великою загальністю. Вона справедлива як для молекул газу, так і для молекул рідини, твердого тіла, для частинок, зважених у рідині чи газі, і, навіть, для макроскопічних тіл, тобто для всіх класичних систем, що знаходяться в термодинамічній рівновазі.

Використана література:

1. *Ландау Л. Д.* Статистическая физика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1964. – 567 с.
2. *Булавін Л. А.* Молекулярна фізика / Л. А. Булавін, Д. А. Гаврюшенко, В. М. Сисоєв. – К. : Знання, 2006. – 567 с.
3. *Терлецкий Я. П.* Статистическая физики / Я. П. Терлецкий. – М. : Высшая школа, 1973. – 277 с.
4. *Федорченко А. М.* Вступ до курсу статистичної фізики та термодинаміки / А. М. Федорченко. – К. : Вища школа, 1973. – 187 с.
5. *Левич В. Г.* Курс теоретической физики. Т.1. / В. Г. Левич. – М. : ГИФМЛ, 1962. – 695 с.

Аннотация

Рассматривается методика доказательства теоремы о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы.

Ключевые слова: *функция Лагранжа, функция Гамильтона, степени свободы, уравнения Лагранжа, канонические уравнения.*

Annotation

Methodology of proof of theorem is examined about even distribution of kinetic energy after the degrees of liberty.

Keywords: Langrangian, function of Гамільтона, degrees of liberty, equalization of Lagrange, canonical equalizations.

УДК 371.13:378.147

Нічишина В. В.
Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка

ПРО ЗМІСТОВІ ВЗАЄМОЗВ’ЯЗКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН ЯК ЗАСІБ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИНЦИПУ ЦІЛІСНОСТІ, ВСЕБІЧНОСТІ ЗНАНЬ У ПІДГОТОВЦІ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Актуальність матеріалу, викладеного у статті, обумовлена потребами суспільства у підготовці фахівців, які б відповідали потребам здійснення інтегративних тенденцій у всіх сферах людської діяльності, могли б здійснювати комплексні дослідження, розглядати складні об’єкти діяльності як цілісні явища.

Ключові слова: *процес підготовки вчителів математики; фундаментальні математичні дисципліни; змістові взаємозв’язки математичних дисциплін; змістові концентри цілісного, всебічного засвоєння математики.*

Останнім часом виникло багато нових математичних наук, про які раніше не мали уявлення, багато предметів і питань втратили свою актуальність. Однак, як і десятки років тому, класичний математичний аналіз, алгебра і елементи аналітичної, диференціальної і проективної геометрій зберегли своє значення. Треба думати, що й у найближчі десятиліття ці розділи також будуть відігравати свою роль у математиці. Але, звичайно, зміст цих розділів і підхід до їх вивчення можуть істотно змінитися.

Зокрема, сучасні освітні стандарти передбачають забезпечення студентів загальнообов'язковими знаннями і способами діяльності з арифметики, алгебри, математичного аналізу, геометрії, теорії ймовірностей, статистики та інших математичних дисциплін, необхідних для розуміння значення математичних теорій у пізнанні дійсності, а також залучення студентів до розв'язання комплексних міждисциплінарних проблем.

Кожна математична дисципліна має свій предмет дослідження, але цінність має не наука як щось відокремлене і самодостатнє, а наука як один із членів товариства математичних наук. В цьому сенсі викладання кожної математичної дисципліни повинно бути доведене до зв'язку її з іншими математичними дисциплінами для з'ясування того, у чому полягає її внесок у загальну математичну культуру людини.

Отже, приходимо до необхідності наблизити зміст програм з фундаментальних математичних дисциплін до вимог життя, підвищити їх науковий рівень, наблизивши їх тим самим до рівня сучасної науки, підвищити рівень викладання взаємозв'язків різних розділів математики, оскільки студент повинен не тільки пізнавати окремі факти, а й усвідомлювати їх взаємозв'язки.

Розглянемо деякі змістові взаємозв'язки між різними розділами математичних дисциплін з точки зору цілісного, всебічного підходу до формування математичних понять.

В усіх математичних дисциплінах розглядається те чи інше поняття предмету свого дослідження на множині чисел. Так, у математичному аналізі в розділі “Множини дійсних і комплексних чисел” розглядаються поняття множини, множини N (натуральних), Z (цілих), Q (раціональних), R (дійсних) та C (комплексних) чисел; розглядаються дійсні числа у десятковій системі числення та зображаються на числовій прямій. В алгебрі розглядається поняття множини в розділі “Елементи теорії множин і логіки”, а множини N, Z, Q, R, C – в розділі “Алгебри. Основні числові системи”. Системи цілих та раціональних чисел вводяться як мінімальне кільце і мінімальне поле, що містять відповідно напівкільце натуральних чисел і кільце цілих чисел. Система дійсних чисел вводиться аксіоматично як повне Архімедові впорядковане поле. В математичній логіці та теорії ймовірностей хоча й не розглядаються множини чисел в явному вигляді, проте розглядаються основні поняття на множині чисел. Важливу роль відіграє геометрична точка зору: дійсні числа природним чином зображуються точками на прямій і може бути встановлена наочна взаємно однозначна відповідність між множиною всіх дійсних чисел і множиною всіх точок прямої. Природно поставити питання про побудову такого числового класу, елементи якого були б природним чином поставлені у взаємно однозначну відповідність з множиною точок площини. Таким числовим класом є клас комплексних чисел. Цінність геометричної інтерпретації комплексних чисел полягає не тільки в тому, що числам можна ставити у відповідність точки, але й у тому, що діям і співвідношенням між комплексними числами відповідають природні і наочні співвідношення між точками, які їх зображають: геометрична інтерпретація дії додавання комплексних чисел полягає в тому, що, якщо $z_1 + z_2 = z_3$ (z_1, z_2, z_3 Є Z), то на комплексній площині початок координат та три точки, що зображають комплексні числа z_1, z_2, z_3, є чотирма вершинами паралелограма, в якому точки, що зображають z_1 і z_2, є протилежними вершинами. Ця інтерпретація розглядається в курсах вищої алгебри та математичного аналізу. Проте додавання комплексних чисел можна розглядати і з геометричної точки зору: як паралельне перенесення площини на вектор. З тригонометричної форми комплексного числа безпосередньо випливає, що модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент добутку комплексного числа дорівнює сумі аргументів співмножників. Ці співвідношення приводять до геометричної інтерпретації добутку комплексних чисел: комплексним числам, які пов’язані співвідношенням $z_3=z_1 \cdot z_2$, відповідають вектори $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$. Вектор $\overrightarrow{u_3}$ можна отримати з $\overrightarrow{u_1}$, повернувши його в напрямку проти руху годинникової стрілки на кут $\varphi_2 = \arg z_2$ і розтягнувши в $r_2 = |z_2|$ разів (відповідно стиснувши при $r_2<1$). Комплексні числа можна також представити як відношення трьох точок , звідки випливає, що пряма, яка проходить через дві точки (яким відповідають два комплексні числа), це геометричне місце таких точок, для яких справедлива рівність відношення трьох точок відношенню трьох спряжених до них точок (не передбачено навчальними програмами). Як відомо з проективної геометрії, відношення двох відношень трійок точок визначається як подвійне відношення чотирьох точок. Умовою того, що чотири точки належатимуть одному колу (чи прямій), є дійсність подвійного відношення цих чотирьох точок. Цей бік інтерпретації комплексних чисел є неявним в навчальних програмах, але його унаочнення зробить розгляд теорії про комплексні числа всебічним, цілісним, оскільки в такому випадку комплексні числа матимуть інтерпретацію як з боку алгебри та математичного аналізу, так і з боку геометрії.

Розгляд комплексних чисел та вивчення правил дій з ними має позитивний вплив на розвиток алгебри та математичного аналізу. Гаусом була доведена одна з найважливіших алгебраїчних теорем про розв’язність в області комплексних чисел будь-якого алгебраїчного рівняння ненульового степеня з дійсними коефіцієнтами, тобто для будь-якого такого рівняння знайдеться комплексне число, яке буде його розв’язком. Дослідження французьким математиком О. Коші властивостей комплексних чисел при застосуванні їх до математичного аналізу привели до розвитку теорії функцій комплексних змін. Однією з найважливіших і характерних особливостей системи комплексних чисел, яка відрізняє її від попередніх числових систем, є необмежена можливість добування кореня. Існує геометрична інтерпретація добування кореня n-го степеня з комплексного числа. Корінь n-го степеня з комплексного числа має n значень. Точки, що зображають значення $\sqrt[n]{z}$, знаходяться у вершинах правильного n – кутника, вписаного в коло з центром в початку координат, і радіусом довжиною $\sqrt[n]{r}$. При цьому вектор, що відповідає одному із значень $\sqrt[n]{z}$ (початковому), утворює з віссю абсцис кут, що дорівнює $\frac{\varphi}{n}$.

Всі знання про числові множини застосовуються при розв’язуванні лінійних рівнянь і нерівностей. В аналітичній геометрії на площині та в просторі розглядається геометричне тлумачення рівнянь та нерівностей. Так, розв’язування систем рівнянь в алгебрі – питання про відшукання точок перетину ліній чи поверхонь аналітичної геометрії. В аналітичній геометрії в просторі розглядається рівняння площини, що проходить через три задані точки. Це рівняння в алгебрі має вигляд визначника 3-го порядку, що дорівнює 0. Поняття визначника пов’язане і з теорією вимірювання геометричних величин. Якщо той факт, що кожному дійсному числу відповідає точка на площині чи в тривимірному просторі, поширити на n – вимірний векторний простір і визначити положення точки в n – вимірному векторному просторі n координатами, то поняття об’єму фігури можна визначити за допомогою метричних понять n – вимірного простору та показати, що об’єм фігури має властивості функції, яка у вищій алгебрі називається визначником (розгляд цього зв'язку поняття об'єму фігури та поняття n – вимірного векторного простору не передбачений навчальними програмами). Поняття визначника також використовується при виведенні рівняння дотичної площини в диференціальному численні функцій кількох змінних.

Використання алгебраїчних рівнянь полегшує розв'язування геометричної задачі. Досить записати умову і питання геометричної задачі у вигляді рівняння (чи системи рівнянь), щоб отримати розв'язок. Втручання алгебри часто вимагають і задачі на побудову: спочатку знаходять невідомі величини (за заданими) за допомогою алгебри, а потім вже їх будують. Алгебраїчні рівняння допомагають вивчати властивості різних кривих. В аналітичній геометрії на площині та в просторі задають канонічними рівняннями криві та поверхні другого порядку (еліпс, коло, гіпербола, парабола). Існують алгебраїчні формули, за допомогою яких рівняння кожної первісної лінії, наприклад, кола, можна перевести в рівняння тієї лінії (в даному випадку в рівняння еліпса), в яку перейде ця первісна лінія (коло) при рівнобіжному проектуванні. І навпаки, рівняння еліпса можна перевести в рівняння кола. Таким чином, за допомогою алгебраїчних рівнянь, можна переводити рівняння кола, еліпса, гіперболи, параболи одне в одне, тобто алгебраїчно робити проектування однієї з цих кривих в будь-яку іншу.

Одним з основних понять математики є поняття відображення або функції. Воно є базовим для всіх математичних дисциплін. В математичному аналізі розглядаються задачі, які приводять до поняття функції (відображення), область визначення та множину значень, функції дійсної та комплексної змінної, обернену функцію, основні елементарні функції; поняття раціональної, алгебраїчної, ірраціональної та трансцендентної функцій дійсної та комплексної змінної; навчають застосовувати найпростіші властивості основних елементарних функцій до розв'язування раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь і нерівностей. В алгебрі вводяться поняття функції (відображення) в розділі "Елементи теорії множин і логіки" після представлення скінченних бінарних відношень графами, розглядаються булеві функції. Елементи математичної логіки і теорії множин, які тісно пов'язані між собою, розглядаються як загальний вступ до математики, оскільки поняття і методи, які тут вивчаються широко використовуються в усіх математичних дисциплінах. Для підготовки до засвоєння поняття булевої алгебри як математичної структури в програмі передбачено виклад основ загального вчення про відповідність, функцію та відношення, причому основна увага приділяється взаємно однозначним відповідностям і найбільш важливим класам бінарних відношень. Виходячи з теоретико-множинних уявлень ці поняття послідовно трактуються на основі концепцій графіка, розглядуваного як сукупність упорядкованих пар. Предикати вводяться як важливий клас функцій, використання яких у логіці дає змогу істотно розширити (порівняно з алгеброю висловлень) можливості формалізації при формулюванні та доведенні математичних тверджень. За допомогою предикатів можна трактувати такі фундаментальні для математики і важливі для вчителя поняття, як рівняння і нерівності з невідомими, їх системи і сукупності. Далі поняття функції розглядається в розділі "Основні числові системи", а саме розглядається однозначне відображення множин, ізоморфізми й гомоморфізми груп, кілець, полів. Розділ "Лінійні оператори" проводить аналогію між лінійними відображеннями просторів і гомоморфізмами адитивних груп. Теорія подільності в кільці цілих чисел розглядає числові функції, їх властивості. Поняття функції розглядається і в розділах "Многочлени від однієї змінної" та "Многочлени від кількох змінних". Геометрія забезпечує графічне зображення функцій. В математичній логіці використовується поняття функції в алгебрі висловлень: розглядаються функції істинності, булеві функції. В теорії алгоритмів розглядаються елементарні арифметичні функції, кускове завдання функції, примітивні та частково рекурсивні функції. Теорія ймовірностей також використовує поняття функції: вводячи аксіоматичне означення ймовірності, теорія ймовірності спирається на поняття σ – адитивної функції; а випадкова величина вводиться як відображення множини елементарних подій на дійсний n – вимірний простір R^n. В теорії ймовірностей вивчаються функції випадкових аргументів, їх розподіли ймовірностей і числові характеристики.

Розглядаючи поняття числової послідовності та границі функції в точці, в математичному аналізі використовуються відповідні геометричні ілюстрації для формування інтуїтивного уявлення та розуміння змісту цих понять.

Диференціальне числення функції однієї змінної тісно пов'язане з геометрією:

– геометричний зміст похідної: похідна функції y=f(x) в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці (x_0, f(x_0));

– геометричний зміст диференціала: диференціал функції y=f(x) геометрично зображається приростом ординати дотичної, що проведена в точці M(x,y) при заданих значеннях x та Δx;

– геометричний зміст частинних похідних:

1) частинна похідна по x від функції z=f(x,y) в точці (x_0;y_0) дорівнює тангенсу кута між віссю 0x (береться додатній напрям) і дотичною, проведеною в точці (x_0;y_0;f(x_0,y_0)) до кривої, що є перетином поверхні площиною, яка паралельна площині x0z і проходить через точку (x_0;y_0;f(x_0,y_0));

2) частинна похідна по y від функції z=f(x,y) в точці (x_0;y_0) дорівнює тангенсу кута між віссю 0y (береться додатній напрям) і дотичною, проведеною в точці (x_0;y_0;f(x_0,y_0)) до кривої, яка утворена перетином поверхні площиною, яка паралельна площині y0z і проходить через точку (x_0;y_0;f(x_0,y_0)).

Матеріал розділу "Основні теореми диференціального числення", а саме умови сталості функції застосовується при доведенні тотожностей. Теорема Больцано-Коші про існування нуля у функції, неперервної на відрізку, лежить в основі обґрунтування методу інтервалів, яким користуються при розв'язуванні нерівностей. При формуванні уявлення про те, що не будь-яка функція має похідну у кожній точці області визначення, використовуються геометричні ілюстрації, які переконують в тому, що в тих точках, в яких не існує похідна графік неперервної функції має злами.

Всі математичні дисципліни вивчають теорію векторних просторів:

– *n* – вимірна геометрія розглядає афінні і евклідові n – вимірні простори;

– в алгебрі теорія систем лінійних рівнянь, матриць, визначників є арифметичною моделлю n – вимірного векторного простору;

– подальший розвиток теорія векторних просторів отримує в математичному аналізі в теорії метричних просторів, яка узагальнює основні поняття математичного аналізу на об'єкти більш складної природи, що дозволяє підходити з єдиної точки зору до питань, які розглядалися ізольовано в алгебрі та геометрії. Так, природним узагальненням відомих геометричних просторів R^1, R^2, R^3 є n –вимірний евклідів простір (R^n), елементами якого є точки. Поняття відстані, що має певні властивості, можна поширити на множини елементів довільної природи і такі сукупності елементів називаються метричним простором, а властивості відстані – аксіомами цього простору. Тут же узагальнюються поняття числової послідовності та її границі на довільний метричний простір, ілюструються властивості границь у довільному метричному просторі, з яких, як частинні випадки, отримуються відомі властивості границь числових послідовностей. Одночасний виклад матеріалу для довільного та конкретних метричних просторів дає можливість ввести поняття функції багатьох змінних та поняття границі і неперервності для неї. Теорема Банаха про стискуючі відображення дає один з ефективних методів доведення існування та єдиності розв’язку рівнянь та систем рівнянь різного типу.

Дуже широкий спектр застосування інтегралів в геометрії. Геометричний зміст визначеного інтеграла: похідна площі криволінійної трапеції дорівнює функції, яка задає верхню межу трапеції. Площа криволінійної трапеції є одна з первісних функції, що задає верхню межу трапеції, і може бути обчислена за допомогою інтегрування: S= $\int f(x)dx$. Основна ідея застосування визначеного інтеграла полягає в складанні відповідної інтегральної суми та знаходженні її границі. Застосування визначеного інтеграла в геометрії:

– обчислення площ плоских фігур;

– обчислення довжини дуги плоскої та просторової кривих;

– обчислення об’ємів тіл обертання;

– обчислення площі поверхні тіла обертання.

Застосування подвійного інтеграла до розв’язування задач з геометрії:

– обчислення площі плоскої області (знайти площу області, обмеженої лемніскатою; знайти площу плоскої фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі; обчислити площу фігури, обмеженої параболою і прямою);

– обчислення об’ємів тіл (обчислити об’єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання і координатними площинами);

– обчислення площ кривих поверхонь (обчислити площу поверхні кулі; обчислити площу частини конуса, що відтинається площиною; обчислити площу частини поверхні конуса, розміщеного в першому октанті і обмеженого площиною).

Поняття підпростору, власних векторів та власних значень, характеристичних коренів лінійного оператора ілюструє геометрія:

1) обертання евклідової площини навколо початку координат на кут, який не є кратним π, є прикладом лінійного оператора, який не має власних векторів;

2) розтягування площини, при якому всі вектори, що виходять з початку координат, розтягуються, наприклад, в 5 разів, характеризує лінійний оператор, для якого всі ненульові вектори площини будуть власними, всі вони відносяться до власного значення 5.

Вивчення математики у вищому педагогічному навчальному закладі повинно не тільки забезпечити студентів деяким набором математичних відомостей, а й здійснити цілісну побудову певної математичної системи. Основа такої побудови – повний виклад теорії числових систем: груп, кілець, полів. Теорія груп, що вивчається в алгебрі, відіграє велику роль в багатьох розділах геометрії; зокрема, в n – вимірній геометрії, геометричних перетвореннях, топології; а саме це стосується перетворень площини і простору, груп перетворень і їх підгруп, рухів на площині, перетворень подібності, афінних перетворень.

Теорія многочленів від однієї змінної, яка вивчається в алгебрі, пов’язана з теорією похідної в математичному аналізі; в алгебрі розглядається похідна многочлена над полем нульової характеристики та подається схема обчислення значень многочлена і його похідних.

Аналогію також можна провести між основною теоремою алгебри, яка стверджує, що будь-який поліном, що не є сталою, має корені, та теоремою про найменше значення дійсної функції в курсі математичного аналізу.

Матеріал розділу геометрії "Елементи векторної алгебри" – вектори, їх координати, лінійні операції над векторами, скалярний добуток двох векторів – тісно пов’язаний з матеріалом розділу "Векторні простори” з алгебри. В геометрії вектор розглядається як впорядкована множина точок прямої, як напрямлений відрізок, як паралельне перенесення. Векторна алгебра зводить розв'язування задач з векторами до розв'язування їх за готовими правилами.

Аналітична геометрія в просторі, а саме матеріал про поверхні 2-го порядку, дає геометричне тлумачення рівнянь та нерівностей.

Диференціальна геометрія, яка розглядає лінії та поверхні в евклідовому просторі, тісно пов'язана з питаннями математичного аналізу про дослідження функції та існування особливих точок та асимптот кривих.

Розглянувши деякі змістові взаємозв'язки фундаментальних математичних дисциплін, можна зробити висновок, що за основні змістові концентри вивчення фундаментальних математичних дисциплін, які сприяють формуванню цілісного, всебічного засвоєння математики у вищому педагогічному навчальному закладі можна взяти поняття числа, множини та простору.

Використана література:

1. *Артин Э. Г*еометрическая алгебра. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 284 с.
2. *Атанасян Л. С. Г*еометрия : в 2 ч. : учеб. пособ. для студ. физ.-мат. фак-в пед. инв / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М. : Просвещение, 1986.
3. *Давидов О. М. К*урс математичного аналізу, ч. I, II, III / О. М. Давидов. – К. : Вища школа, 1976, 1978, 1979.
4. *Завало С. Т. А*лгебра і теорія чисел. В 2-х ч. / С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. І. Хацет. – К. : Вища школа, 1974.
5. Програми для фіз.-мат.фак. пед.інст // Збірник № 1: Мат.ан. Алг. і теор. чис. Геометрія. Числ. системи. Шкільн.курс мат-ки і мет-ка її викладання. Історія математики і фізики. Держ.екз. з мат-ки і мет-ки викладання. / Кол.авт.; Під заг.керівн. М. І. Шкіля та Г. О. Грищенка. – Кіровоград : РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка, 2001. – 172 с.
6. Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко.– 2-е изд., перераб. и доп. – К. Вища шк. Гол. изд-во, 1988. – 439 с.
7. *Яглом И. М. К*омплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – М. : Гос.изд-во физ.-мат.лит-ры, 1963. – 193 с.

Аннотация

Актуальность материала, изложенного в статье, обусловлена нуждами общества в подготовке специалистов, которые соответствовали бы необходимости осуществления интегративных тенденций во всех сферах человеческой деятельности, могли бы осуществлять комплексные исследования, рассматривать сложные объекты деятельности как целостные явления.

Ключевые слова: *процесс подготовки учителей математики; фундаментальные математические дисциплины; содержательные взаимосвязи математических дисциплин; содержательные концентры целостного, всестороннего усвоения математики.*

Annotation

The relevance of material presented in the article, due to society's needs in training of the experts to meet the needs implementation of integrative tendencies in all spheres of human activity, could carry out comprehensive research, to consider the complex objects of activity as holistic phenomenon.

Keywords: process of training teachers of mathematics; fundamental mathematical disciplines; relationships of mathematical disciplines; basic concepts of holistic, comprehensive learning mathematics.