133	196	332	72	-	-
kЕК-kКК	-	-	-	-	-	11,6 %	15,8 %

Значення статистики T обчислювалось за формулою , де N-загальна кількість учнів ЕК та КК; n1(n2)- кількість учнів ЕК (КК); Q11(Q21) - кількість учнів ЕК (КК), які написали контрольну роботу на 4-12 балів; Q12(Q22) - кількість учнів ЕК (КК)), які написали контрольну роботу на 0-3 бали. У нашому дослідженні N=733, n1=370, n2=363, Q11=355, Q21=306, Q12=15, Q22=57, тоді T=28,1. За таблицею $\chi 2$-критерію для рівня значущості α=0,95 з одним ступенем вільності критичне значення статистики Ткр=3,84. За результатами підсумкових контрольних робіт T>Ткр (28,1>3,84), що є основою для відхилення нульової гіпотези на користь альтернативної.

Статистична вірогідність впливу розробленої методики на успішність навчання обґрунтовувалась за допомогою медіанного критерію. Медіана ряду розподілу балів для учнів ЕК та КК за сумою одержаних балів у цьому випадку дорівнює 3. Статистику Т-критерія

обчислюємо за такою формулою: , де N – загальна кількість учнів ЕК та КК; A(B) – кількість учнів ЕК (КК), які написали підсумкову контрольну роботу на 4-12 балів; C(D) - кількість учнів ЕК (КК), які написали підсумкову контрольну роботу на 0-3 балів. За нашими даними N=733; A=355; B=306; C=15; D=57, тоді Тсп =17,9. Тсп>Ткр (Ткр=3, 84) це означає, що медіани розподілу учнів за сумою одержаних балів у ЕК та КК відрізняються зі збільшенням у сторону експериментальних.

Аналогічно визначається наявність впливу розробленої методики на якість навчання. N= 733, n1=370, n2=363, Q11=195, Q21=306, Q12=175, Q22=229, тоді T=18,5. T>Ткр (28,1>3,84), з цього випливає, що розроблена методика впливає на якість навчання.

Статистичну вірогідність впливу розробленої методики на якість навчання обґрунтуємо за допомогою медіанного критерію. Медіана ряду розподілу балів для учнів ЕК та КК за сумою одержаних балів у цьому випадку дорівнює 6. За нашими даними N=733; A=195; B=134; C=175; D=229, тоді Тсп =17,8. Тсп>Ткр (Ткр=3,84). Це означає, що медіани розподілу учнів за сумою одержаних балів у ЕК та КК відрізняються зі збільшенням у сторону експериментальних. Отримані таким чином результати дозволяють зробити висновки про позитивний вплив розробленої методики на успішність та якість навчання.

Під час формуючого експерименту досліджувався також і розподіл учнів за рівнем навчальних досягнень для кожної групи окремо. Його представлено у таблиці 2.10. З нього видно, що показники успішності та якості ЕК кожної групи є вищими за відповідні показники КК. Це відповідає вищенаведеним статистичним дослідженням та підтверджує висновок про позитивний вплив розробленої методики на якість та успішність навчання. Однак числове значення різниці відповідних коефіцієнтів (kЕК-kКК) для кожної групи є різним.

Так зміна інтенсивності темпу просування учнів у навчальному матеріалі з НО (саме в цьому полягає відмінність між групами ЕК) майже не впливає на динаміку показників успішності. Усі вони (12,2 для першої групи; 11,2 для другої групи; 11,3 для третьої групи) (табл. 2.10) є близькими до середнього узагальненого значення - 11,6 (табл. 2.9).

Таблиця 2.10

Результати підсумкової контрольної роботи учнів по кожній з груп

Перша група							
Класи	Усього учнів	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості знань
		10-12 балів	7-9 балів	4-6 балів	0-3 бали		
КК	116	16	27	55	18	-	-
	100 %	13,8 %	23,3 %	47,4 %	15,5 %	84,5 %	37,1 %
ЕК	123	31	41	47	4	-	-
	100 %	25,2 %	33,3 %	38,2 %	3,3 %	96,7 %	58,5 %
Всього	289	47	68	102	22	-	-
kЕК-kКК	-	-	-	-	-	12,2 %	21,4 %
Друга група							
Класи	Усього учнів	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості знань
		10-12 балів	7-9 балів	4-6 балів	0-3 бали		
КК	128	18	28	61	21	-	-
	100 %	14,1 %	21,9 %	47,7 %	16,3 %	83,7 %	36,0 %
ЕК	118	28	36	48	6	-	-
	100 %	23,7 %	30,5 %	40,7 %	5,1 %	94,9 %	54,2 %
Всього	246	46	64	109	27	-	-
kЕК-kКК	-	-	-	-	-	11,2 %	18,2 %
Третя група							
Класи	Усього учнів	Рівні навчальних досягнень				% успішності	% якості знань
		10-12 балів	7-9 балів	4-6 балів	0-3 бали		
КК	119	16	29	56	18	-	-
	100 %	13,4 %	24,4 %	47,0 %	15,1 %	84,8 %	37,8 %
ЕК	129	24	35	65	5	-	-
	100 %	18,6 %	27,1 %	50,4 %	3,9 %	96,1 %	45,7 %
Всього	248	34	53	124	37	-	-
kЕК-kКК	-	-	-	-	-	11,3 %	7,9 %

Це дозволяє зробити висновок про відповідність (посильність) обраного змісту НО навчально-пізнавальним можливостям учнів. Прискорення темпу просування учнів у навчальному матеріалі з НО негативно впливає на динаміку показників якості. Про це свідчить порівняння відповідних показників. Зокрема найвищій ріст показника якості спостерігається у ЕК першої групи – 21,4 % проти найнижчого – 8,8 % для ЕК третьої групи.

Такі результати підтверджують правильність вибору основних засад нашого дослідження та їх ефективність під час практичного впровадження. Нагадаємо, вони полягають в тому, що саме раннє та поступове залучення учнів до навчальної діяльності, передбаченої пропонованою методикою, сприяє підвищенню якості їх математичної підготовки. Опанування тим же змістом навчання, але пізніше і за коротший термін, не забезпечує формування відповідних знань і умінь на достатньо якісному рівні.

Аналогічну залежність якості сформованих знань від часу їх формування одержуємо і аналізуючи виконання учнями кожного окремого завдання контрольної роботи. Відповідні результати наведені у таблицях 2.11 (узагальнені результати) і 2.12 (по кожній групі окремо), а також відповідних їм діаграмах: рис. 2.28 (узагальнені результати), рис. 2.29-2.31 (по кожній групі окремо).

Таблиця 2.11

Результати виконання окремих завдань підсумкової контрольної роботи

Класи	Усього учнів	Перше завдання	Друге завдання	Третє завдання	Четверте завдання	П'яте завдання
КК	363	333	220	94	30	40
	100 %	91,7 %	60,6 %	25,9 %	8,3 %	11,0 %
ЕК	370	362	265	138	59	127
	100 %	97,8 %	71,6 %	37,3 %	15,9 %	34,3 %
Разом	733	692	485	232	89	167
	100 %	94,4 %	66,2 %	31,7 %	12,1 %	22,8 %
kЕК-kКК	-	6,1 %	11,0 %	11,4 %	7,6 %	23,3 %

Показник виконання завдань учнями ЕК є вищим ніж КК у середньому на 9,1 % для програмового матеріалу і на 23,4 % для завдань прикладного змісту. Максимальне значення останнього (29,6 %) відповідає першій групі, інші (19,7 % та 20,9 %) – другій та третій групам відповідно.

Отримані данні підтверджують наше припущення про те, що навчання за розробленою методикою сприяє формуванню вмінь учнів розв'язувати прикладні задачі. Якість же сформованих таким чином вмінь, як і у попередньому випадку, забезпечується дотриманням умов раннього та поступового залучення учнів до відповідної навчально-пізнавальної діяльності. Нагадаємо, що цілеспрямованого формування вмінь розв'язувати прикладні задачі (окрім тих умінь, які передбачені чиною програмою) не відбувалося ні в ЕК, ні в КК. Якісний аналіз розв'язувань 5-го завдання контрольної роботи показав, що досягти зазначених результатів учні ЕК змогли не лише за рахунок правильних і повних розв'язань.

Таблиця 2.12

Результати виконання окремих завдань підсумкової контрольної роботи

Перша група						
Класи	Усього учнів	Перше завдання	Друге завдання	Третє завдання	Четверте завдання	П'яте завдання
КК	116	106	70	30	10	12
	100 %	91,4 %	60,3 %	25,9 %	8,6 %	10,2 %
ЕК	123	121	90	51	28	49
	100 %	98,4 %	73,2 %	41,5 %	22,8 %	39,8 %
kЕК-kКК	-	7,0 %	12,9 %	15,6 %	14,2 %	29,6 %
Друга група						
КК	128	117	76	34	11	15
	100 %	91,4 %	59,4 %	26,6 %	8,6 %	11,7 %

Рис. 2.31. Діаграма результатів виконання окремих завдань контрольної роботи учнями третьої групи експериментальних (ЕК) та контрольних (КК) класів

ЕК	118	115	83	42	16	37
	100 %	97,5 %	70,3 %	35,6 %	13,6 %	31,4 %
kЕК-kКК	-	6,1 %	10,9 %	9,0 %	5,0 %	19,7 %
Третя група						
КК	119	110	74	30	9	13
	100 %	92,4 %	62,2 %	25,2 %	7,6 %	10,9 %
ЕК	129	126	92	45	15	41
	100 %	97,7 %	71,3 %	34,9 %	11,6 %	31,8 %
kЕК-kКК	-	5,3 %	9,1 %	9,7 %	4,0 %	20,9 %

Значною мірою їх забезпечили неповні розв’язання; неправильні розв’язання, але з правильною або частково правильною ідеєю; правильно висунуті гіпотези та інше. Сприйняття можливої помилки як нормального результату навчальної діяльності; творчий підхід до розв’язання задач; здатність до висування гіпотез щодо розв’язування задачі та їх перевірка (так звана «навчальна сміливість») формувались в межах розробленої методики як складова загальної культури ведення НО. Навчання за традиційною методикою, за традиційним навчальним матеріалом формує вказані риси у меншій мірі, тому учні КК у більшості випадків відмовлялись від розв’язування задач, а в ЕК таких відмов майже не було.

Формування вищевказаних особистісних якостей учнів і загалом впровадження розробленої методики позитивно оцінювалось вчителями. Вони відмічали її сприятливий вплив на загальний та особистісний розвиток учнів, на формування в них позитивних мотивів навчання, на формування навичок самостійної діяльності, на підвищення їх інтересу до предмету, а також на підвищення загальної пізнавальної активності учнів.

Висновки вчителів базувались як на власних спостереженнях, так і на висновках шкільних психологів, які в свою чергу керувались різними методиками, зокрема і методикою К. Ізарда.

Перейдемо до розгляду питання про виконання другого завдання. Відповідні дослідження проводились тільки у ЕК. Нагадаємо, їх метою було з’ясувати, чи відповідає навчання за пропонованою методикою навчально-пізнавальним можливостям та резервам розвитку учнів. Частково це питання досліджувалось вище. Однак отримані висновки стосувались лише матеріалу, винесеного у підсумкову контрольну роботу. Наше завдання – дослідити цей процес грунтовніше в межах цілісного, а не епізодичного навчального процесу. Для цього після кожного року експериментального навчання за результатами поточних перевірочних самостійних та контрольних робіт визначався середній рівень навчальних досягнень учнів. Окремо брались до уваги ті з них, які стосувались повністю або частково НО (позначимо їх НО) і окремо ті, які їх не стосувались (позначимо їх ПМ - програмовий матеріал). Отримані таки чином данні представлені у таблиці 2.13. та узагальненій діаграмі (рис.2.32).

Дані узагальненої діаграми дозволяють зробити такі висновки:

• зниження показників НО по низькому рівню засвоєння знань, а також фактичне збіг показників НО та ПМ по середньому та достатньому рівнях вказує на те, що обраний зміст НО, методи, організаційні форми та засоби навчання, а також послідовність та місце вивчення окремих елементів знань НО є посильним для відповідних вікових категорій учнів та відповідає особливостям їх сприйняття;

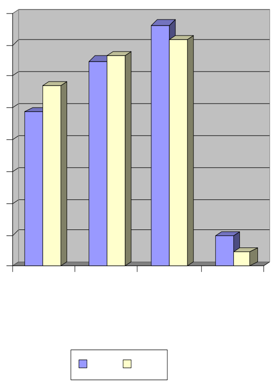
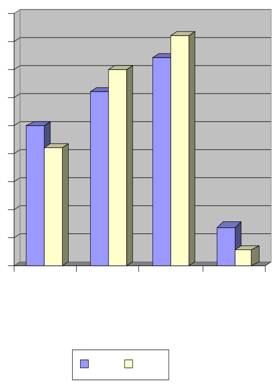
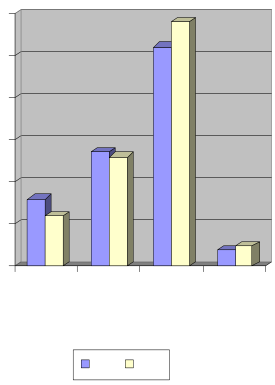
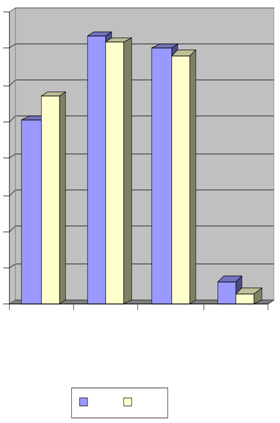
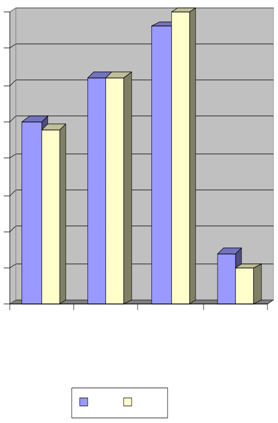
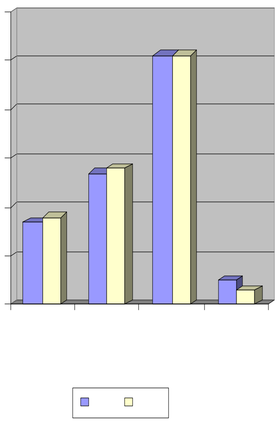
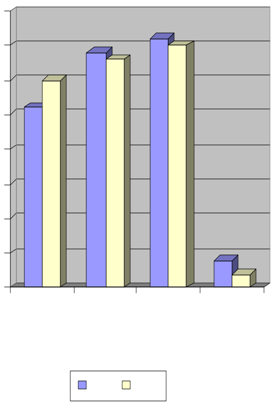
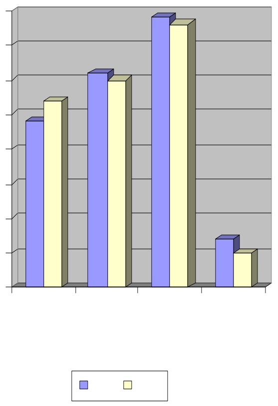
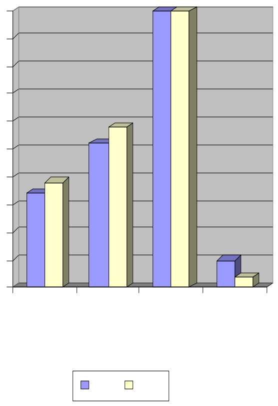
• незначне перевищення показників по високому рівню засвоєння знань свідчить, що пропонований навчальний матеріал з НО не є занадто легким, але все ж передбачає резерви для опанування учнями і більш складними відомостями з НО.

Відомості, що лягли в основу діаграм таблиці 2.13, ще раз підтверджують сформульовану вище думку про необхідність раннього та поступового вивчення НО. Як бачимо , не виважена інтенсифікація та пізнє вивчення НО не є ефективними. Вони приводять до перевантаження навчального матеріалу, домінування раніше сформованих стереотипів тощо.

В результаті на окремих етапах показники успішності та якості навчання знижуються (друга група перший та другий роки; третя група перший рік) і лише пізніше, стабілізуючись, зростають (друга група третій рік; третя група другий та третій роки) .

Таблиця 2.13

Розподіл рівнів навчальних досягнень учнів

	Перша група	Друга група	Третя група
Перший рік			
Другий рік			
Третій рік			

Таким чином результати статистичних спостережень, позитивні відгуки вчителів свідчать про дієвість та ефективність розробленої методики вивчення НО в основній школі.

Вона відповідає навчально-пізнавальним можливостям учнів, віковим особливостям їх сприйняття. Її впровадження у практику школи позитивно впливає на успішність та якість навчання, формування вмінь розв'язувати прикладні задачі, формування позитивних мотивів навчання та інтересу учнів до предмету.

Висновки до другого розділу

Структурна модель вивчення НО в основній школі має бути підпорядкована таким вимогам до організації навчання як неперервність і наступність, цілісність і інтегрованість, а також структурованість і спіральність. Керуючись ними вивчення НО доцільно проводити в три етапи. Перший - у 5-6 класах, другий - у 7-8 класах і третій - у 9 класі. Мета та зміст вивчення НО під час кожного наступного етапу мають бути логічним продовженням та доповненням попереднього. Відповідний навчальний матеріал, групуючись навколо домінуючих провідних понять НО, поступово повинен уточнюватись, систематизуватись, обґрунтовуватись та узагальнюватись. На першому етапі у якості домінуючого провідного поняття НО слід обрати наближені значення, на другому – числові характеристики наближених значень, на третьому – методи НО.

• На першому етапі мають бути сформовані: початкові уявлення учнів про наближені значення та деякі математичні та побутові форми їх запису; інтуїтивні уявлення про ступінь близькості наближених значень до точних; вміння на наочно-оперативному рівні виконувати чотири арифметичні операції над наближеними значеннями, а також над наближеними і точними значеннями.

• На другому етапі повинно ставитись за мету: систематизація уявлень учнів про джерела отримання та форми запису наближених значень; формування поняття про якісні та кількісні числові характеристики наближених значень, а також вміння їх знаходження; доповнення умінь учнів виконувати дії над наближеними значеннями (піднесення до степеня з натуральним та цілим показниками, добування арифметичного квадратного кореня).

• На третьому етапі слід доповнити й узагальнити поняття про наближені значення; розвинути вміння учнів аналізувати точність наближених значень при недостатніх даних; обґрунтувати правила виконання дій над наближеними значеннями; сформувати уявлення учнів про основні методи НО.

Включення елементів знань з НО у програмовий матеріал має базуватись на дослідженні та реалізації відповідних змістових передумов. Відомості з НО повинні виглядати природно, вони мають були або логічно, або математично, або на рівні прикладних та практичних застосувань пов’язані з традиційним навчальним матеріалом.

В курсі математики 5-6 класів та алгебри 7-9 класів лише в окремі періоди вивчення НО має відбувалось у активному режимі, протягом всього іншого часу, а також у курсі геометрії – у фоновому. Використання обох режимів навчання має бути педагогічно доцільним і виваженим, зокрема не слід переобтяжувати понятійний апарат та фонд дієвих знань учнів. Фоновий режим вивчення НО повинен забезпечуватись використанням методів НО або понятійного апарату НО під час ведення учнями навчально-дослідницької роботи, проективної діяльності, розв’язування задач тощо. Вивчення НО у активному режимі переважно має відбуватись за традиційними методиками прямого навчання. При цьому на першому та третьому етапах затрати додаткового навчального часу мають бути незначними (НО окремими елементами знань епізодично представлені у чинній програмі). На другому – вони повинні збільшитись (НО не представлені у програмі). Метою організації вивчення НО має стати переорієнтація цілепокладання наявних у програмі елементів знань з НО, їх доповнення, поглиблення, систематизація та забезпечення систематичного використання.

В основу організації вивчення НО мають бути покладені результати досліджень сучасної методики навчання математики щодо вибору на кожному з етапів педагогічно доцільних методів, форм та засобів навчання. Основна увага має приділятись методу доцільних задач, проблемному викладу матеріалу, дослідницьким методам. Під час їх реалізації на практиці слід цілеспрямовано розвивати уміння учнів аналізувати матеріал, встановлювати та використовувати аналогії. Протягом усіх етапів повинні широко використовуватись різні засоби та організаційні форми навчання. Зокрема віднайти місце у навчальному процесі мають засоби наочності, знаково-символьні засоби, засоби предметного та образного моделювання. Слід залучати учнів до виконання практичних, лабораторних, графічно-лабораторних робіт та ведення проективної діяльності.

Використання під час вивчення НО в основній школі ІКТ підвищує ефективність навчання. На перших етапах ІКТ мають забезпечувати оперативний ілюстративний супровід основних правил та тверджень з НО. Мова йде про побудову та демонстрації обчислювальних таблиць, діаграм, малюнків, анімаційне супроводження тощо. Під час наступних етапів, діючи із аналогічною метою, ІКТ також дозволяють інтенсифікувати застосування НО під час розв'язування задач з алгебри. Зокрема доцільно використовувати програмний комплекс GRAN 2d, GRAN 1 new, EXCEL. Вони мають стандартний зручний інтерфейс, прості у використанні, не вимагають потужних технічних ресурсів комп'ютера, методичні рекомендації щодо їх використання у ШКМ є викладені у численних публікаціях та навчально-методичній літературі.

Результати експериментальної перевірки основних положень даного дослідження свідчать про позитивний вплив пропонованої методики на якість та успішність навчання учнів з математики, на загальний розвиток пізнавальної сфери учнів, на мотивацію учіння, на розвиток пізнавальних інтересів. Її використання сприяє формуванню в учнів навичок самостійної діяльності, навичок висувати гіпотези та перевіряти їх правильність, умінь розв'язувати прикладні та практичні задачі. З огляду на це вважаємо доцільним упровадження розробленої методики вивчення НО у практику основної школи.

Основні результати першого розділу опубліковано у роботах [119, 124, 126-128, 132, 134, 292-295].

ВИСНОВКИ

Результати проведеного теоретичного дослідження і педагогічного експерименту дозволяють сформулювати висновки і рекомендації щодо їх наукового і практичного використання.

Особистісна спрямованість освітнього процесу вимагає узгодження змісту навчання математики із завданнями формування пізнавальної та психологічної підготовленості учнів до умов життєдіяльності та подальшого здобуття освіти. Згідно цих вимог НО у ШКМ основної школи необхідно розглядати і як складову фундаментального та прикладного математичного знання, і як засіб особистісного розвитку учнів та розвитку новоутворень їх пізнавальної сфери.

Наявний стан вивчення НО у ШКМ основної школи має ряд недоліків і не відповідає сучасним освітнім пріоритетам, зокрема прикладній спрямованості навчання математики. Зміни у цілях, змісті, плануванні та організації вивчення НО – актуальне методичне завдання сьогодення. Під час його виконання, а саме створення оновленої методичної системи вивчення НО, необхідно враховувати психолого-педагогічні передумови навчання підлітків, а також педагогічний та методичний досвід минулих років. За результатами їх дослідження та трансформації у сучасні умови на основі пріоритету розвивального навчання та діяльнісного підходу, робимо висновки про те, що навчання НО має бути активним, проблемним, насиченим цікавими та доступними прикладами з використанням наочних зрозумілих моделей, зверненням до інтуїції учнів та міжпредметних зв'язків.

Під час навчання математики в основній школі доцільно розв'язувати лише пряму задачу НО (за відомою точністю даних, над якими виконуються математичні дії, визначати точність результату). Відповідний вибір змісту НО повинен здійснюватись на основі можливості його органічного поєднання з програмовим матеріалом, а також на основі його відповідності соціальному та навчальному досвіду учнів. Тому основним методом НО доцільно обрати метод меж, а основною формою запису наближених значень - їх запис у вигляді подвійних нерівностей. Практична реалізація запропонованого підходу має відбуватись шляхом перегляду логіко-структурних зв'язків між методом меж та теорією нерівностей. За нашою методикою елементи методу меж (виконання на наочно-оперативному рівні математичних дій над наближеними значеннями, що представлені у вигляді подвійних нерівностей) слід розглядати не як застосування, а як пропедевтику теорії нерівностей.

Головною умовою ефективної організації навчання НО в основній школі має бути дотримання принципу концентричного розгортання НО у складі існуючих змістових ліній. На практиці вона має досягатись шляхом раннього, поступового та систематичного ознайомлення учнів із відповідними відомостями.

Раннє навчання НО повинно забезпечуватись:

• адаптацією навчального матеріалу до вікових можливостей сприйняття учнів;

• цілеспрямовано створеною системою доцільних задач.

Поступове і систематичне навчання НО має досягатись на практиці через:

• реалізацію фузіоністнських підходів, суть яких полягає у одночасному формуванні умінь виконувати математичні дії і над точними, і над наближеними значеннями;

• навчання в активному і фоновому режимах;

• цілеспрямовано створену систему задач, які орієнтуючись на формування програмових знань, умінь та навичок, одночасно передбачають опрацювання наближених значень або використання методів НО.

Вивчення НО в основній школі доцільно проводити в три етапи. Мета та зміст кожного з них мають взаємообумовлювати та взаємодоповнювати один одного. Розгортання змісту НО на кожному етапі має вибудовуватись у контексті тематичного планування навчального матеріалу, передбаченого чиною програмою з математики. Реалізація зазначеного на практиці повинна відбуватись за рахунок активізації існуючих логіко-математичних та створення нових методичних внутрішньопредметних зв'язків, які об'єктивно існують між НО та традиційним навчальним матеріалом.

Протягом навчання НО в курсі математики основної школи в учнів мають бути сформовані уявлення про усі провідні поняття НО, а також уміння їх застосовувати, в тому числі і під час розв'язування задач прикладного змісту. Зокрема учні мають володіти уявленнями про основні джерела наближених значень, а також види і окремі випадки їх числових характеристик; вміти розпізнавати, наводити приклади, знаходити, записувати та аналізувати наближені значення та їх числові характеристики; знати правила округлення меж наближених значень та правила виконання дій над наближеними значеннями.

Завершеність навчального матеріалу у кожній групі провідних понять та внутрішньотематичні зв'язки між ними, повинні забезпечуватись застосуванням логічних прийомів класифікації та систематизації матеріалу, в тому числі шляхом складання дидактичних та підсумовуючих схем.

В основу організації вивчення НО мають бути покладені результати досліджень сучасної методики навчання математики щодо вибору педагогічно доцільних методів, форм та засобів навчання. Основна увага має приділятись практичним методам здобування знань, методам застосування знань на практиці, а також методам проблемного навчання. Доцільно систематично і цілеспрямовано залучати учнів до навчально-дослідницької діяльності, зокрема до проективної діяльності, виконання лабораторних та практичних робіт. Під час їх ведення, НО повинні бути складовою результату діяльності або засобом досягнення мети. Ефективність вказаних методів та організаційних форм повинна забезпечуватись системою доцільно обраних засобів унаочнення, предметного та образного моделювання. На перших етапах вивчення НО у їх якості слід обирати малюнки, обчислювальні таблиці, схеми-орієнтири, алгоритмічні приписи. Пізніше (на другому та третьому етапах) - діаграми, логіко-дидактичні схеми, узагальнюючі схеми тощо.

Позитивний вплив під час вивчення НО в основній школі виявляє використання ІКТ. Вони не лише сприяють виникненню позитивних мотивів та інтересу до навчання, але й завдяки їм стає можливим поєднання потужних обчислювальних можливостей з перевагами графічного подання результатів опрацювання навчального матеріалу. Зокрема ефективним є створення та ілюстрація динамічних моделей, залучення під час формування запланованих знань та умінь елементів обчислювального експериментування тощо. На початкових етапах вивчення НО ІКТ доцільно застосовувати як засіб унаочнення та нестрогого обґрунтування певних тверджень. Пізніше - як засіб оперативного супроводження (обчислювального, графічного, ілюстративного тощо) або інтенсифікації навчальної діяльності учнів.

Результати експериментальної перевірки та досвід впровадження пропонованої методики вивчення НО у практику основної школи підтверджують правильність висунутих гіпотез. Зокрема з'ясовано, що навчання НО за розробленою методикою сприяє: формуванню позитивних мотивів навчання та підвищенню інтересу учнів до предмета; збагаченню навчального та соціального досвіду учнів, а також формуванню в них механізму самореалізації; формуванню умінь та навичок розв'язувати прикладні задачі; підвищенню успішності та якості математичної підготовки учнів.

Матеріали дисертаційного дослідження можуть бути використані учителями математики , авторами під час створення нових або вдосконалення існуючих підручників, методичних посібників, дидактичних матеріалів, збірників вправ тощо.

Мета дослідження, конкретизована окремими завданнями, досягнута. А саме, створена науково обґрунтована методика навчання НО в курсі математики основної школи, яка є ефективною за умов відповідних коректив у чинній програмі, підготовці вчителів, а також доповнення необхідним навчальним матеріалом діючих підручників.

Перспективними напрямками подальших досліджень можуть бути: розробка методичної системи вивчення НО у старшій школі; подальше дослідження можливостей застосування засобів ІКТ під час вивчення НО, розробка методичної системи підготовки вчителів та студентів педагогічних спеціальностей до навчання НО; розробка відповідних навчально-методичних посібників для учнів, студентів та вчителів.

Додаток А
Плани переходу на нові програми
Додаток А.1

Таблиця А.1.1

План переходу на нові програми з математики (середина 50-х – початок 60-х рр.)

Реформування у середині 50-х років		Реформування напочатку 60-х років	
Клас	Термін переходу на нові програми	Клас	Термін переходу на нові програми
5	1954-55 навч. рік	5	1959-60 навч. рік
6	1955-56 навч. рік	6	1960-61 навч. рік
7	1956-57 навч. рік	7	1961-62 навч. рік
8	1957-58 навч. рік	8	1962-63 навч. рік

Додаток А.2

Таблиця А.1.1

Плани переходу на нові програми з фізики та математики (кінець 60-х – початок 70-х рр.)

Математика				Фізика	
Клас	Терміни переходу на нові програми	Клас	Терміни переходу на нові програми	Клас	Терміни переходу на нові програми
4	1970-71 навч. рік				
5	1971-72 навч. рік				
6	1972-73 навч. рік			6	1968-69 навч. рік
7	1973-74 навч. рік	9	1973-74 навч. рік	7	1969-70 навч. рік
8	1974-75 навч. рік	10	1974-75 навч. рік	8	1970-71 навч. рік

Додаток Б.
Фрагменти програм з математики різних років

Додаток Б.1

Таблиця Б.1.1

Відображення змісту НО в комплексних програмах 1927 року

Рік навчання	Зміст наближених обчислень у програмі	Коментарі з пояснювальної записки
П'ятий	Оцінка похибок вимірювання. Округлення результатів дій з наближеними значеннями числа (було наведено три правила підрахунку правильних цифр: 1) для додавання і віднімання; 2) для множення і ділення; 3)правило попереднього округлення більш точних компонентів)... Перетворення звичайних дробів у десяткові з необхідною точністю... Поняття про відносну похибку та її вираження у відсотках.	Практика вимірювань висуває питання про їх наближеність, про оцінку їх похибки та про користування під час обчислень наближеними значеннями величин. Абсолютно справедливими є вказівки педагогічних працівників про те , що робота з наближеними обчисленнями на п'ятому році навчання викликає ряд ускладнень в учнів. З іншого боку залишати учням лише тільки точні обчислення неприпустимо. Очевидно до цього питання треба підійти практично і обрати найпростіші та найдоступніші прийоми, не вводячи ніякої теорії з наближених обчислень. Із усіх способів найзручнішим є спосіб підрахунку цифр (нижче наводяться відповідні правила). Рекомендується ввести також спосіб границь.
Шостий	Рекомендується декілька наближених формул та застосування наближених обчислень до обчислення площ: $(1+\lambda)(1\pm p)\approx1+\lambda\pm p$; $(1\pm\lambda)2\approx1\pm2\lambda$; $(1\pm\lambda)3\approx1\pm3\lambda$	
Сьомий	Найпростіші прийоми дій з наближеними значеннями чисел	

Додаток Б.2

Таблиця Б.2.1

Фрагмент проекту програм з математики восьмирічної та середньої школи 1959 року

Номер теми, назва теми та представлення в ній питань з наближених обчислень	Пояснення до окремих тем, які наведено укладачами програми
5 клас. Арифметика	
1. Цілі числа (36 годин): Округлення цілих чисел з точністю до 10, 100, 1000 і т.д. 3. Десяткові дроби (72 годин): Наближене значення десяткового дробу. Округлення десяткових дробів до 1; 0,1; 0,01 і т.д. Наближена частка з точністю до 1; 0,1; 0,01 і т.д.	Задача наближення навчання арифметики до потреб практики потребує включення в курс арифметики наближених обчислень. З наближеними обчисленнями учнів належить ознайомлювати поступово, систематично використовуючи для цього усі можливості, які зустрічаються протягом всього терміну вивчення цілих чисел, звичайних та десяткових дробів, тобто упродовж всього 5 класу. Такі можливості будуть зустрічатись в достатній кількості, якщо в курсі арифметики гідне місце займуть задачі не зі штучно дібраними, а з реальними числовими даними.
6 клас. Арифметика	
1. Наближені обчислення (12 годин): Значущі цифри числа. Правило	Вивченням окремої теми "Наближені обчислення" не повинно обмежуватись ознайомлення з ними учнів.

підрахунку правильних цифр. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень чисел. Приклади на дії з наближеними значеннями чисел. 2. Відсотки (18 годин): Абсолютна та відносна похибки.	В темі 6 класу накопичений раніше матеріал про наближені обчислення повинен бути систематизованим і закріпленим. Подальше удосконалення навичок з наближених обчислень має проводитись у процесі всього подальшого вивчення математики і суміжних дисциплін.

Додаток Б.3

Таблиця Б.3.1

Фрагмент програми з математики восьмирічної (1960р.) та середньої (1961р.) шкіл

Номер теми, назва теми та представлення в ній питань з НО	Коментарі укладачів програм
5 клас. Арифметика	
3. Десяткові дроби (66 годин): Округлення цілих чисел та десяткових дробів. Знаходження периметра та площі квадрата, прямокутника, трикутника, поверхні та об'єму куба та прямокутного паралелепіпеда за готовими даними та за даними, що отримані шляхом безпосередніх вимірювань. 4. Сумісні дії над звичайними та десятковими дробами. Відношення величин (24 години): Перетворення звичайного дробу в десятковий (точно і наближено)	Під час вивчення десяткових дробів треба приділяти достатньо уваги питанням округлення чисел з заданою точністю; знаходженню наближеної частки та іншим питанням, які показують наближений характер більшості значень величин, що зустрічаються на практиці. Цьому сприяє розв'язування задач на знаходження периметрів та площ фігур за даними, які отримані шляхом безпосереднього вимірювання. Учні повинні навчитись "прикидкою" знаходити наближений результат арифметичних дій. Важливо, щоб учні добре засвоїли (на прикладах), що будь-який звичайний дріб можна перетворити в десятковий точно або наближено з необхідною кількістю знаків.
6 клас. Арифметика	
1. Наближені обчислення (16 годин): Точні і наближені значення величин. Абсолютна похибка. Значущі цифри числа. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень чисел. Правило підрахунку правильних цифр. 2. Відсотки (18 годин): Відносна похибка.	В 6 класі систематизуються, уточнюються і певним чином розширюються відомості про наближені обчислення (наприклад вводиться правило підрахунку правильних цифр). При цьому не слід ускладнювати зміст цього питання. Так, розглядаючи питання про округлення чисел, вводиться поняття округлення з недостачею та надлишком і знаходиться відповідна похибка. Далі вказується, що під час розв'язуванні задач, зазвичай необхідно виконувати округлення з точністю, наприклад до 1; 0,1; 0,01 і т.д. В цих випадках округлення необхідно виконувати так, щоб похибка була мінімальною.
9 клас. Алгебра	
1. Рівняння першого степеня і нерівності (20 годин). 2. Дійсні числа. Квадратні рівняння (26 годин).	Перед іншими вправами, що пов'язані з нерівностями, розглядаються також приклади оцінки точності результатів в наближених обчисленнях. Починається ознайомлення учнів з поняттям дійсного числа. До цього поняття приводить вимірювання відрізків з будь-якою бажаною точністю.

Додаток Б.4

Таблиця Б.4.1

Фрагмент проекту програми середньої школи з математики 1967 року

Номер та назва теми	Представлення в межах теми питань з наближених обчислень
5 клас. Арифметика і початки алгебри	
2. Дії зі звичайними та десятковими дробами (85годин)	...Наближене значення числа. Похибка наближеного значення. Округлення чисел. Десяткове наближення звичайного дробу
7 клас. Алгебра	
2. Нерівності. Наближені обчислення. Добування коренів (72 години)	Абсолютна та відносна похибки. Оцінка похибки суми, різниці, добутку та частки. Правила підрахунку правильних цифр в наближених обчисленнях.

Додаток Б.7

Таблиця Б.7.1

Фрагмент проекту програми з математики для IV-X класів середньої загальноосвітньої школи 1979 року (Проект 2)

Номер та назва теми	Представлення в межах теми питань з наближених обчислень
4 клас. Математика	
1. Натуральні та дробові числа (110 годин)	Наближене значення числа.
2. Десяткові дроби (100 годин)	Округлення чисел
8 клас. Алгебра	
1. Наближені обчислення (15 години)	Точні і наближені значення величин. Похибка і точність наближення. Відносна похибка і відносна точність. Поняття вірної цифри десяткового числа. Запис наближених значень чисел. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень чисел з оцінкою похибки.
9 клас. Алгебра і початки аналізу	
1. Дійсні числа (10 годин)	Десяткові наближення дійсних чисел

Додаток Б.5

Таблиця Б.5.1

Фрагмент програми з математики для середньої школи 1968 року з урахуванням змін 1972 року для 7 класу

Номер теми, назва теми та представлення в ній питань з наближених обчислень	Пояснення до окремих тем, що наведено укладачами програми
4 клас. Арифметика і початки алгебри	
2. Десяткові дроби (75годин) :Вимірювання величин. Округлення чисел	-
5 клас. Арифметика і початки алгебри	
2. Звичайні дроби. Дії зі звичайними та десятковими дробами (95годин): Десяткове наближення звичайного	В цій темі дається перше уявлення про точність наближеного значення

дробу	
7 клас. Алгебра	
2. Нерівності (20 годин): Застосування до оцінки точності наближених обчислень	Оцінка результатів наближених обчислень за методом меж може являти основний матеріал вправ на дії з нерівностями
Зауваження: у вересні 1972 року були затверджені нові програми та навчальні посібники з алгебри та геометрії для 7 класу. На відміну від старої програми наближені обчислення тепер виступають не як ізольований матеріал. В новому курсі алгебри 7 класу вони вводяться як одне із можливих застосувань теорії нерівностей.	
2. Нерівності та їх застосування до наближених обчислень (30 годин): Поняття про наближені обчислення. Застосування методу границь для оцінки суми, різниці, добутку та частки. Похибка та точність наближення.	Формулюються та розкриваються основні поняття теорії наближених обчислень: точного і наближеного значення величини, меж значення величини, похибки наближення, точності наближення. Тут же учні знайомляться із застосуванням методу меж для оцінки значення суми, різниці, добутку та частки.
8 клас. Алгебра	
3. Організація обчислень і обчислювальна техніка (30 годин): Наближені обчислення. Абсолютна і відносна похибки. Правила підрахунку правильних цифр при наближених обчисленнях.	З оцінкою точності наближених обчислень учням доводилось мати справу під час вивчення тем 7 та 8 класу. У цей період підводяться підсумки. З'ясовується роль абсолютної похибки для оцінювання точності наближеного значення суми та різниці. А також відносної похибки – у випадку добутку та частки.

Додаток Б.6

Таблиця Б.6.1

Фрагмент проекту програми з математики для восьмирічної та середньої школи 1978 року (Проект 1)

Загальні зауваження укладачів програми, які безпосередньо стосуються наближених обчислень. Проведено перерозподіл окремих тем з метою досягнення більшої логічної строгості курсу та компактнішого викладення навчального матеріалу. Наприклад, тема "Наближені обчислення" перенесена із 8 класу в 7, де вона є тісно пов'язаною з темою "Нерівності" (застосування нерівностей до оцінки результатів дій з наближеними значеннями чисел). Посилена політехнічна спрямованість курсу математики. Це виразилося у підвищенні уваги до питань, які мають велике прикладне значення. Перенесення теми „Наближені обчислення" із 8 в 7 клас створює умови широкого застосування знань учнів з цієї теми під час вивчення не тільки математики, але й інших навчальних предметів, наприклад фізики, хімії, географії.	
Номер теми, назва теми та представлення в ній питань з наближених обчислень	Пояснення до окремих тем, які наведено укладачами програми
4 клас. Математика	
1. Натуральні та дробові числа (110 годин): Наближені значення величин	Міжпредметні зв'язки: отримані в цій темі знання про наближені значення величин знаходять застосування в курсі фізики під час вивчення фізичних величин. Практичні заняття: -
2. Десяткові дроби (100 годин): Округлення чисел	Міжпредметні зв'язки: у процесі розв'язування задач і виконання лабораторних робіт з фізики виникає чітке розуміння реального змісту округлення десяткових дробів. Практичні заняття: -

7 клас. Алгебра	
3. Наближені обчислення (18 годин): Почленне додавання та множеняі істинних числових нерівностей. Оцінка значення суми, різниці, добутку та частки. Абсолютна похибка та точність наближення. Відносна похибка та відносна точність. Поняття вірної цифри . Запис наближених значень чисел. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень чисел	Міжпредметні зв'язки: отримані в цій темі знання про абсолютні та відносні похибки, навички з практичних прийомів обчислення використовуються у фізиці під час виконання лабораторних робіт, під час розв'язування ряду фізичних задач. Практичні заняття: обчислення площі фігури прямокутної форми (площі підлоги кімнати, площі кришки столу і т.д.), об'єму тіла, яке має форму прямокутного паралелепіпеда (наприклад бруска) за даними, які отримані безпосереднім вимірюванням.
9 клас. Алгебра і початки аналізу	
1. Функція та її похідна (63 години): Представлення раціональних чисел нескінченим раціональними дробами, десяткові наближення до заданого числа з точністю до 10 –n.	Міжпредметні зв'язки: дії з дійсними числами є основним засобом проведення розрахунків на уроках фізики, хімії, астрономії та інших предметів. Практичні заняття: -

Додаток Б.8

Таблиця Б.8.1

Фрагмент проекту програми з математики для 4-10 класів середньої загальноосвітньої школи 1979 року (Проект 3)

Номер теми, назва теми та представлення в ній питань з наближених обчислень	Пояснення до окремих тем, які наведено укладачами програми
4 клас. Математика	Округлення дробів використовується для знаходження результатів вимірювань, а також для усної прикидки результатів дій.
1. Натуральні числа і нуль (60 годин): Округлення натуральних чисел	
5 клас. Математика	
1. Десяткові дроби (76 годин): Округлення десяткових дробів	
7 клас. Алгебра	Під час вивчення теми „Наближені обчислення" ставиться мета – навчити учнів знаходити наближення даного числа з недостачею та надлишком. Поняття абсолютної та відносної похибок вводиться у зв'язку з використанням вимірювальних приладів; поняття абсолютної похибки пов'язане з поняттям допуску, яке застосовується у техніці. Наприкінці вивчення теми учні повинні володіти практичними прийомами наближених обчислень.
2. Наближені обчислення (12 години): Наближене значення числа як результат вимірювань. Похибка вимірювань і обчислень . Найпростіші дії над наближеними значеннями чисел та їх зв'язок з вимірюваннями. Практичні прийоми наближених обчислень	

Додаток Б.9

Таблиця Б.9.1

Представлення наближених обчислень у програмах кінця 70-х – середини 80-х рр.

Рік та кількість годин	Зауваження та коментарі укладачів програм та з методичних листів різних років	Зміст навчального матеріалу
1979 рік (18 год) 1980 рік (18 год) 1981 рік (16 год)	Під час вивчення матеріалу цієї теми використовується відоме учням поняття наближеного значення числа, вміння знаходити наближення даного числа з недостачею та надлишком, а також записувати результати у вигляді подвійної нерівності. Тут вводяться поняття абсолютної та відносної похибок наближеного значення; пояснюється зміст термінів “наближення з точністю до …”, “наближення з відносною точністю до …” Учні ознайомлюються з оцінкою суми, різниці, добутку та частки двох чисел за “методом границь”. Основу цього методу становлять теореми про почленне додавання та множення правильних числових нерівностей. Наприкінці цієї теми вводиться поняття вірної цифри і розглядаються правила підрахунку правильних цифр	1. Межі значення величини. 2. Почленне додавання та множення нерівностей. 3. Оцінка суми , різниці, добутку та частки. 4. Абсолютна похибка. 5. Відносна похибка.
1982 рік (15 год)	Учні повинні розуміти, що метод меж дає цілком надійний результат, але є досить громіздким, оскільки всі обчислення виконуються двічі. Правила підрахунку правильних цифр менш трудомісткі, вони дають можливість одержати у багатьох випадках цілком надійні результати без спеціальної оцінки їх похибки. У зв’язку з виконанням вправ на дії з наближеними значеннями чисел у тих випадках, коли обчислення досить трудомісткі, доцільно показати учням можливості електронного калькулятора.	6. Запис наближених значень чисел.
1983 рік (15 год)		7. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень чисел.
1984 рік (15 год)		8. Застосування мікрокалькуляторів до наближених обчислень

Додаток Б.10

Таблиця Б.10.1

Фрагмент програми з математики середньої загальноосвітньої школи 1985 року

Номер та назва теми	Представлення в межах теми питань з наближених обчислень
5 клас. Математика	
4. Десяткові дроби (17 годин)	Округлення десяткових дробів. Наближене значення числа.

7 клас. Алгебра	
5. Наближені обчислення (20 години)	Числові нерівності та їх властивості. Почленне додавання та множення числових нерівностей. Вимірювання величин. Наближене значення числа. Абсолютна та відносна похибки наближеного значення числа. Виконання арифметичних дій над наближеними значеннями з використанням калькулятора.

Додаток Б.11

Таблиця Б.11.1

Тематичне планування навчального матеріалу
(1985/86. та 1986/87 навчальні роки)

Клас	1985/86 навчальний рік	1986/87 навчальний рік
4	4. Десяткові дроби (60 годин): Округлення чисел	6. Десяткові дроби. Додавання та віднімання десяткових дробів (16 годин): Наближене значення числа. Округлення десяткових дробів .
5	-	4. Основна властивість дробу (25 годин): Поняття про число як про результат вимірювання.
6	3. Степінь з натуральним показником (20 годин): Абсолютна похибка	3. Степінь з натуральним показником (20 годин): Вимірювання величин. Абсолютна похибка наближеного значення.
7	5. Степінь з цілим показником (9 годин): Абсолютна похибка. Запис наближених значень. Відносна похибка.	5. Степінь з цілим показником (9 годин): Відносна похибка наближеного значення.
8	-	6. Організація обчислень (9 годин): Виконання арифметичних дій над наближеними значеннями. Обчислення за допомогою калькулятора.

Додаток Б.12

Таблиця Б.12.1

Фрагмент програми з математики середньої загальноосвітньої школи 1989 року

Номер теми, назва теми та представлення в ній питань з наближених обчислень	Пояснення до окремих тем, які наведено укладачами програми
5 клас. Математика	
1. Натуральні числа. Додавання та віднімання натуральних чисел (36 годин): Округлення натуральних чисел. Наближене значення числа.	-
4. Дробові числа. Додавання та віднімання десяткових дробів (40 годин) : Округлення десяткових дробів. Наближене значення числа.	Необхідно тренувати навички округлення десяткових дробів до заданого десяткового розряду.
6 клас. Математика	
	-

3. Перетворення дробів. Множення звичайних дробів (16 годин): Десяткове наближення звичайного дробу.	
7 клас. Алгебра	
3. Степінь з натуральним показником (20 годин): Вимірювання величин. Абсолютна похибка наближеного значення	Знаходження за таблицею наближених значень квадратів чисел використовується для введення поняття абсолютної похибки наближеного значення. Під час розкриття змісту понять “абсолютна похибка” та “точність наближення” залучаються відомості про вимірювання величин.
8 клас. Алгебра	
4. Нерівності (27 годин): Числові нерівності та їх властивості. Почленне додавання та множення числових нерівностей.	Теореми про по членне додавання та множення нерівностей знаходять своє застосування під час виконання найпростіших вправ на оцінку виразів за методом границь.
5. Степінь з цілим показником (9 годин): Відносна похибка наближеного значення.	Під час вивчення теми розширюються відомості про наближені обчислення. Роз’яснюється зміст запису вигляду a±h. Вводиться поняття відносної похибки наближеного значення, зміст якої розкривається на конкретних прикладах.
9 клас. Алгебра	
6. Організація обчислень (9 годин): Виконання арифметичних дій над наближеними значеннями. Обчислення за допомогою калькулятора.	В цій темі завершується навчання наближеним обчисленням, яке було розпочате у 7-му класі. Тут учні ознайомлюються з практичними прийомами наближених обчислень. Доцільність правил наближених обчислень роз’яснюється на конкретних прикладах. З метою засвоєння цих правил пропонуються вправи на виконання найпростіших обчислень. Продовжується використовуватись калькулятор для виконання обчислень на знаходження значень виразів та деяких відомих учням функцій.

Додаток Б.13

Таблиця Б.13.1

Фрагмент програми з математики середньої загальноосвітньої школи 1992 року

Номер теми, назва теми та представлення в ній питань з наближених обчислень	Пояснення до окремих тем, які наведено укладачами програми
5 клас. Математика	
1. Натуральні числа. Додавання та віднімання натуральних чисел (24 годин): Округлення натуральних чисел. [Наближене значення числа].	-
4. Дробові числа. Додавання та віднімання десяткових дробів (34 годин): Округлення десяткових дробів. Наближене значення десяткових дробів.	Необхідно тренувати навички округлення десяткових дробів до заданого десяткового розряду.
6 клас. Математика	
3. Множення і ділення додатних і від’ємних чисел (9 годин): Десяткове наближення звичайного дробу.	-
7 клас. Алгебра	

3. Степінь з натуральним показником (18 годин): [Вимірювання величин. Абсолютна і відносна похибки наближеного значення]	Вивчення теми завершується введенням понять “абсолютна похибка” і “відносна похибка”. Розкриваючи поняття необхідно звертатися до поняття змінної величини.
8 клас. Алгебра	
1. Раціональні дроби (30 годин): [Відносна похибка наближеного значення]	Вправи на дії з числами, записаними у стандартному вигляді, не є обов’язковими. У цей час корисно ознайомити учнів з різними формами запису наближених значень
4. Нерівності (19 годин): Числові нерівності та їх властивості. Почленне додавання та множення числових нерівностей. [Застосування властивостей нерівностей до оцінки значень виразів]	За наявності часу можна показати застосування цих теорем для оцінки значень виразів.

Додаток Б.14

Таблиця Б.14.1

Фрагмент програми з математики 2001 року

Тема та зміст навчального матеріалу з наближених обчислень	Основні вимоги до математичної підготовки учнів
5 клас. Математика	
Натуральні числа і дії над ними. Порівняння і округлення натуральних чисел.	Знати: правила порівняння і округлення.
Геометричні фігури і величини. Вимірювання довжини відрізка. Вимірювання кутів.	Уміти: вимірювати і порівнювати довжини відрізків; вимірювати кути транспортиром.
Звичайні дроби. Десяткові дроби. Порівняння і округлення десяткових дробів.	Уміти: округлювати десяткові дроби до заданого розряду.
6 клас. Математика	
Геометричні фігури. Довжина кола. Площа круга.	Знати: наближене значення числа π.
9 клас. Алгебра	
Нерівності. Застосування властивостей числових нерівностей для оцінювання значення виразу.	Уміти: оцінювати значення виразів за властивостями нерівностей.
Елементи прикладної математики. Наближені значення чисел і величин. Абсолютна [і відносна] похибки. Оцінювання похибок. Додавання, віднімання, множення і ділення наближених значень.	Мати уявлення про: наближені значення чисел і величин; абсолютну [і відносну] похибки; точність наближення; Знати: правила округлення чисел; виконання арифметичних дій з наближеними значеннями; Уміти: знаходити абсолютну [і відносну] похибки, точність наближення, виконувати дії над наближеними значеннями зокрема і за допомогою комп’ютера.

Додаток Б.15

Таблиця Б.15.1

Фрагмент програми з математики
для 5 проліцейного класу ПЛ НТУУ „КПІ”

№ з/п	Поглиблене вивчення (6 годин на тиждень)	Програма поглиблення (1 година на тиждень)
	Тема навчального матеріалу	Тема та зміст навчального матеріалу
1.	Натуральне число. Додатні та від’ємні натуральні числа (30 годин). ... Порівняння та округлення натуральних чисел.	Вимірювання величин, пристрої та робота з ними (10 годин). ...Числові значення величин як результати вимірювань. ... Приклади порівняння і оцінки величин. Значення з надлишком та недостачею. Точність вимірювання. Приклади знаходження величин з недостачею та надлишком за допомогою вимірювальних прикладів. ... Наближені значення величин, їх різні назви. Знак наближеної рівності. Оцінка кількості жителів міста. Демонстрація на прикладі різниці значень з недостачею та надлишком. Заміна натуральних чисел наближеними значеннями, що закінчуються нулями. Значення з точністю до 10, 100, 1000 і т.д. ... Застосування наближених значень для спрощення розв’язку деяких задач.
2.	Геометричні фігури на площині. Основні геометричні фігури (20 годин).	

Додаток Б.16

Таблиця Б.16.1

Вибірка вимог до математичної підготовки учнів, які закінчили 4 клас
(програма з математики початкової школи)

За програмою з математики початкової школи, учні, які закінчили 4 клас, повинні: знати: назви і позначення одиниць величин – довжини (мм, см, м, дм, км), площі (м2, дм2, см2, га, ар), швидкості (км/год, м/с) маси (г, кг, ц, т), об’єму (л), часу (с, хв, год), грошові одиниці (к., грн); співвідношення між одиницями довжини, площі, маси, часу, грошовими одиницями; залежність між швидкістю, часом і відстанню; ціною, кількістю і вартістю; площею і довжинами сторін прямокутника; назви і послідовність натуральних чисел від 1 до 1 000 000; залежність результату дії від зміни компонентів. вміти: лічити предмети; порівнювати числа; користуватися знаками <, >; називати попереднє і наступне число ; виконувати добір значень змінної у нерівностях; вимірювати за допомогою лінійки довжину відрізка та ламаної; знаходити геометричні фігури на моделях; малюнках та навколишніх предметах; знаходити периметр многокутника та площу прямокутника і квадрата; складати задачі за життєвими ситуаціями, моделями та схематичними зображеннями; знаходити площі різних фігур за допомогою палетки;

користуватися позначеннями одиниць величин: мм, см, км, с, хв, год; розв'язувати складені задачі, в яких використовується залежність між величинами (швидкістю, часом і відстанню під час рівномірного прямолінійного руху; ціною, кількістю і вартістю товару; площею прямокутника і довжинами суміжних сторін);

виконувати усні та письмові обчислення в межах 100 на всі арифметичні дії; виконувати письмові обчислення: додавання і віднімання в межах 1 000 000, множення і ділення на одно- та двоцифрові числа; виконувати ділення з остачею.

Додаток В

Приклади задач із сучасних підручників основної школи

Додаток В.1

Задача 1 (№ 1332, [174] 5 клас). Автомобіль за перші дві години проїхав 124,5 км, а за наступні дві години - 0,8 цієї відстані. Знайти середню швидкість автомобіля. Результат округли до одиниць км/год.
Відповідь: 56 км/год

Задача 2 (№ 632, [149] 6 клас). Довжина кімнати 4,4 м, а ширина становить 75 % довжини. Знайдіть площу кімнати. Результат округліть до десятих м2.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 3 (№ 49, [16] 7 клас). Знайдіть корені рівнянь: а) 492x+317=923 – з точністю до тисячних ; б) 2,38z-5,87=3,41 - з точністю до стотисячних.
Відповідь: а) 1,232; б) 3,89916.

Задача 4 (№ 239, [56] 8 клас). На малюнку зображено квадрат АВСД, діагональ якого дорівнює 2 дм. Обчисліть його площу. Знайдіть довжину сторони квадрата, округліть результат до сотих.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 5 (№ 324, [16] 9 клас). Руда містить 60 % заліза, з неї виплавляють чавун, який містить 98 % заліза. Із скількох тонн руди виплавляють 1000 т чавуну?
Відповідь: ≈ 1633 т.

Задача 6 (№ 208, [16] 8 клас). Користуючись мікрокалькулятором, знайдіть наближене значення виразу: а) ; б) ; в) ; г) .
Відповідь: а) 1,4142135 (до інших пунктів не наводиться).

Задача 7 (№ 241, [16] 9 клас). При вільному падінні тіло проходить за першу секунду 4,9 м, а за кожну наступну на 9,8 м більше. Знайдіть глибину шахти, якщо камінець досяг її дна через 8 с після початку падіння.
Відповідь: ≈ 314 м

Додаток В.2

Задача 17 (№ 688, [174], 5 клас). Щоб склеїти прямокутний паралелепіпед з картону, вирізали його розгортку (див рис.). Обчислити площу картону, зробивши необхідні вимірювання. Які

пари прямокутників рівні між собою?
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 18 (№ 172, [149], 6 клас). За даною розгорткою трикутної піраміди (рис.69) знайдіть площі її бічної та повної поверхонь, зробивши необхідні вимірювання.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 19 (№ 374, [174], 5 клас). Накресли довільний трикутник, виміряй його кути та сторони. Знайди периметр трикутника.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 20 (№ 114, [149], 6 клас). Накресліть трикутник і знайдіть його площу, зробивши необхідні вимірювання.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Додаток В.3

Задача 21 (№ 373, [174], 5 клас). Накресли прямокутний, гострокутний і тупокутний трикутники . Користуючись транспортиром, виміряй кути трикутників. Знайди суму кутів кожного трикутника. Зроби висновок.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 22 (№ 80, [149], 6 клас). Накресліть трикутник АВС. Виміряйте довжину сторони АВ та позначте її середину буквою Д. Через точку Д проведіть пряму, паралельну прямій АС. Переконайтесь, що проведена пряма ділить сторону ВС пополам.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Додаток В.4

Задача 26 (№ 933, [57], 5 клас). Число 0,857 округли до десятих і обчисли, на скільки відсотків утворене число більше за дане.
Відповідь: ≈ 5%

Задача 26а (№ 45, [174], 5 клас). Прочитай наближені рівності та вкажи, до якого розряду округлені числа: а) 85 647≈85 600
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 27 (№ 441, [19], 6 клас). Число 0,788 округли до десятих і обчисли, на скільки відсотків нове число більше ніж дане.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Додаток В.5

Задача 23 (№ 1214, [174], 5 клас). Щоб визначити товщину одного аркуша підручника з математики для 5 класу, досить виміряти товщину підручника і поділити її на кількість аркушів. Зроби це самостійно.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 24 (№ 355, [57], 5 клас). Знайди за малюнком 96 площу листка.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 25 (№ 1229, [20], 5 клас). Скориставшись малюнком 111, з'ясуй, якої товщини дріт.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Мал. 111

Задача 25а (№ 544, [149], 6 клас). Для звичайних дробів знайдіть десяткові наближення до десятих, а потім

виконайте обчислення: а)
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 25б (№ 409, 8 клас). Знайдіть наближене значення суми x+y, округливши доданки до сотих: а) x=0,3849...; y=1,1020...
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 25в (№ 608, [147], 6 клас). Обчислити об'єм виритої в землі ями конічної форми глибиною 2 м, довжина кола якої 9,42м.
Відповідь: 4,71м3.

Додаток В.6

Задача 9 (№ 665, [174], 5 клас). Прямокутне поле завдовжки 1 км 600 м і завширшки 25м засіяли житом. На 1 га висівали по 120 кг зерна. Скільки жита висіяли на цьому полі?
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 10 (№ 838, [57], 9 клас). Скільки потрібно кілограмів фарби, щоб пофарбувати підлогу в двох кімнатах, розміри яких 5,6 м × 4,8 м і 5,5 м × 4,3 м, якщо на фарбування 1 м2 підлоги витрачають 0,160 кг фарби?
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Додаток В.7

Задача 11 (№ 813, [174], 5 клас). Площа території України приблизно дорівнює 600тис. км2.

Площа території Бельгії становить частину площі України. Яка площа Бельгії?
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 12 (№ 619, [149], 6 клас). Площа Шацького національного парку (Волинь) 325 км2,

Карпатського – в раза більша, ніж Шацького, а Синевірського (Закарпаття) – в 1,16 раза більша ніж Карпатського. Знайдіть площі Карпатського і Синевірського парків.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 13 (№ 999, [149], 6 клас). Радіус екватора наближено дорівнює 6370 км. Уздовж екватора Землю опоясали тросом. На скільки трос підніметься над Землею, якщо його зробити довшим на 62,8 м?
Відповідь: на 10 м.

Задача 14 (№ 164, [147], 6 клас). Піраміда Хеопса (Єгипет) має висоту 147 м, сторона її квадратної основи становить біля 230 м. Знайти об’єм піраміди Хеопса.
Відповідь: 2592100 м2.

Задача 15 (№ 149, [150], 7 клас). У місті зараз проживає 52 000 жителів. Відомо, що населення цього міста щороку збільшується на 4 %.
а) Скільки жителів буде в місті через рік?
б) Скільки жителів було в місті рік тому?
Відповідь: а) 54 080 жителів; б) 50 000 жителів

Задача 16 (№ 244, [56], 8 клас). В крузі діаметра 20 см необхідно вирізати круглий отвір так, щоб отримане кільце мало площу 113,04 см2. Визначити радіус отвору.
Відповідь: 8 см .

Додаток В.8

Таблиця В.8.1

Наближені значення у задачах, що наведені у чинних підручниках

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">Завдання, що ілюструють джерела виникнення наближених значень</td><td rowspan="2">Завдання формального характеру</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>вимірювання</td><td>підрахунок</td><td>округлення</td></tr>
<tr><td rowspan="3">підручники</td><td>[16]</td><td>11,8 %</td><td>-</td><td>11,8 %</td><td>76,4 %</td></tr>
<tr><td>[55]</td><td>14,8 %</td><td>-</td><td>44,4 %</td><td>40,8 %</td></tr>
<tr><td>[148]</td><td>36,4 %</td><td>-</td><td>18,2 %</td><td>45,4 %</td></tr>
</table>

Додаток В.9

Задача 27 (№ 50, [174], 5 клас). Округли число 573 095 спочатку до десятків, потім до сотень, до тисяч і до десятків тисяч.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 28 (№ 543, [149], 6 клас). Знайдіть десяткові наближення до десятих: .
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 29 (№ 289, [16], 9 клас). Округліть число: а)37,2539 з точністю до сотих.
Відповідь: 37,25.

Задача 30 (№ 788, [148], 9 клас). Округліть числа 538; 1272; 11980; 191 до сотень та знайдіть абсолютну похибку кожного з наближених значень.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 31 (№ 793, [148], 9 клас). В яких межах лежить число x, якщо: а) $x=2{,}6\pm0{,}4$. Яка точність наближеного значення.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Додаток В.10

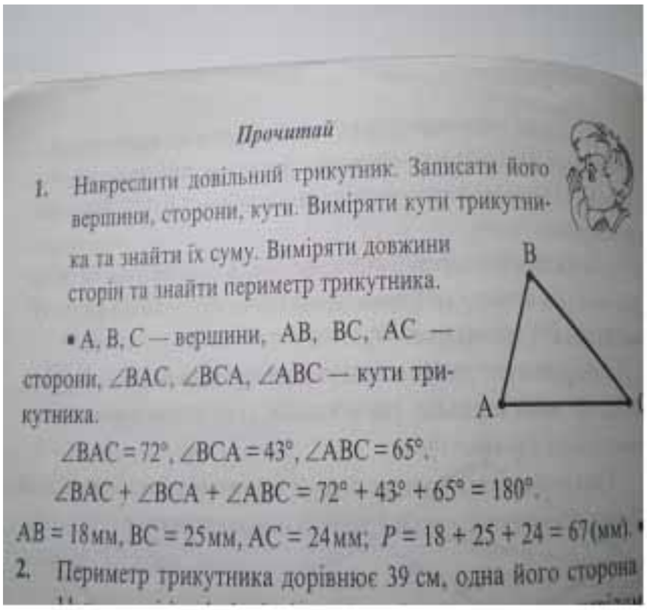
Задача 34 (№ 10, [174], 5 клас). Між якими двома натуральними числами знаходиться кожне з чисел: 20041, 302001, 2000000
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Задача 35 (№ 661, [147], 6 клас). Відмітьте на координатній прямій точки, координати яких дорівнюють цілим значенням x, якщо: а) $-8{,}5<x<0{,}8$; б) $-4{,}3<x<7{,}5$; в) $|x|<4{,}3$.
Відповідь: відповідь у підручнику не наводиться.

Додаток Д

Фрагменти чинних підручників

Додаток Д.1


Прочитай

1. Накреслити довільний трикутник. Записати його вершини, сторони, кути. Виміряти кути трикутника та знайти їх суму. Виміряти довжини сторін та знайти периметр трикутника.

• A, B, C — вершини, AB, BC, AC — сторони, $\angle BAC$, $\angle BCA$, $\angle ABC$ — кути трикутника.

$\angle BAC = 72°$, $\angle BCA = 43°$, $\angle ABC = 65°$.

$\angle BAC + \angle BCA + \angle ABC = 72° + 43° + 65° = 180°$.

AB = 18мм, BC = 25мм, AC = 24мм; $P = 18 + 25 + 24 = 67$(мм). •

2. Периметр трикутника дорівнює 39 см, одна його сторона

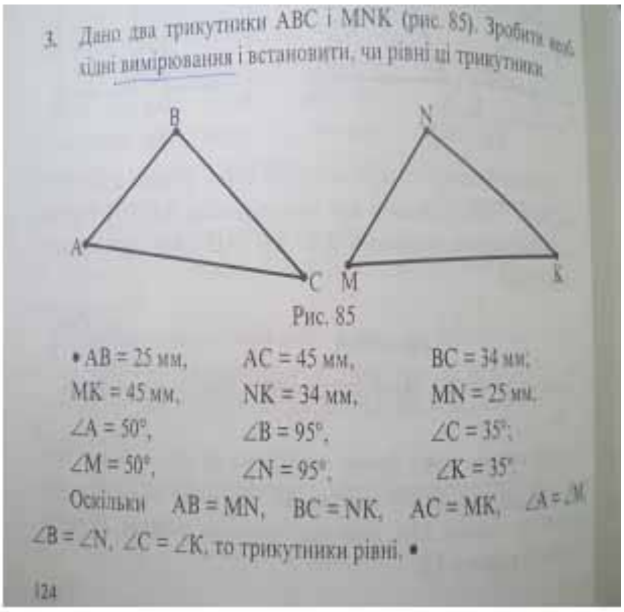

3. Дано два трикутники ABC і MNK (рис. 85). Зробити необхідні вимірювання і встановити, чи рівні ці трикутники.

Рис. 85

• AB = 25 мм, AC = 45 мм, BC = 34 мм;
MK = 45 мм, NK = 34 мм, MN = 25 мм;
$\angle A = 50°$, $\angle B = 95°$, $\angle C = 35°$;
$\angle M = 50°$, $\angle N = 95°$, $\angle K = 35°$

Оскільки AB = MN, BC = NK, AC = MK, $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$, то трикутники рівні. •

124

Рис.Д.1.1. Фрагмент підручника «Математика, 5» Г.М.Янченко, В.Р.Кравчук, Г.М.Возняк та ін., сторінки 80, 124

Додаток Д.2.

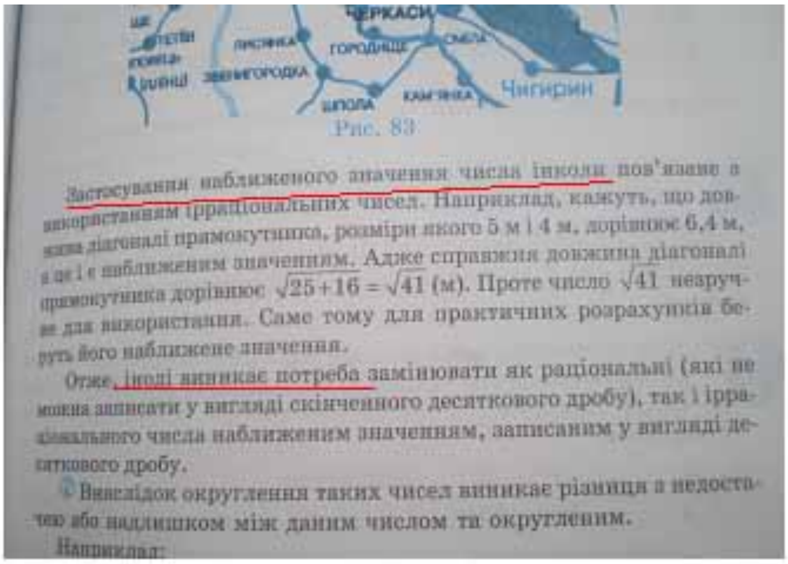


Рис. 83

Застосування наближеного значення числа іноді пов'язане з використанням ірраціональних чисел. Наприклад, кажуть, що довжина діагоналі прямокутника, розміри якого 5 м і 4 м, дорівнює 6,4 м, а це і є наближеним значенням. Адже справжня довжина діагоналі прямокутника дорівнює $\sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ (м). Проте число $\sqrt{41}$ незручне для використання. Саме тому для практичних розрахунків беруть його наближене значення.

Отже, іноді виникає потреба замінювати як раціональні (які не можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу), так і ірраціональні числа наближеним значенням, записаним у вигляді десяткового дробу.

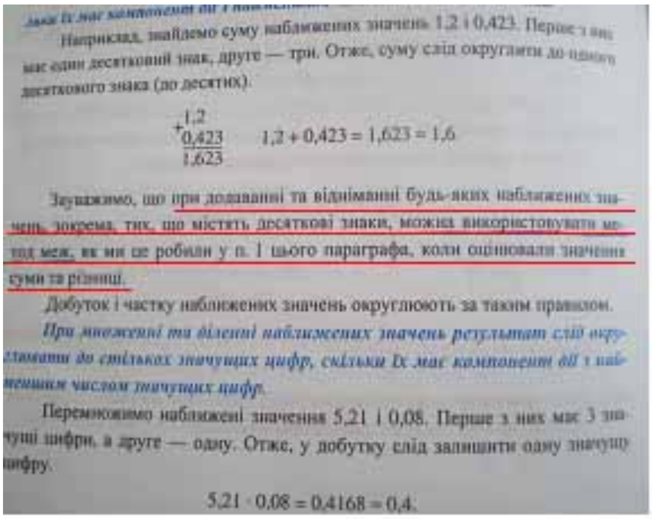
Внаслідок округлення таких чисел виникає різниця з недостачею або надлишком між даним числом та округленим.

Наприклад:

Рис.Д.2.1. Фрагмент підручника «Алгебра, 9» Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І., сторінка 125

Додаток Д.3

Додаток Д.4


Наприклад, знайдемо суму наближених значень 1,2 і 0,423. Перше з них має один десятковий знак, друге — три. Отже, суму слід округлити до одного десяткового знака (до десятих).

$$1{,}2 + 0{,}423 = 1{,}623 \approx 1{,}6$$

Зауважимо, що при додаванні та відніманні будь-яких наближених значень, зокрема, тих, що містять десяткові знаки, можна використовувати метод меж, як ми це робили у п. 1 цього параграфа, коли оцінювали значення суми та різниці.

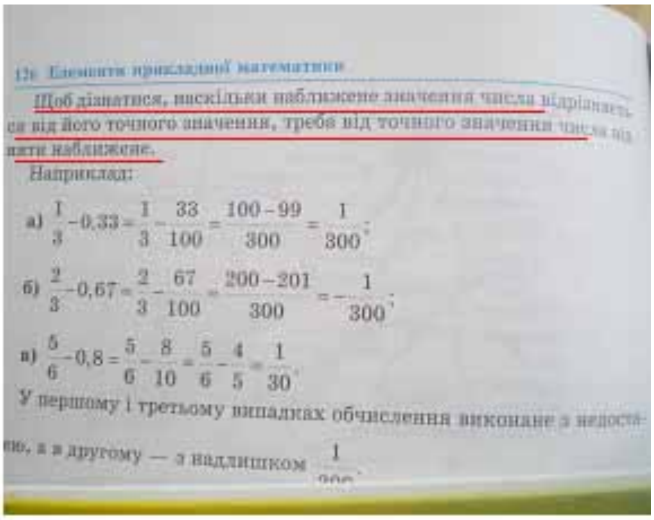
Добуток і частку наближених значень округлюють за таким правилом.

При множенні та діленні наближених значень результат слід округлювати до стількох значущих цифр, скільки їх має компонент дії з найменшим числом значущих цифр.

Перемножимо наближені значення 5,21 і 0,08. Перше з них має 3 значущі цифри, а друге — одну. Отже, у добутку слід залишити одну значущу цифру.

$$5{,}21 \cdot 0{,}08 = 0{,}4168 \approx 0{,}4.$$

Рис.Д.3.1 Фрагмент підручника «Алгебра, 9» Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М.; за ред. Слєпкань З.І., сторінка 186


126 Елементи прикладної математики

Щоб дізнатися, наскільки наближене значення числа відрізняється від його точного значення, треба від точного значення числа відняти наближене.

Наприклад:

а) $\frac{1}{3} - 0{,}33 = \frac{1}{3} - \frac{33}{100} = \frac{100-99}{300} = \frac{1}{300}$;

б) $\frac{2}{3} - 0{,}67 = \frac{2}{3} - \frac{67}{100} = \frac{200-201}{300} = -\frac{1}{300}$;

в) $\frac{5}{6} - 0{,}8 = \frac{5}{6} - \frac{8}{10} = \frac{5}{6} - \frac{4}{5} = \frac{1}{30}$.

У першому і третьому випадках обчислення виконане з недостачею, а в другому — з надлишком $\frac{1}{300}$.

Рис.Д.4.2 Фрагмент підручника «Алгебра, 9» Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І., сторінка 126

Додаток Д.5

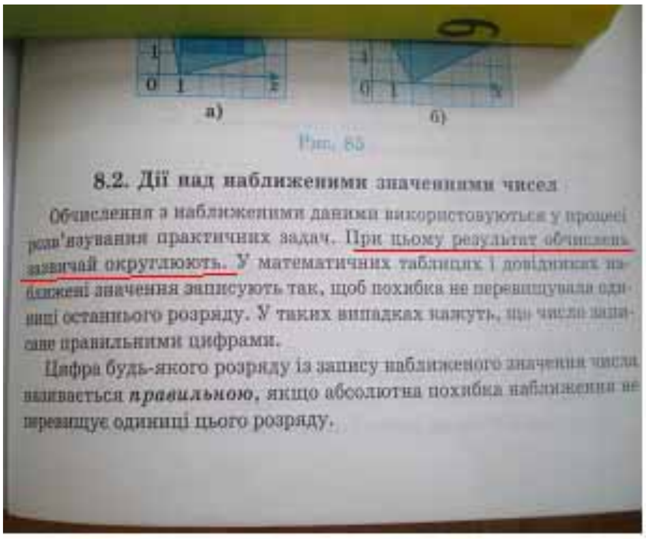


Рис. 85

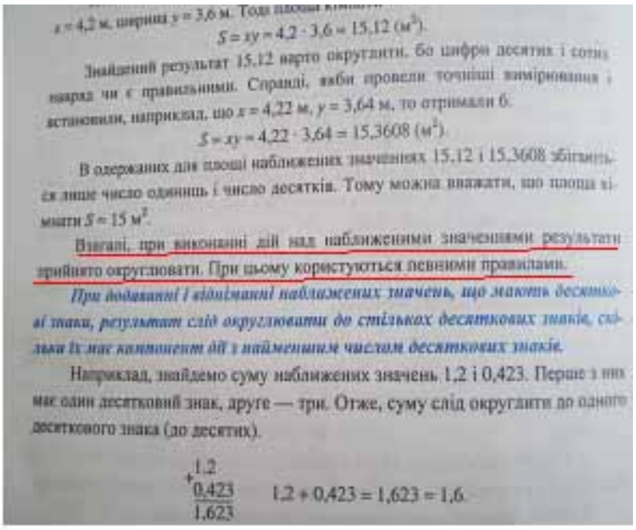
8.2. Дії над наближеними значеннями чисел

Обчислення з наближеними даними використовуються у процесі розв'язування практичних задач. При цьому результат обчислень зазвичай округлюють. У математичних таблицях і довідниках наближені значення записують так, щоб похибка не перевищувала одиниці останнього розряду. У таких випадках кажуть, що число записане правильними цифрами.

Цифра будь-якого розряду із запису наближеного значення числа називається ***правильною***, якщо абсолютна похибка наближення не перевищує одиниці цього розряду.

Рис.Д.5.1 Фрагмент підручника «Алгебра, 9» Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І., сторінка 131

Додаток Д.6


$x = 4{,}2$ м, ширина $y = 3{,}6$ м. Тоді площа кімнати

$$S = xy = 4{,}2 \cdot 3{,}6 = 15{,}12\ (м^2).$$

Знайдений результат 15,12 варто округлити, бо цифри десятих і сотих навряд чи є правильними. Справді, якби провели точніші вимірювання і встановили, наприклад, що $x = 4{,}22$ м, $y = 3{,}64$ м, то отримали б

$$S = xy = 4{,}22 \cdot 3{,}64 = 15{,}3608\ (м^2).$$

В одержаних для площі наближених значеннях 15,12 і 15,3608 збігаються лише число одиниць і число десятків. Тому можна вважати, що площа кімнати $S \approx 15$ м^2.

Взагалі, при виконанні дій над наближеними значеннями результати прийнято округлювати. При цьому користуються певними правилами.

При додаванні і відніманні наближених значень, що мають десяткові знаки, результат слід округлювати до стількох десяткових знаків, скільки їх має компонент дії з найменшим числом десяткових знаків.

Наприклад, знайдемо суму наближених значень 1,2 і 0,423. Перше з них має один десятковий знак, друге — три. Отже, суму слід округлити до одного десяткового знака (до десятих).

$$1{,}2 + 0{,}423 = 1{,}623 \approx 1{,}6.$$

Рис.Д.6.1 Фрагмент підручника «Алгебра, 9» Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М.; за ред. Слєпкань З.І., сторінка 186

Додаток Ж.
Терміни та символи, що містяться в сучасних підручниках
Додаток Ж.1

Таблиця Ж.1.1

Терміни, що вживаються для позначення числових характеристик наближених значень

Підручники	Похибка	Абсолютна похибка	Межа абсолютної похибки	Відносна похибка	Межа відносної похибки
[16]	-	Абсолютна похибка	Границя абсолютної похибки	-	-
[55]	Похибка	Абсолютна похибка	Межа абсолютної похибки або точність	Відносна похибка	-
[148]	-	Абсолютна похибка	Точність	Відносна похибка	Відносна точність

Додаток Ж.2

Таблиця Ж.2.1

Символи, що вживаються для позначення числових характеристик наближених значень

Підручники	Похибка	Абсолютна похибка	Межа абсолютної похибки	Відносна похибка	Межа відносної похибки
[16]	-	-	-	-	-
[55]	Δ	$\lvert\Delta\rvert$	h		
[148]	-	-	h	-	-

Додаток Ж.3

<table>
<tr><td colspan="7">x - точне значення; a - наближене значення;
h - точність наближення або межа абсолютної похибки</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>x-a h</td><td>=</td><td>a-h x a+h</td><td>=</td><td>x a з точністю до h</td><td>=</td><td>x = a h</td></tr>
<tr><td>а</td><td></td><td>б</td><td></td><td>в</td><td></td><td>г</td></tr>
<tr><td colspan="7">Рис. Ж.3.1. Форми запису наближених значень, що містять їх точність</td></tr>
</table>

Додаток Ж.4

<table>
<tr><td colspan="7">x - точне значення; a - наближене значення;
ε – відносна точність наближення або межа відносної похибки</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">x a з точністю до ε %</td><td colspan="4">x = a ε %</td></tr>
<tr><td colspan="7">Рис. Ж.3.1. Форми запису наближених значень, що містять відносну точність</td></tr>
</table>

Додаток З
Застосування наближених обчислень у шкільній фізиці
Додаток З.1

Таблиця З.1.1

Наближені міркування та припущення у чинних підручниках з фізики

Тема	Приклади наближених міркувань та припущень у чинних підручниках з фізики
Тепловий рух атомів і молекул. Внутрішня енергія тіла	У рідин кінетична енергія теплового руху атомів і молекул та потенціальна енергія їхньої взаємодії приблизно рівні. Хоча атоми твердого тіла і коливаються відносно своїх стабільних положень, проте вони практично не переміщуються в його об'ємі [271, с. 14].
Пояснення зміни агрегатних станів речовини на основі атомно-молекулярного вчення	За температури плавлення кінетична і потенціальна енергії молекул стають приблизно однаковими і зв'язки між ними можуть розірватися [271, с. 55]
Теплота згоряння палива	Кількості теплоти, що виділяється під час згоряння 1 м3 природного газу, вистачає, щоб нагріти майже 100 л води від 00 до 1000С [271, с. 36].
Постійні магніти. Магнітне поле Землі	Північний магнітний полюс Землі міститься поблизу Південного географічного полюса, тому напрями на північ і південь компас показує лише наближено [271, с. 140].
Перший закон динаміки Ньютона. Інерціальні системи відліку	Тому під час розв'язування задач динаміки систему відліку зв'язують з реальним тілом, коли вона може вважатися інерціальною з певним ступенем наближення [272, с. 70].
Закон збереження імпульсу	Прикладом пружного удару (з певним наближенням) є взаємодія двох більярдних куль під час зіткнення [272, с. 142].
Математичний маятник	З певним наближенням математичним маятником можна вважати кульку, підвішену на нитці [272, с. 197].
Сила тертя. Коефіцієнт тертя	Отримане значення коефіцієнта тертя ковзання приблизно збігається з табличними даними, отже задача розв'язана правильно [272, с. 88].

Додаток З.2

Таблиця З.2.1

Використання понятійного апарату НО у чинних підручниках з фізики

Тема	Приклади використання понятійного апарату з НО у чинних підручниках з фізики
Запитання до теми. Вплив температури на лінійні розміри тіл	З якого матеріалу ви запропонували б виготовити вимірювальну лінійку, якщо треба забезпечити найвищу точність вимірювання за значних коливань температури [271, с. 12].
Лабораторна робота № 2. Порівняння кількості теплоти при змішуванні води різної температури	Так як в шкільних умовах важко забезпечити високу точність вимірювань калометричним методом, обчислення краще робити з двома значущими цифрами [271, с. 34].
Паралельне з'єднання провідників	При розв'язуванні задач з використанням формул зручно користуватись наведеною на малюнку номограмою, яка дає змогу, не виконуючи обчислень, знаходити наближені

Рис. К.1.2 Систематизація уявлень учнів про форми запису наближених значень

	значення величин [271, с. 119].

Додаток З.3

Таблиця З.3.1

Наближені значення величин у чинних підручниках з фізики

Тема	Приклади наближених значень величин у чинних підручниках з фізики
Види теплообміну	Температура поверхні Сонця дорівнює приблизно 6000 ... 70000С. Тому частка енергії сонячного випромінювання, що досягає Землі, досить вагома: за 1 с на поверхню Землі потрапляє приблизно 1017 Дж сонячної енергії [271, с. 22].
Теплота згоряння палива	Під час згоряння 1 м3 природного газу, що на 90 % складається з метану, утворюється приблизно 40 МДж теплоти [271, с. 36].
Постійні магніти. Магнітне поле Землі	Південний магнітний полюс Землі знаходиться на півночі, але він не збігається з Північним географічним полюсом, а віддалений від нього приблизно на 2100 км.
Сила тертя. Коефіцієнт тертя	Коефіцієнт тертя ковзання: сталь по сталі у стані спокою 0,15-0,25. [272, с. 88].

Додаток К

Логіко-дидактичні та інші схеми, що використовувались під час експериментального навчання

Додаток К.1

Додаток К.2

Таблиця К.2.1

Організаційна модель, яка використовувалась під час ігрової діяльності учнів 6 класу

Групи	Уміння, якими повинні володіти учні для розв’язування пропонованого завдання	Поділ учнів класу	Емблеми команд
1 група	Додавання наближених значень	Перша команда	
2 група	Додавання точних та наближених значень		
3 група	Множення наближених значень		
4 група	Множення точних та наближених значень		
5 група	Віднімання наближених значень		
6 група	Віднімання точного значення від наближеного		
7 група	Віднімання наближеного значення від точного		
8 група	Ділення наближених значень		

$$x = a \pm h$$

$$a \le x \le b$$ де $a>0$, $b>0$

n- натуральне число

Я…	…ного знач…
… п…	…лиженого

…ення

НМ – нижня межа наближеного значення

h – точність наближеного значення

$h=$

Додаток К.4

Рис. К.4.1. Формування уявлень учнів про правила піднесення наближених значень до степеня з від’ємним показником

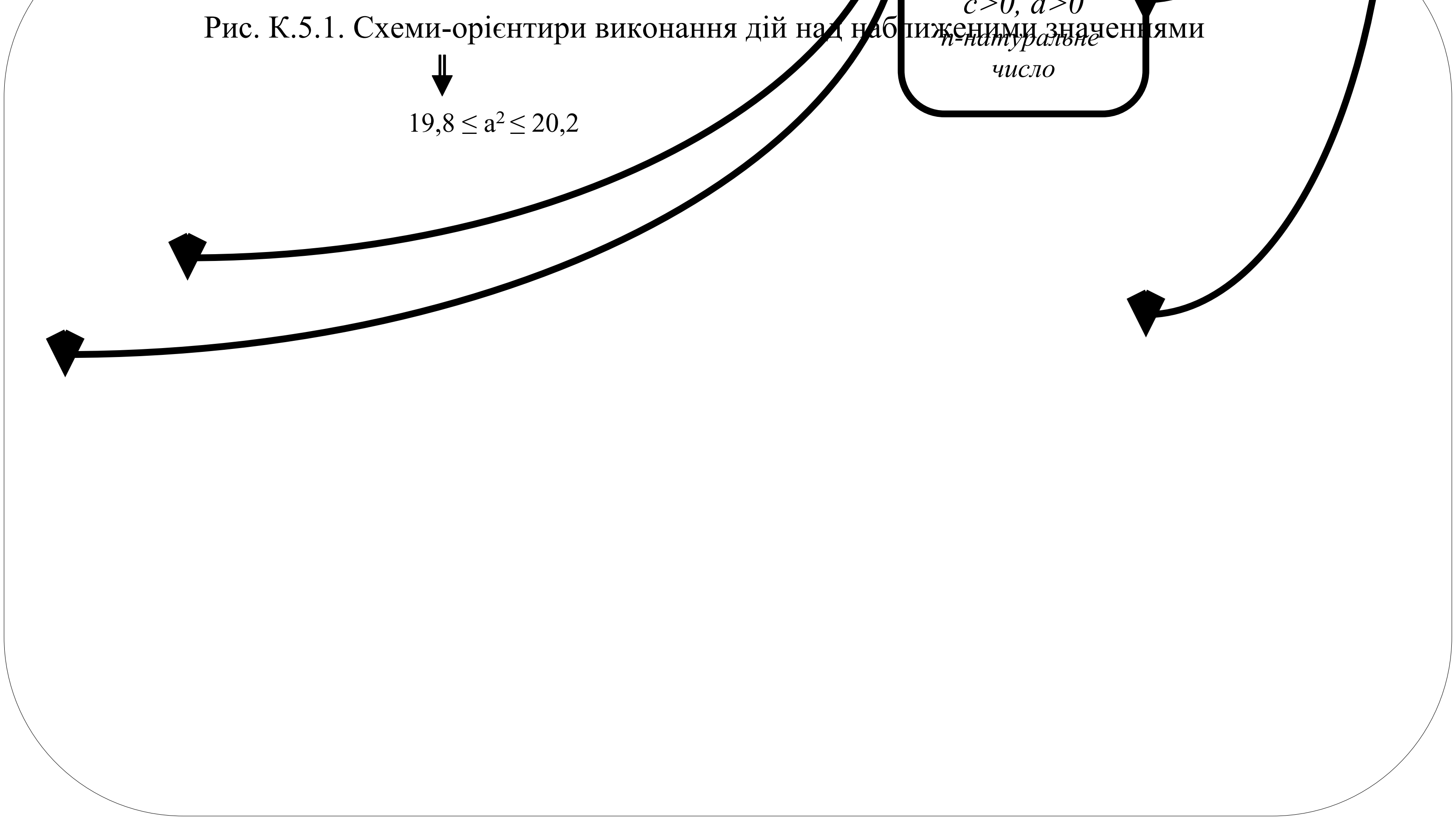


Рис. К.5.1. Схеми-орієнтири виконання дій над наближеними значеннями

$$x \le a \le y$$

Додаток К.6.

Формування уявлень учнів про правила ... піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником

$19{,}8 \le a2 \le 20{,}2$

Рис. К.8.1

$$212{,}85 \le a^2 \le 217{,}15$$

$$14{,}58937969\ldots \le a \le 14{,}73601031\ldots$$

$$? \le a \le ?$$

Д...

Формування у...

добування арифметичного квадратн... з

додатних...

Задача. Спортивний зал має форму квадрату площею 215м2. Під час виконання реконструкції його площа може змінитись не більше ніж на 1%. Якими будуть розміри спортивного залу після реконструкції?

Додаток К.8

Тема: Формування уявлень учнів про правила округлення меж наближених значень.

1. Постановка задачі (рис. К.8.1).
2. Навчально дослідницька робота учнів з елементами обчислювального експерименту (табл. К.8. 1)

Таблиця К.8.1

Обчислення меж наближеного значення з різною точністю

Розряд округлення	Межі наближеного значення	Точність наближеного значення	Відносна точність наближення
Округлення до десятків	10≤ a ≤20	a=15±5	a=15±33,34 %
Округлення до одиниць	14≤ a ≤15	a=14,5±0,5	a=14,5±3,45 %
Округлення до десятих	14,5≤ a ≤14,8	a=14,65±0,15	a=14,65±1,03 %
Округлення до сотих	14,58≤ a ≤14,74	a=14,66±0,08	a=14,66±0,54 %
Округлення до тисячних	14,589≤ a ≤14,737	a=14,663±0,074	a=14,663±0,51 %
Округлення до десятитисячних	14,5893≤ a ≤14,7361	a=14,6627±0,0734	a=14,6627±0,51 %
Округлення до стотисячних	14,58937≤ a ≤14,73602	a=14,662695±0,073325	a=14,66270±0,51 %
…			

3. Ілюстрація результатів навчально дослідницької діяльності учнів за допомогою діаграми (рис. К.8.2).

4. Розв’язування задачі та формулювання відповіді (рис. К.8.3).

Додаток Л.
Організаційна модель проективної діяльності учнів основної школи під час вивчення наближених обчислень

5 клас. Теми: Масштаб. Середнє арифметичне.

Навчальна мета ведення учнями проективної діяльності:

• формування поняття про масштаб та його використання; формування умінь по знаходити середнє арифметичне кількох чисел (програмові вимоги до підготовки учнів);

• актуалізація уявлень про запис наближених значень у вигляді подвійних нерівностей; формування пропедевтичних уявлень про точність, відносну точність, правила їх знаходження та

запис наближених значень у вигляді умовної рівності (вимоги до підготовки учнів у контексті вивчення наближених обчислень).
Розвивальна мета ведення учнями проективної діяльності: ознайомлення учнів із картою України; формування уявлень про існування та розміри областей України; формування уявлень про статистичні спостереження та їх подання; формування навичок заповнювати звітну документацію, користуватись друкованими та електронними джерелами.
Базові уявлення, уміння та знання учнів:
• знаходження площ за допомогою палетки; знаходження відсотків від числа;
• уявлення про запис наближених значень за допомогою знаку наближеної рівності та у вигляді подвійної нерівності; вміння виконувати арифметичні дії над наближеними та точними значеннями.
Обґрунтування вибору проекту.
• Навчальний матеріал теми «Масштаб» часто засвоюється учнями формально, а відповідні елементи знань швидко забуваються. Вказана тема має широкі можливості щодо використання інтегрованих знань та додаткового матеріалу (зокрема і наочного).
• Тема «Масштаб» має безпосередні логіко математичні та методичні зв'язки з наближеними обчисленнями.
Виявлення проблеми: учням відомо, що за допомогою масштабу, який вказаний на карті або плані, можна отримати уявлення про відстані або лінійні розміри об'єкту. А чи можна, використовуючи масштаб, отримати уявлення про інші числові характеристики об'єктів, що зображені на карті або плані, наприклад площу?
Основна ідея проективної діяльності. Для розв'язування проанонсованої проблеми учні повинні визначити (виконавши відповідні дослідження та обчислення) площі територій кожної із областей України та перевірити правильність отриманих результатів.
План реалізації проекту та діяльність команди: 25 учнів класу (24 області України та Автономна республіка Крим) шляхом жеребкування отримують «свою» область. Вони працюють індивідуально, маючи змогу консультуватись із учителем та спілкуватись між собою. Інші учні – об'єднуються у групу експертів. Вони працюють колективно або розподіливши певним чином обов'язки між собою.

Кожен учень отримує ксерокопію карти України. Вирізає ножицями «свою» область. Накладає її на папір у клітинку та обводить гостро заточеним олівцем. За отриманим таким чином кресленням учні заповнюють бланки такого зразка (на прикладі Луганської області):
1. Назва області: Луганська
2. Кількість клітинок, які містяться повністю на території області (нижня межа) : 40 клітинок.
3. Кількість клітинок, які мають з територією області спільні точки (верхня межа): 51 клітинка.
4. Наближене значення площі області у вигляді подвійної нерівності:

40 клітин

5. Наближене значення площі області у см2
.

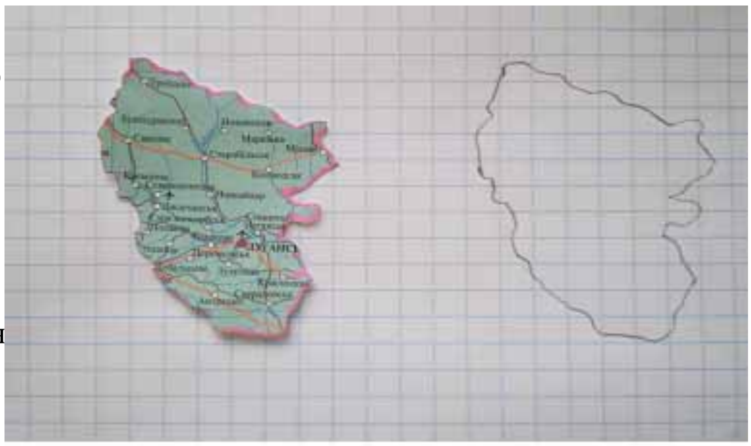


Рис. Л.1

Під час заповнення даного пункту учні мають висунути припущення щодо відповідних обчислень. У випадку, коли припущення учнів є помилковими, вчитель не виправляє їх. Хибність власних міркувань учні мають усвідомити самостійно в ході подальшого ведення проективної діяльності або під час підведення її підсумків. В цьому і є основна ідея проективної діяльності. У випадках, коли припущення є правильними, коректність їх формулювання не береться до уваги.

Наприклад, одне із правильних припущень може звучати так: «Ми знаємо, що у 1 см2 міститься 4 клітинки, тому площа області у см2 буде у 4 рази меншою чим площа області у клітинках».

$$10{,}00 \text{ см2} \le S \le 12{,}75 \text{ см2} \quad \text{(на карті)}$$

6. Наближене значення площі області у км2.

Правильні припущенні учнів можуть мати такий вигляд: «Масштаб карти 1:5 000 000. Тобто відстані 1см на карті відповідає 5 000 000 см = 50км на місцевості. А 1 см2 (1см×1см) відповідає 2500 км2 (50 км2×50 км2) на місцевості. Тому площа області у км2 буде у 2500 рази більшою чим площа області у см2».

$$25\,000 \text{ км2} \le S \le 31\,875 \text{ км2 (на місцевості)}$$

7. Наближене значення площі області за допомогою знаку наближеної рівності.

Учні мають припустити, можливо з допомогою вчителя, що для цього необхідно обчислити середнє арифметичне меж наближеного значення:

$$S \approx (25\,000 + 31\,875) : 2;$$
$$S \approx 28\,437{,}5 \text{ км2}.$$

Учні експертної групи за отриманими таким чином результатами будують звітну таблицю (табл. Л.1).

Таблиця Л.1

Відомості про площу областей України

№ з/п	Назва області	Площа області за довідником, км2	Площа області, що отримана дослідником, км2	Прізвище дослідника	Величина отриманої похибки	
					км2	%
…	…	…	…	…	…	…
3	Луганська	26 700	28 437,5	Корчак П.	1737,5	6,51
	…	…	…	…	…	…

Для заповнення третього стовпчика учні-експерти використовують довідник. Четвертий та п’ятий стовпчики заповнюються ними по мірі виконання роботи проектантами.

Отримані таким чином результати експертна група демонструє за допомогою діаграми.

Зауважимо, що за програмою учні знайомляться з діаграмами у 6 класі. Запропонована демонстрація є водночас і пропедевтикою, і мотивацією для подальшого їх вивчення.

Після того як учні «побачили» на екрані допущені ними помилки (різницю між висотами стовпчиків), відбувається їх обчислення. Учні-експерти, попередньо проінструктовані вчителем, повідомляють учням спосіб їх обчислення; виконують відповідні обчислення на дошці на прикладі однієї із областей; консультують та допомагають учням у їх обчисленнях. Отримані таким чином числові значення заносять до шостого стовпчика таблиці.

Під час ведення відповідної діяльності в учнів виникали запитання «Отримані нами помилки є великими чи малими? Як за їх величиною зрозуміти: дії виконано нами якісно чи ні?». Для відповіді на ці та інші питання до проективної діяльності приєднується вчитель. Він пропонує відповісти на поставлені питання «на мові відсотків». Зокрема, пропонує обчислити скільки відсотків отримана помилка від істинного результату: $(1737{,}5:26700)\cdot 100\ \% \approx 6{,}51\%$ (на прикладі Луганської області).

Кожен з учнів обчислює аналогічним чином показник якості своєї роботи. Учні-експерти перевіряють хід виконання обчислень, заносить результати у сьомий стовпчик таблиці та будують діаграму «успіху діяльності».

Зрозуміло, що отримані значення є відносною точністю наближених значень, що були одержані учнями. І хоча відповідна термінологія не наводилась, в уявленнях учнів залишився відбиток про те, що величину помилки можна відображати як у відповідних одиницях вимірювання (у нашому прикладі це тис. км2 або км2), так і відсотках. Іншими словами відбувається формування пропедевтичних уявлень про кількісні та якісні числові характеристики наближених значень.

Висновки (загальні висновки наводить вчитель). Нами було проведено дослідження, в результаті якого було з'ясовано, що за допомогою масштабу можна отримати уявлення не лише про лінійні розміри об'єкту дослідження, а і про його площу. Отримані так значення є наближеними. Величина отриманих нами помилок сягала 0,5 - 28,9%. Їх причини кожен має з' ясувати самостійно та відобразити у висновках. На практиці, у справжніх дослідженнях, наприклад під час аерозйомки, величини помилок звичайно набагато менші. Це досягається зокрема і багатократним зменшенням «клітинок», які ми обираємо за умовні одиниці площини. Проаналізуйте результати власної діяльності та зробіть відповідні висновки, записавши їх у своїх роботах.

Критерії оцінювання проективної діяльності учнів.

1. Чіткість виконання креслень; охайність та правильність ведення відповідних записів (0 - 2 бали).
2. Правильність виконання обчислень (0 - 2 бали).
3. Величина відносної точності отриманих результатів (до 10,0% - 2 бали; від 10,0% до 19,5% - 1 бал; більше 19,5% - 0 балів).
4. Аргументація виконання дій (0 - 2 бали).
5. Вміння проаналізувати та підсумувати результати власної діяльності (0 - 2 бали).
6. Додаткова інформація про об'єкт дослідження(за умови ведення ПД у позаурочний час) (0 - 2 бали).

Додаток М
Цілі та зміст вивчення НО в основній школі
Додаток М.1

Таблиця М.1.1

Поетапне вивчення наближених обчислень в основній школі: цілі вивчення

Курс математики 5 - 6 класів	■ ознайомлення, а також систематичний та послідовний розвиток понять про точні і наближені значення чисел та величин із широким залученням елементарних відомостей про числові нерівності; ■ формування уявлень про степінь близькості наближеного значення до точного (усно та за допомогою координатної прямої (променя)); ■ вироблення вмінь виконувати письмово арифметичні дії над наближеними значеннями чисел та величин, а також переводити практичні завдання (зокрема і прикладні задачі із простими математичними моделями) на мову математики; ■ підготовка учнів до вивчення числових характеристик наближених значень чисел та величин, а також до методів наближених обчислень (

Цілі вивчення наближених обчислень в основній школі		методу меж) у систематичному курсі алгебри
	Курс алгебри та геометрії 7 - 8 класів	■ узагальнення, систематизація, розширення та поглиблення відомостей про основні джерела наближених значень чисел та величин, якими учні оволоділи протягом вивчення наближених обчислень у 5-6 класах; ■ ознайомлення, а також систематичний та послідовний розвиток поняття про числові характеристики наближених значень чисел та величин: точність, відносну точність, а також їх окремі випадки абсолютну та відносну похибку; вироблення вмінь їх знаходження; ■ розвиток вмінь виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями чисел та величин під час розв'язування завдань, що пов'язані із традиційним програмовим матеріалом; ■ розвиток вмінь застосовувати арифметичні дії над наближеними значеннями чисел та величин під час розв'язування практичних завдань; ■ підготовка учнів до вивчення та використання методу меж як провідного методу наближених обчислень
	Курс алгебри та геометрії 9 класу	■ доповнення та узагальнення відомостей про наближені значення, якими учні оволоділи протягом вивчення наближених обчислень у 5 - 8 класах; ■ розвиток вмінь знаходити якісні та кількісні числові характеристики під час розв'язування завдань, що пов'язані із традиційним програмовим матеріалом; ■ обґрунтування методу меж; ■ формування уявлень про методи наближених обчислень; ■ підготовка учнів до використання наближених обчислень під час подальшого вивчення математики та в межах інших дисциплін

Додаток М.2

Таблиця М.2.1

Поетапне вивчення наближених обчислень в основній школі: зміст навчального матеріалу

Курс математики 5 - 6 класів	Наближені та точні значення чисел і величин. Округлення. Практичні та теоретичні вимірювання. Запис наближених значень чисел і величин за їх межами та з використанням знака наближеної рівності. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених і точних значень. Округлення меж наближених значень чисел і величин. Наближене значення чисел і величин як середнє арифметичне його меж. Застосування вивчених відомостей з наближених обчислень під час розв'язування текстових та геометричних задач, а також практичних завдань.

Рис. Н.1.1. Обчислювальна таблиця та схема орієнтир для формування уявлень про віднімання наближених значень

Зміст вивчення наближених обчислень в основній школі	Курс алгебри та геометрії 7 - 8 класів	Основні джерела наближених значень та їх запис у вигляді умовних рівностей. Числові характеристики наближених значень чисел і величин: точність та відносна точність. Окремі випадки числових характеристик наближених значень: абсолютна та відносна похибки. Піднесення наближених значень до степеня з натуральним та цілим показником. Добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень. Застосування вивчених відомостей з наближених обчислень під час розв'язування практичних та прикладних задач.
	Курс алгебри та геометрії 9 класу	Метод меж. Застосування вивчених відомостей з наближених обчислень під час розв'язування практичних та прикладних задач. Наближені обчислення. Основні методи наближених обчислень .

Додаток Н
Приклади розв'язання доцільних задач (5 клас)
Додаток Н.1

1. Маринка витягла із пачки десь десяток-півтора серветок. Скільки серветок залишилося в пачці, якщо напис на ній свідчить, що пачка містить приблизно 200 - 205 серветок?

	200	201	202	203	204	205	
10	190	191	192	193	194	195	
11	189	190	191	192	193	194	
12	188	189	190	191	192	193	$200 \le x \le 205$
13	187	188	189	190	191	192	-
14	186	187	188	189	190	191	$10 \le y \le 15$
15	185	186	187	188	189	190	$185 \le x - y \le 195$

Рис. Н.1.3. Обчислювальні таблиці та схема орієнтир для формування уявлень про віднімання точних та наближених значень

2. Дідусь нарвав у саду повний кошик яблук. Прийшовши додому він пригостив ними своїх онуків Сашка та Сергійка, а також двох їх друзів. Скільки яблук залишилось у кошику, якщо в ньому може поміститись приблизно 20 - 25 яблук.

	20	21	22	23	24	25
4	16	17	18	19	20	21
	20	21	22	23	24	25
4	16	17	18	19	20	21

$20 \le x \le 25$

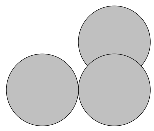
-

4 4

$16 \le x - 4 \le 21$

Рис. Н.1.2. Обчислювальна таблиця та схема орієнтир для формування уявлень про віднімання наближених та точних значень

3. До шкільної бібліотеки надійшло 200 примірників нових підручників. Наступного дня для їх отримання завітало близько 20 - 25 учнів. Скільки примірників нових підручників залишилось у бібліотеці?



200

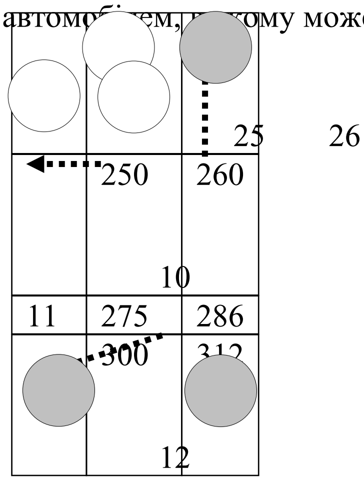
	180
20	
21	179
22	178
23	177
24	176
25	175

	200	$200 = 200 = 200$
20	180	-
21	179	$20 \le x \le 25$
22	178	
23	177	$175 \le 200 - x \le 180$
24	176	
25	175	

$a \le x \le b$ - $c \le y \le d$ $a - d \le x - y \le b - c$	Віднімання наближених значень: 1. Запишіть наближені значення у вигляді подвійних нерівностей в стовпчик одне під одним. 2. Від нижньої межі зменшуваного відніміть верхню межу від'ємника. Отримане число є нижньою межею результату. 3. Від верхньої межі зменшуваного відніміть нижню межу від'ємника. Отримане число є верхньою межею результату. 4. Запишіть остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності

Додаток Н.2

1. В одному ящику міститься 25 - 26кг яблук. Скільки кілограмів яблук можна перевезти автомобілем, в якому може поміститись 10 - 12 таких ящиків?



$$25 \le x \le 26$$

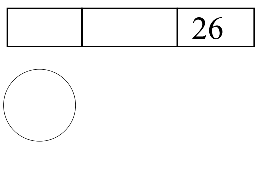
$$\times$$

$$10 \le y \le 12$$

$$250 \le xy \le 312$$

Рис.Н.2.1. Обчислювальна таблиця та схема-орієнтир для формування уявлень про множення наближених значень

2. В одному ящику міститься 25 - 26кг яблук. Скільки кілограмів яблук міститься в 20 таких ящиках?



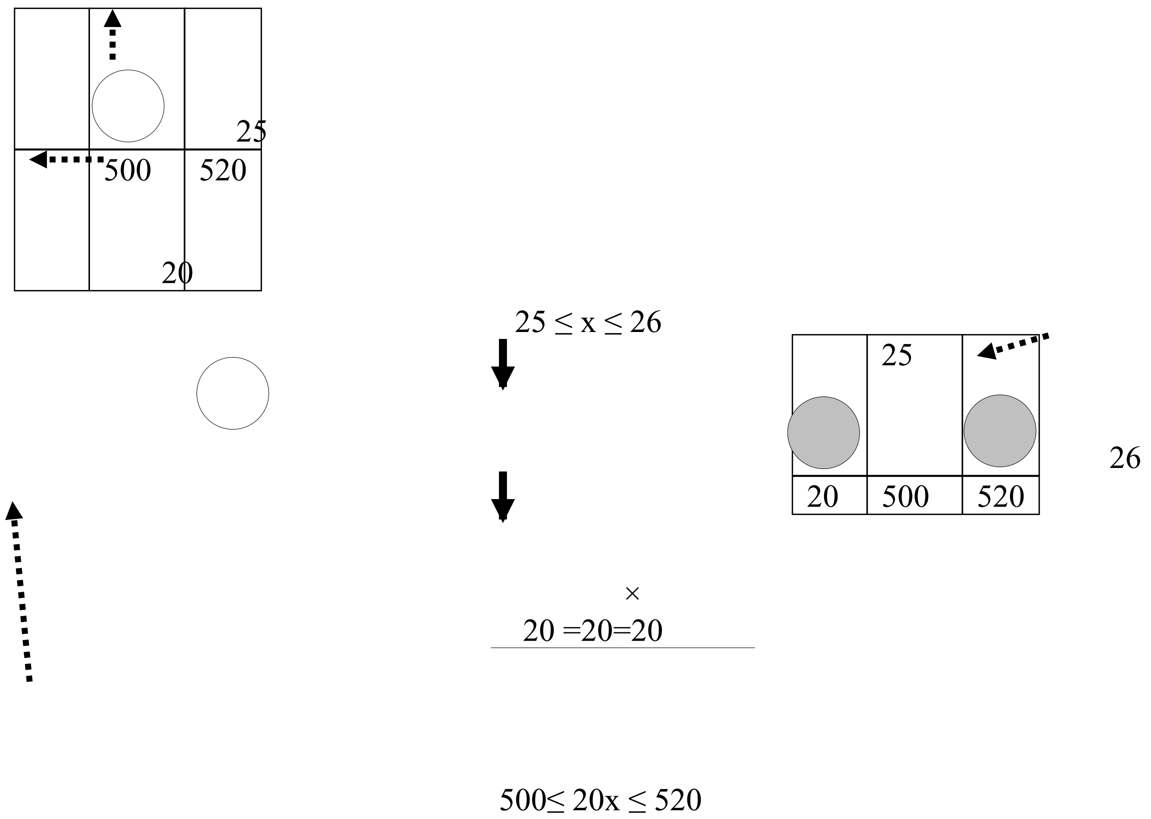
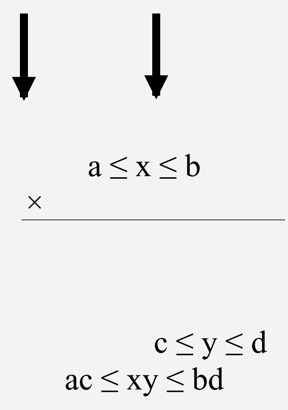


Рис.Н.2.2. Обчислювальні таблиці та схема-орієнтир для формування уявлень про множення наближених та точних значень



Множення наближених значень:

4. Запишіть наближені значення у вигляді подвійних нерівностей в стовпчик одне під одним.
5. Помножте нижні межі наближених значень (найменші їх значення). Отримане число є нижньою межею добутку наближених значень.
6. Помножте верхні межі наближених значень (найбільші їх значення). Отримане число є верхньою межею добутку наближених значень.
7. Запишіть остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності

Рис.Н.2.3. Узагальнена схема-орієнтир та алгоритмічний припис для виконання множення наближених значень

Рис.Н.2.3. Узагальнена схема-орієнтир та алгоритмічний припис для виконання множення наближених значень

Додаток Н.3

1. На пришкільному квітнику розцвіло приблизно 45 - 60 півоній. Учні вирішили подарувати ці квіти вчителям на свято «Останнього дзвоника». Із скількох квітів їм треба скласти букети, якщо на святковий вечір прийдуть 12 - 15 вчителів?

$12 \le y \le 15$

$45 \le x \le 60$

:

$3 \le x:y \le 5$

2. Корови на ферм щоденно споживають1980-2090 кг сіна. Скільки сіна з'їдає кожна корова, якщо їх на фермі налічується 110 голів?

$18 \le x:110 \le 19$

$1980 \le x \le 2090$

$110=110=110$

3 Батьки Сергія приготували 30 тістечок, щоб пригостити друзів, які прийдуть привітати його з днем народження. Скільки тістечок дістанеться кожній дитині, якщо їх разом з іменинником очікується 5-6 осіб?

$5 \le 30:x \le 6$

$30=30=30$

$5 \le x \le 6$

$a \le x \le b$: : $c \le y \le d$ $a:d \le x:y \le b:c$	Ділення наближених значень. 1. Запишіть наближені значення у вигляді подвійних нерівностей в стовпчик одне під одним. 2. Нижню межу діленого поділіть на верхню межу дільника. Отримане число є нижньою межею частки наближених значень. 3. Верхню межу діленого поділіть на нижню межу дільника. Отримане число є верхньою межею частки наближених значень. 4. Запишіть остаточну відповідь у вигляді подвійної нерівності

Рис.Н.3.1. Узагальнена схема-орієнтир та алгоритмічний припис для виконання ділення наближених значень

Додаток П

Приклади задач, які розв'язувались учнями під час впровадження розробленої методики (5 клас)

Додаток П.1

5 клас

Тема 1. Натуральні числа. Геометричні фігури і величини

Рис. П.1.1 Рис. П.1.2.

Спроби підрахунків Відповідь

№ 1 № 2 № 3 № 4 № 5

Рис. 1

Рис. 2

Рис. П.1.3

1. Практичне завдання. Не роблячи графічних поміток, полічи кількість кругів на рисунках по 5 разів (рис. П.1.1, рис. П.1.2). Результати запиши у таблицю. В останньому стовпчику таблиці запиши відповідь на запитання: «Скільки кругів намальовано на рисунках?».

2. Онуки приїхали до бабусі на літні канікули. Вона доручила їм полічити курей, які бігали по подвір'ю. Маринка налічила 22 курки, Микола - 25, Петрик – 26, а дідусь, який вийшов допомогти онукам, налічив 24 курки. Скільки приблизно курей знаходилась на подвір'ї?

3. Дуремар вирішив зробити переоблік у своїй казковій аптеці. Він узяв банку і почав лічити п'явок, що знаходились в ній. Налічив 25 штук. Але вони увесь час рухались і Дуремар вирішив перелічити їх ще раз – отримав 27 п'явок. Після ще кількох спроб він отримав 26 та 24 штуки. Скільки приблизно п'явок у Дуремара, якщо він має 5 однакових банок з п'явками?

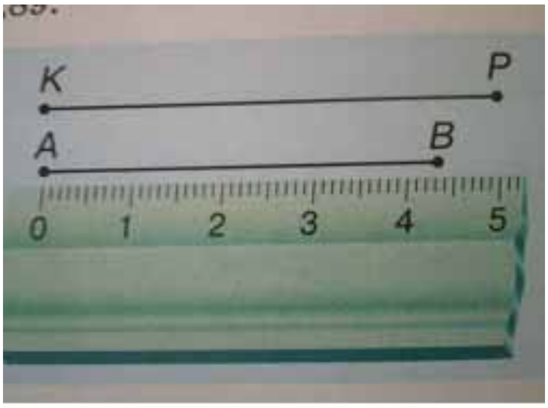


Рис. П.1.4

4. Запишіть у сантиметрах довжину відрізка AB у вигляді подвійної нерівності (рис. П.1.4).

5. Запишіть у сантиметрах довжину відрізка AB використовуючи знак наближеної рівності (рис. П.1.4)?

6. З'ясовуючи довжину відрізка AB, Сашко відповів, що вона приблизно дорівнює 5 см, а Сергій – 4 см. Хто із хлопців точніше визначив довжину відрізка AB (рис. П.1.4)?

7. У кошик Червоної Шапочки може поміститись приблизно 10 - 15 пиріжків. Накресліть у зошити координатний промінь, взявши за одиничний відрізок одну клітинку. Позначте на ньому точки, що відповідають числам 10 і 15. Наведіть приклади того, скільки пиріжків може поміститись у кошик Червоної Шапочки та зробіть відповідні позначення на координатному промені.

8. Марина пішла у крамницю купити хлібину та пакет молока. У крамниці є хліб та молоко різних виробників. Їх ціна різна, зокрема хліб коштує від 1 грн 60 к. до 2 грн 50 к., а молоко – від 4 грн 80 к. до 6 грн 10 к. Кільки грошей необхідно взяти Марині із собою до крамниці?

9. На початку подорожі за показниками приладів бак автомобіля містив 25 - 30 л бензину, а по її завершенню – 10 - 15 л. Скільки бензину було витрачено протягом подорожі?

10. У дендропарку налічується приблизно 300 - 320 дерев. В результаті санітарної чистки вирубали 18 дерев. Скільки дерев залишилося у дендропарку?

11. Їдальня придбала 17 кг м'яса. Протягом першого дня для приготування страв було використано 4 – 5 кг м'яса. Скільки м'яса залишилося?

12. Дільничний лікар за годину приймає 3-5 пацієнтів. Скільки пацієнтів може прийняти лікар за робочий день, якщо він триває 3-4 години?

13. Бабуся для консервування придбала 13 кг помідорів. Скільки штук помідорів придбала бабуся, якщо на 1 кг йде приблизно 8-10 штук помідор?

14. Кухарі шкільної їдальні щоденно випікають 200 – 300 одиниць хлібобулочних виробів. Усі вони розкуповуються школярами. За підрахунками чергових до їдальні щоденно приходять 150 – 200 учнів. Скільки приблизно хлібобулочних виробів купляє кожен учень у день?

15. Два класи планують поїхати на екскурсію. Скільки автобусів треба замовити, якщо кожен автобус вміщує 15 – 20 пасажирів (автобуси різних марок), а у кожному класі навчається по 30 учнів?

16. Мешканці жилого багатоквартирного будинку споживають за місяць 480 - 672 кубометри (м3) води. Скільки приблизно води споживають за місяць мешканці однієї квартири, якщо у будинку 96 квартир?

Тема 2. Дробові числа

17. Скільки потрібно ящиків для упакування 223 кг яблук, якщо місткість кожного ящика становить 20 кг?

18. Скільки можна купити зошитів по 55 к. на 2 грн 65 к.?

19. 26 учням класу доручено посадити не менше ніж 63 дерева. Скільки дерев повинен посадити кожен учень, якщо вони вирішили посадити дерев порівну?

20. Побудувати квадрат, периметр якого 9,3 см.

21. Розграфити аркуш паперу шириною 85 см на 6 колонок.

22. Відомо, що число 35 є результатом округлення з доповненням. До округлення воно містило один десятковий знак. Вкажіть межі, в яких містилось число 35 до округлення. Відповідь наведіть у вигляді подвійної нерівності.

23. Відомо, що число 35 є результатом округлення з доповненням. Наведіть приклад чому воно могло дорівнювати до округлення:
а) з одним десятковим знаком;
б) з двома десятковими знаками.

24. У класі навчається 33 учні. Двох з них батьки вдома запитали, скільки учнів навчається в їх класі. Перший школяр відповів: „ Близько 30 учнів”, а другий: „Десь 40 учнів”. Хто із школярів точніше відповів на запитання батьків?

25. Наведіть (у вигляді подвійної нерівності) з недостачею та надлишком значення числа 11,3333 ... , які мають:
а) лише цілу частину; б) один десятковий знак; в) два десяткових знака.

26. Наведіть (у вигляді подвійної нерівності) з недостачею та надлишком значення числа , які мають: а) лише цілу частину; б) один десятковий знак; в) два десяткових знака.

27. За перший день туристи пройшли приблизно від 6,3 до 6,5 км. А за другий на кілометр-півтора менше. Скільки приблизно кілометрів пройшли туристи протягом другого дня? Скільки приблизно кілометрів пройшли туристи за два дні?

28. В один з днів змагань яхта „Біда” рухалась приблизно зі швидкістю від 26,5 до 28,5 км/год. Яку приблизно відстань вона подолала, якщо цього дня змагання тривали приблизно 9 - 10 годин?

6 клас

Тема 1. Подільність чисел

29. Між якими двома найближчими числами, кратними 3, знаходиться десятковий дріб 12,9? Відповідь наведіть у вигляді подвійної нерівності.

30. Назвіть верхню та нижню межі наближеного значення х. Наведіть приклади наближеного значення х, які кратні 6, якщо $18 \le x \le 31$.

31. Відмітьте на координатному промені межі та кілька прикладів наближеного значення х, що є парними числами, якщо $8 \le x \le 13$.

Тема 2. Звичайні дроби

32. Марічка пригощала своїх друзів святковим тортом. Дівчатка з’їли більше ніж чверть, але менше ніж третину торту. А хлопці – більше ніж третину, але менше чим половину торту. Скільки приблизно торту з’їли друзі Марічки?

33. На пришкільній ділянці учні мали посадити 60 кущів. Відомо, що з них п’ятикласники

посадили більше ніж , але менше ніж частину. А десятикласними більше ніж половину, але менше чим дві третини з усіх кущів. Скільки кущів залишилося посадити учням інших класів?

34. Яке з десяткових наближень точніше відображає значення дробу : 0,3 чи 0,4?

Тема 3 .Відношення і пропорції

35. Вимірюючи по карті відстань між Києвом і Тернополем отримали такий наближений результат 7,2 см ≤ s ≤7,3 см. Яка дійсна відстань між цими містами, якщо масштаб карти 1 : 5 000 000?

36. Заробітна платня батьків приблизно становить від 2 до 2,5 тис. грн. З неї щомісяця вони 10 % відкладають на літню відпустку. Скільки грошей відкладуть батьки за рік?
37. Руда містить від 60 % до 62 % заліза. Скільки треба взяти руди щоб отримати 70 – 72 т заліза?

38. Необхідно з'ясувати кількість риби у ставку. Для цього у ставок випустили 100 мічених рибин . Визначить наближену кількість риби у ставку, якщо із 50 рибин, що спіймали, 3 виявились міченими.

39. На рисунку зображена стовпчаста діаграма розподілу ділянок лижної дистанції у кілометрах. Знайдіть довжину лижної дистанції, яка включає в себе спуски, підйоми та прямолінійні ділянки (рис. П.1.5).

40. За тиждень в їдальні витратили приблизно 63,5 - 64,3 кг цукру. З них 20-25 % було витрачено в понеділок. Скільки приблизно кілограм цукру було витрачено в понеділок?

41.Вимірюючи по карті відстань між Києвом і Тернополем отримали такий наближений результат 7,2 см < s <7,3 см (масштаб карти 1:5 000 000). За який час її можна подолати літаком, якщо швидкість літака 400-450 км/год?

Тема 4. Раціональні числа та дії над ними

42. Назвіть та позначте на координатній прямій межі н 2006 року (-5,4)0 С < t < (-2,2)0 С. Наведіть приклад позначте їх на координатній прямій.

43. У лютому цього року температура повітря коливал минулому році вона була на 30С - 50С нижчою. Яка минулого року?

44. Вдень порівняно з ранком температура повітря підн вранці температура була -90С…- 40С.

Рис. П.1.6

7 клас. Алгеб

Тема 1. Лінійні рівняння з о

45. На двох пакетах із цукром вказана їх маса. На одно якому з пакетів точніше вказана вага цукру?

Рис. П.1.7

46. Побудуйте відрізок довжиною 15 см. Без застосування вимірювальних засобів («на око») розділіть його на 5 рівних частин. Виміряйте кожну з отриманих частин. Знайдіть для кожної з частин величину отриманої помилки.

47. Визначте межі наближеного значення температури, при яких можна зберігати продукти, що зображені на рис. П.1.6. та рис. П.1.7. Зобразіть їх на координатній прямій. Запишіть наближене значення температури у вигляді подвійної нерівності. Наведіть по два приклади наближеного значення температури, при яких можна зберігати продукти, а при яких не можна.

48. Прочитайте речення: «В пляшці міститься 900 ± 10 г соку». Знайдіть межі наближеного значення. Запишіть наближене значення у вигляді подвійної нерівності. Чи може в пляшці міститись:
а) 905 г соку; б) 920 г соку; в) 895 г соку; г) 800 г соку?

49. Господиня придбала пакет із сіллю, на якому був напис «маса нетто (1500 ± 45) г». За рецептом треба відміряти 5 порцій по 300 г, що господині не вдалося. Почавши приготування, вона відміряла лише 4 повні порції по 300 г, а п'ята виявилася неповною –лише 270 г. Поясніть чому так сталося. Чи правильно вказана маса солі на упаковці?

50. Чергові порахували кількість учнів школи, що були присутні на першому уроці. Перший з них отримав результат 729 учнів, другий - 734 учні, третій - 725 учнів, а четвертий і п'ятий по 730 учнів. З якою точністю виконано підрахунки черговими?

Тема 2. Цілі вирази

51. Бак має форму куба. Під час вимірювання з'ясувалось, що його ребро а має довжину 3,20 м $< a <$ 3,25 м. Чи поміститься в бак 24,5 т бензину (густина бензину 710 кг/м3)?

52. Шланг довжиною 5 м ± 5 % подає для поливу струю води довжиною 2,0 – 2,5 м. Яку територію можна полити цим шлангом, приєднавши його до джерела води посередині городу?

53. Під час підрахунку покупців, які відвідали торгівельний центр протягом тижня, із різних джерел були отримані такі данні: 2780, 2716, 2746, 2768 та 2785 осіб. У якому випадку відображені відомості відповідають дійсності:
а) 2750 ± 35 осіб; б) 2750 осіб ± 1 %;
в) 2750 осіб ± 1,3 %; г) 2750 осіб ± 35 %.

Тема 3. Функції

54. За графіком функції необхідно з'ясувати, в якій точці пряма y=-5x+4 перетинає вісь ОХ.

Учнями були отримані такі відповіді: Сашком - x=0,5; Мариною - ; Олексієм - x=0,6; Яриною - x=0,9. Хто з учнів найточніше визначив абсцису точки перетину?

Тема 4. Система лінійних рівнянь з двома змінними

55. На прямій, що є графіком рівняння x+3y=4, взято точку, абсциса якої дорівнює 2. Знайдіть за графіком ординату цієї точки. Обчисліть абсолютну похибку отриманого результату.

Рис. П.1.8

56. Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом та способом підстановки. Обчисліть абсолютну похибку результатів, що отримані графічним способом.

7 клас. Геометрія
Тема 1. Найпростіші геометричні фігури та їх властивості.
Тема 2. Взаємне розташування прямих на площині

57. Побудуйте суміжні кути ACD та BCD. Виміряйте їх та знайдіть суму отриманих значень величин. Визначте абсолютну похибку отриманого результату.

58. Побудуйте кут AOD0 та вертикальний йому кут BOE. Виміряйте кут BOE. Визначте абсолютну похибку отриманого результату.

59. Побудуйте дві паралельні прямі a і b та січну c, яка утворює із прямою b кут 630. Виміряйте кути, які січна c утворює з прямою a. Визначте абсолютну похибку отриманих результатів (рис . П.1.8).

Тема 3. Трикутники.
Тема 4. Коло і круг. Геометричні побудови

60. Побудуйте довільний рівнобедрений трикутник ABC з кутами при основі C = B = 360. Побудуйте медіану AO. Виміряйте кути CAO, BAO, AOC та AOB. Обчисліть відносну похибку отриманих результатів.

61. Побудуйте трикутник ABC зі сторонами 5,3 см, 6,1 см, 6,1 см та бісектрису кута при вершині CO. Виміряйте довжину відрізка AO. Обчисліть відносні похибки отриманих результатів.

8 клас. Алгебра
Тема 1. Раціональні вирази

62. Витрати сім'ї на харчування протягом місяця становлять 820 грн ± 10 %. Яку суму коштів слід відкладати на харчування на початку місяця?

63. За документами автомобільний причеп допускає перевезення ваги 550 кг ± 8 %. Один із господарів перевозив на такому причепі вантаж у 600 кг, другий – 575 кг, а третій – 558 кг. У разі поломки причепу, хто із господарів може вимагати відшкодування від виробника або торгівельної організації?

64. Дарина купуючи пакунок із цукром, прочитала на ньому напис: «Маса нетто 1000 ± 20 г». З цього вона зробила висновок, що в пакунку міститься 980 – 1020 г цукру. Її подруга Галина також придбала цукор. Із напису «1000 г ± 3 %» вона зробила висновок, що в пакунку міститься 997 - 1003 г цукру. Хто із подруг зробив правильний висновок, а хто хибний? Наведіть правильний висновок замість хибного.

Тема 2. Квадратні корені. Дійсні числа

65. Акваріум, запланований до виготовлення у формі куба, повинен мати об’єм 0,3 - 0,4 м3. Якими повинні бути його лінійні розміри (висота, ширина, довжина)?

66. Під час реконструкції площа спортивного залу (215м2), який має форму квадрату, може змінитись не більше ніж на 1 %. Якими будуть розміри спортивного залу після реконструкції?

67. Користуючись графіком функції визначте наближене значення 2,62. За допомогою мікрокалькулятора обчисліть абсолютну похибку отриманого результату.

68. Користуючись графіком функції визначте наближене значення . За допомогою мікрокалькулятора обчисліть точність отриманого результату.

Тема 3 .Квадратні рівняння

69. За допомогою графіків лінійної та квадратичної функцій з’ясуйте, чи буде мати розв’язки квадратне рівняння .

70. Розв’яжіть графічно рівняння. Обчисліть точність отриманих результатів, розв’язавши рівняння алгебраїчно:

а) ; б) .

8 клас. Геометрія

Тема 1. Чотирикутники. Тема 2 .Подібність трикутників

71. Побудуйте довільну трапецію з основами 7,8 см та 11,3 см. Проведіть середню лінію трапеції та виміряйте її довжину. Обчисліть відносну похибку результату.

72. Побудувати трикутник АВС зі сторонами 2 см, 4 см та 5 см та подібний йому трикутник А`В`С` з коефіцієнтом подібності 2. Виміряйте кути та обчисліть відносну похибку отриманих результатів, узявши за точне значення міри кутів трикутника АВС.

Тема 3. Многокутники. Площі многокутників.

Тема 4 .Розв’язування прямокутних трикутників.

73. Побудуйте опуклий семикутник. Виміряйте його кути та знайдіть їх суму. Обчисліть відносну похибку результату.

74. За допомогою косинця або транспортира побудуйте прямокутний трикутник з катетами 5,4 см та 7,3 см. Виміряйте довжину гіпотенузи. Обчисліть відносну точність отриманого результату.

9 клас. Алгебра

Тема 1. Нерівності

75. Знайдіть межі значення виразів $x \cdot y$ та , якщо $1{,}0 \le x \le 5{,}1$; $-14{,}7 \le y \le -5{,}3$.

76. Знайдіть межі значення виразів $x \cdot y$ та , якщо $-5{,}1 \le x \le 1{,}0$; $5{,}3 \le y \le 14{,}7$.

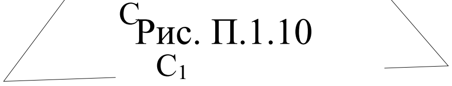


Рис. П.1.10

77. Наближена відстань від Землі до Сонця дорівнює 149,5 млн км. Протягом року ця відстань змінюється майже на 2,502 млн км. Запишіть вказані відомості у вигляді подвійної нерівності, у вигляді умовної рівності та із використанням знака модуля.

78. Із довідника відоме наближене значення радіуса Землі $|R_{Землі} - 6370 км| \le 10{,}5$ км. Чи може довжина екватора дорівнювати 40 000 км?

Тема 2 .Квадратична функція

79. Побудуйте графік функції 3х2+6х-5=0. За графіком знайдіть нулі функції. Визначте точність отриманих результатів.

Тема 3. Елементи прикладної математики.

Тема 4. Числові послідовності

80. Підприємство протягом місяця витрачає приблизно 16 мотків спеціального шнура, довжина кожного з яких 100 ± 3 % футів (виробництво Велика Британія). Скільки коштів треба запланувати на вказані витрати, якщо 1 м такого шнура коштує 1,30 - 1,50 грн? Відомо, що один метр становить приблизно 3,28 футів.

81. Світло, розповсюджуючись зі швидкістю приблизно 300 000 км/с, проходить відстань від Сонця до Землі близько 8,3 хв. Обчислити відстань від Землі до Сонця на момент отримання вказаних даних. Перевірити правильність отриманої відповіді, якщо відомо, що вказана відстань протягом року змінюється приблизно від 146998000 км до 152 002 000 км.

82. На рисунку П.1.9 зображена стовпчаста діаграма розподілу ділянок лижної дистанції у кілометрах. Знайдіть довжину лижної дистанції, яка включає в себе спуски, підйоми та прямолінійні ділянки. Скільки відсотків становить кожна з них до загальної довжини лижної дистанції?

9 клас. Геометрія

Тема 1. Розв'язування трикутників.

Тема 2. Правильні многокутники

83. У коло радіуса 3 см вписати семикутник. Виміряти одну із сторін та один із кутів побудованого семикутника. Обчислити відносну точність виконаних побудов та вимірювань.

84. Частина трикутника пошкоджена (рис. П.1.10). Обчисліть площу трикутника, яку він мав до пошкодження, виконавши необхідні вимірювання. Обчислити відносну точність виконаних отриманих результатів.

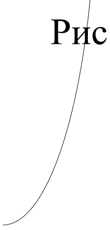
Тема 4. Геометричні перетворення.

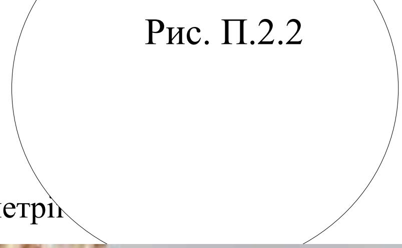
Тема 3. Декартові координати на площині

85. Обчисліть координати середини відрізка АВ. Визначте точність отриманих результатів (рис. П .1.11).

86. Побудуйте трикутник АВС зі сторонами 6,2 см, 4,3 см та 3,1 см. Оберіть довільну точку О центром гомотетії. Побудуйте трикутник А1В1С1 подібний до трикутника АВС з коефіцієнтом подібності k=3. Виміряйте одну із сторін трикутника А1В1С1, обчислити відносну точність виконаних отриманих результатів (рис. П.1.12).

Рис. П.2.1 Рис. П.2.2





Тема 5. Вектори на площині

Тема 6. Початкові відомості з стереометрії

87. Скільки пачок гречаної крупи поміститься у надану посудину (рис. П.1. 13). Щільність гречаної крупи 1220 - 1240 кг/м3 (під час розв’язування задачі учні вимірюють лінійні розміри запропонованої посудини).

Рис. П1.13

Дод

Задача 1. Побудувати графік функції 3х2+6х-5 =0. За графіком знайти нулі функції.
Визначити точність отриманих результатів.

Зауваження: приклади розв’язування аналогічних завдань для 8 та 9 класів із застосуванням ІКТ наведені у додатку У.

Коментарі до розв’язування задачі: Для побудови графіка учні за відомими формулами знаходять координати вершини параболи (-1; 8). Після чого складають таблицю значень квадратичної функції та будують відповідний графік функції (рис. П.2.1).

Визначаючи за графіком нулі функції, учні можуть по-різному записувати результати своїх дій. Розглянемо ці випадки.

а) Учні наводили результати з точністю до 0,5:
-3 < х1 < -2 тому х1=-2,5±0,5;
0 < х2 < 1 тому х2=0,5±0,5.

б) Учні наводили результати з точністю до 0,25:
-3,0 < х1 < -2,5 тому х1
0,5 < х2 < 1,0 тому х2

в) Учні наводили результати із використанням знаку наближеної рівності: х1 ≈ -2,8 та х2 ≈ 0,9.

З’ясування їх точності вимагало розв’язування відповідного квадратного рівняння алгебраїчним способом:

Кожен із наведених розв’язків розцінювався як правильний підхід до розв’язування задачі. Надання такої «свободи дій» переслідувало таку мету.

- По-перше (йдеться про випадки а) і б)), активізувати уявлення про те, що для запису наближених значень краще використовувати по-можливості «вужчі» межі. Формування вказаних уявлень було розпочато ще наприкінці 6 класу.
- По-друге (йдеться про випадок в)), актуалізувати уявлення учнів про запис наближених значень із використанням знака ≈, що стане необхідне під час ознайомлення учнів із правилами підрахунку правильних цифр.

Задача 2. У коло радіуса 3см вписати семикутник. Виміряти один із кутів побудованого семикутника. Обчислити точність отриманого результату.

Коментарі до розв’язування задачі: Креслення виконують учні за правилами побудов правильних многокутників, використовуючи циркуль та лінійку (рис П.2.2). Для цього їм треба обчислити довжину сторони семикутника. Вони обчислюють її за формулою, що виражає залежність між радіусом описаного кола та стороною у правильному многокутнику:

Учні, не округлюючи дріб, виконують обчислення за допомогою калькулятора або ІКТ (зокрема пакету Excel (рис. П.2.3).

Отриманий результат округлюють до десятих. Точність округлення обумовлена точністю наявних засобів вимірювань, що використовуватимуться під час подальших побудов: .

За допомогою транспортира учні вимірюють один із кутів семикутника: .
З'ясувати точність отриманого результату можна, визначивши точне значення величини кута правильного семикутника. Учні обчислюють його за відомою формулою:

За отриманими даними учні легко обчислюють точність отриманого результату:

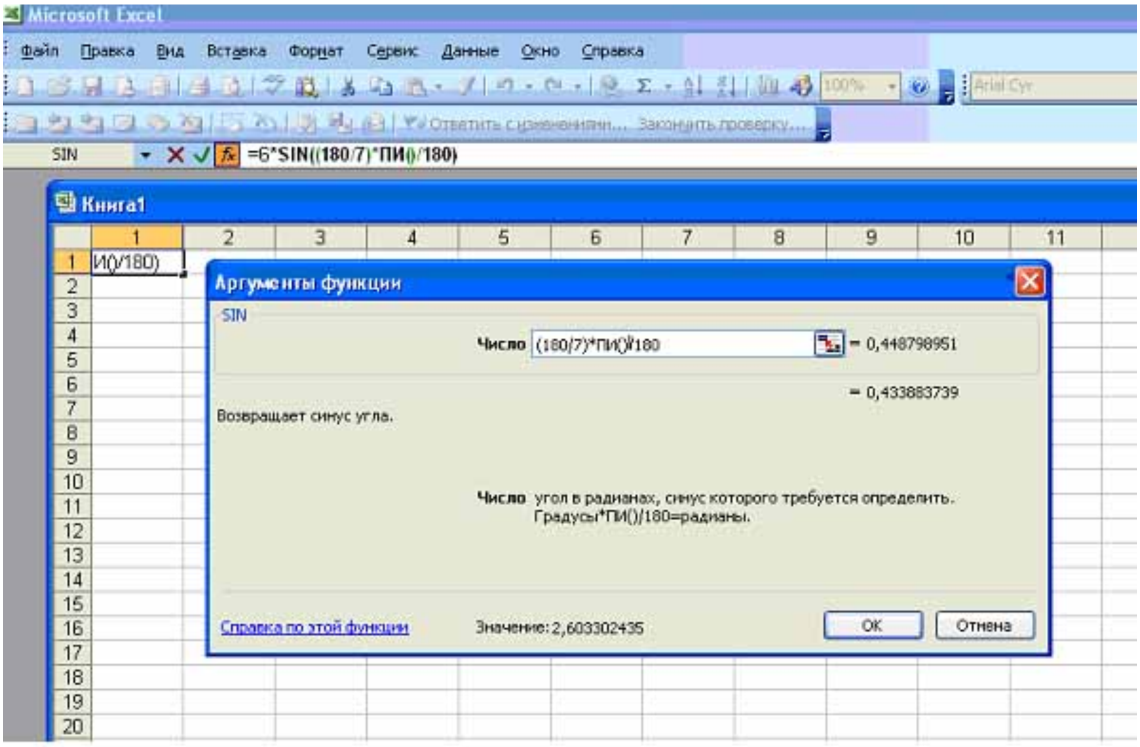


Рис.П.2.3

Додаток Р.

Організаційна модель для проведення гри „Хто найкращий вимірювач?"

7 клас. Тема. Цілі вирази.

Підготовка до гри: Учитель об'єднує учнів у 12 гомогенних груп. Різні групи отримують різні завдання. Вони є майже однаковими за змістом, але незначною мірою відрізняються за рівнем володіння учнями навичками вимірювань та геометричних побудов: 1 - 4 групи складають учні обов'язкового рівня навченості; 5 - 8– середнього; а 9 - 12 – підвищеного.

Перед початком гри проводиться актуалізація опорних знань, зокрема повторення елементів та властивостей прямокутника; уявлень про прямокутний трикутник, про абсолютну похибку, модуль числа, відсотки та округлення чисел.

Із представників кожного рівня навченості обирається журі (3 учня). Вони займаються оформленням підсумовуючої таблиці, а також оголошенням проміжних та остаточних результатів.

Вчитель скеровує хід гри, а також виконує функції консультанта для кожної із груп.

Хід гри

1. Кожна група отримує картки з переліком обладнання та завданням:

1 та 2 групи

Завдання: Побудуйте прямокутник зі сторонами 6,3 см та 8,4 см. Проведіть в ньому будь-яку діагональ та виміряйте її. Результати запишіть та подайте журі.
Обладнання: папір у клітинку, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир.

3 та 4 групи

Завдання: Побудуйте прямокутник зі сторонами 7,2 см та 9,6 см. Проведіть в ньому будь-яку діагональ та виміряйте її. Результати запишіть та подайте журі.
Обладнання: папір у клітинку, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир.

5 та 6 групи

Завдання: Побудуйте прямокутник зі сторонами 3,9 дм та 5,2 дм. Проведіть в ньому будь-яку діагональ та виміряйте її. Результати запишіть та подайте журі.
Обладнання: нелінований папір, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир.

7 та 8 групи

Завдання: Побудуйте прямокутник зі сторонами 4,2 дм та 5,6 дм. Проведіть в ньому будь-яку діагональ та виміряйте її. Результати запишіть та подайте журі.
Обладнання: нелінований папір, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир.

9 та 10 групи

Завдання: Побудуйте прямокутний трикутник із гіпотенузою 6,5 дм та будь-яким катетом 5,2 дм. Виміряйте довжину катета, отриманого внаслідок побудов. Результати запишіть та подайте журі.
Додаткова інформація: у прямокутному трикутнику сторона, яка лежить навпроти прямого кута називається гіпотенузою, а дві інші сторони називають катетами.
Обладнання: нелінований папір, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир, циркуль.

11 та 12 групи

Завдання: Побудуйте прямокутний трикутник із гіпотенузою 17 см та будь-яким катетом 13,6 см. Виміряйте довжину катета, отриманого внаслідок побудов. Результати запишіть та подайте журі.
Додаткова інформація: у прямокутному трикутнику сторона, яка лежить навпроти прямого кута називається гіпотенузою, а дві інші сторони називають катетами.
Обладнання: нелінований папір, лінійка із сантиметровими та міліметровими поділками, косинець, транспортир, циркуль.

2. Учні виконують завдання та подають отримані результати членам журі, які заносять їх у таблицю (другий стовпчик).
3. Учитель ініціює дискусію, яка може мати такий вигляд:

Вчитель: У кожній грі мають бути переможці. Як нам визначити переможця? Як визначити хто точніше зробив вимірювання?
Учні: Треба визначити хто зробив найменшу помилку. Якби нам були відомі точні значення тих довжин, які ми вимірювали, то ми б могли обчислити її за допомогою абсолютної похибки.
Вчитель: Під час вивчення геометрії у наступних класах ми будемо вчити, що довжини відрізків, які необхідно було виміряти можна знайти і математичними методами, зокрема за допомогою теореми Піфагора. Вони наведені у третьому стовпчику таблиці, який закрито аркушем паперу і який зараз ми відкриємо.

4. Кожна з команд обчислює абсолютну похибку, яка ними була припущена в результаті побудов та вимірювань. Отримані результати вони подають членам журі, які заносять їх у

таблицю (четвертий стовпчик).

5. Учитель підсумовує діяльність учнів.

Вчитель: Абсолютна похибка отриманих результатів для усіх команд складає усього декілька міліметрів. Тобто різниться не принциповим чином. Як же визначити хто найкраще виконав вимірювання? Можливо учнів усіх команд, які отримали найменшу абсолютну похибку (0,1 см – 1 , 2, 9 та групи) і визнати найкращими вимірювачами?

Учні: Ми не згодні. Учням, які опрацьовували більші за розмірами геометричні фігури, було складніше це робити. Тому в їх „поганих” результатах (абсолютна похибка 0,2 - 0,4 см) винні не самі учні, а особливості запропонованих завдань. Можливо, це треба якимось чином врахувати?

Вчитель: Справді, для з’ясування якості вимірювання (тобто для з’ясування того хто краще виконав вимірювання) недостатньо знати лише величину абсолютної похибки. Необхідно враховувати її співвідношення з розмірами об’єкту, що досліджується. Для цього існує поняття „ відносна похибка”.

Таблиця Р.1

Результати вимірювань та підрахунків, що були виконані учнями під час ігрової діяльності

Групи	Відповіді, які отримали учні	Відповіді, які були відомі заздалегідь	Абсолютна похибка	Відносна похибка (%)
1	10,4 см	10,5 см	0,1 см	(0,1 см : 10,5 см)·100 % ≈ 0,96 %
2	10,2 см	10,5 см	0,3 см	(0,3 см : 10,5 см)·100 % ≈ 2,86 %
3	12,1 см	12,0 см	0,1 см	(0,1 см : 12,0 см)·100 % ≈ 0,84 %
4	12,2 см	12,0 см	0,2 см	(0,2 см : 12,0 см)·100 % ≈ 1,67 %
5	65,2 см	6,5 дм = 65 см	0,2 см	(0,2 см : 65 см)·100 % ≈ 0,31 %
6	64,6 см	6,5 дм = 65 см	0,4 см	(0,4 см : 65 см)·100 % ≈ 0,62 %
7	70,3 см	7,0 дм = 70 см	0,3 см	(0,3 см : 70 см)·100 % ≈ 0,43 %
8	70,2 см	7,0 дм = 70 см	0,2 см	(0,2 см : 70 см)·100 % ≈ 0,29 %
9	38,9 см	3,9 дм = 9 см	0,1 см	(0,1 см : 39 см)·100 % ≈ 0,26 %
10	39,1 дм	3,9 дм = 39 см	0,1 см	(0,1 см : 39 см)·100 % ≈ 0,26 %
11	10,5 см	10,2 см	0,3 см	(0,3 см : 10,2 см)·100 % ≈ 2,95 %
12	10,4 см	10,2 см	0,2 см	(0,2 см : 10,2 см)·100 % ≈ 1,97 %

6. Учитель наводить означення відносної похибки та відносної точності, формули для їх обчислення, а також «яскраві» іллюструючі приклади (відповідний матеріал викладено на сторінках діючих підручників для 8, 9

класів, а також підручників минулих років для 7, 8 класів).

7. Кожна команда обчислює відносну похибку, яка ними була припущена в результаті практичних побудов та вимірювань. Отримані результати вони подають членам журі, які заносять їх у таблицю (п’ятий стовпчик).
8. Журі підсумовує отримані відомості з допомогою діаграми.
9. Учитель аналізує результати гри, проводить невелику бесіду про джерела виникнення похибок, що були отримані учнями та оголошує переможців:

Додаток С.

Програма вивчення наближених обчислень в основній школі

1. Пояснювальна записка

1.1. Роль, загальні цілі та завдання вивчення наближених обчислень.

Формування різнобічно розвиненої особистості є основною метою сучасної школи. Математичні знання і вміння, в умовах розвивального навчання, розглядаються не стільки як самоціль, а як засіб розвитку особистості школяра, як засіб забезпечення його математичної грамотності, як засіб для формування здатності розуміти роль математики в оточуючому світі, зокрема з метою їх використання для задоволення пізнавальних і практичних потреб.

Під час вивчення наближених обчислень, як і інших тем та розділів шкільного курсу математики, є потенційна можливість щодо розвитку особистості учнів основної школи. В силу своєї предметної та практичної значущості вони дозволяють, наприклад, реалізовувати проективну діяльність підлітків, задовольняти їх прагнення до самостійності, сприяти підвищенню їх пізнавальних інтересів. Вивчення наближених обчислень також сприяє формуванню дослідницького та дивергентного мислення, володіння якими на разі є найбільш соціально замовленими та важливими.

Розвивальна мета вивчення наближених обчислень не витісняє загальноосвітню. Більше того, вона є недосяжною без оволодіння учнями базовими компонентами математичних знань та навичок їх застосування. Наближені обчислення, по-перше, становлять частину обчислювальної та вимірювальної культури школярів, по-друге, без наближених обчислень неможлива прикладна спрямованість навчання математики.

Прикладна спрямованість математики здійснюється за допомогою математичних моделей, тобто спеціального наближеного опису деякої проблеми, що дозволяє під час її аналізу застосовувати формально-логічний апарат математики. Математичне моделювання є лише наближеним описом деякої проблеми. Усі його етапи (побудова моделі; внтрішньомодельне розв’язування; інтерпретація одержаного розв’язання задачі і застосування його до вихідної ситуації) безпосередньо пов’язані з наближеними обчисленнями. Дані прикладних задач, якими оперують на першому етапі математичного моделювання, в більшості випадків мають наближений характер. Їх точність, спосіб отримання, а також точність, що пред’являється до майбутніх результатів, суттєво впливають на вибір математичної моделі та визначають вибір алгоритму внутрішньомодельного розв’язування. Наближені обчислення можуть мати місце і на другому етапі процесу математичного моделювання як для точних так і для наближених значень вхідних даних. В обох випадках важливим є оцінювання точності одержаного результату як з метою його подальшого застосування так і з метою остаточного усвідомлення.

1.2. Організація навчально виховного процесу.

Вивчення наближених обчислень учнями основної школи відбувається в урочний і позаурочний час. Основна увага приділяється навчально-дослідницькій, проективній та ігровій діяльності учнів. Зокрема учні залучаються до виконання задач практичного змісту, лабораторних робіт, створення та презентації проектів.

Мотивом і одночасно засобом забезпечення ефективності вивчення наближених обчислень є цілеспрямовано створена система задач. Вони ілюструють міжпредметні та внутрішньопредметні зв'язки наближених обчислень, а їх розв'язування забезпечує систематичне звернення до наближених обчислень.

Під час ведення відповідної діяльності в основному використовуються парні та групові форми організації навчання учнів, а також широко застосовуються ІКТ. ІКТ виступають засобом ілюстративного супроводження навчального матеріалу, ефективним засобом формування графічної культури учнів, надають можливість створення динамічних моделей та проведення обчислювальних експериментів.

1.3. Структура вивчення наближених обчислень.

У курсі математики основної школи через вікові особливості учнів, а також відповідно до традиційного програмного матеріалу, вивчення наближених обчислень відбувається у три етапи:
перший – у пропедевтичному курсі математики 5 - 6 класів;
другий – у систематичних курсах алгебри та геометрії 7 - 8 класів;
третій – у курсі геометрії та під час завершення вивчення систематичного курсу алгебри у 9 класі.

2. Цілі вивчення наближених обчислень

2.1. Цілі вивчення наближених обчислень у 5 - 6 класах:

■ ознайомлення та систематичний і послідовний розвиток понять про точні та наближені значення із широким залученням елементарних відомостей про числові нерівності;
■ формування уявлень про ступінь близькості наближеного значення до точного (усно та за допомогою координатної прямої (променя));
■ вироблення вмінь виконувати письмово арифметичні дії над наближеними значеннями, а також переводити практичні завдання (зокрема і прикладні задачі із простими математичними моделями) на мову математики;
■ підготовка учнів до вивчення числових характеристик наближених значень, а також до методів наближених обчислень (методу меж) у систематичному курсі алгебри.

Вивчення наближених обчислень базується на індуктивній основі із залученням дедуктивних міркувань, а також навчально-дослідницької діяльності учнів. Оволодіння учнями теоретичним матеріалом в основному відбувається на наочно-інтуїтивному та наочно-оперативному рівнях; математичні методи і закони формулюються у вигляді правил. Формується навчальний досвід учнів із залученням та корекцією їх життєво-практичного досвіду, прикладів з довкілля тощо.

Під час вивчення наближених обчислень учні отримують уявлення про основні джерела наближених значень чисел та величин; оволодівають навичками їх запису у різних формах, мовленнєвого відтворення та зображення на координатній прямій (промені); продовжують ознайомлення з геометричними поняттями, отримують початкові уявлення про теоретичні та практичні вимірювання величин; оволодівають навичками усно та письмово виконувати додавання і множення наближених значень, а також множення їх на точне значення; вчаться виконувати письмово віднімання та ділення наближених значень чисел та величин; роблять спроби внутрішньотематичного та внутрішньопредметного застосування вивчених відомостей з наближених обчислень на простих математичних моделях.

2.2. Цілі вивчення наближених обчислень у 7 - 8 класах:

■ систематизація та розширення відомостей про основні джерела наближених значень та форми їх запису, якими учні оволоділи під час вивчення наближених обчислень у 5 - 6 класах;

■ ознайомлення та систематичний і послідовний розвиток поняття про числові характеристики наближених значень; вироблення вмінь їх знаходження та взаємопереходу;
■ доповнення уявлень про математичні операції над наближеними значеннями, зокрема піднесення до степеня з натуральним та цілим показниками;
■ застосування вмінь виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями під час розв'язування завдань прикладного змісту та задач, що пов'язані із традиційним програмовим матеріалом.
■ підготовка учнів до вивчення методу меж та його використання на внутрішньопредметному та міжпредметному рівнях у завершальному курсі алгебри.

Вивчення наближених обчислень характеризується поступовим підвищенням теоретичного рівня. При цьому не знижується увага до навчально-дослідницької діяльності учнів, а також до оволодіння ними теоретичним матеріалом на наочно-оперативному рівні. Вони набувають нової якості: наочно-образний рівень сприйняття відомостей з наближених обчислень переростає у наочно-символьний, а наочно-оперативні вміння – у формально-оперативні. Вдосконалюється фонд дієвих знань учнів з наближених обчислень за рахунок доповнення і розширення відомостей про числові нерівності, а також їх ознайомлення з дійсними числами. Прикладна та практична спрямованість вивчення наближених обчислень виражається у цілеспрямованому розвитку необхідного математичного апарату.

Під час вивчення наближених обчислень учні отримують уявлення про точність та відносну точність наближених значень, а також їх окремі випадки - абсолютну та відносну похибки; оволодівають навичками їх знаходження, розпізнання, аналізу та оцінки; вчаться оперувати відповідною символікою; в них формується уміння переходити від абсолютних числових характеристик до відносних і навпаки; продовжують розвиватись уміння виконувати арифметичні дії над наближеними значеннями шляхом їх активного застосування, розширюють та поглиблюють уявлення про них.

2.3. Цілі вивчення наближених обчислень у 9 класі:
■ доповнення та узагальнення відомостей про числові характеристики наближених значень, якими учні оволоділи протягом вивчення наближених обчислень у 7 - 8 класах;
■ формування уявлень про метод меж як провідний метод наближених обчислень;
■ доповнення уявлень про форми запису наближених значень, їх аналіз, оцінка та подальше застосування;
■ вироблення вмінь впевнено використовувати метод меж на внутрішньопредметному та прикладному рівнях;
■ підготовка учнів до використання наближених обчислень під час подальшого вивчення математики та в межах інших дисциплін.

Вивчення наближених обчислень характеризується посиленням ролі абстрактно-теоретичних узагальнень та обґрунтувань. Вдосконалюються формально-оперативні алгебраїчні вміння, які дозволяють впевнено використовувати наближені обчислення в математиці та інших предметах, зокрема і як засобу математичного моделювання. Прикладна та практична спрямованість вивчення наближених обчислень доповнюється окремими аспектами, пов'язаними з ознайомленням учнів з теорією нерівностей, відсотковими розрахунками, початковими елементарними поняттями теорії ймовірностей і статистики.

Під час вивчення наближених обчислень учні отримують уявлення про прикидку точності наближених значень, які записані правильними числами; ознайомлюються з відповідною термінологією; вдосконалюють вміння аналізу та оцінки наближених значень з метою або їх подальшого використання в межах задачі або з метою остаточного усвідомлення.

3. Зміст навчання

У цьому розділі задається перелік та обсяг матеріалу для вивчення з наближених обчислень. Їх розподілення відрізняється від того, яке наведене в тематичному плануванні. Зміст наближених обчислень викладено відповідно до їх внутрішньої логічної структури. Це дозволяє вчителю, відволікаючись від місця конкретної теми з наближених обчислень в програмному курсі, оцінити їх значення як щодо самої змістової лінії „Наближені обчислення”, так і щодо традиційного програмового матеріалу. Виникає можливість правильно визначити та розставити акценти у навчанні, організувати контроль та повторення матеріалу.

МАТЕМАТИКА (5 - 6 класи)

Наближені та точні значення. Основні джерела наближених та точних значень: лічба, округлення, практичні вимірювання. Запис наближених значень за їх межами та із використанням знака наближеної рівності. Близькість наближених значень до істинних.

Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень, наближених і точних значень, які наведені у вигляді подвійних нерівностей. Округлення меж наближених значень чисел і величин.

Застосування вивчених відомостей з наближених обчислень під час розв'язування текстових і геометричних задач, а також практичних завдань.

АЛГЕБРА (7 - 8 класи)

Основні джерела наближених значень. Запис наближених значень у вигляді умовних рівностей.

Числові характеристики наближених значень: точність та відносна точність. Окремі випадки числових характеристик наближених значень: абсолютна та відносна похибки.

Піднесення наближених значень до степеня з натуральними та цілим показниками, добування арифметичного квадратного кореня.

Застосування вивчених відомостей з наближених обчислень під час розв'язування практичних і прикладних задач.

АЛГЕБРА (9 клас)

Наближені обчислення. Запис наближених значень правильними числами та із використанням знака модуля.

Метод меж.

Застосування вивчених відомостей з наближених обчислень під час розв'язування практичних і прикладних задач.

4.Тематичне панування навчального матеріалу

У цьому розділі визначено місце окремих елементів змісту навчального матеріалу з наближених обчислень у програмі з математики та сформульовані відповідні вимоги до підготовки учнів. У таблицях, що наведені нижче, вони виділені курсивом.

Навчальним матеріалом, який у своїй сукупності створює цілісну, логічно завершену змістову лінію, учні опановують у активному режимі під час навчання математики у 5 - 6 класах та алгебри у 7 - 9 класах. Під час навчання геометрії у 7 - 9 класах вивчення наближених обчислень відбувається у фоновому режимі. Зокрема під час розв'язування задач, які одночасно передбачають опрацювання і програмового навчального матеріалу, і застосування понятійного апарату або методів наближених обчислень.

Методика вивчення наближених обчислень в основній школі не передбачає залучення додаткового навчального часу, проте вимагає перенесення певних акцентів та використання відомостей з наближених обчислень під час вивчення традиційного програмового матеріалу. Останнє положення наразі знаходиться у стані розробки: його необхідно відобразити у чинних підручниках та навчальних посібниках, провести підготовку вчителів тощо. Тому на практиці залучення додаткового навчального часу все ж таки відбувається. Його орієнтовні обсяги у тематичному плануванні наведені так: 64 год+5 год. Тут 64 год передбачено на вивчення теми згідно програми, додаткових 5 год використовують для вивчення наближених обчислень.

5 клас

Зміст навчального матеріалу (за програмою 12-ти річної школи)	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Мета: Ознайомити учнів з наближеними значеннями як результатами підрахунків і практичних вимірювань на прикладі натуральних чисел . Сформувати в учнів уміння їх запису та виконання арифметичних дій над ними.	
Тема 1. Натуральні числа. Геометричні фігури і величини (64 год + 8 год) Натуральні числа. Порівняння натуральних чисел. Лічба. Достатня умова наближеності підрахунків. Межі наближених значень. Число нуль. Відрізок. Вимірювання і побудова відрізка. Практичні вимірювання. Промінь, пряма. Координатний промінь. Додавання і віднімання натуральних чисел. Додавання і віднімання наближених значень. Властивості додавання. Рівність фігур. Величина. Прямокутник, квадрат та їх периметри. Трикутник, його периметр. Види трикутників. Кут. Вимірювання і побудова кутів. Транспортир. Шкали. Види кутів. Бісектриса кута. Множення натуральних чисел. Множення наближених значень величин. Властивості множення. Квадрат і куб числа. Площа прямокутника. Площа квадрата. Прямокутний паралелепіпед, його виміри. Куб. Формули об’ємів прямокутного паралелепіпеда і куба. Ділення натуральних чисел. Ділення з остачею. Ділення наближених значень величин.	Розпізнає: натуральні числа; вказані у змісті фігури; шкали; числові та буквені вирази, формули, наближені та точні значення як результати підрахунків і вимірювань Наводить приклади: натуральних чисел; шкал; числових і буквених виразів; рівнянь , рівних фігур; наближених і точних значень як результатів підрахунків та вимірювань. Дотримується правил: читання та запису натуральних чисел; додавання, віднімання, множення і ділення натуральних чисел, порівняння натуральних чисел; знаходження меж наближених значень. Називає: класи та розряди натурального числа; вказані в змісті геометричні фігури та їх основні елементи; одиниці вимірювання довжини, площі й об’єму; приклади наближених значень за відомими межами. Читає і записує: наближені значення у вигляді подвійної нерівності, із використанням знака наближеної рівності та дефісу. Зображує: вказані у змісті геометричні фігури за допомогою лінійки, косинця, транспортира; координатний промінь і натуральні числа на координатному промені . Обчислює: суму, різницю, добуток та частку наближених значень чисел, що представлені у вигляді подвійних нерівностей. Описує поняття: промінь, координатний промінь; відрізок, кут, бісектриса кута; рівняння, розв’язок рівняння; теоретичні та практичні вимірювання, арифметичні дії над ними. Формулює: властивості арифметичних дій з натуральними числами; достатню умову наближеності підрахунків. Пояснює: що означає „розв’язати рівняння”,

<table>
<tr><td>Числові вирази. Буквені вирази та їх значення. Формули.
Рівняння. Розв’язування рівнянь.
Розв’язування текстових задач, зокрема комбінаторних.</td><td>Записує і пояснює: формули площі прямокутника, квадрата, об’єму прямокутного паралелепіпеда та куба.
Аналізує: залежності між величинами (швидкість, час і відстань; ціна, кількість і вартість тощо); степінь близькості наближених значень до точних.
Розв'язує вправи, що передбачають:
Порівняння натуральних чисел; вимірювання і порівняння відрізків, кутів; побудову відрізка даної довжини та кута даної градусної міри; побудову бісектриси кута за допомогою транспортира; виконання чотирьох арифметичних дій з натуральними числами; знаходження розв’язків лінійних рівнянь на основі залежностей між компонентами арифметичних дій; виконання чотирьох арифметичних дій з наближеними значеннями обчислення значень числових і буквених виразів; обчислення за формулами та за результатами вимірювань реальних об’єктів площі прямокутника, квадрата і об’єму прямокутного паралелепіпеда та куба.
Розв'язує вправи на ділення з остачею; нескладні текстові задачі, що вимагають використання залежностей між величинами.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Мета: Розширити уявлення учнів про наближені значення на прикладі десяткових дробів. Сформувати уміння виконувати арифметичні дії над ними. Ознайомити учнів з наближеними значеннями як середнім арифметичним їх меж.</td></tr>
<tr><td>Тема 2. Дробові числа (64 год + 8 год)
Дробові числа. Звичайні дроби. Правильні та неправильні дроби. Мішані числа.
Порівняння звичайних дробів з однаковими знаменниками.
Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.
Десятковий дріб. Запис і читання десяткових дробів.
Порівняння й округлення десяткових дробів. Види округлення.
Додавання, віднімання, множення та ділення десяткових дробів. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень. Округлення меж наближених значень. Відсотки. Знаходження відсотків від даного числа. Знаходження числа за його</td><td>Розпізнає: звичайний дріб, дробове число; десятковий дріб.
Розпізнає та наводить приклади: наближених значень як результатів округлення.
Дотримується правил: порівняння, додавання та віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками; порівняння, округлення, додавання, множення та ділення десяткових дробів; округлення меж наближених значень величин.
Формулює: означення правильного та неправильного дробів
Називає: розряди десяткових знаків у записі десяткових дробів.
Читає і записує: звичайні та десяткові дроби.
Пояснює: вид округлення, який необхідно застосувати зважаючи на умову задачі (з доповненням, з недостачею, з надлишком).
Описує: поняття масштаб, відсоток; правило порівняння десяткових дробів.
Записує і обчислює: наближене значення як середнє арифметичне його меж.
Аналізує: на координатному промені та усно ступінь близькості наближеного значення до точного.</td></tr>
</table>

відсотками. Масштаб. Середнє арифметичне, його використання для розв'язування задач практичного змісту. Наближене значення як середнє арифметичне його меж. Розв'язування текстових задач.	Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження дробу від числа й числа за його дробом; перетворення мішаного числа у неправильний дріб; перетворення неправильного дробу у мішане число або натуральне число; порівняння, додавання, віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками; порівняння десяткових дробів, додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів; виконання чотирьох арифметичних дій з наближеними значеннями чисел, зокрема в задачах практичного та геометричного змісту; округлення десяткових дробів до заданого розряду, а також зважаючи на умову задачі; використання масштабу; знаходження відсотків від числа та числа за його відсотками; знаходження середнього арифметичного кількох чисел, середнього значення величини. Розв'язує текстові задачі на основі аналізу залежностей між величинами, про які йдеться в умові, та прості задачі комбінаторного характеру.
Тема 3 Повторення та систематизація навчального матеріалу (12 год)	

6 клас

Зміст навчального матеріалу (за програмою 12-ти річної школи)	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Мета: Повторити поняття про межі наближених значень, подвійні нерівності, їх запис і зображення на координатному промені.	
Тема 1. Подільність чисел (10 год + 1 год) Дільники натурального числа. Ознаки подільності на 2, 3, 9, 5, 10. Прості та складені числа. Розкладання чисел на прості множники. Спільний дільник кількох чисел. Найбільший спільний дільник. Взаємно прості числа. Спільне кратне кількох чисел. Найменше спільне кратне.	Наводить приклади: простих і складених чисел; парних і непарних чисел; чисел, що діляться націло на 3, 5, 9, 10. Формулює: означення понять: дільник, кратне; просте число, складене число; спільний дільник, спільне кратне; ознаки подільності на 2, 3, 5, 9, 10. Описує: правила знаходження найбільшого спільного дільника (НСД) і найменшого спільного кратного (НСК) кількох чисел. Розв'язує вправи, що передбачають: використання ознак подільності чисел на 2, 3, 5, 9, 10; розкладання натуральних чисел на прості множники; знаходження спільних дільників і спільних кратних двох – трьох чисел; найбільшого спільного дільника (НСД) і найменшого спільного кратного (НСК) двох – трьох чисел.
Мета: Поглибити уявлення учнів про округлення як джерело наближених значень. Продовжити формування навичок застосування округлень і виконання арифметичних дій з наближеними значеннями, межі яких виражені звичайними дробами.	

Тема 2. Звичайні дроби (30 год + 7 год) Основна властивість дробу. Скорочення дробу. Найменший спільний знаменник. Зведення дробів до спільного знаменника. Порівняння дробів. Додавання, віднімання, множення і ділення звичайних дробів. Додавання, віднімання, множення і ділення наближених значень, межі яких є звичайними дробами. Знаходження дробу від числа і числа за його дробом. Перетворення звичайних дробів у десяткові. Нескінченні періодичні десяткові дроби. Десяткове наближення звичайного дробу. Розв’язування вправ на всі дії зі звичайними дробами. Розв’язування текстових задач.	Наводить приклади: звичайних дробів; десяткових дробів, зокрема нескінченних періодичних десяткових дробів. Використовує та пояснює: правила округлення та його види. Застосовує навички виконання дій над наближеними значеннями до розв’язування текстових задач. Описує правила: порівняння, додавання, віднімання, множення і ділення звичайних дробів; перетворення звичайного дробу в десятковий; знаходження дробу від числа та числа за його дробом. Формулює: основну властивість дробу Розв'язує вправи, що передбачають: необхідність округлення як з вказаною точністю , так і з точністю, що випливає із умови завдання; скорочення дробу та зведення дробів до спільного знаменника; порівняння дробів; додавання, віднімання, множення та ділення звичайних дробів; знаходження дробу від числа та числа за його дробом; запис звичайного дробу у вигляді десяткового дробу. Розв'язує текстові задачі, зокрема такі, що передбачають дії з наближеними значеннями, а також округлення з недостачею та надлишком.
Мета: Продовжити формування навичок виконувати арифметичні дії з наближеними значеннями зокрема в задачах геометричного змісту. Розпочати формування умінь обчислювати точність наближених значень.	
Тема 3. Відношення і пропорції (24 год + 2 год) Відношення. Основна властивість відношення. Пропорція. Основна властивість пропорції. Розв’язування рівнянь на основі властивостей пропорції. Випадкова подія. Імовірність випадкової події. Відсоткове відношення двох чисел. Відсоткові розрахунки. Задачі економічного змісту. Пряма пропорційна залежність. Задачі на пропорційний поділ. Коло. Круг. Довжина кола, площа круга та їх наближене знаходження. Круговий сектор. Стовпчасті та кругові діаграми.	Розпізнає: наближені значення величин як дані стовпчастих і кругових діаграм. Наводить приклади: пропорційних величин; випадкових подій Записує і обчислює: абсолютні похибки наближених значень. Застосовує навички виконання дії над наближеними значеннями чисел та величин до розв’язування задач на знаходження довжини кола та площі круга. Описує поняття: відношення; ймовірність випадкової події; пряма пропорційна залежність; коло; круг; круговий сектор. Формулює: означення пропорції, основну властивість пропорції. Записує і пояснює: формули довжини кола і площі круга Називає: наближене значення числа π. Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження відношення чисел і величин; знаходження невідомого члена пропорції; запис відсотків у вигляді звичайного та десяткового дробів; знаходження довжини кола та площі круга; побудова та аналіз стовпчастих діаграм, аналіз кругових діаграм.

<table>
<tr><td></td><td>Розв’язує: три основні задачі на відсотки; задачі на пропорційні величини і пропорційний поділ; задачі імовірнісного характеру.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Мета: Доповнити уявлення учнів про наближені значення на прикладі додатних і від’ємних чисел. Продовжити формувати вміння застосовувати вивчені відомості з наближених обчислень під час розв’язування задач.</td></tr>
<tr><td>Тема 4 Раціональні числа та дії над ними (64 год + 6 год)
Додатні та від’ємні числа. Число 0.
Координатна пряма. Округлення від’ємних чисел.

Протилежні числа. Модуль числа.
Цілі числа. Раціональні числа.

Порівняння раціональних чисел.
Додавання, віднімання, множення та ділення раціональних чисел. Додавання, віднімання, множення та ділення наближених значень, межі яких виражені раціональними числами.
Властивості додавання і множення раціональних чисел.

Розкриття дужок. Подібні доданки та їх зведення.

Рівняння. Основні властивості рівняння.

Перпендикулярні і паралельні прямі, їх побудова.
Координатна площина. Приклади графіків залежності між величинами.</td><td>Розпізнає: додатні і від’ємні наближені значення чисел та величин.
Наводить приклади: додатних і від’ємних чисел.
Називає: модуль даного числа; число, протилежне даному; коефіцієнт буквеного виразу.
Розпізнає і зображує: перпендикулярні та паралельні прямі; координатну пряму; прямокутну систему координат на площині.
Розпізнає подібні доданки.
Дотримується правил: округлення від’ємних чисел, виконання чотирьох арифметичних дій над наближеними значеннями.
Використовує відомості з наближених обчислень під час розв’язання задач практичного та геометричного змісту.
Описує: межі застосування правил виконання чотирьох арифметичних дій над наближеними значеннями.
Описує поняття: модуль числа; раціональне число; координатна пряма; координатна площина; подібні доданки; перпендикулярні прямі.
Формулює: правила виконання чотирьох арифметичних дій з додатними і від’ємними числами; розкриття дужок; зведення подібних доданків; основні властивості рівняння стовпчастих діаграм та аналіз кругових.
Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження модуля числа; порівняння раціональних чисел; додавання, віднімання, множення і ділення раціональних чисел; обчислення значень числових виразів, що містять додатні та від’ємні числа; розкриття дужок, зведення подібних доданків; знаходження координати точки на координатній прямій і побудову точки за її координатою; знаходження координат точки на координатній площині та побудову точки за її координатами; побудову перпендикулярних і паралельних прямих за допомогою лінійки і косинця; побудову окремих графіків залежностей між величинами за точками;
Аналізує графіки залежностей між величинами (відстань, час; температура, час тощо), числові дані, що отримуються під час розв’язування задач, при необхідності округлює або оцінює їх.</td></tr>
</table>

	Розв’язує рівняння з використанням правил, що ґрунтуються на основних властивостях рівняння; задачі за допомогою рівнянь.
Тема 5. Повторення і систематизація навчального матеріалу (12 год).	

7 клас

Зміст навчального матеріалу (за програмою 12-ти річної школи)	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Мета: Повторити і систематизувати уявлення учнів про основні джерела наближених значень чисел і величин. Сформувати уявлення учнів про точність та абсолютні похибки, уміння їх обчислення та округлення.	
Тема 1. Лінійні рівняння з однією змінною (9 год + 3 год) Лінійні рівняння з однією змінною. Розв’язування лінійних рівнянь. Розв’язування задач за допомогою лінійних рівнянь . Рівняння як математична модель задачі. Числові характеристики наближених значень. Точність та абсолютна похибка. Похибка округлення.	Розпізнає: лінійне рівняння серед даних рівнянь, кількісні та якісні числові характеристики наближених значень. Наводить приклади: лінійних рівнянь, випадків, коли можна визначити абсолютну похибку наближених значень, а коли лише їх точність. Характеризує етапи розв’язування задачі за допомогою рівняння. Дотримується правил: знаходження точності наближених значень, врахування похибки округлення. Розв’язує лінійні рівняння з однією змінною і рівняння, що зводяться до них; текстові задачі за допомогою лінійних рівнянь з однією змінною.
Мета: Повторити правила виконання арифметичних дій над наближеними значеннями . Сформувати уміння підносити наближені значення до степені з натуральним показником.	
Тема 2. Цілі вирази (47 год + 3 год) Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу. Тотожні вирази. Тотожність. Тотожні перетворення виразу. Доведення тотожностей. Степінь з натуральним показником. Піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником. Властивості степеня з натуральним показником.	Розпізнає: числові вирази та вирази зі змінними; цілі вирази; тотожні вирази; одночлени; многочлени. Наводить приклади: зазначених виразів; випадків, коли можна визначити відносну похибку наближених значень, а коли лише відносну точність. Дотримується правил: піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником. Описує: вплив тотожних перетворень виразів на точність їх числових значень. Обчислює: відносну точність та відносні похибки наближених значень.

Одночлен. Стандартний вигляд одночлена. Піднесення одночленів до степеня. Множення одночленів. Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Додавання та віднімання многочленів. Множення одночлена в многочленна; множення двох многочленів. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки та способом групування. Відносна точність, відносна похибка. Формули скороченого множення: квадрат двочлена, різниця квадратів, сума та різниця кубів. Використання формул скороченого множення для розкладання многочленів на множники.	Формулює: означення: одночлена, степеня з натуральним показником, многочлена, подібних членів многочлена; властивості степеня з натуральним показником; правила: множення одночлена та многочлена, множення двох многочленів. Записує і обґрунтовує: властивості степеня з натуральним показником; формули скороченого множення. Розв'язує вправи, що передбачають: обчислення значень виразів зі змінними; зведення одночлена до стандартного вигляду; перетворення добутку одночлена та многочлена; суми, різниці, добутку двох многочленів у многочлен; розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки, способом групування, за формулами скороченого множення та із застосуванням кількох способів; використання зазначених перетворень у процесі розв’язування рівнянь, доведення тверджень; знаходження відносної точності наближеного значення за відомим значенням його точності.
Мета: Продовжити формування умінь знаходити кількісні числові характеристики наближених значень.	
Тема 3 Функції (10 год + 1 год) Функція. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції. Графік функції. Функція як математична модель реальних процесів. Лінійна функція, її графік і властивості. Наближене знаходження окремих характеристик функції графічним способом.	Наводить приклади: функціональних залежностей; лінійних функцій. Записує: наближені відповіді до завдань. Формулює означення понять: функція; лінійна функція. Пояснює поняття: область визначення функції; область значень функції; графік функції. Називає і характеризує способи задання функції. Описує побудову графіка функції, заданої таблично або аналітично. Обчислює: точність наближених відповідей до завдань. Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження області визначення функцій; знаходження значення функції за даним значенням аргументу; побудову графіка лінійної функції; з’ясування окремих характеристик функції за її графіком (додатні значення, від’ємні значення, нулі), зокрема їх наближені значення.
Мета: Продовжити формування уявлень про наближений характер розв’язків, що отримані графічним способом, а також навичок знаходження кількісних числових характеристик одержаних наближених розв’язків.	

Тема 4. Системи лінійних рівнянь з двома змінними (14 год + 1 год) Рівняння з двома змінними. Розв’язок рівняння з двома змінними. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними та її розв’язок . Розв’язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними: способом підстановки; способом додавання. Розв’язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом; знаходження наближених відповідей. Розв’язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь.	Наводить приклади: рівняння з двома змінними; лінійного рівняння з двома змінними; системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Записує: наближені розв’язки, що отримані графічним способом Формулює означення: лінійного рівняння з двома змінними; розв’язку рівняння з двома змінними; розв’язку системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Обчислює: точність наближених розв’язків. Описує: способи розв’язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Дотримуються правил: округлення відповідей, або відповідно до вимоги, що наведена в задачі, або за змістом задачі. Розрізняє: системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, що мають: один розв’язок; безліч розв’язків; не мають розв’язків. Розв’язує системи двох лінійних рівнянь з двома змінними вказаними у змісті способами; задачі за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними.
Тема 5. Повторення та систематизація навчального матеріалу (6 год)	

8 клас

Мета: Сформувати вміння підносити наближені значення до степеня з цілим показником. Продовжити формування умінь знаходити кількісні числові характеристики наближених розв’язків.	
Тема 1. Раціональні вирази (32 год + 2 год) Дроби. Дробові вирази. Раціональні вирази. Допустимі значення змінних. Основна властивість дробу. Дії над дробами. Тотожні перетворення раціональних виразів. Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння. Розв’язування раціональних рівнянь.	Розпізнає: цілі раціональні вирази, дробові раціональні вирази, наводить приклади таких виразів. Описує: алгоритм скорочення дробу, алгоритм піднесення наближених значень до степеня з цілим показником. Формулює: основну властивість дробу; властивості степеня з цілим показником; Правила: додавання, віднімання, множення та ділення дробів, піднесення дробу до степеня; умову рівності дробу нулю;

Степінь з цілим показником і його властивості. Стандартний вигляд числа. Піднесення наближених значень до степеня з цілим показником. Функція , її графік і властивості. Наближене знаходження окремих характеристик функції графічним способом.	Означення: степеня з нульовим показником; степеня з цілим від'ємним показником; стандартного вигляду числа. Записує: наближені відповіді до завдань. Обчислює: точність наближених відповідей до завдань. Обґрунтовує властивості степеня з цілим показником Розв'язує вправи, що передбачають: скорочення дробів; зведення дробів до нового (спільного) знаменника; знаходження суми, різниці, добутку, частки дробів; тотожні перетворення раціональних виразів; розв'язування рівнянь зі змінною в знаменнику дробу; виконання дій над степенями з цілим показником; запис числа в стандартному вигляді; побудову та читання графіка функції , наближене знаходження окремих характеристик функції графічним способом; знаходження точності наближених значень за відомим значенням відносної точності.
Мета: Сформувати поняття про наближені значення дійсних чисел. Продовжити формування вмінь знаходити кількісні числові характеристики наближених розв'язків.	
Тема 2.Квадратні корені дійсні числа (14 год + 4 год) Функція y=x2 та її графік. Наближене знаходження окремих характеристик функції графічним способом. Квадратний корінь. Арифметичний квадратний корінь. Рівняння x2=a. Добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень. Округлення меж наближених значень. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа. Числові множини. Етапи розвитку числа. Наближені значення дійсних чисел. Арифметичний квадратний корінь з добутку, дробу і степеня. Добуток і частка квадратних коренів.	Описує поняття: раціональне число; ірраціональне число; дійсне число. Наводить приклади: раціональних чисел, ірраціональних чисел, наближених значень дійсних чисел. Дотримується правил: округлення дійсних чисел до вказаного розряду та їх оцінки Читає і записує: межі наближених значень дійсних чисел та їх точність. Класифікує дійсні числа Використовує тотожності , правило округлення меж наближених значень Формулює: означення: квадратного кореня з числа, арифметичного квадратного кореня з числа; властивості арифметичного квадратного кореня; правила добування арифметичного квадратного кореня із наближених значень. Обґрунтовує властивості арифметичного квадратного кореня.

Тотожність Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені. Функція , її графік і властивості. Наближене знаходження окремих характеристик функції графічним способом.	Розв'язує вправи, що передбачають: застосування поняття арифметичного квадратного кореня для обчислення значень виразів, спрощення виразів, розв’язування рівнянь, розв’язування рівнянь графічним способом та знаходження точності отриманих розв’язків, порівняння значень виразів; перетворення виразів із застосуванням винесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня; звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу; аналіз співвідношень між числовими множинами та їх елементами; оцінку наближених значень дійсних чисел.
Мета: Продовжити формування навичок розв’язувати рівняння графічним способом на прикладі квадратних рівнянь	
Тема 3. Квадратні рівняння (18 год + 1 год) Квадратні рівняння. Неповні квадратні рівняння, їх розв’язування. Формула коренів квадратного рівняння. Теорема Вієта. Квадратний тричлен, його корені. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники. Розв’язування квадратних рівнянь графічним способом. Розв’язування рівнянь, що зводяться до квадратних. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь і рівнянь, що зводяться до квадратних.	Наводить приклади: квадратних рівнянь різних видів (повних, неповних , зведених), квадратних тричленів. Знаходить: наближені розв’язки квадратних рівнянь. Записує і пояснює: формулу коренів квадратного рівняння; способи розв’язування неповних квадратних рівнянь; формулу розкладання квадратного тричлена на множники. Формулює: означення: квадратного рівняння; кореня квадратного тричлена; теорему Вієта і обернену до неї теорему. Обґрунтовує теорему Вієта. Розв'язує вправи, що передбачають: знаходження коренів квадратних рівнянь різних видів; застосування теореми Вієта і оберненої до неї теореми; розкладання квадратного тричлена на множники; розв’язування квадратних рівнянь графічним способом та обчислення точності отриманих наближених відповідей; знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних; складання та розв’язування квадратних рівнянь і рівнянь, що зводяться до них як математичних моделей текстових задач.
Тема 4. Повторення і систематизація навчального матеріалу (6 год)	

9 клас

Мета: Узагальнити уявлення учнів про виконання дій над наближеними значеннями. Сформувати уміння записувати наближені значення із використанням знаку модуля.	
Тема 1. Нерівності (16 год + 4 год) Числові нерівності. Основні властивості числових нерівностей. Почленне додавання та множення числових нерівностей. Застосування властивостей числових нерівностей для оцінювання значення виразу. Метод меж. Нерівності зі змінними. Лінійні нерівності з однією змінною. Розв’язок нерівності. Числові проміжки. Об’єднання та переріз числових проміжків. Розв’язування лінійних нерівностей з однією змінною. Рівносильні нерівності. Системи лінійних нерівностей з однією змінною, їх розв' язування.	Наводить приклади: числових нерівностей; нерівностей зі змінними; лінійних нерівностей з однією змінною, подвійних нерівностей. Формулює: означення: розв’язку лінійної нерівності з однією змінною; рівносильних нерівностей; властивості числових нерівностей. Записує: наближені значення із використанням знака модуля Обґрунтовує властивості числових нерівностей; дії над наближеними значеннями за допомогою властивостей нерівностей. Зображує на числовій прямій задані нерівностями числові проміжки, виконує обернене завдання; переріз, об’єднання числових множин. Записує розв’язки нерівностей та їх систем у вигляді об’єднання, перерізу числових проміжків або у вигляді відповідних нерівностей. Розв’язує лінійні нерівності з однією змінною; системи двох лінійних нерівностей з однією змінною. Розв’язує завдання, що передбачають виконання арифметичних дій над наближеними значеннями, межі яких виражені не лише додатними числами (окремі випадки).
Мета: Продовжити формування вмінь учнів розв’язувати рівняння та системи рівнянь графічним способом та оцінювати отримані результати	
Тема 2. Квадратична функція (22 год + 2 год) Функції. Властивості функції: нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції. Найпростіші перетворення графіків функцій. Функція y=ax2+bx+c, a≠0, її графік і властивості. Наближене знаходження окремих характеристик функції графічним способом. Квадратна нерівність. Розв’язування квадратних нерівностей.	Обчислює: значення функції в точці; точність розв’язків, що отримані графічним способом. Описує: перетворення графіків функцій: f(x)→ f(x)+a ; f(x)→ f(x+a); f(x)→k f(x); f(x)→ -f(x); алгоритм побудови графіка квадратичної функції. Характеризує функцію за її графіком. Аналізує: наближені розв’язки текстових задач. Розв'язує вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції; побудову графіків функцій з використанням зазначених

Розв’язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними , зокрема графічним способом. Розв’язування текстових задач за допомогою систем рівнянь.	перетворень графіків; використання графіка квадратичної функції для розв’язування квадратних нерівностей; знаходження розв’язків систем двох рівнянь другого степеня з двома змінними; складання та розв’язування систем рівнянь з двома змінними як математичних моделей текстових задач; розв’язування систем другого степеня з двома змінними графічним способом. Розв'язує: текстові задачі, що передбачають виконання арифметичних дій над наближеними значеннями чисел та величин.
Мета: Сформувати уявлення про запис наближених значень правильними цифрами та їх опрацювання. Доповнити уявлення учнів про методи наближених обчислень правилами підрахунку правильних цифр.	
Тема 3. Елементи прикладної математики (10 год + 2 год) Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків. Випадкова подія. Імовірність випадкової події. Статистичні дані. Вибірковий метод та способи подання даних. Частота. Середнє значення. Правильні цифри наближених значень.	Розпізнає: запис наближених значень правильними цифрами Наводить приклади: математичних моделей реальних ситуацій, випадкових подій; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків. Описує поняття: випадкова подія; ймовірність випадкової події, імовірнісні наближення, частота, середнє значення статистичних вимірювань. Аналізує: розв’язки задач, що отримані за допомогою методу математичного моделювання, точність наближених значень, що записані правильними цифрами. Розв'язує вправи, що передбачають: виконання відсоткових розрахунків; знаходження ймовірності випадкової події; подання статистичних даних у вигляді таблиць, діаграм, графіків; знаходження середнього значення; виконання дій над наближеними значеннями, що представлені у різних формах.
Мета: Повторити та узагальнити поняття про наближені значення, їх числові характеристики та методи наближених обчислень.	
Тема 4. Числові послідовності (12 год + 1 год) Числові послідовності. Арифметична прогресія, її властивості. Формула n-го члена арифметичної прогресії. Сума перших n членів арифметичної прогресії. Геометрична прогресія, її властивості. Формула n-го члена геометричної прогресії. Сума перших n членів геометричної	Розпізнає: арифметичну, геометричну прогресії серед даних послідовностей Наводить приклади: арифметичної, геометричної прогресій. Формулює: означення і властивості арифметичної і геометричної прогресій. Записує і пояснює формули: загального члена арифметичної та геометричної прогресій; суми перших n членів цих прогресій, суми

прогресії. Нескінченна геометрична прогресія ($\lvert q \rvert$ <1) та її сума. Розв’язування вправ і задач на прогресії, зокрема	нескінченної геометричної прогресії ($\lvert q \rvert$ <1). Розв'язує вправи, що передбачають: обчислення членів прогресії за даними їх членами або співвідношеннями між ними; обчислення сум перших n членів арифметичної й геометричної прогресій; запис періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного; використання формул загальних членів і сум прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій.
Тема 5. Повторення і систематизація навчального матеріалу (10 год)	

8. Література для вчителя.

Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навчальний посібник.- К.: Вища школа,1989. -367с.

Бекаревич А.Н.Приближенные вычисления в средней школе.-Мн.:Народная асвета,1979.-96с.

Брадис В.М.Вычислительная работа в курсе математики средней школы.-М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.-252с.

Брадіс В.М. Засоби і способи елементарних обчислень: Посібник для вчителів математики і фізики семирічної та середньої школи.- К.: Рад. школа, 1952.- 176с.

Брадис В.М.Как надо вычислять? Пособие для учащихся V и VI классов средней школы.-М.: Госучпедиздат Мин-ва Просвещения РСФСР,1960.-79с.

Грибанов В. У. Приближенные вычисления в средней школе: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1964. – 112 с.

Демкович В.П., Прайсман Н.Я. Приближенные вычисления в школьном курсе физики: Книга для учителя.-М.: Просвещение,1983.-112с.

Дубинчук О.С., Мальований Ю.І., Дичек Н.П. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: Посібник для вчителя.- К.: Рад. школа,1991.- 254с.

Кавун И.Н.Приближенные вычисления:Курс элементарный.-М.:Гиз,1924.-124с.

Корінь Г.О. Вивчаємо наближені обчислення//Математика в школі.-2003.-№2.-С.35-42.

Корінь Г.О.Прикладні задачі, як засіб реалізації між предметних зв’язків// Математика в школі,- 2004.- №9-10.- С.30-34.

Литовченко З.М., Єлизаветіна Н.В. Наближені обчислення: Посібник для вчителя.-К.: Рад. школа, 1988.-125с.

Маєргойз Д.М., Дубинчук О.С.Методика викладання арифметики в 5-6 класах восьмирічної школи.- К.: Радянська школа, 1966.-395с.

Методика обучения приближенным вычислениям в школе// Т.В.Малкова, Н.Р.Гайбуллаев, Р.А.Мусаелян, С.А.Аллабергенов: Пособие для учителей.-Ташкент:Укитувчи, 1982.-137с.

Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики: Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.М.Колягин, Г.Л.Луканкин, Е.Л. Мокрушин и др.- М.: Просвещение, 1977.- 480с.

Приближенные вычисления в курсе математики восьмилетней школы: Педагогические чтения; Под ред. И.Н.Шевченко, К.И.Нешкова.- М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963.- 224с.

Прочухаев В.Г.Приближенные вычисления в школе:Учебное пособие.-М.,1973.-179с.

Пулькин С.П.Теория и практика вычислений: Учебное пособие для студентов.-М. :Просвещение,1967.-184с.

Слєпкань З.І. До проблеми вивчення наближених обчислень у школі // Математика в школі. - 2006.-№10.- С.2-4.

Слєпкань З.І.Методика навчання математики: Підручник для студентів.- К.: Зодіак-ЕКО, 2000.-512с.

Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.- 240с.

Чашечников С.М., Чашечникова Л.Г.,Чертков Й.Я.Вивчення алгебри в 6-8 класах: теоретичні основи та окремі питання методики.- К.: Радянська школа, 1981.-207с.

Швець В.О.,Кліндухова В.М. Вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи // Математика в школі. - 2008.-№2.- С.3-8.

Швець В.О.,Кліндухова В.М. Про наближені обчислення у 5-6 класах // Математика в школі. - 2008.-№3.- С.3-8.

Шевченко И.К. Начальные сведения о приближенных вычислениях.-М.: Изд-во АПН РСФСР, 1958.-36с.

Додаток Т
Приклади наближених значень, які «здобули» учні під час проективної діяльності (7 клас)

1. Наближене значення: температура при якій мають зберігатись продукти харчування.
Форма запису наближеного значення: умовна рівність (рис. Т.2).
2. Наближене значення: кількість крапель у 1 мл ліків.
Форма запису наближеного значення: із використанням знака наближеної рівності (рис. Т. 1).

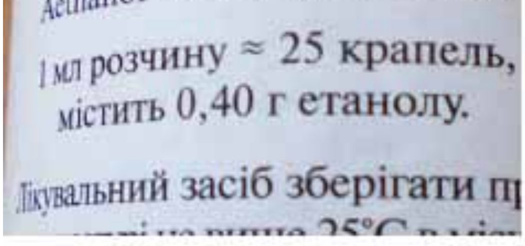


Рис. Т.1

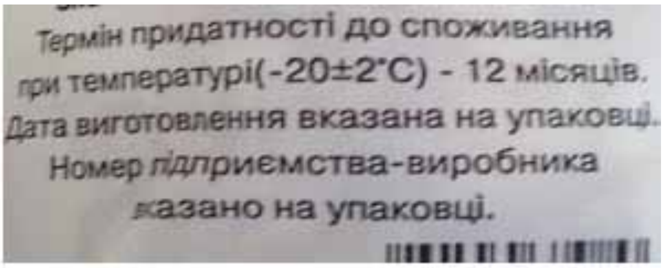


Рис. Т.2

3. Наближене значення: термін приготування макаронних виробів.

Форма запису наближеного значення: вказування меж наближеного значення за допомогою знаку дефісу (рис. Т.3).
4. Наближене значення: час годування птахів у зоопарку.
Форма запису наближеного значення: із використанням знака наближеної рівності (рис. Т. 4).

Рис. Т.3

Рис. Т.4

5. Наближене значення: вага цукру.
Форма запису наближеного значення: умовна рівність (рис. Т.6).
6. Наближене значення: кількість підвидів жирафів.
Форма запису наближеного значення: із використанням мовного обороту «від…до…» (рис . Т.5).

Рис. Т.5

Рис. Т.6

7. Наближене значення: площа шпалер.
Форма запису наближеного значення: умовна рівність (рис.Т.8).
8.Наближене значення: вага солі.
Форма запису наближеного значення: умовна рівність (рис. Т.7).

Рис. Т.7

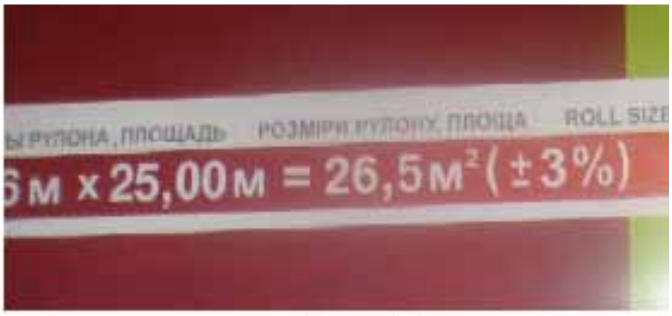


Рис. Т.8

9. Наближене значення: час, протягом якого двері ліфта залишають відчиненими.
Форма запису наближеного значення: вказування меж наближеного значення за допомогою знаку дефісу (рис. Т.9).
10. Наближене значення: розміри шпалер.
Форма запису наближеного значення: умовна рівність (рис. Т.10).

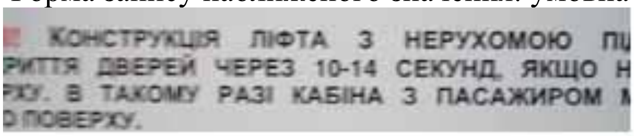


Рис. Т.9

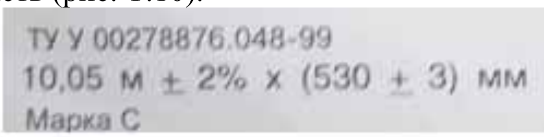


Рис. Т.10

11. Наближене значення: температура повітря та швидкість вітру.
Форма запису наближеного значення: вказування меж наближеного значення за допомогою знаку дефісу; із використання символу «…» та мовного обороту «від … до …» (рис. Т.11).
12. Наближене значення: темпи зростання рослини.
Форма запису наближеного значення: вказування меж наближеного значення за допомогою знаку дефісу (рис. Т 12).

Рис. Т.11

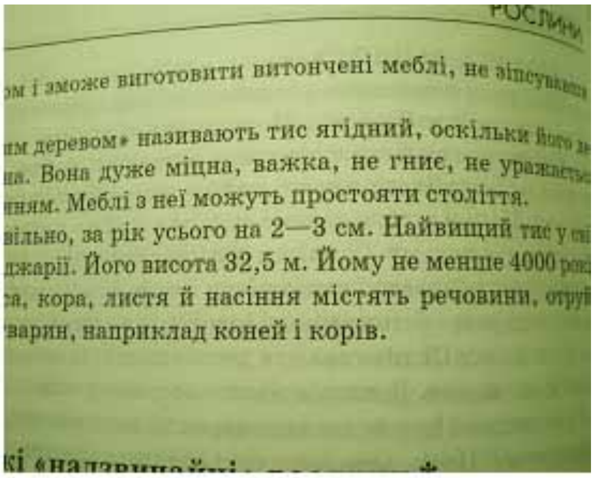

і зможе виготовити витончені меблі, не
деревом» називають тис ягідний, оскільки
Вона дуже міцна, важка, не гниє, не
Меблі з неї можуть простояти століття.
вільно, за рік усього на 2—3 см. Найвищий
Його висота 32,5 м. Йому не менше
кора, листя й насіння містять речовини,
тварин, наприклад коней і корів.

Рис. Т.12

13. Наближене значення: вік найдавніших папірусів.
Форма запису наближеного значення: із використання вказівних слів (рис. Т.13).

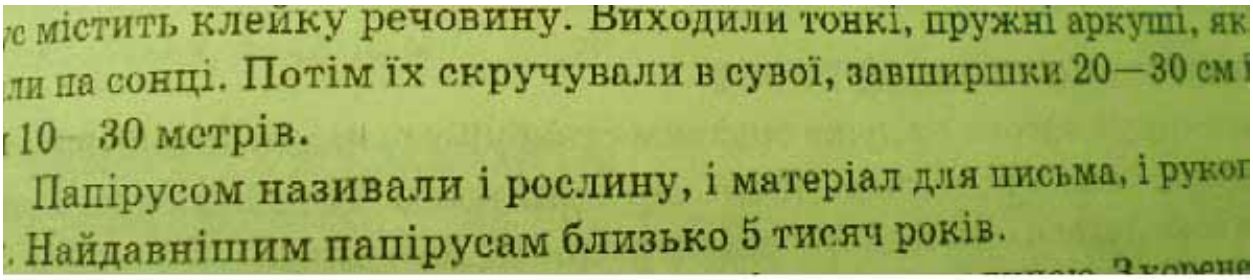

…містить клейку речовину. Виходили тонкі, пружні аркуші, як… …ли на сонці. Потім їх скручували в сувої, завширшки 20—30 см і… 10—30 метрів.
Папірусом називали і рослину, і матеріал для письма, і руко… Найдавнішим папірусам близько 5 тисяч років.

Рис. Т.13

14. Наближене значення: часовий та температурний режими приймання лікувальних ванн.
Форма запису наближеного значення: вказування меж наближеного значення за допомогою знаку дефісу (рис. Т.14).
15. Наближене значення: показники якості питної води.
Форми запису наближених значень: правильними цифрами; із використанням символу «…»; вказуванням меж наближеного значення за допомогою знаку дефіс (рис. Т.15).

Рис. Т.14


ПОРІВНЯЛЬНА ТАБЛИЦЯ ЯКОСТІ ПИТНИХ ВОД В УКРАЇНІ ТА ІНШИХ КРАЇНАХ СВІТУ (ТОКСИЛОГІЧНІ ПОКАЗНИКИ).

Показник якості питної води	Одиниця виміру	Гранично допустима концентрація		
		Україна	КЕС	ВООЗ
Запах	Бал	2,00	3,00	3,00
Смак та присмак	Бал	2,00	2,00	2,00
Колірність	Бал	20,00	20,00	15,00
Каламутність	мг/дм³	1,50	5,00	5,00
Водневий показник		6,00…9,00	6,50…8,50	6,50…6,50
Залізо загальне	мг/дм³	0,30	0,30	0,30
Твердість загальна	мг/дм³	350,00	500,00	500,00
Марганець	мг/дм³	0,10	0,05	0,10
Мідь	мг/дм³	1,00	1,00	0,10
Хлориди	мг/дм³	350,00	250,00	25,00
Цинк	мг/дм³	5,00	0,10-3,00	5,00
Алюміній залишковий	мг/дм³	0,50	0,20	0,20
Азот амонійний	мг/дм³	0,50	2,00	0,50
Нітрати	мг/дм³	20,00	10,00	10,00
Свинець	мг/дм³	0,03	0,05	0,05
Селен	мг/дм³	0,01	0,01	0,01
Фтор	мг/дм³	0,70-1,5	0,70-1,50	1,50

Рис. Т.15

13. Наближене значення: щільність деяких твердих та сипучих речовин.
Форма запису наближеного значення вказуванням меж наближеного значення за допомогою знаку дефіс (рис. Т.16)

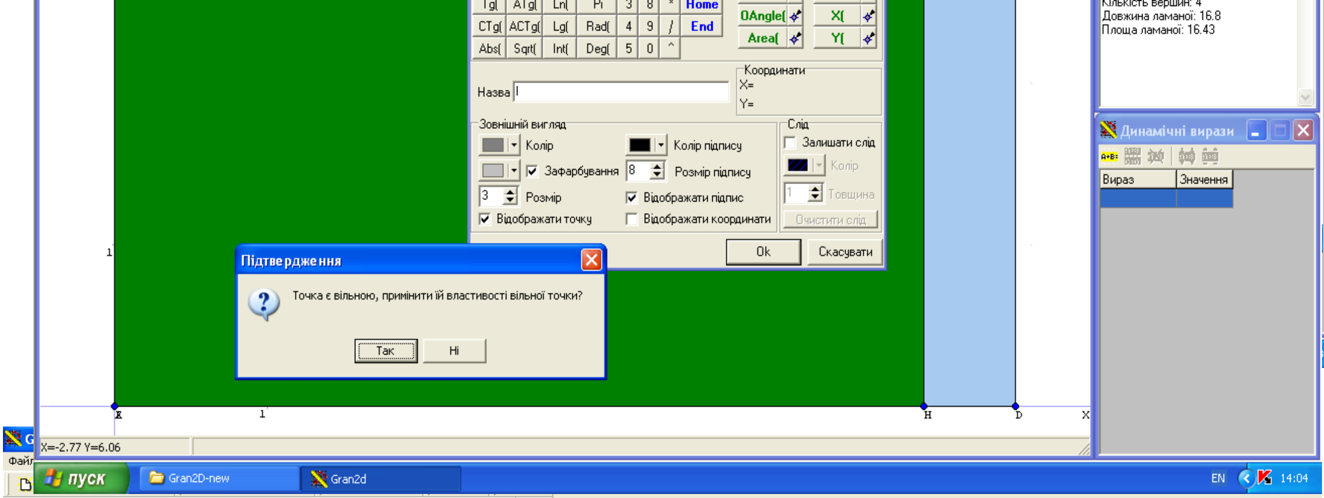
Додаток У

Використання ІКТ під час вивчення наближених обчислень в основній школі

Додаток У.1

Використання програмного засобу GRAN 2D під час вивчення наближених обчислень у 5 - 6 класах

Тема: Додавання, множення, віднімання та ділення наближених значень.
Мета: За допомогою елементів обчислювального експерименту, а також унаочнення його результатів, закріпити в учнів уявлення про правила виконання дій над наближеними значеннями, межі та можливі значення яких виражені раціональними числами.
Уявлення та знання, якими мають володіти учні: знаходження площі та периметра прямокутника; зображення перпендикулярних і паралельних прямих; модуль числа; координати точки на координатній площині (вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів, що передбачені програмою); запис наближених значень у вигляді подвійних нерівностей; правила виконання арифметичних дій над наближеними значеннями (вимоги до підготовки учнів, що передбачені пропонованою методикою вивчення наближених обчислень).
Організація навчання: Нищенаведені роботи проводяться у другому семестрі 6 класу. Залежно від технічного оснащення вони мають:



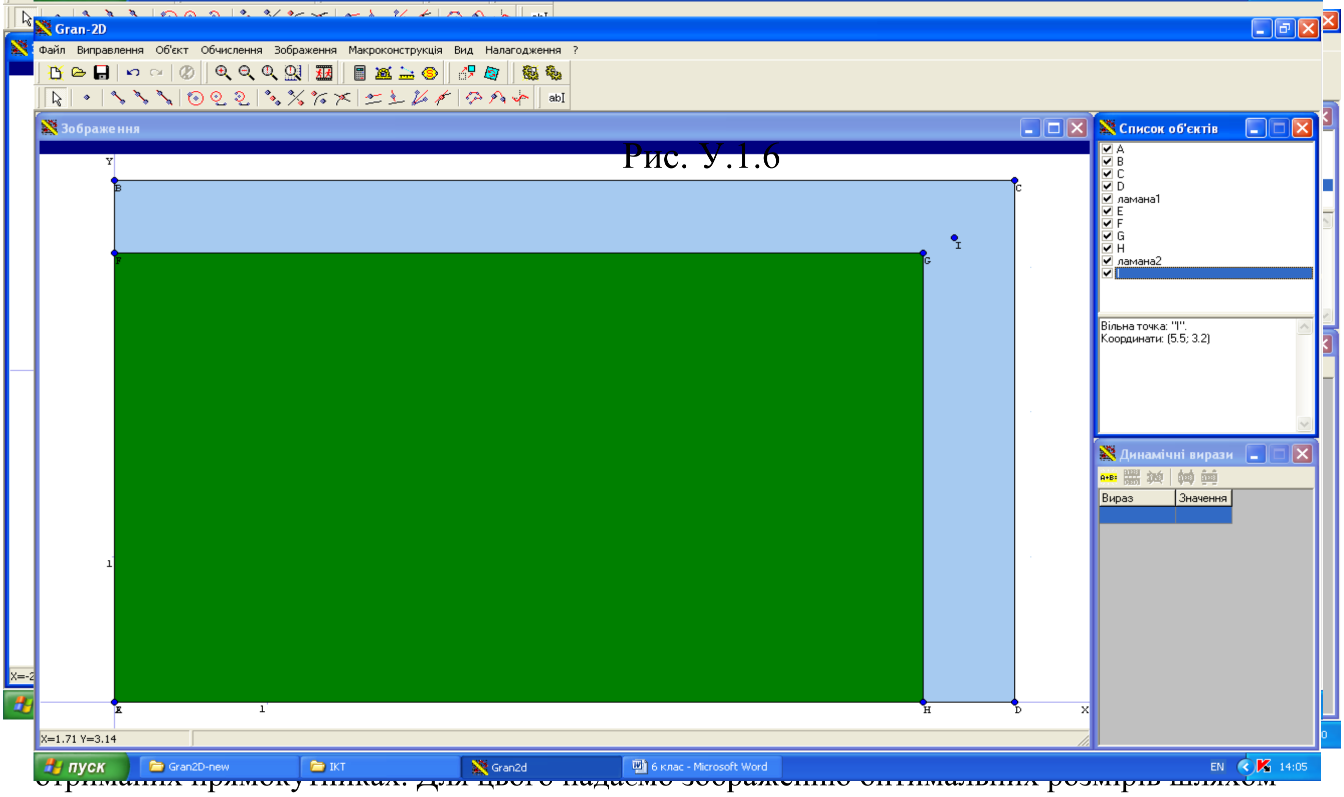


Рис. У.1.6

отриманих прямокутниках. Для цього надаємо зображенню оптимальних розмірів шляхом звернення до послуги Зображення/Розмір/Оптимальний.

6. Учні наводять приклади будь-яких можливих значень x та y (наприклад, x = 5,5 та y = 3, 2) та будують відповідну точку на координатній площині. Для цього користуємось послугою Об’єкт/Створення/Аналітична точка. При зверненні до вказаної послуги з’явиться вікно Аналітична точка. Створення (рис. У.1.5). Заповнюємо відповідні ячейки та підтверджуємо, що створена точка є вільною, після чого отримана точка з’являється на екрані (рис. У.1.6).

7. Для створення у наступних пунктах динамічних об’єктів та динамічних виразів необхідно назвати прямі, яким належать сторони вхідного та вихідного прямокутників, що лежать на осях координат. Для цього користуємось послугою Об’єкт/Створення/Пряма. При зверненні до вказаної послуги з’явиться вікно Пряма, що проходить через дві точки. Створення. Серед запропонованих точок обирають потрібні, наприклад B і F. Відповідна пряма автоматично отримує назву «пряма 1» (рис. У.1.7). Аналогічно називаємо пряму HD - «пряма 2» (рис. У.1.8).

8. Створюємо рухомі сторони динамічного прямокутника:

а) Об’єкт/Створення/Паралельна пряма. При зверненні до вказаної послуги з’явиться вікно Пряма, паралельна заданій прямій. Створення. У відповідних комірках серед

автоматично отримує назву «пряма 4».

9. Змі

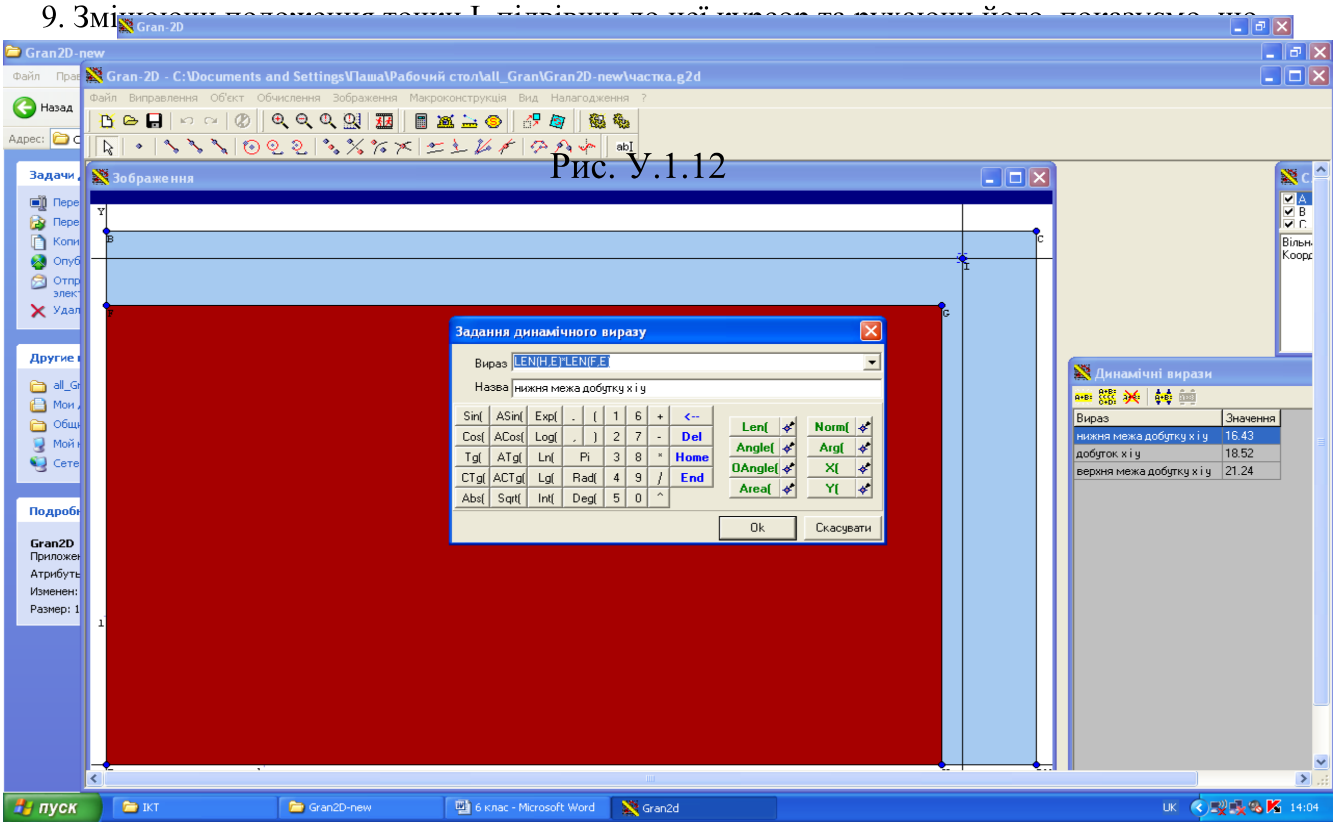


Рис. У.1.12

Мета обчислювального експерименту показати, що середнє числове значення за будь-яких припустимих переміщень (за будь-яких можливих значень) не виходить за відповідні межі .

Хід роботи № 2 (додавання наближених значень)

Виконуємо 1 - 8 пункти роботи № 1 або користуємося готовою динамічною моделлю (вхідний, вихідний та рухомий прямокутники).

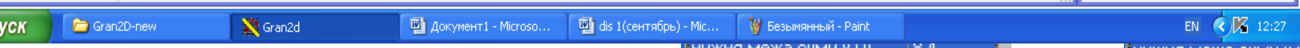
9. Змінюючи положення точки І, підвівши до неї курсор та рухаючи його, показуємо, що півпериметр динамічного прямокутника (сума наближених значень х та у) не менший ніж півпериметр вхідного прямокутника (сума нижніх меж наближених значень) і не більший ніж півпериметр вихідного прямокутника (сума верхніх меж наближених значень).

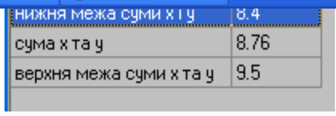
10. Можливості застосування ППЗ GRAN2D дозволяють одночасно підтверджувати «побачені» висновки і алгебраїчно. Учні самостійно або разом з учителем повторюють правила додавання наближених значень та відповідну схему-орієнтир. У вікні Динамічні вирази послідовно створюються три рядки, які відображають числове значення:

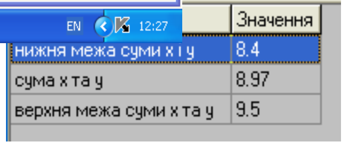
- нижньої межі суми х і у (сума нижніх меж наближених значень);
- певної суми х і у (змінюється від зміни положення точки І);
- верхньої межі суми х і у (сума верхніх меж наближених значень).

11. Для цього звертаємось до послуги Обчислення/Динамічний вираз/Створити. З’являється вікно Задання динамічного виразу. У відповідних комірках створюємо вираз та його назву для кожного з рядків (рис.У.1.13 - У.1.14):

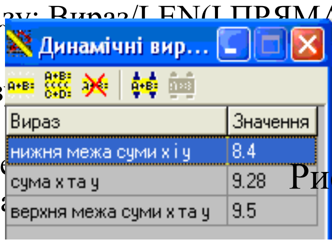
• перший рядок динамічного виразу: Вираз/LEN(E,H)+LEN(E,F); Назва/нижня межа суми х і у ;







• другий рядок динамічного вира... Вираз/LEN(І,ПРЯМА1)+LEN(І,ПРЯМА2); Назва/ сума х і у ;
• третій рядок динамічного вираз...(E,B); Н... і у .
12. Робимо відповідні спостереже... У.1.15). Х... , та зміст отриманих висновків є ... наведені



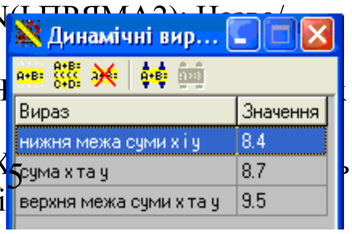


Рис. У.1.15

Хід роботи № 3 (віднімання наближених значень)

Виконуємо 1 - 8 пункти роботи № 1 або користуємося готовою динамічною моделлю (вхідний, вихідний та рухомий прямокутники).

9. Учні самостійно або разом з учителем повторюють правила віднімання наближених значень та відповідну схему-орієнтир. У вікні Динамічні вирази послідовно створюються три рядки, які відображають числове значення:

- нижньої межі різниці х і у (різниця нижньої межі х та верхньої межі у);
- певної різниці х і у (змінюється від зміни положення точки І);
- верхньої межі різниці х і у (різниця верхньої межі х та нижньої межі у).

10. Для цього звертаємось до послуги Обчислення/Динамічний вираз/Створити (рис. У.1. 16-У.1.17). З'являється вікно Задання динамічного виразу. У відповідних комірках створюємо вираз та його назву для кожного з рядків:

• перший рядок динамічного виразу: Вираз/LEN(E,H)-LEN(E,B); Назва/нижня межа різниці х і у ;
• другий рядок динамічного виразу: Вираз/LEN(І,ПРЯМА1)-LEN(І,ПРЯМА2); Назва/ різниця х і у ;
• третій рядок динамічного виразу: Вираз/LEN(E,D)-LEN(E,F); Назва/верхня межа різниці х і у .

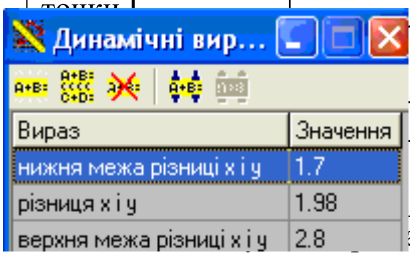
11. Змінюючи положення точки І, учні спостерігають за числовими значеннями, що з'являються у комірках динамічного виразу (рис. У.1.18).

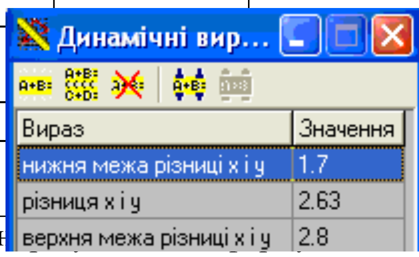
12. За результатами спостережень учні будують таблицю, куди заносять по 5 відповідних значень, які отримують під час спостереження за рухом вільної точки І (рис. У.1.13):

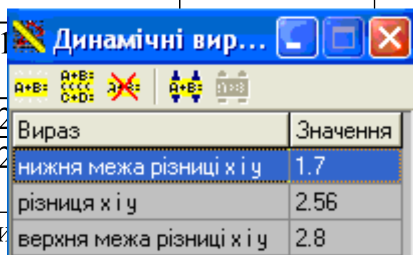
Таблиця У.1.1

Результати спостережень за рухом точки І

Координати точки І	(5,36;3,4)	(5,82;3,22)	(5,72;3,21)	(5,9;3,35)	(5,65;3,17)

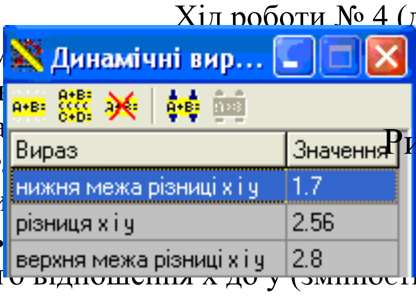






Хід роботи № 4 (ділення наближених значень)

Виконуєм... кори... моделлю (вхідний, ...тники...
9. Учні са... пов... наближених значень т... вікн... створюються три рядки ...ачен...
- нижнь... ноше... ої межі у);
- певно... відношення х до у (змінюється ві...



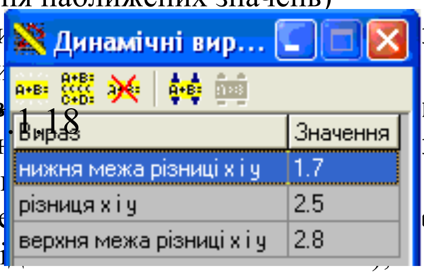


Рис. У.1.18

- верхньої межі відношення х до у (відношення верхньої межі х до нижньої межі у).

10. Для цього звертаємось до послуги Обчислення/Динамічний вираз/Створити. З'являється вікно Задання динамічного виразу. У відповідних комірках створюємо вираз та його назву для кожного з рядків:

• перший рядок динамічного виразу: Вираз/LEN(E,H)/LEN(E,B); Назва/нижня межа відношення х до у;
• другий рядок динамічного виразу: Вираз/LEN(I,ПРЯМА1)/LEN(I,ПРЯМА2); Назва/ відношення х до у;
• третій рядок динамічного виразу: Вираз/LEN(E,D)/LEN(E,F); Назва/верхня межа відношення х до у.

11. Учні будують таблицю, куди заносять по 5 відповідних значень, які отримують під час спостереження за рухом вільної точки І (див. табл. до роботи № 3).

12. За результатами спостережень формулюються висновки (п. 12 робота № 1).

Загальні висновки до робіт 1 - 4

Створені у ППЗ GRAN2D динамічні вирази дозволяють провести обчислювальний експеримент. Його мета - показати, що поточні значення середнього динамічного виразу для будь-яких припустимих рухів вільної точки І не виходять за межі нижніх і верхніх поточних динамічних виразів.

Отримані так результати підтверджують «правомірність» поширення правил виконання дій над наближеними значеннями не лише для натуральних чисел (для яких вони виводились за допомогою доцільних задач), але і для дробових чисел (для яких вони не можуть бути виведені аналогічним чином). В межах 5-6 класів подібні обчислювальні експерименти доцільно проводити лише для додатних чисел.

Педагогічно доцільним є одночасне унаочнення результатів обчислювального експерименту за допомогою відповідних геометричних моделей:
• відповідає наявності в учнів різних підструктур математичного мислення;
• враховує домінування у молодших підлітків конкретно-образного мислення;
• активізує різні канали сприйняття навчального матеріалу підлітків;
• інтенсифікує роботу зорової пам'яті;
• вдало доповнює традиційні форми та методи навчання.

Додаток У.2

Використання програмного засобу GRAN 1new під час вивчення наближених обчислень у 7 класі

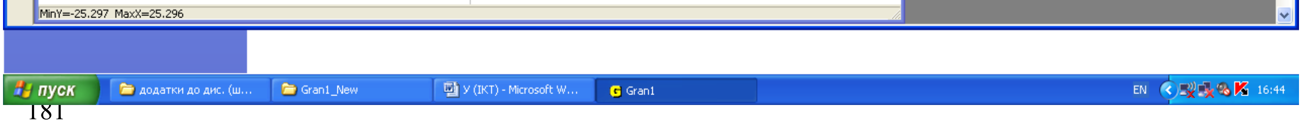
Тема: Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом.
Мета: сформувати уміння знаходити наближені розв'язки систем двох лінійних рівнянь з двома змінними та оцінювати точність отриманих результатів.
Учні мають володіти уявленнями про: наближений характер результатів графічних побудов; точність наближених значень і правила її знаходження; розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки; розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання.
Організація навчання: Залежності від технічного оснащення робота має характер
- або фронтально-ілюстративний (за наявності лише мультімедійної дошки);
- або індивідуально-дослідницький (за умов проведення заняття у комп'ютерному класі).

Хід робіт, що наводиться нижче, є орієнтовним і може бути адаптованим до кожного з двох вищенаведених варіантів, зокрема для проведення відповідних лабораторних або практичних робіт.
Рекомендована література:

1. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів: - К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004. - 254с.
2. Гевал П.А. Загальні принципи використання комп'ютера на уроках різних типів // Комп'ютер у школі та сім'ї. - 2000. - №3. - С. 33-34.

Хід роботи

а) $\begin{cases} 1{,}2x+0{,}7y=28 \\ -0{,}6x+0{,}5y=3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+y=9 \end{cases}$



1. Учні класу об’єднуються парами. Кожна пара отримує по дві системи рівнянь. Перша передбачає розв’язування способом додавання, а друга – способом підстановки.
2. Добирати приклади необхідно так, щоб для однієї із систем розв’язки були цілими

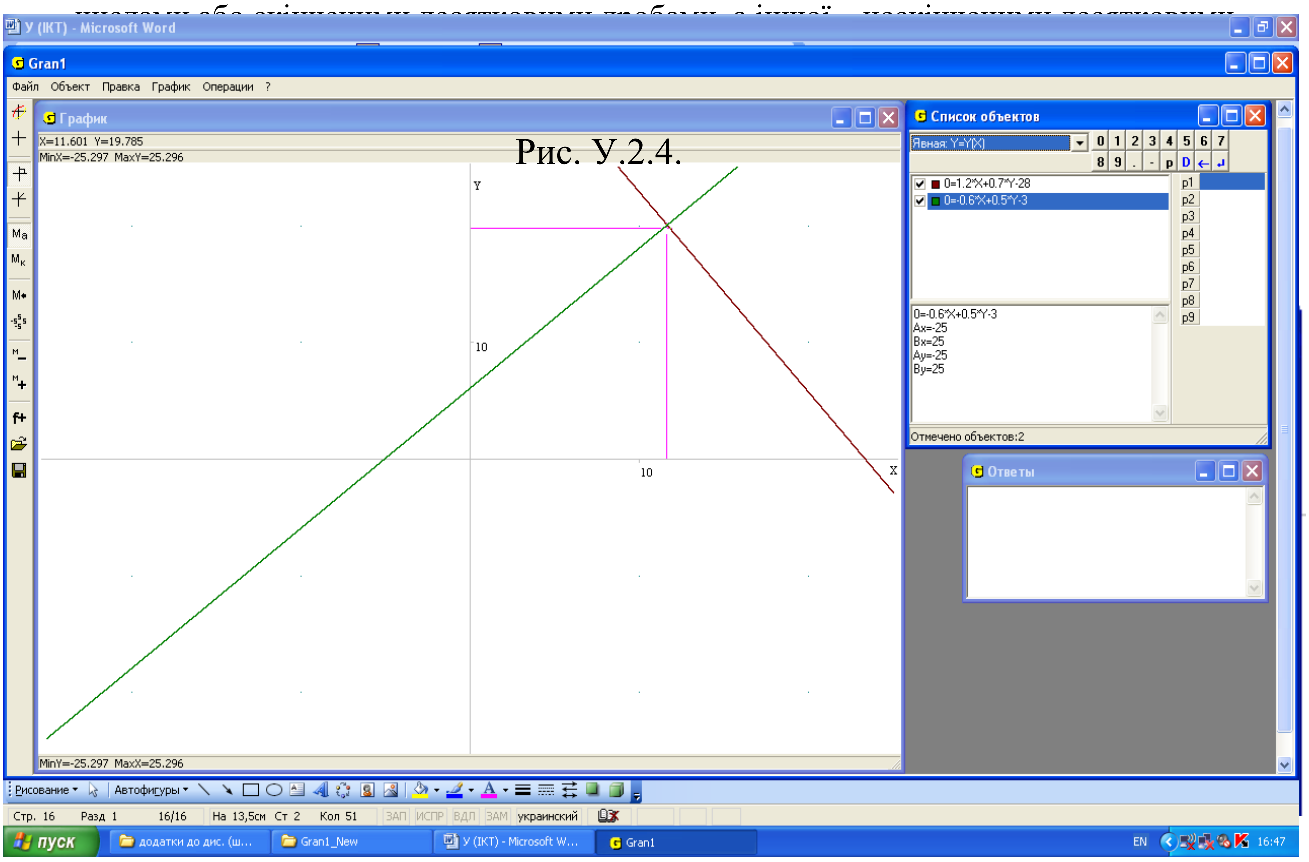


Рис. У.2.4.

За допомогою вчителя учні записують остаточну відповідь:

, - точний розв’язок системи рівнянь;

, - наближений розв’язок системи рівнянь

6. Учитель звертає увагу учнів на те, що наближений розв’язок системи рівнянь можна округлювати, наприклад ,
7. Аналогічні дії виконують і під час розв’язуванні другої системи.
8. Учитель разом із учнями формулюють висновки до роботи.

Додаток У.3

Використання програмного засобу GRAN 1new під час вивчення наближених обчислень у 8 класі

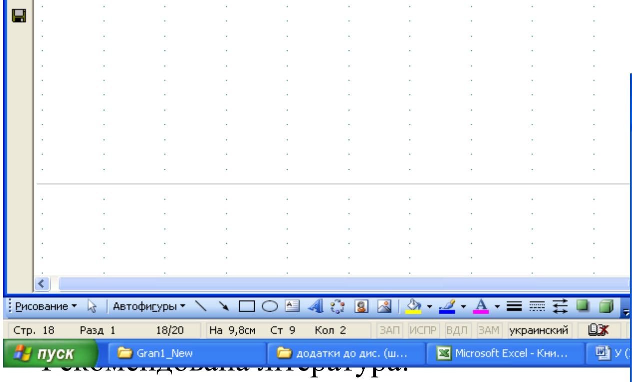
Тема: Графік функції .

Мета: Сформувати уявлення про графік та властивості функції ; продовжити формування навичок розв’язувати рівняння графічним способом, а також оцінювати точність отриманих результатів.

Учні мають володіти уявленнями: про графічний спосіб розв’язування рівнянь; графіки та властивості функцій , ; точність наближених значень і правила її знаходження .

Організація навчання: Залежності від технічного оснащення робота має характер

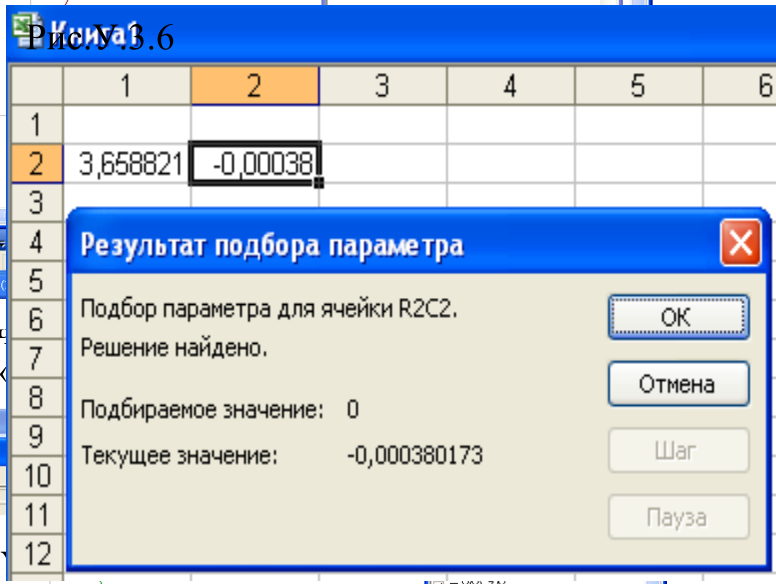
- або фронтально-ілюстративний (за наявності лише мультимедійної дошки);



Рекомендована література:

1. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Віннич…
Посібник для вчителів: - К.: РННЦ «…
2. Мі…

Рис.У.3.6



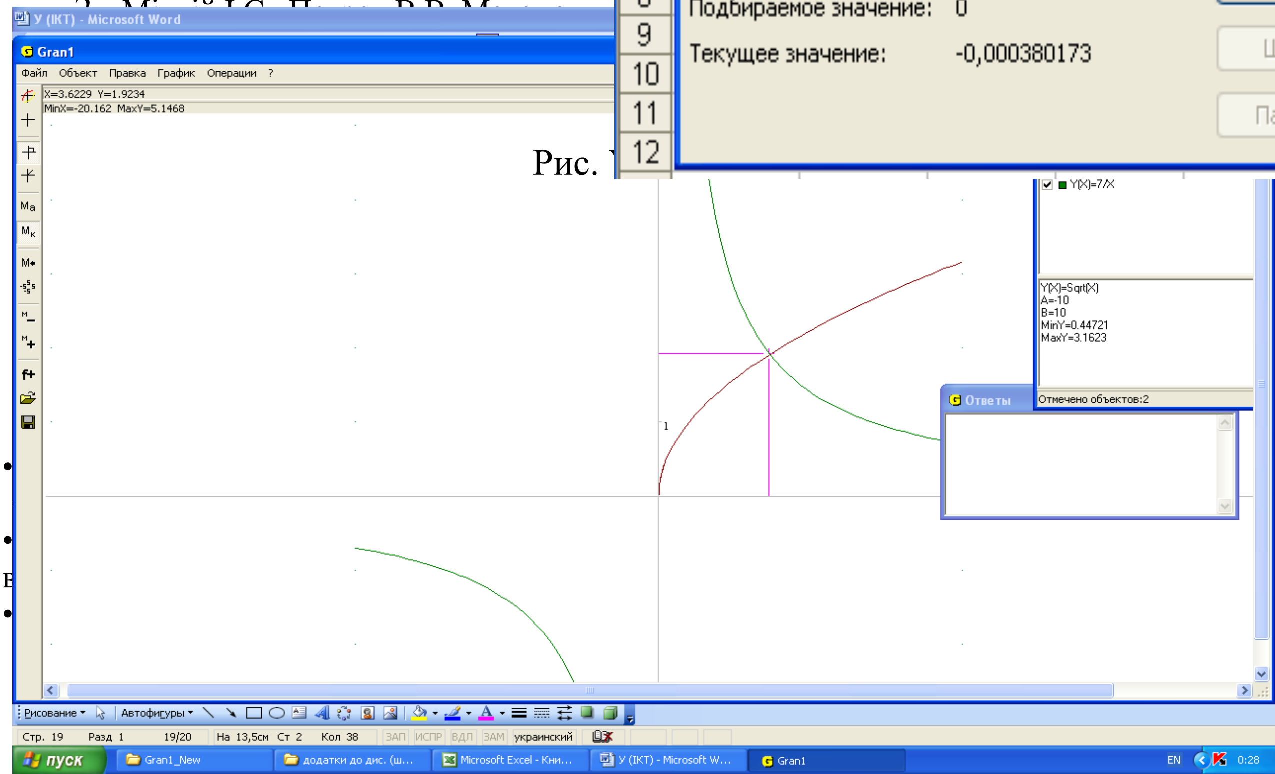
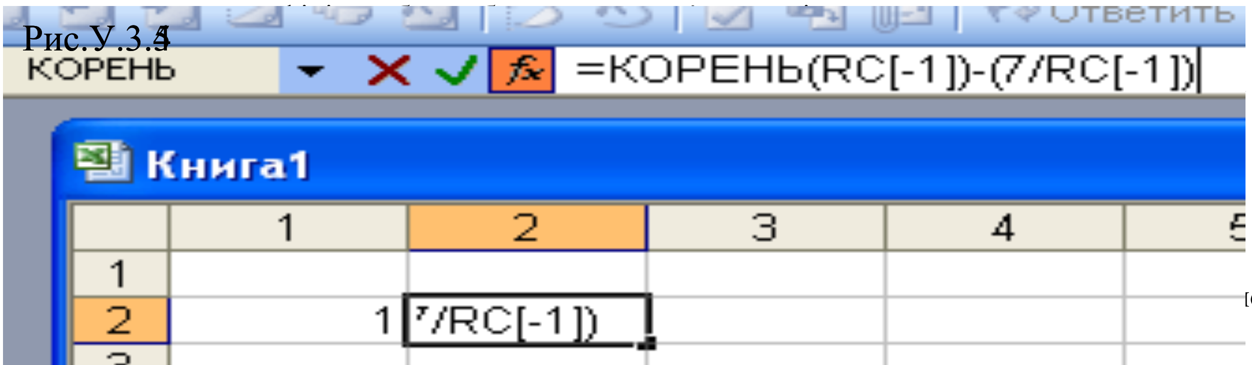


Рис. У…

• Встановлюємо курсор у точці перетину графіків. Фіксуємо відповідні значення x та y, які з'являються у лівому верхньому кутку екрану. Вони є наближеними координатами точки

Рис.У.3.4



… випадку

… очаткове

• У комірку R2C2 (в інших версіях програми це може бути комірка B2) вводимо формулу

(рис. У.3.4).

• Звертаємось до послуги Сервіс/Підбір параметра заповнюємо діалогове вікно (рис. У.3.5)

4. • Після натискання Ок у комірці R2C1 (в інших версіях програми це може бути комірка A2) отримуємо результат (рис. У.3.6). Як бачимо у данному випадку отримується умовно точний результат (тобто відповідне числове значення не можна виразити у вигляді скінченого десяткового дробу). Його точність (0, 000380173) вказується у комірці R2C2 та діалоговому вікні. Її слід обов'язково враховувати під час формулювання остаточної відповіді.
5. Учні, обмінявшись отриманими результатами, обчислюють їх точність:

9. Учитель разом із учнями формулюють висновки до роботи.

Додаток У.4

Використання програмного засобу GRAN 1new під час вивчення наближених обчислень у 8 класі.

Тема: Квадратні рівняння.

Мета: Продовжити формування навичок розв'язувати рівняння графічним способом, а також оцінювати точність отриманих результатів.

Учні мають володіти уявленнями: про графічний спосіб розв'язування рівнянь; графіки та властивості функцій ; точність наближених значень та правила її знаходження; розв'язування квадратних рівнянь.

Організація навчання: Залежності від технічного оснащення робота має характер

- або фронтально-ілюстративний (за наявності лише мультімедійної дошки);
- або індивідуально-дослідницький (за умов проведення заняття у комп'ютерному класі).

Хід робіт, що наводиться нижче, є орієнтовним і може бути адаптованим до кожного з двох вищенаведених варіантів, зокрема для проведення відповідних лабораторних або практичних робіт.

Рекомендована література:

4. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів: - К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004. – 254 с.
5. Мінтій І.С., Петров В.В. Математичне моделювання та прикладні задачі в шкільному курсі математики // Математика в школі.- 2007. - №1 .- С. 3-8.
6. Гевал П.А. Загальні принципи використання комп'ютера на уроках різних типів // Комп'ютер у школі та сім'ї. - 2000. - №3. - С. 33-34.

Хід роботи

1. Учні класу об'єднуються парами. Кожній парі пропонується розв'язати одне рівняння. Наприклад, .
2. Перший учень знаходить наближений розв'язок рівняння графічним способом за допомогою ППЗ GRAN 1new:

• Перетворюємо задане рівняння так, щоб ліворуч залишився вираз x2, тобто .

• Будуємо графіки функцій , (алгоритм дій аналогічний до наведеного у додатку У.3) (рис. У.4.1).

• Знаходимо точки перетину графіків функцій (рис.У.4.2, рис. У.4.3): (-0,41421;0,17429), (2, 4132; 5,8317), тоді наближеними розв'язками квадратного рівняння будуть x1 ≈ -0,41421; x2 ≈ 2,4132.

3.Другий учень розв'язує рівняння алгебраїчно і знаходить його точний розв'язок:

,

4.Учні, обмінявшись отриманими результатами, обчислюють їх точність:

10. Учитель разом із учнями формулюють висновки до роботи.

Додаток У.5

Використання програмного засобу GRAN 1new під час вивчення наближених обчислень у 9 класі

Тема: Квадратична функція.

Мета: Сформувати уявлення про графік та властивості квадратичної функції; продовжити формування навичок розв'язувати рівняння графічним способом, а також оцінювати точність отриманих результатів.

Учні мають володіти уявленнями: про графічний спосіб розв'язування рівнянь; графіки та властивості квадратичної функції; точність наближених значень і правила її знаходження.

Організація навчання та рекомендована література (див. додаток У.4).

Хід роботи

1. Учні класу об'єднуються парами. Кожній парі пропонується розв'язати одне рівняння. Наприклад, .
2. Перший учень знаходить наближений розв'язок рівняння графічним способом за допомогою ППЗ GRAN 1new:

• Будуємо графік функції , (алгоритм дій аналогічний до наведеного у додатку У.3).

• Знаходимо точки перетину графіка функції з віссю Ox: x1 ≈ -0,3745; x2 ≈ 2,4523 (рис. У.5.1).

3. Другий учень розв'язує рівняння алгебраїчно і знаходить його точний розв'язок:

.

4. Учні, обмінявшись отриманими результатами, обчислюють їх точність:

5. Формулюємо висновки

Додаток Ф.
Ілюстрації до прикладної задачі
(тема «Розв'язування трикутників», 9 клас)

Додаток Ф.1


A
B
C
ВУЛ. РЕВУЦЬКОГО
ВУЛ. АРХІТЕКТОРА
ВЕРБИЦЬКОГО
ХАРКІВСЬКИЙ МАСИ
ХАРКІВСЬКА

Рис. Ф.1.1

Додаток Ф.2

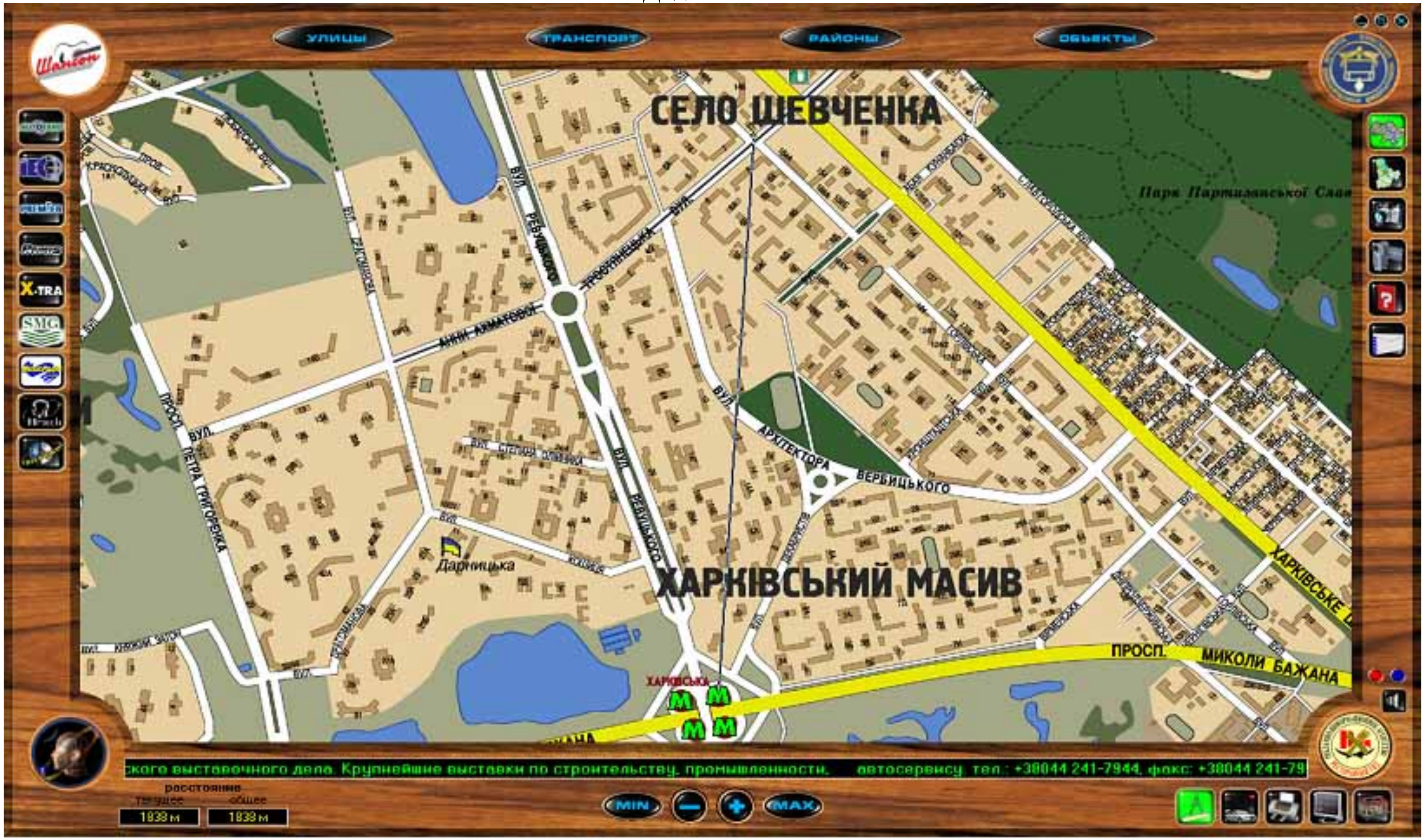


Рис. Ф.1.2

Додаток Х

Організаційна модель розв'язування прикладної задачі учнями основної школи (9 клас)

Тема: Розв'язування задач на обчислення об'ємів, зокрема прикладного характеру.
Мета: Сформувати уміння застосовувати уявлення про наближені значення, їх числові характеристики та правила виконання дій над ними під час розв'язування прикладних задач, зокрема пов'язаних із програмовим геометричним матеріалом.
Уявлення та знання якими мають володіти учні: обчислення об'ємів прямої призми та циліндра; виконання дій над наближеними значеннями; аналіз числових характеристик наближених значень; навички взаємо переходу між якісними та кількісними числовими характеристиками.
Організація навчання: Залежно від наявного обладнання учні класу об'єднуються у гетерогенні групи по 3 особи. Один з учнів обирається керівником групи. Він разом з іншими учнями планує та розподіляє навчальні дії із розв'язання прикладної задачі.

Додаткові відомості, необхідні для розв'язання задачі, або наводяться вчителем (за умови розв'язування задачі на уроці), або знаходяться учнями у довідкових джерелах (за умови розв'язування задачі у позаурочний час).
Постановка задачі: Скільки пачок речовини поміститься у надану ємкість?
Обладнання: лінійка; нитка або паперова стрічка; таблиця щільності різних речовин; пакунок із-під (або з) речовиною, на якому містяться відомості про її масу; ємкості, які наближено мають форму відомих учням геометричних тіл.
Підготовка до розв'язування задачі. Учні знайомляться з обладнанням (таблиця Х.1) та аналізують умову задачі. Під час обговорення задачі учні мають з'ясувати алгоритм її внутрішньомодельного розв'язування:

1) Визначити об'єм ємкості: V1.
2) Визначити об'єм речовини, яка містилась у пакунку: V2.

3) Обчислити частку та зробити відповідні висновки.

Таблиця Х.1

Ілюстрація обладнання до лабораторної роботи

Перша група: • цукор, маса нетто 1000г±3%; • ємкість наближено має форму циліндра.		
Друга група • крупа гречана, маса нетто 1000г±15г; • ємкість наближено має форму прямої призми.		
Третя група • сіль, маса нетто 1кг±3%; • ємкість наближено має форму циліндра.		
Четверта група • сіль, маса нетто 1000±30г; • ємкість наближено має форму прямої призми		
П'ята група	…	…

4. Коментарі до внутрішньомодельного розв'язування задачі: Для обчислення об'єму ємкості учні використовують формулу .

Дані, які необхідно у неї підставити отримують шляхом практичних вимірювань. Кожен із розмірів вимірюють по 4-5 рази в різних місцях, після чого записують відповідні наближені значення у вигляді подвійних нерівностей. У випадках, коли йдеться про ємкості, форма яких наближено вважається циліндром, радіус знаходять через непрямі вимірювання: або за допомогою лінійки знаходять діаметр, який потім ділять навпіл; або за допомогою нитки чи паперової стрічки визначають довжину кола, який потім ділять на 2π.

Для обчислення об'єму речовини, яка містилась у пакунку, учні використовують формулу

, що відома їм із курсу фізики. При цьому значення густини ρ знаходять за таблицею або з інших інформаційних джерел, а маса m вказана на пакунку у вигляді умовної рівності.

5. Основні етапи розв'язування (на прикладі третьої групи)

1) Обчислюємо наближене значення об'єму ємкості.

Виконуємо вимірювання та записуємо отримані результати у таблицю, попередньо ввівши такі позначення: C – довжина кола, яке лежить у основі циліндра; h - висота циліндра.

Таблиця Х.2

Результати вимірювань та обчислень

	Результати вимірювань, см					Наближене значення результату практичних вимірювань
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	
C	35,9	36,4	36,2	35,8	36,2	35,8 см ≤ C ≤ 36,2 см
h	20,0	19,9	20,0	19,7	19,8	19,7 см ≤ h ≤ 19,8 см
V1						2009 см3 ≤ V1 ≤ 2065 см3
V2						421 см3 ≤ V2 ≤ 543 см3
						3,7 ≤ ≤4,9

Виводимо робочу формулу (рис. Х.1) та виконуємо відповідні обчислення за допомогою калькулятора або ІКТ, наприклад Excel. Отриманий результат записуємо у таблицю, округливши його, наприклад до цілих.

Поточні методичні зауваження: ні розряд округлення, ні саме округлення не має принципового значення, оскільки дані для подальших обчислень беруться у електронному вигляді із пам'яті відповідних комірок. У той самий час «повний запис» отриманих проміжних результатів є недоречним (але не неправильним). Учням пропонується округляти межі наближених значень за тими правилами, якими вони опановували протягом навчання у 5-8 класах.

2) Обчислюємо наближене значення об'єму речовини, що міститься у пакунку.

Аналізуємо данні, ввівши попередньо позначення m - маса солі; ρсолі – щільність солі. За даними, що вказані на пакунку m =1кг±3%, тоді m =1000±30г, а відповідно 970 г ≤ m ≤ 1030 г. За таблицею щільності речовин 1,9 г/см3 ≤ ρсолі ≤ 2,3 г/см3.

Виконуємо обчислення за формулою та записуємо отримані результати у таблицю.

3) Обчислюємо наближене значення частки .

4) Інтерпретуємо розв'язок згідно умови задачі: у запропоновану ємність циліндричної форми поміститься від 3 до 4 пакунків солі.

Додаток Ц

Анкета для вчителів

Шановний учитель!

Просимо Вас дати відповіді на запропоновані питання, які допоможуть у роботі над удосконаленням методики навчання математики.

1. Загальний стаж педагогічної роботи________________________________
2. Педагогічний стаж роботи учителем математики___________________
3. Посада, категорія, звання, нагороди________________________________
4. Що на вашу думку являють собою наближені обчислення як складова шкільної математики (структура наближених обчислень, перелік провідних понять, тощо)?
5. Сформулюйте дві основні задачі наближених обчислень.
6. Чи потрібно на вашу думку знайомити учнів із наближеними обчисленнями в межах шкільного курсу математики ? Чому?
7. Якою має бути мета вивчення наближених обчислень в основній школі?
8. Як ви оцінюєте стан вивчення наближених обчислень в основній школі на сучасному етапі?
9. Які кроки на вашу думку необхідно заподіяти для підвищення ефективності вивчення наближених обчислень учнями основної школи?
10. Чого слід запобігати під час вивчення наближених обчислень?
11. Які методи та форми навчання на вашу думку можуть виявитися ефективними під час вивчення наближених обчислень?
12. Коли (у якому класі, або класах) і у якому обсязі необхідно вивчати наближені обчислення?
13. Наведіть декілька питань з наближених обчислень, які потребують детального (або детальнішого) висвітлення під час вивчення математики основної школи.
14. Назвіть декілька джерел (навчально-методичні посібники, статті, тощо) з наближених обчислень, якими ви користувались востаннє.
15. Чи достатнім є дидактичне забезпечення вивчення наближених обчислень? Чому?
16. Як ви оцінюєте власний рівень володіння навчальним матеріалом з НО?

Щиро дякуємо за співробітництво!

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адишев И. Г. Формирование практических умений приближенных вычислений в условиях взаимосвязи математики и физики: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / И.Г. Адишев. - М.,1979. – 18 с.
2. Алгебра: [учебное пособие для 7 класса средней школы] / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.С. Муравин, С.Б.Суворова; под ред. А.И.Маркушевича. - М.: Просвещение, 1974. – 255 с.
3. Алгебра: [учебное пособие для 8 класса средней школы] / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.С. Муравин, С.Б.Суворова; под ред. А.И.Маркушевича. - М.: Просвещение, 1974. – 255 с.
4. Алгебра: [учебник для 8 класса средней школы] / Ю.Н.Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.С.Муравин, С.Б.Суворова; под ред. С.А.Теляковского - М.: Просвещение, 1989. – 239 с.
5. Алгебра: [учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений] / Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В. Сидоров и др. - М.: Просвещение, 2002. – 255 с.
6. Алгебра: [підруч. для 9 кл. серед. шк.] /Ю.М.Макаричев, Н.Г.Миндюк, К.І.Нєшков, С.Б. Суворова; за ред. С.О.Теляковського. - К.: Рад. школа, 1991. – 288 с.
7. Александров П.С. Свойства неравенств и понятие о приближенных вычислениях /Александров П.С., Колмогоров А.Н. // Математика в школе. - 1941. - № 2. - С. 1-12.
8. Алексахин С.П. Приближенных вычисления в VI классе / Алексахин С.П. // Математика в школе. - 1961. - № 5. - С. 64-72.
9. Аллабергенов С.А.Элементарные приближенные расчеты в среднем образовании: автореф. дис . на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / С.А. Аллабергенов. - М., 1975. – 23 с.
10. Андронов И.К. Арифметика: [пособие для средней школы] / Андронов И.К., Брадис В.М. – М.: Госучпедиздат, 1962. – 296 с.
11. Антонов Д.А. Пропедевтика понятия предела в теме «Приближенные вычисления» / Антонов Д.А. // Математика в школе. - 1981. - № 3. - С.33-34.
12. Асанидзе Ш.Н. Приближенные вычисления в курсе математики восьмилетней школы: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Ш.Н. Асанидзе - Тбилиси, 1962. – 18 с.
13. Барчунова Ф.М. Об определении верных цифр приближенного значения числа / Барчунова Ф. М. // Математика в школе. - 1978. - № 1. - С. 34.
14. Башмаков М.И. Мы учим и учимся математике в нашем общем доме – Европе (по материалам исследования обучения математике в европейских странах) / Башмаков М.И. // Математика в школе. - 2002. - № 1. - С. 3-6.
15. Бевз В.Г. Міжпрежметні зв'язки як необхідний елемент предметної системи навчання/ Бевз В.Г . // Математика в школі. - 2003. - № 6. - С.11-15.
16. Бевз Г.П. Алгебра: [пробний підручник для 7-9 класів школи] / Бевз Г.П. - К.: Освіта, 1996. - 303 с.
17. Бевз Г.П. Величини у шкільному курсі математики / Бевз Г.П. // Математика в школі. - 2003. - № 8. – С.2-6.
18. Бевз Г.П. Математика: [пробний підручник для 5 кл. загальноосв. навч. закладів] / Бевз Г.П. - К .: Вежа, 2000. – 208 с.
19. Бевз Г.П. Математика: [пробний підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів] / Бевз Г.П. - К.: Вежа, 2002. – 224 с.
20. Бевз Г.П. Математика: [підруч. для 5 кл. загальноосвіт. навч. закл.] / Бевз Г.П., Бевз В.Г. – К.: Зодіак - ЕКО, 2005. – 352 с.
21. Бевз Г.П. Методи навчання математики / Бевз Г.П. - Х.: Вид. група „Основа”, 2003. - 96 с.
22. Бевз Г.П. Методика викладання алгебри: [посібник для вчителів] / Бевз Г.П. -К.: Рад. школа, 1971. – 272 с.

23. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Бевз Г.П - К.: Вища школа, 1977. – 375 с.
24. Бевз Г.П. Методика викладання математики: [навчальний посібник] / Бевз Г.П - К.: Вища школа, 1989. – 367 с.
25. Бевз Г.П. Підручник за яким хочеться навчатися / Бевз Г.П., Бевз В.Г. // Математика в школі. - 2005. - № 3. - С.15-20.
26. Бекаревич А.Н. Приближенные вычисления в средней школе / Бекаревич А.Н. - Мн.: Народная асвета, 1979. – 96 с.
27. Беляев В.И. Об изучении раздела «Приближенные вычисления» в курсе арифметики VI класса / Беляев В.И. // Математика в школе. - 1961. - № 4.-С.34-39.
28. Білецький М.М. Міжтемні зв’язки як засіб реалізації внутрішньо предметних зв’язків / Білецький М.М. // Математика в школі. - 2005. - № 2. - С.35-40.
29. Блехман И.И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики / Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановка Я.Г. - М.: Наука, 1983. – 328 с.
30. Бобылев Л.А. Вычисление приближенных значений величин в курсе математики восьмилетней школы: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Бобылев Л.А. - М., 1964. – 16 с.
31. Боженко А.С. Приближенные вычисления [краткое пособие для технических расчетов] / Боженко А.С. - Л., 1940. – 51 с.
32. Брадис В.М. Вычислительная работа в курсе математики средней школы / Брадис В.М. - М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 252 с.
33. Брадіс В.М. Засоби і способи елементарних обчислень: [посібник для вчителів математики і фізики семирічної та середньої школи] / Брадіс В.М. - К.: Рад. школа, 1952. – 176 с.
34. Брадис В.М. Как надо вычислять? [пособие для учащихся V и VI классов средней школы] / Брадис В.М. -М.: Госучпедиздат Мин-ва Просвещения РСФСР, 1960. – 79 с.
35. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе: [для пед. институтов] / Брадис В.М. - М.: Учпедгиз, 1949. – 472 с.
36. Бредихин Б.М. Приближенные вычисления в средней школе / Бредихин Б.М.- Куйбышев, 1957. – 32 с.
37. Бродський Я.С. Про ймовірнісно-статистичну лінію у шкільному курсі математики / Бродський Я.С., Павлов О.Л. // Математика в школі. - 2006. - № 7. - С.2-11.
38. Брунер Дж. Исследование развития познавательной деятельности; пер. с англ. / Брунер Дж. – М.: Педагогика, 1971. – 391 с.
39. Бугаева М.А. Система практических работ как средство усиления прикладной направленности курса математики 5-6 классов: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Бугаева Марина Александровна. - М., 1992. – 141 с.
40. Булавко И.Г. Точные и приближенные вычисления / Булавко И.Г. - Мн.: Изд-во Мин-ва высшего, среднего спец-го и проф-го образования БССР, 1963. – 107 с.
41. Булах І.С. Психологія особистісного зростання підлітка: [монографія] / І.С.Булах. - К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2003. – 340 с.
42. Бурда М.І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / Бурда М.І. // Педагогіка і психологія. - 1996. - № 1. - С.40-45.
43. Бурда М.І. Теорія шкільного підручника з математики як предмет методичного дослідження / Бурда М.І. // Математика в школі. - 1999. - № 2. - С.4-7.
44. Буряк Н. Про усну лічбу та деякі прийоми обчислень / Буряк Н. // Математика в школі. - 2004. - №9-10. - С.37-41.
45. В помощь учителям, работающим по учебникам «Алгебра 7» и «Алгебра 8» под редакцией С.А .Теляковського (1989 г. издания) // Математика в школе. - 1989. - № 3. - 64-72.

46.Василишин Б.С.Основы теории погрешностей: [методические рекомендации учителям] / Василишин Б.С., Возняк Л.С. - Ивано-Франковск, 1982. – 25 с.
47.Васильев М.Г. Логарифмические вычисления с приближенными данными / Васильев М.Г. // Математика в школе. - 1954. - № 3. - С.47-54.
48.Васильев М.Г.О приближенных вычислениях в старших классах/ Васильев М.Г. // Математика в школе. - 1959. - № 2. - С.16-24.
49.Васильев М.Г. Правила подсчета цифр, сокращенное умножение и деление в курсе VIII класса / Васильев М.Г. // Математика в школе. - 1953.- № 4. - С.40-45.
50.Васильев М.Г. Простейшие вычисления с приближенными величинами в курсе семилетней школы / Васильев М.Г. // Математика в школе. - 1951. - № 5. - С.63-67.
51.Виленкин Н.Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты / Виленкин Н.Я. // Математика в школе. - 1988. - № 4. - С.7-14.
52.Виттинг А.А. Приближенные вычисления / Виттинг А.А. - М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 112 с.
53.Вікова та педагогічна психологія: навчальний посібник / [О.В.Скрипченко, Л.В.Долинська, З.В. Огороднійчук та ін.] - К.: Просвіта, 2001. – 416 с.
54.Возна М.С. Про встановлення взаємоузгодженності програм з математики та суміжних навчальних дисциплін / Возна М.С., Гром'як М.І. // Математика в школі. - 2003. - № 6. - С. 8-11.
55.Возняк Г.М. Алгебра: [підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів] / Возняк Г. М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І. - Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2002. - 200 с.
56.Возняк Г.М. Алгебра: [підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів] / Возняк Г. М., Литвиненко Г.М., Мальований Ю.І.; за ред. Мальованого Ю.І. - Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2002. – 208 с.
57. Возняк Г.М. Математика: [навчальний посібник для 5 класу] / Возняк Г.М., Литвиненко Г.М., Маланюк М.П. - К.: Освіта, 2002. – 271 с.
58.Возняк Г.М. Практичні роботи з математики для 6 класу / Возняк Г.М., Моховик О.В. - Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2006. – 32 с.
59.Возрастные и индивидуальные особенности младших подростков / [под ред. Д.Б.Эльконина, Т. В.Драгуновой]. - М.: Просвещение, 1996. – 360 с.
60.Володарская И.И. Моделирование и его роль в решении задач / Володарская И.И, Салмина Н.Г . // Математика. - 2006. - № 18. - С.2-7.
61.Выготский Л.С. Собрание сочинений в 6-ти томах.- М.: Педагогика, 1988. – 488 с.
62.Выготский Л.С. Педология подростка //В кн.: Выготский Л.С. Собрание сочинений: в 6-ти т. Т. 4. – М.: Педагогика, 1982. – 504 с.
63.Вычислительная математика и программирование: учебное пособие / [Л.К.Богут, Е.Н.Гершт,К. Н.Маскина и др.] - Ч. 1.: Приближенные вычисления и оценка погрешностей результатов вычислений. - Л., 1975. – 81 с.
64.Гаврилов А.Ф. Практика вычислений. Приближенные вычисления. / Гаврилов А.Ф. - М.-Л.: Гос-ное изд-во, 1926. – 168 с.
65.Гамезо М.В. Возрастная и педагогическая психология: [учебное пособие] / Гамезо М.В., Петрова Е.А., Орлова Л.М. - М.: Педагогическое общество России, 2003. – 512 с.
66.Гевал П.А. Загальні принципи використання комп’ютера на уроках різних типів / Гевал П.А. // Комп’ютер у школі та сім’ї. - 2000.- №3.-С.33-34.
67.Гельфанд М.Б. Упражнения к теме «Погрешность. Относительная погрешность» / Гельфанд М. Б., Чучуков В.Ф. // Математика в школе. - 1976. - №3. - С.22-24.
68.Гладкий А.В. Математическая лингвистика // Математическая энциклопедия / Гладкий А.В. - М.: Советская энциклопедия, 1982.-Т.3.-С.566-567.
69.Глейзер Г.Д. История математики в школе VII-VIII классы: [пособие для учителей] / Глейзер Г. Д. - М.: Просвещение,1982.-240с.

70. Глейзер Г.Д. Центр творческих усилий педагогов / Глейзер Г.Д., Черкасов Р.С. // Математика в школе. - 1993. - №6. - С.2-5.
71. Голобородько В.В. Наукова робота учнів. Програма організації науково-дослідницької діяльності учнів / Голобородько В.В., Гнєдашев В.М. - Х.: Вид. група „Основа", 2005.-208с.
72. Гольдин А.Л. Техника вычислений: Упрощенные, приближенные, графические и механические способы вычислений / Гольдин А.Л. -Л.: Издание автора,1928.-244с.
73. Гончаров П.М. Приближенные вычисления / Гончаров П.М. - СПб., 1905. - 18с.
74. Горбушин Ф.А. К вопросу о приближенных вычислениях / Горбушин Ф.А. // Математика в школе. - 1959. - №4. - С.37-40.
75. Грабар М.М. Применение математической статистики в педагогических исследованиях: непараметрические методы / Грабар М.М., Краснянская К.А. - М.: Просвещение, 1977.-136с.
76. Грибанов В.У. Об учебной литературе по арифметике с точки зрения приближенных вычислений / Грибанов В.У. //Математика в школе.-1952.-№4.-С.26-32.
77. Грибанов В.У. Приближенные вычисления в V классе / Грибанов В.У. // Математика в школе. - 1953. - №5. - С. 4-16.
78. Грибанов В. У. Приближенные вычисления в средней школе: [пособие для учителей] / Грибанов В.У. – М.: Просвещение, 1964. – 112 с.
79. Грошев А.В. Приближенные вычисления в средней школе / Грошев А.В.- Свердловск, 1955.- 40с.
80. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы обучения математики / Груденов Я.И. - М.: Педагогика, 1987.- 160с.
81. Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении / Давыдов В.В. - М.: Педагогика, 1972. – 423 с.
82. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения / Давыдов В.В. - М.: Педагогика, 1986. – 240 с.
83. Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: [книга для учителя] / Далингер В.А. - М.: Просвещение, 1991.-80с.
84. Дао Тхай Лай. Система средств обучения для преподавания темы «Приближенные вычисления» с применением микрокалькуляторов в средних школах СРВ: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Дао Тхай Лай - М., 1986.-16с.
85. Дарвиш О.Б. Возрастная психология: [учебное пособие] / Дарвиш О.Б. - М.: Изд-во ВЛАДОС-ПРЕСС, 2003. – 264 с.
86. Дворкин Б.Е. Приближенные вычисления в курсе математики и физики средней школы / Дворкин Б.Е. - Ставрополь, 1957.-64с.
87. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Демидович Б.П., Марон И.А. - М.: Наука, 1966.- 664 с.
88. Демкович В.П. Приближенные вычисления в школьном курсе физики: [книга для учителя] / Демкович В.П., Прайсман Н.Я. - М.: Просвещение,1983.-112с.
89. Державна система забезпечення єдності вимірювань. Метрологія: [терміни і визначення] - К.: Держстандарт України, 1995.- 70с.
90. Дзюба Ф.Т. О крупном недочете в программе средней школы / Дзюба Ф.Т. //Математика в школе. - 1955. - №5. - С.31-34.
91. Долгушин П.О. Вычисления по приближению / Долгушин П.О. -К., 1908.-74с.
92. Дорофеев Г.В. О принципах отбора содержания школьного математического образования / Дорофеев Г.В. // Математика в школе.- 1990.-№6.- С.2-5.
93. Драгунова Т.В. Подросток / Драгунова Т.В. - М.: Знание, 1976.- 96с.
94. Дубинчук О.С. Вузлові питання викладання арифметики в V класі: дис. ... канд. пед. наук: 13. 00.02 / Дубинчук Олена Степанівна. - К., 1954. – 259 с.

95. Дубинчук О.С. Методика викладання математики в V-VI классах: [арифметика і початки алгебри] / Дубинчук О.С. - К.: Рад. школа,1974.-208с.
96. Дубинчук О.С. Методика викладання алгебри в 7-9 класах: [посібник для вчителя] / Дубинчук О.С., Мальований Ю.І., Дичек Н.П. - К.: Рад. школа, 1991. – 254 с.
97. Егидес А.П. Лабиринты мышления, или Учеными не рождаются / Егидес А.П., Егидес Е.М. - М .: АСТ-ПРЕСС КНИГА, 2004. - 320 с.
98. Елизаветина Н.В. О приближенных вычислениях с учетом погрешностей в курсе математики средней школы / Елизаветина Н.В. – Омск, 1966. – 48 с.
99. Елизаветина Н.В. Приближенные вычисления в средней школе и их роль в формировании математических понятий: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00 .02 «Методика преподавания математики» / Елизаветина Н.В. - Казань, 1966.- 17с.
100. Есиков А.И. Активизация познавательной деятельности учащихся при формировании вычислительных умений и навыков в 4-5 классах: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Есиков А.И. - Ленинград, 1985.- 18с.
101. Жалдак М.І. Педагогічний потенціал комп’ютерно - орієнтованих систем навчання математики / Жалдак М.І. // Комп’ютерно - орієнтовані системи навчання: [зб. наук. праць] - К. : НПУ ім. М.П.Драгоманова. - Випуск 7. - 2003. - С.3-6.
102. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках геометрії: [посібник для вчителів] / Жалдак М.І., Вітюк О. В. - К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2000. - 168 с.
103. Жалдак М.І. Математика з комп’ютером: [посібник для вчителів] / Жалдак М.І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є.Ф.- К.: РННЦ ДІНІТ, 2004.- 333 с.
104. Жалдак М.І. Обчислювальна математика: [спеціальний курс факультативних занять у 9 і 10 класах] / Жалдак М.І., Ковбасенко Б.С., Рамський Ю.С. - К.: Рад. школа, 1973.-184 с.
105. Жалдак М.І. Чисельні методи математики: [посібник для самоосвіти вчителів] / Жалдак М.І., Рамський Ю.С. - К.: Рад. школа, 1984. - 206 с.
106. Жовнір Я.М. Фузіонізм в системі викладання геометрії в середній школі: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Жовнір Яків Михайлович. – К., 1969.- 669с.
107. Зельманзон М.Е. Одно замечание о приближенных вычислениях / Зельманзон М.Е. // Математика в школе. - 1977. - №6. - С.37.
108. Иванов А.И. Приближенные вычисления / Иванов А.И.- М.-Л.: Госучпедиздат, 1931. – 51 с.
109. Иванов А.И. Из опыта изучения в VII классе некоторых вопросов по теме «Приближенные вычисления» / Иванов А.И. //Математика в школе. - 1980. - №1. - С.27-28.
110. Ильяков Ю.Д. Об ошибке при нахождении относительной погрешности измерения температуры / Ильяков Ю.Д. //Математика в школе.-1979.-№1.-С.31-32.
111. Кавун И.Н. Приближенные вычисления: [курс элементарный] / Кавун И.Н. - М.:Гиз,1924. – 124 с.
112. Калинович Ф. Елементи наближених обчислень / Калинович Ф.- Х.-К.:ОНТВУ, 1932.-110с.
113. Калиткин Н.М. О нахождении числовых значений иррациональных выражений / Калиткин Н. М. // Математика в школе. - 1962. - №3. - С. 62-69.
114. Калиткин Н.М. Округление результатов арифметических действий / Калиткин Н.М. // Математика в школе. - 1957. - №2. - С.32-37.
115. Калмикова З.И. Психологические принципы развивающего обучения / Калмикова З.И. - М.: Знание, 1979. – 48 с.
116. Капіносов А.М. Алгебра, 9 клас. [збірник задач і вправ] / Капіносов А.М. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. - 224 с.
117. Каплунрович И.Я. Пять подструктур математического мышления: как их выявить и использовать в преподавании / Каплунрович И.Я., Петухова Т.А. // Математика в школе. - 1998 . - №5. - С. 45-48.

118.Карне М. Дифференцированный подход и составление учебных программ / Карне М., Линнемайер С. // В кн.: Одаренные дети: Пер. с англ. / Общ. ред. Г.В.Бурменской и В.М. Слуцкого.- М.: Прогресс, 1991.- С. 257-316.
119.Кле М. Психология подростка: психосексуальное развитие / Кле М. - М.: Педагогика, 1991.- 171с.
120.Кліндухова В.М. Деякі особливості поняття про точність наближених значень у курсі математики основної школи / Кліндухова В.М. //Наукові записки. - Вип.72.- Серія: Педагогічні науки. - Кіровоград: РВВ КДТУ ім. В.Винниченка, 2007.-Ч.2.- С.161-165.
121.Кліндухова В.М. Деякі питання шкільної математики як засіб звернення до резервів розвитку учнів / Кліндухова В.М. //Наукові записки: зб. наук. статей - Вип.LXVI.- Серія: Педагогічні та історичні науки. - Київ, 2007.- С.74-82.
122.Кліндухова В.М. Із практики вивчення наближених обчислень у вітчизняній школі / Кліндухова В.М. // Евристичне навчання математики: Міжнар. наук.-метод. конференція. Донецьк, 15-17 листопада 2005 року. - Донецьк: Изд-во ДонНУ, 2005.- С.46-47.
123.Кліндухова В.М. Наближені обчислення в новій програмі з математики / Кліндухова В.М., Кліндухова А.П. // Математика, економіка, інформатика: актуальні проблеми та методика викладання: Обласна науково-практична конференція. Кіровоград, 10-12 квітня 2006 року. - Кіровоград: КДПУ ім. В.Винниченка, 2006.- С.33-36.
124.Кліндухова В.М. Наближені обчислення у шкільних програмах з алгебри / Кліндухова В.М. // Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: Всеукраїнська науково-практична конференція. Київ, 6 жовтня 2004 року. - К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2004.- С.68-69.
125.Кліндухова В.М. Наближені обчислення у програмі з математики 12-річної школи: структурна модель / Кліндухова В.М. // Проблеми математичної освіти: Всеукр. науково-методична конференція. Черкаси, 16-18 квітня 2007 року. - Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2007.- С.49-50.
126.Кліндухова В.М. Основні методи наближених обчислень в курсі шкільної математики / Кліндухова В.М. //Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія №5. Педагогічні науки: реалії і перспективи: Зб. наук. праць. - Вип. 1.- К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2006.- С.139-143.
127.Кліндухова В.М. Особливості запису наближених значень під час вивчення наближених обчислень в основній школі / Кліндухова В.М. -Вісник Черкаського університету. - Вип. 104.- Серія: Педагогічні науки. - Черкаси, 2007. - С.46-54.
128.Кліндухова В.М. Особливості математичної мови при вивчення наближених обчислень / Кліндухова В.М. //Наукові записки. - Вип. 60.- Серія: Педагогічні науки. - Кіровоград: РВВ КДТУ ім.В.Винниченка, 2005. - Ч. 1. - С.62-67.
129.Кліндухова В.М. Про наближені обчислення під час вивчення геометрії учнями основної школи / Кліндухова В.М. // Математична освіта в Україні: минуле, сьогодення, майбутнє: Міжнар. науково-методична конференція. Київ, 16-18 жовтня 2007 року. - К., НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007.- С.184-185.
130.Кліндухова В.М. Про наближені обчислення у шкільному кірсі алгебри / Кліндухова В.М. // Науковий часопис НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. наук. праць. - К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2004.-№1.- С.81-85.
131.Кліндухова В.М. Про розвивальні можливості наближених обчислень / Кліндухова В.М. // Наука і сучасність: Зб. наук. праць НПУ ім. М.П.Драгоманова. - Том 57.- К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2006.- С.89-99.
132.Кліндухова В.М. Проблеми вивчення наближених обчислень в шкільному курсі математики: історичний аспект / Кліндухова В.М. //Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: Зб. наук. праць - Вип. V.-Т. 1.- Кривий ріг: ВВ НМетАУ, 2005.- С.127-133.
133.Кліндухова В.М. Проективна діяльність учнів під час вивчення наближених обчислень / Кліндухова В.М. //Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. зб. наук. робіт: Труди міжнар. науково-методичної конференції «Математична освіта в Україні: минуле,

сьогодення, майбутнє» - Вип.28.- Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2007.- С.195-202.
134.Кліндухова В.М. Ретроспективний аналіз проблеми вивчення наближених обчислень в школі / Кліндухова В.М. //Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. зб. наук. робіт. - Вип.24.- Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2005.- С.288-293.
135.Кліндухова В.М. Тезаурус елементарної теорії наближених обчислень / Кліндухова В.М. // Математика, економіка, інформатика: актуальні проблеми та методика викладання: Обласна науково-практична конференція. Кіровоград, 10-12 березня 2005 року. - Кіровоград: КДПУ ім. В.Винниченка, 2005.- С.42-45.
136.Коваленко В.Г. Дидактические игры на уроках математики: [книга для учителя] / Коваленко В.Г. - М.: Просвещение, 1990.-96с.
137.Коваленко В.Г. Алгебра: [эксперим. навч. посібник для 8 кл. шк. з погл. вивченням математики і спеціаліз. шк. фізико-мат. профілю] / Коваленко В.Г., Кривошеєв В.Я., Лемберський Л.Я. - К.: Рад. школа, 1990.-304с.
138. Коган М.С. Метод проектов и условия его эффективного применения в воспитательной работе / Коган М.С. - Режим доступу: HYPERLINK "http://www.websib.ru/vospitanie/04-05/metod" www.websib.ru/vospitanie/04-05/metod
139.Колягин Ю.М. Размышления о некоторых педагогических и методических проблемах школы / Колягин Ю.М. //Математика в школе. - 1988. - №5. - С.3-5.
140.Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения ; под ред. А.А. Красновского. – М.: Учпедгиз, 1955.- 651с.
141.Кон И.С. Психология ранней юности: [книга для учителя] / Кон И.С. - М.: Просвещение, 1989.- 255с.
142.Корінь Г.О. Вивчаємо наближені обчислення / Корінь Г.О. //Математика в школі . - 2003. - №2. - С.35-42.
143.Корінь Г.О. Прикладні задачі, як засіб реалізації між предметних зв'язків / Корінь Г.О. // Математика в школі. - 2004. - №9-10. - С. 30-34.
144.Коробова І.В. Розвиток дивергентного мислення учнів основної школи у навчанні фізики: дис. ... канд.. пед. наук: 13.00.02 / Коробова Ірина Володимирівна - Херсон, 2000.-200с.
145.Корчинский Н.В. Приближенные вычисления: [пособие для студентов I-го курса] /Корчинский Н.В. – Днепропетровск, 1961. - 43с.
146.Костюк Г.С. Избранные психологические труды / Костюк Г.С. - М.: Педагогика, 1988. - 304 с.
147.Кравчук В.Р. Алгебра: [підручник для 8 класу] / Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М.; за ред. Слєпкань З.І. -Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.- 232 с.
148.Кравчук В.Р. Алгебра: [пробний підручник для 9 класу] / Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М.; за ред. Слєпкань З.І. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 248 с.
149.Кравчук В.Р. Математика. 6 клас / Кравчук В.Р., Янченко Г.М. -Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 288 с.
150. Кравчук В.Р. Алгебра: [підручник для 7 класу] / Кравчук В.Р., Янченко Г.М.; за ред. Слєпкань З.І. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. - 192с.
151.Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях / Крылов А.Н. - М.-Л. :Гостехиздат,1950.-400с.

152.Крутецкий В.А. Психология обучения и воспитания школьников / Крутецкий В. А. - М.: Просвещение, 1976. – 303 с.
153.Крутецкий В.А. Психология подростка / Крутецкий В.А., Лукин Н.С. - М.: Просвещение, 1965. – 317 с.
154.Куницкий Р.В. За ликвидацию вычислительной неграмотности / Куницкий Р.В. // Математика в школе. - 1962. - №3. - С. 50-52.
155.Курс общей, возрастной и педагогической психологии: [в 3т.] / М.В.Гамезо, А.П .Гукина, Е.Я.Гурьянова и др.; под ред. М.В.Гамезо - М.: Просвещение, 1982. - Т. 3: Возрастная и педагогическая психология. – 176 с.
156.Ладон И.Ф. Конспект по приближенным вычислениям / Ладон И.Ф. - Л.: Издание Артиллерийской академии РККА, 1932. – 66 с.
157.Ларичев П.А. Вопросы перестройки преподавания математики в средней школе в связи с введением новой программы / Ларичев П.А. // Математика в школе. - 1957. - №4. - С.16-23.
158.Лепский М.М. Действия с приближенными числами при решении практических задач в восьмилетней школе / Лепский М.М., Прайсман Н.Я. // Математика в школе. - 1959. - №4. - С. 32-37.
159.Лесншова С.Г. Проектная деятельность как средство социальной инициативности подростка в условиях общественной организации: дис. … канд. пед. наук: 13.00.01. - Ижевск, 2005. – 178 с.
160.Лещева Н.П. Приближенные вычисления в курсе арифметики V и VI классов: [методическое пособие] / Лещева Н.П. – Смоленск, 1963. – 39 с.
161.Литовченко З.М. Наближені обчислення: [посібник для вчителя] / Литовченко З. М., Єлизаветіна Н.В. - К.: Рад. школа, 1988. – 125 с.
162.Лобанов И.Б. Н.И.Лобачевский как инициатор введения приближенных вычислений в среднюю школу / Лобанов И.Б. // Математика в школе. - 1958. - №2 . - С.8-16.
163.Лобанов И.Б. Приближенные вычисления в средней школе: дис….канд. пед. наук: 13.00.02. - Николаев, 1955. – 336 с.
164.Лобанов И.Б. Приближенные вычисления в общеобразовательной политехнической средней школе: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Лобанов И.Б.- Львов, 1962. - 12 с.
165.Лодатко Е.А. Повышение эффективности обучения алгебре в неполной средней школе на основе совершенствования инструментального счета: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Лодатко Е.А. - М., 1985. – 22 с.
166.Лонг Л. Загадочная геометрия / Л.Лонг; пер. с англ. Т.И.Попова.- Мн.: ООО «Попурри», 2006.- 128с.
167.Мадбабаев М.М. Методика изучения приближенных вычислений в курсе математики восьмилетней школы на базе измерений: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Мадбабаев М.М. - М., 1987. – 15 с.
168.Макарычев Ю.Н. Приближенные вычисления в VIII классе / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Монахов В.М. //Математика в школе. - 1973. - №2. - С. 29-36.

169.Макарычев Ю.Н. О методике изучения приближенных вычислений в VII классе / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Муравин К.С. // Математика в школе. - 1973. - №4. - С. 20-24.
170.Макарычев Ю.Н. Приближенные вычисления в VIII классе / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Монахов В.М. // Математика в школе. - 1978. - №4. - С. 32-38.
171.Малеванный Ю.И. Из опыта изучения алгебры в VII классе по новой программе / Малеванный Ю.И., Слепкань З.И. // Математика в школе. - 1973. - №5. - С. 14-19.
172.Маслова Г.Г. О нормализации нагрузки учащихся / Маслова Г.Г. // Математика в школе. - 1978. - №3. - С. 11-15.
173.Математика 5-11 класи. Програми для середніх загальноосвітніх шкіл. - К.: Перун, 1996. – 47 с.
174.Математика-5: підручник для 5 класу / [Г.М.Янченко, В.Р.Кравчук, Г.М.Возняк та ін.] - Тернопіль: Підручники і посібники, 2001.- 272 с.
175.Математика: 6 кл.: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений: пер. с укр. / Г.П. Бевз, В.Г.Бевз. - К.: Генеза, 2006. – 304 с.
176.Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. - К.: Шкільний світ, 2001. – 212 с.
177.Математика, 5-12 класи: програма для загальноосвітніх навчальних закладів. – Київ; Ірпінь: Перун, 2005. – 65 с.
178.Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 9 кл.: Учеб. для общеобразоват . учеб. заведений / [Г.В.Дорофеев, С.Б.Суворова, Е.А.Бунимович и др.]; под ред. Г.В.Дорофеева. - М.: Дрофа, 2000. - 352 с.
179.Математика. 9-11 классы: проектная деятельность учащихся / [Авт.- сост. М.В. Величко]. - Волгоград: Учитель, 2007. – 123 с.
180.Матюгина Р.И. О правилах и задачах по приближенных вычислениях в VI классе / Матюгина Р.И. // Математика в школе. - 1961. - №4. - С. 39-40.
181.Матюшкин А.М. Одаренные и талантливые дети / Матюшкин А.М., Сиск Д.А. // Вопросы психологии. - 1988. - №4.- С. 88-97.
182.Мацко Н.А. О математической подготовке выпускников средних школ / Мацко Н.А. // Математика в школе. - 1956. - №2. - С. 22-26.
183.Маєргойз Д.М. Методика викладання арифметики в 5-6 класах восьмирічної школи / Маєргойз Д.М., Дубинчук О.С. - К.: Рад. школа, 1966. – 395 с.
184.Менчинская Н.А. Психология применения знаний к решению учебных задач / В кн.: Психология применения знаний к решению учебных задач. - М.: 1958. - 416с.
185.Менчинская Н.А. Проблемы учения и умственного развития школьника: [избранные психологические труды] / Менчинская Н.А. - М.: Педагогика, 1989. – 224 с.
186.Меражов З.Ш. Об использовании измерительных навыков при обучении / Меражов З.Ш. // Математика в школе. - 1983. - №5. - С. 46-47.
187.Мерзляк А.Г. Математика: [підручник для 5 класу] / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. - Х.: Гімназія, 2005. – 288 с.
188.Мерзляк А.Г. Математика. 5 клас: [книга для вчителя] / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. - Х.: Гімназія, 2005.- 114 с.

189.Мерзляк А.Г. Про підручник „Математика, 5 клас” / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. // Математика в школі. - 2005. - №3. - С. 12-14.
190.Методика обучения приближенным вычислениям в школе: пособие для учителей / [Т.В.Малкова, Н.Р.Гайбуллаев, Р.А.Мусаелян и др.]. - Ташкент: Укитувчи, 1982.-137с.
191.Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / [Ю.М.Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л.Мокрушин и др.]. - М.: Просвещение, 1977. – 480 с.
192.Методические рекомендации по разгрузке программы // Математика в школе. - 1989. - №4. - С.39-42.
193.Метрологія та вимірювальна техніка: підручник / [Є.С.Поліщук, М.М. Дорожовець, В.О.Яцук та ін.]; за ред. проф. Є.С.Поліщука. - Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2003. - 544 с.
194.Михалін Г.О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Михалін Г.О. - К.: РННЦ «ДІНІТ», 2003. - 320с.
195.Минаева С.С. Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике: [пособие для учителя] / Минаева С.С. - М.:Просвещение, 1983. – 128 с.
196.Мінтій І.С. Математичне моделювання та прикладні задачі в шкільному курсі математики / Мінтій І.С., Петров В.В. // Математика в школі. - 2007. - №1. - С. 3-8 .
197.Михеев В.В. Единый подход к изучению величин в курсе математики и физики основной школы: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / Виктор Васильевич. -К., 1990. - 163с.
198.Мнения. Вопросы. Предложения. // Математика в школе. - 1986. - №4. - С. 30-34.
199.Монахов В.М. О методике изучения темы «Приближенные вычисления» в VIII классе / Монахов В.М. // Математика в школе. - 1974. - №3. - С. 12-18.
200.Мусаелян Р.А. К вопросу о совершенствовании раздела «Приближение вычисления» / Мусаелян Р.А. // Математика в школе. - 1977. - №6. - С. 40-42.
201.Мусаелян Р.А. Проблема усиления прикладной ориентации обучения приближенным вычислениям: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед . наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Мусаелян Р.А. - М., 1977. – 22 с.
202.Набиев А. А. Взаимосвязанное формирование вычислительных и графических навыков учащихся в процессе изучения алгебры в неполной средней школе: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Набиев А. А. - М., 1992.- 24 с.
203.Наближені обчислення // УРЕ. - К., 1982. - Т.7. - С. 192.
204.Навчальна програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, 5-9 класи (12-річна школа) // Математика в школі. - 2006. - №2. - С. 2-15.
205.Немов Р.С. Психология: [учебное пособие: В 3 кн.] - М.: Гуманитар. Изд. Центр ВЛАДОС, 2000. - Кн.2: Психология образования. - 608с.
206.Нешков К.И. Приближенные вычисления в курсе VI класса / Нешков К.И. // Математика в школе. - 1960. - №4. - С. 26-33.
207.Нижник В.Г. Вимірювання фізичних величин та обчислення похибок / Нижник В.Г. - К.: Рад. школа, 1979. – 104 с.

208.О коррективах к учебным программам общеобразовательных школ на 1978/79 учебный год // Математика в школе. - 1978. - №3. - С.9-10.
209.Об использовании микрокалькулятора в учебном процессе (Инструктивно методическое письмо) // Математика в школе. - 1982. - №3. - С.6-8.
210.Обзор статей об изучении приближенных вычислений в VI классе // Математика в школе. - 1961. - №5. - С. 22-26.
211.Овчаренко А.П. Элементы современной вычислительной культуры в старших классах средней общеобразовательной школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / ОвчаренкоАлександр Поликарпович. - К., 1965. – 281 с.
212.Оксман В.М. Использование МК как один из факторов совершенствования методики обучения дисциплинам естественно-математического и профессионально-технического циклов: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Оксман В. М. - М., 1982. – 21 с.
213.От Главного управления школ Министерства просвещения СССР // Математика в школе. - 1978. - №2. – С .9-10.
214.Пак И.И.Формирование культуры алгебраических вычислений в курсе алгебры 6-8 классов: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00 .02 «Методика преподавания математики» / Пак И.И. - М., 1987.-21с.
215.Парцхаладзе М.В. Приближенные вычисления в средней школе / Парцхаладзе М .В. // Математика в школе. - 1959. - №4. - С.17-27.
216.Педагогическая психология: [конспект лекций] / Сост. С.В.Кошелева. - М.: АСТ ; СПб: Сова, 2005. – 94 с.
217.Первухина С.Г. Связь преподавания математики с дисциплинами естественно-технического цикла в процессе формирования измерительных, вычислительных и графических навыков учащихся 4-8 классов: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Первухина С.Г. - М., 1969. – 26 с.
218.Первые итоги, новые задачи // Математика в школе. - 1963. - №2. - С.1-3.
219.Підліток: як йому допомогти / упоряд. Т.Гончаренко. - К.: Ред. загальнопедагог. газет, 2004. - 120с.
220.Поливанова К.Н. Психологическое содержание подросткового возраста / Поливанова К.Н. // Вопросы психологии. - №1. - 1996. - С. 20-23.
221.Полянський П.Б. Педагогічна адаптація учнів 5 класу до навчання в основній школі / Полянський П.Б. // Математика в школі . - 2005. - №3. - С. 2-3.
222.Пометун О.І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: [наук.-метод. посібн.] / Пометун О.І., Пироженко Л.В.; за ред. О.І.Пометун. - К.: Видавництво А.С.К., 2004 .- 192с.
223.Пономарев С.А., Сборник задач и упражнений по арифметике для V-VI классов восьмилетней школы / Пономарев С.А., Сырнев Н.И.-М.: Учпедгиз, 1961. – 240 с.
224.Полат Е. М. Что такое проект: Типология проектов / Полат Е., Петров А., Бухаркина М. // Відкритий урок: Розробки. Технології. Досвід. - 2004. - № 5-6.
225.Прайсман Н.Я. Методичні вказівки по вивченню наближених обчислень за методом меж в VII класі / Прайсман Н.Я. - Кіровоград, 1973. – 50 с.

226.Прайсман Н.Я. Несколько замечаний по поводу главы «Приближенные вычисления» в курсе арифметики /Прайсман Н.Я. //Математика в школе. - 1961. - №4. - С. 40-41.
227.Прайсман Н.Я. Основы теории приближенных вычислений по методу подсчета цифр и методика их преподавания в школе: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Прайсман Н.Я. - М., 1964.-18с.
228.Приближенные вычисления в курсе математики восьмилетней школы: [педагогические чтения] / под ред. И.Н.Шевченко, К.И.Нешкова. - М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963.- 224с.
229.Приближенные вычисления: курс лекций / [Н.В.Келлуяла, В.Е.Воскобойников, С.Е.Ляпин, И.С.Тер-Степанов]. - Л., 1940. – 146 с.
230.Приближенные вычисления: методические указания по математике для студентов пед. институтов специальности «Педагогика и методика начального обучения» / [сост. А.В. Шевченко]. - К.: КГПИ, 1991. – 48 с.
231.Программы для 1 и 2 ступени семилетней Единой трудовой школы. - М.: ГИЗ, 1921. – 350 с.
232.Программы по математике для восьмилетней и средней школы // Математика в школе. - 1978. - №4. - С. 7-32.
233.Программа по математике для IV-X классов средней общеобразовательной школы // Математика в школе. - 1979. - №2. - С. 7-12.
234.Программа по математике для IV-X классов средней общеобразовательной школы (проект) // Математика в школе. - 1979. - №3. - С. 15-21.
235.Программа по математике для средней общеобразовательной школы (V-XI классы) // Математика в школе. - 1985. - №6. - С. 7-26.
236.Программы по математике для 5-11 классов средней общеобразовательной школы. - К.: Рад. школа, 1989. – 89 с.
237.Програми з математики для 5-11 класів середньої загальноосвітньої школи. - К.: Освіта, 1992. - 89с.
238.Прокопенко Н.С. Методичні рекомендації до вивчення математики в 5 класі 12-річної школи / Прокопенко Н.С. // Математика в школі. - 2005. - №3. - С.2-3.
239.Прочухаев В.Г. Вычисления и их роль в практической подготовке учащихся: [пособие для учителей] / Прочухаев В.Г. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
240.Прочухаев В.Г.Приближенные вычисления в школе: [учебное пособие] / Прочухаев В.Г - М.,1973. – 179 с.
241.Пулькин С.П. Теория и практика вычислений: [учебное пособие для студентов] / Пулькин С.П. - М.: Просвещение, 1967. – 184 с.
242.Раков С.А. Дослідницький підхід у математичній освіті, пакети динамічної геометрії та динамічні опорні конспекти / Раков С.А. // Комп’ютер у школі та сім’ї. - 2005. - №8. - С. 18-23.
243.Раков С.А. Міжнародний конгрес ICME-10 з питань математичної освіти: дослідницькі підходи у навчанні та ІКТ / Раков С.А. // Математика в школі. - 2005 . - №4. - С.10-15.
244.Рыжик В.И. О программе по математике / Рыжик В.И. // Математика в школе. - 1987. - №6. - С. 38-41.

245.Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии: в 2-х томах / Рубинштейн С.Л. - М .: Педагогика, 1989. – 322 с.
246.Савчин М.В. Вікова психологія: [навчальний посібник] / Савчин М.В., Василенко Л.П. - К.: Академвидав, 2005. – 360 с.
247.Салмина Н.Г. Виды и функции материализации в обучении / Салмина Н.Г. - М.: Изд-во МГУ, 1981. – 134 с.
248.Саранцев Г.И. Обучение методу аналогии / Саранцев Г.И., Лунина Л.С. // Математика в школе.- 1989. - №4. - С. 42-46.
249.Сенько Ю.В. Обучение и жизненный познавательный опыт учащихся / Сенько Ю.В., Тамарин В.Э. - М.: Знание, 1989. - 73 с.
250.Сікорський П.І. Психолого-педагогічні проблеми навчання математики / Сікорський П.І. // Математика в школі. - 2004. - № 4. - С. 5-9.
251.Слєпкань З.І. До проблеми вивчення наближених обчислень у школі / Слєпкань З.І // Математика в школі. - 2006. - №10. - С8-10.
252.Слепкань З.И. Культура тригонометрических вычислений в восьмилетней и средней школе: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Слепкань Зинаида Ивановна. - К ., 1962. – 235 с.
253.Слєпкань З.І. Методика навчання математики: [підручник для студентів] / Слєпкань З.І. - К.: Зодіак - ЕКО, 2000. – 512 с.
254.Слепкань З.И. Некоторые вопросы культуры тригонометрических вычислений / Слєпкань З.І. //Математика в школе. - 1962. - №3. - С. 59-62.
255.Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / Слєпкань З.І. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
256.Соболева В.Г. Приближенные вычисления в курсе арифметики / Соболева В.Г. - Сталинград, 1957. – 24 с.
257.Столяр А.А. Педагогіка математики: [курс лекций] / Столяр А.А. – Минск: Вышейш. школа, 1974.- 382с.
258.Суткова А.В. Елементарна математика (наближені обчислення): Контрольно-тренувальні вправи: [методичні вказівки] / Суткова А.В. - К.: Рад. школа, 1966. – 60 с.
259.Суткова А.В. Питання наближених обчислень в загальноосвітній трудовій політехнічній школі: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Суткова Алла Василівна - К., 1964. – 271 с.
260.Суткова А.В. Елементарна математики (арифметика): [контрольно-тренувальні вправи] / Суткова А.В., Кухар В.М. - К.: Рад. школа,1968. - 63с.
261.Суткова А.В. Питання наближених обчислень в загальноосвітній трудовій політехнічній школі: : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика викладання математики» / Суткова А.В. -К., 1964.-271с.
262.Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: [монографія] / Тарасенкова Н.А. - Черкаси: Відлуння-Плюс, 2002. – 400 с.
263.Тарасенкова Н.А. Навчання у фоновому режимі / Тарасенкова Н.А. // Математика в школі. - 2004. - №9-10. - С. 16-21.

264.Тэкекс К. Счастливые родители одаренных детей // В кн.: Одаренные дети: Пер. с англ. / Общ. ред. Г.В.Бурменской и В.М.Слуцкого.- М.: Прогресс, 1991.- С. 15-142.
265.Теория и практика педагогического эксперимента / [под ред. А.И.Пискунова, Г. В.Воробьева] - М.: Педагогика, 1979. – 208 с.
266.Тихонов А.Н. Вводные лекции по прикладной математике / Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. - М.: Наука, 1984. – 192 с.
267.Тополя Л.В. Дидактичні ігри під час вивчення алгебри та геометрії в 7-9 класах: дис. ...канд. пед. наук: 13.00.02/Тополя Лариса Василівна. - К., 2003, 243с.
268.Трелиньски Г. Теоретические основы прикладной ориентации обучения математике и их реализация в школах ПНР / Трелиньски Г. - М., 1989.- 298с.
269.Федоренко И.Т. Об изучении темы „Приближенные вычисления" в курсе алгебры VIII класса / Федоренко И.Т., Карнацевич Л.С., Белоусова Л.И. - Харьков , 1977. – 45 с.
270.Фізика, 7 кл.: [підруч. для загльноосвіт. навч. закл.] / Є.В.Коршак, О.І.Ляшенко, В.Ф.Савченко. - Київ; Ірпінь: Перун, 2002. - 168с.
271.Фізика, 8 кл.: [підруч. для загльноосвіт. навч. закл.] / Є.В.Коршак, О.І.Ляшенко, В.Ф.Савченко. - Київ; Ірпінь: Перун, 2003. – 192 с.
272.Фізика, 9 кл.: [підруч. для загльноосвіт. навч. закл.] / Є.В.Коршак, О.І.Ляшенко, В.Ф.Савченко. - Київ; Ірпінь: Перун, 2000. – 232 с.
273.Филичев С.В. Приближенные вычисления в курсе арифметики V класса средней школы / Филичев С.В. //Математика в школе. - 1947. - №2. - С. 22-25.
274.Фирсов В.В. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплины: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Фирсов В.В. - М., 1974. – 26 с.
275.Франк М.Л. Элементарные приближенные вычисления / Франк М.Л. - Л. - М.: ГТТМ, 1933. – 178 с.
276.Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: [учителю математики о педагогической психологии] / Фридман Л.М. - М.: Просвещение, 1983. – 160 с.
277.Фролова И.П. Методика изучения приложений неравенств в курсе математики средней школы: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Фролова И.П. - М., 1982.- 21с.
278.Фрумин И.Д. Образовательное пространство как пространство развития («школа взросления») / Фрумин И.Д., Ельконин Б.Д. // Вопросы психологии - 1993. - №1. - С. 24-32.
279.Хабіб Р.А. Активізація пізнавальної діяльності на уроках математики / Хабіб Р. А. – К.: Рад. школа, 1985. – 152 с.
280.Хабиб Р.А. Некоторые вопросы методики приближенных вычислений в восьмилетней школе: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Хабіб Р.А..- М., 1963.-23с.
281.Хабиб Р.А. О некоторых приложениях правил подсчета цифр / Хабіб Р.А. // Математика в школе. - 1969. - №5. - С. 33-36.

282.Хабиб Р.А. Приближенные вычисления в курсах алгебры и геометрии восьмилетней школы / Хабиб Р.А // Математика в школе. - 1962. - №3. - С.52-59.
283.Хмара Т.М. Навчання учнів математичної мови: [методичний посібник] / Хмара Т.М. - К.: Рад. школа, 1985. – 95 с.
284.Ходирева А.В. Проектная деятельность в духовно-моральном воспитании учащихся 5-11 классов: дис. … канд. пед. наук: 13.00.01.-Новокузнецк, 2005.-183с.
285.Цориева А.К. Формирование вычислительных навыков и умений учащихся 7-8 классов по алгебре: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Цориева Алла Кудзиевна - К., 1993. – 175 с.
286.Чашечников С.М. Вивчення алгебри в 6-8 класах: [теоретичні основи та окремі питання методики] / Чашечников С.М., Чашечникова Л.Г., Чертков Й.Я. - К.: Рад. школа, 1981.-207с.
287.Черкасов Р.С. Отечественные традиции и современные тенденции в развитии школьного математического образования / Черкасов Р.С. //Математика в школе. - 1993. - №6. - С.75-77.
288.Чечель И.Л. Метод проектов: [субъективная и объективная оценка результатов] / Чечель И.Л. // Директор школы. – 1998. - №4.
289.Шавальова О.В. Застосування програмного комплексу GRAN у математичній підготовці середніх медичних працівників / Шавальова О.В. // Математика в школі. - 2005. - №5. - С.12-14.
290.Шварцбурд С.И. Проблема повышения математической подготовки учащихся: автореф. дис. на соискание науч. степени докт. пед. наук: спец. 13.00.02 «Методика преподавания математики» / Шварцбурд С.И.- М., 1972.-105с.
291.Швец М.Н. О приближенных числах / Швец М.Н. – К.: Рад. школа, 1968. – 124 с.
292.Швець В.О. Вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи / Швець В.О., Кліндухова В.М. // Математика в школі. - 2008.-№2.-С.3-8.
293.Швець В.О. Вивчення наближених обчислень у курсі математики основної школи / Швець В.О., Кліндухова В.М. // Математика в школі.-2008.-№3.-С.10-15.
294.Швець В.О. Наближені обчислення у 7-8 класах / Швець В.О., Кліндухова В.М. // Математика в школі. - 2008. - №6. - С.12-17.
295.Швець В.О. Наближені обчислення у 9 класі / Швець В.О., Кліндухова В.М. // Математика в школі. - 2008. - №7. - С. 16-22.
296.Шевченко И.К. Арифметика: [учебник для V и VI классов восьмилетней и средней школы] / Шевченко И.К. - М.: Учпедгиз, 1961. – 216 с.
297.Шевченко И.К. Начальные сведения о приближенных вычислениях / Шевченко И.К. - М.: Изд-во АПН РСФСР, 1958. – 36 с.
298.Щербина К.М. Критический обзор программы средней школы по математике / Щербина К.М. // Математика в школе. - 1938. - №2. - С. 73-81.
299.Щербина К.М. Критический обзор программы средней школы по математике НКП РСФСР 1938 г. / Щербина К.М. // Математика в школе.-1938.-№6.-С.92-105.
300.Элиот Д. Детская энциклопедия / Элиот Д., Кинг К.; пер. с англ. Е.П.Коржева. - М.: Росмен-Прес, 2005. – 127 с.
301.Guilford J. Intellectual Factors in Productive Thinking / In: Explorations in Creativity. - №4. - 1967. - p.95 - 107.

302.Hassard J. Science Experience: Cooperative Learning and Teaching of Science. Meatlo Park, CA: Addison West, 1990.

303.Silberman M. Active Strategies. 101 Strategies to Teach Active Learning.- Boston, London etc., 1996.- P.2-3.