КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В. И. ДЕВЯТКО

Исследование некоторых вопросов двустороннего приближения при численном интегрировании дифференциальных уравнений

Автореферат

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — член-корреспондент АН УССР
доктор физико-математических наук проф. Е. Я. РЕМЕЗ

Киев, 1956

Одним из наиболее эффективных методов решения современных задач техники и точного естествознания являются дифференциальные уравнения. Но так как лишь очень незначительная часть дифференциальных уравнений может быть сведена к квадратурам, то становится понятным то большое внимание, которое сейчас уделяется приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений.

В данной диссертации рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения. Для них существует довольно большое число различных методов приближенного интегрирования, в частности численных методов, которым и посвящена эта работа. Но употребительные численные методы интегрирования дифференциальных уравнений имеют тот существенный недостаток, что они фактически уже после нескольких шагов не дают возможности реально и в то же время с достаточной строгостью оценить допускаемую ими погрешность; на практике же иногда требуется строгая и, вместе с тем, не слишком мажорированная оценка погрешности.

Е. Я. Ремез в своей работе «Деякі способи чисельної інтеграції диференціальних рівнянь» [1] разработал для численного интегрирования дифференциальных уравнений метод двусторонних приближений (по своей целевой направленности, в некотором смысле, аналогичный ныне широко известному аналитическому методу С. А. Чаплыгина [2$_{1,2}$]), который, при порядке точности, не уступающей употребительным в современной обычной вычислительной практике методам, дает возможность на каждом шаге интегрирования получить реальную и в то же время строгую оценку границы допущенной погрешности. В указанной работе [1] Е. Я. Ремезом, наряду с полным решением задачи изыскания итеративных методов двусторонних приближений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при любом числе n уравнений и неизвестных функций, были указаны исходные результаты для рекуррентных методов двустороннего численного интегрирования, принципиально разрешавшие вопрос только для одного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ y = y_0 \text{ при } x = x_0. \qquad (1)$$

Данная диссертация посвящена более систематическому развитию рекуррентного метода Е. Я. Ремеза для уравнения (1) и в особенности — распространению этого метода на дифференциальные уравнения второго порядка и, соответственно, на системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка, а также выявлению некоторых возможностей аналогичного распространения на общую задачу Коши для системы n дифференциальных уравнений 1-го порядка.

В первом разделе, который служит введением, рассматриваются некоторые наиболее употребительные методы и приемы оценки точности при численном интегрировании дифференциальных уравнений. Эти методы оценок можно разделить на две группы: методы, дающие строгие оценки погрешности, и методы, дающие лишь «приблизительные», глазомерные оценки. Но в первом случае граница абсолютной погрешности, как правило, выражается с помощью быстро возрастающей показательной функции, которая даже при небольшом количестве шагов часто оказывается не только превышающею, скажем, в несколько сот раз истинное значение погрешности, но и значительно превышающею по абсолютной величине значение самой искомой функции дифференциального уравнения. Во втором же случае мы не можем ручаться за верность оценки.

Наряду с общим анализом упомянутых наиболее употребительных способов оценок (с которыми еще сопоставляется один строгий, но весьма грубый прием оценки границ, восходящий к Коши), в заключение I раздела дается сжатое изложение сути итеративного метода двусторонних приближений Е. Я. Ремеза.

Во втором разделе, во-первых, выясняется принципиальная основа обобщаемого в дальнейшем рекуррентного метода двусторонних приближений, которая состоит в том, что точное решение дифференциального уравнения заключается строгим образом между двумя приближенными численными решениями, одно из которых берется с недостатком, а второе с избытком, для чего используются две формулы механических квадратур одинакового порядка точности с остаточными членами заведомо противоположных знаков. Причем применение последних к дифференциальным уравнениям здесь основывается на принципе рекуррент-

ности — после того, как первые строки таблицы решения уже заполнены по тому или иному, пригодному для этой цели, методу — например, по указанному выше итеративному методу или же разложением в ряд.

Далее указываются целые классы крадратурных формул (вернее — пар квадратурных формул), которые могут быть используемы при рассматриваемом рекуррентном численном методе двусторонних приближений. Так, например, оказывается, что можно было бы использовать для этой цели пары квадратурных формул, каждая из которых составляется, с одной стороны, из экстраполяционной формулы Адамса—Крылова, а с другой стороны — из соответствующей интерполяционной формулы Адамса. Другую группу таких пар квадратурных формул, практически более совершенную, представляют парные комбинации, составленные из соответствующих квадратурных формул Стеклова, с одной стороны, и Ньютона—Котеса — с другой [1].

Уместно здесь отметить, в порядке восстановления приоритета отечественной науки, тот несколько удивительный факт, что рассматриваемые нами и используемые в данной связи квадратурные формулы выдающегося русского математика В. А. Стеклова [3] до сего времени даже в нашей отечественной математической литературе (см., напр., [4]) под названием «квадратурных формул открытого типа» приписываются либо Стеффенсену, который *на несколько лет позже* ([5], 1922) начал применять стекловские квадратурные формулы, или даже Милну, который, собственно, не пошел далее применения ([6], 1926) частного случая упомянутых изысканий Стеффенсена, опубликованных на 4 года ранее. В вышедшем же только что 34-ом томе Большой Советской Энциклопедии в статье о приближенном интегрировании (стр. 467, правый столбец, с. 20—23 сверху) те же формулы нашего знаменитого соотечественника, совершенно непонятным для нас образом, оказались приписанными даже современнику Ньютона Котесу!

Несколько в стороне от двух указанных выше групп стоит используемая нами для того же рекуррентного метода пара формул

$$y_n = y_{n-3} + \frac{3h}{4}\left(f_{n-3} + 3 f_{n-1}\right), \tag{2}$$

$$R = \frac{81}{216} h^4 f''' \left[\xi, y(\xi)\right];$$

---

[1] В цитированной работе Е. Я. Ремеза использовалась лишь одна конкретная пара таких квадратурных формул.

$$y_n = y_{n-3} + \frac{3h}{4}(3f_{n-2} + f_n), \tag{3}$$

$$R = -\frac{81}{216} h^4 f''' [\xi_1, y(\xi_1)]$$

(y_ν — приближенное значение $y(x_\nu)$, а $f_\nu = f(x_\nu, y_\nu)$), полученная для рекуррентного процесса приближенного численного интегрирования из соответствующей пары квадратурных формул, указанных Е. Я. Ремезом в цитированной его работе для применения в итеративном процессе. Эта пара формул выгодно отличается от остальных своей симметричностью: отклонения приближенного значения с недостатком и приближенного значения с избытком от точного значения примерно одинаковы по своей абсолютной величине; в силу этого среднее арифметическое двух приближенных значений, получаемых по этой паре формул, по своей точности не уступает соответствующим приближенным значениям, получаемым по формулам, имеющим порядок точности на единицу выше,— для которых, следовательно, необходимо держать в поле зрения и четвертую полную производную от правой части уравнения (1). Для пары формул (2) — (3) мы развиваем некоторые соображения, которыми можно руководствоваться при выборе числа запасных цифр, подлежащих сохранению при вычислении среднего арифметического двух границ.

Все указанные выше пары формул обладают той особенностью, что одна из двух формул каждой пары всегда является интерполяционною, т. е. включающею ординату, выходящую за пределы уже найденных на предыдущих шагах интегрирования. Но, как это вытекает из теоремы, данной Е. Я. Ремезом в выше цитированной его работе, в действительности не существует такой комбинации двух квадратурных формул, которая составлялась бы только из формул экстраполяционного типа и, при произвольности выбора шага $\Delta x = h$, удовлетворяла бы основным требованиям. В том случае, если для дифференциального уравнения (1) имеем $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$, указанное выше обстоятельство не вызывает никаких затруднений при рассматриваемом способе приближенного решения дифференциальных уравнений, что видно из устанавливаемого нами, между прочим, в этой главе общего утверждения, которое формулируется следующим образом:

Теорема. Если имеем квадратурную формулу интерполяционного типа

$$\int_{x-kh}^{x} f(t)\,dt = h\sum_{\nu=0}^{m} A_\nu f_{-m+\nu} + R,$$

$$(h>0,\ f_{-m+\nu} = f(x-\overline{m-\nu}\,h),\ \nu=0, 1, 2, \ldots m;\ m\leqslant k),$$

остаточный член которой допускает выражение вида

$$R = -p\,f^{(q)}(\xi),$$

где $p>0$, $\min\{x-kh, x-mh\}\leqslant\xi\leqslant x$, тогда последний коэффициент A_m в квадратурной формуле должен быть непременно положительным.

В случае же $\dfrac{\partial f}{\partial y}>0$ дело слегка усложняется (следует еще раз учесть только-что указанную теорему), однако строго обеспеченные границы и здесь могут быть получены на основе применения п р и е м а с р а в н е н и я, указанного Е. Я. Ремезом в цитированной выше его работе. В реферируемой работе нами дается более общая трактовка и подробное обоснование (а также небольшое практическое упрощение) этого приема сравнения.

Еще одно из принципиальных преимуществ рассматриваемого метода двусторонних приближений, как это отмечалось и в цитированной работе Е. Я. Ремеза, заключается в том, что в нем оценки погрешностей от неточности начальных значений непосредственным образом включаются в общую оценку других погрешностей без каких-либо дополнительных вычислений, в то время как при использовании обычно употребляемых методов численного интегрирования приходится особо учитывать эти погрешности, обращаясь при этом, вообще, к уравнениям в вариациях А. Пуанкаре.

В третьем разделе, который является, можно сказать, центральным в данной работе, дается распространение рекуррентного метода двусторонних приближений на случай численного решения системы д в у х дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z), \end{cases} \qquad y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0. \tag{4}$$

При решении этой задачи возникают некоторые принципиальные трудности; эти трудности, возникающие при переходе от одного дифференциального уравнения (1) к системе двух дифференциальных уравнений (4), не представляют собой чего-то свойственного только рассматриваемому нами численному методу интегрирования: характер этих трудностей, связанных существенным образом з требованием обеспечения строгих двусторонних границ для решения, в неменьшей мере проявляется и при разработке аналитического метода двусторонних приближений, выдвинутого С. А. Чаплыгиным.

В предлагаемом нами решении указанной проблемы распространения рекуррентного метода двусторонних численных приближений на случай системы (4) основную роль играет особый прием афинного преобразования пространства зависимых переменных, позволяющий обеспечить некоторые соотношения между знаками частных и полных производных от правых частей дифференциальных уравнений.

Если система дифференциальных уравнений (4) удовлетворяет условию

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial f}{\partial z} = -\operatorname{sgn} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{5}$$

то для приближенного численного решения этой системы достаточно непосредственным образом обобщить рекуррентный метод двусторонних приближений, примененный ранее к задаче (1). Но если система (4) не удовлетворяет условию (5) или одному из указываемых нами условий, равноценных условию (5) в смысле обеспечения возможности более или менее непосредственного приспособления указанного метода, изложенного в предыдущем разделе, то, для устранения возникающих затруднений принципиального характера, мы применяем однородное линейное преобразование (невырожденное) вида

$$\begin{cases} y = aY + bZ, \\ z = a'Y + b'Z. \end{cases} \tag{6}$$

Коэффициенты a, b, a', b' выбираются так, чтобы новая преобразованная система двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = F(x, Y, Z), \\[2mm] \dfrac{dZ}{dx} = \Phi(x, Y, Z) \end{cases} \tag{7}$$

уже удовлетворяла условию (5), т. е. чтобы имело место соотношение

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial F}{\partial Z} = -\operatorname{sgn} \frac{\partial \Phi}{\partial Y}. \tag{8}$$

Здесь

$$\frac{\partial F}{\partial Z}=\frac{bb'}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{b'^2}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{b^2}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{bb'}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y}=-\frac{aa'}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{a'^2}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{a^2}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{aa'}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{9}$$

при $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$. Введя для краткости обозначения:

$$\operatorname{sgn}\frac{\partial f}{\partial z}=\operatorname{sgn}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\varepsilon=\pm 1, \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|=k^2, \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|=l^2,$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=2m,\ \frac{a'}{a}=\lambda,\ \frac{b'}{b}=\mu,$$

перепишем (9) в виде

$$\frac{\varepsilon\Delta}{b^2}\frac{\partial F}{\partial Z}=k^2\mu^2+2m\mu-l^2=\omega(\mu),$$

$$\frac{\varepsilon\Delta}{a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial Y}=-k^2\lambda^2-2m\lambda+l^2=-\omega(\lambda). \tag{10}$$

Из двух последних соотношений ясно, что для выполнения условия (8) достаточно, чтобы значения $t=\mu$ и $t=\lambda$ либо оба принадлежали области $\omega(t)>0$, либо оба — области $\omega(t)<0$, где

$$\omega(t)=k^2t^2+2mt-l^2. \tag{11}$$

Ближайшее рассмотрение этого вопроса приводит к тому заключению, что практически, вообще, достаточно будет иметь в виду такие более конкретные простейшие типы преобразований (6):

$$\begin{cases} y=Y+Z, \\ z=Y-Z, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} y=\varepsilon_1 Y+\varepsilon_2 Z, \\ z=\varepsilon_3 Z, \end{cases} \tag{13}$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3=\pm 1).$$

$$\begin{cases} y=\varepsilon_1 Y, \\ z=\varepsilon_2 Y+\varepsilon_3 Z, \end{cases} \tag{13'}$$

Особого рассмотрения требует достаточно исключительный по своему характеру случай одновременного выполнения в какой-либо точке (x, y, z) интегральной кривой трех соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{14}$$

когда параметры преобразования (6) a, a', b, b' нельзя определить вышеуказанным путем с обеспечением соотношения знаков (8). Для этого случая мы указываем некоторую несложную модификацию метода, разрешающую вопрос при прохождении интегральной кривой через элементарный параллелепипед, заключающий в себе подобную точку.

В процессе решения системы (4) (или уже преобразованной системы) нам, согласно сказанному, нужно учитывать знаки частных производных $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (или соответствующих производных преобразованной системы). Но на практике нам не нужно на каждом шаге проверять эти знаки, так как, приступая к фактическому выполению численного интегрирования нашей системы, мы заранее уже можем набросать себе примерную картину расположения «критических» поверхностей $f'_z(x,y,z)=0$, $\varphi'_y(x,y,z)=0$ (или же соответствующих «критических» поверхностей для преобразованной системы), при пересечении которых интегральною кривою может измениться знак той или другой из интересующих нас частных производных. Практическое разрешение аналогичного вопроса относительно учета знаков полных производных, используемых в остаточных членах, сильно упрощается на основе внимательного учета самой картины последовательного изменения величины расхождения (ширины «вилки» $\overline{y}_n-\underline{y}_n$ или $\overline{z}_n-\underline{z}_n$) между сопоставляемыми верхними и нижними границами.

Нетрудно уяснить себе также геометрический смысл применяемого линейного преобразования (6). Искомые функции $y=\psi(x)$, $z=\chi(x)$, представляющие точное решение заданной системы дифференциальных уравнений (4) при определенных начальных условиях, осуществляют некоторое отображение одномерного точечного множества $[x_0, x^*]\equiv S$ в двумерное пространство R_2 точек $P\equiv(Y, Z)$. Прямое применение метода двусторонних численных приближений означает, что мы заключаем образы $P_1, P_2, \ldots, P_\nu \ldots$ ряда точек $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots \in S$ в некоторые практически «достаточно малые» д в у м е р н ы е и н т е р в а л ы. При такой интерпретации применение замены переменных по формулам (6) означает афинное однородное преобразование плоскости (y, z) в плоскость (Y, Z) или, лучше сказать, однородное афинное преобразование к о о р д и н а т, вводящее взамен прямоугольных декартовых координат (y, z) некоторую новую систему общих декартовых координат (Y, Z) с соответствующей заменой прямоугольной координатной решетки на косоугольную. Определяемые при численном интегрировании преобразованной системы дифференциальных уравнений (9) последовательные точки $P'_\nu \equiv (Y_\nu, Z_\nu)$, являющиеся образами точек x_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), оказываются заключенными в некоторые параллелограммы. При обратном переходе от координат (Y, Z) к первоначальным прямоугольным координатам (y, z) соответствующие точки $P_\nu \equiv (y_\nu, z_\nu)$ будут локализованы в некоторых весьма просто определяемых аналитически двумерных интервалах прямоугольной решетки, представляющих собой прямоугольники, описанные около соответствующих параллелограммов.

В четвертом разделе выявляются некоторые возможности аналогичного распространения рекуррентного метода двусторонних приближений на общую задачу Коши для системы n дифференциальных уравнений 1-го порядка, к которой сводится и задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков. При решении этой задачи возникают дополнительные трудности, связанные существенным образом с тем, что, кроме учета знаков первых частных производных от правых частей дифференциальных уравнений системы, здесь приходится учитывать не только знаки, но и грубо оцениваемые абсолютные значения соответствующих полных производных, используемых в остаточных членах. Ввиду значительной сложности общей трактовки данного вопроса, мы при произвольном числе n дифференциальных уравнений 1-го порядка ограничиваемся здесь выяснением общей схемы его решения, достаточным для принципиального освещения вопроса сознательно отвлекаясь от рассмотрения специальных случаев «вырождения», когда имеет место обращение в нуль некоторых выражений, которые в общем случае отличны от нуля.

Несколько подробнее и с учетом также и упомянутых специальных случаев вырождения рассмотрены задачи решения, по предлагаемому способу, системы трех дифференциальных уравнений 1-го порядка, а также решения общего дифференциального уравнения четвертого порядка.

В конце разделов II—IV приведен ряд просчитанных полностью примеров на рассмотренные численные методы интегрирования дифференциальных уравнений по принципу двусторонних приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ремез Є. Я., Деякі способи чисельної інтеграції диференціальних рівнянь із оцінкою границі допущеної похибки. Записки Природничо-Технічного Відділу АН УРСР, 1931, № 1.

2. Чаплыгин С. А., 1. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, Труды ЦАГИ, выпуск 130, 1932 (переработанное издание статей, опубликованных в 1919—1920 гг. в мало распространенных изданиях). 2. То же, со вступительной статьей М. В. Келдыша и Д. Ю. Панова, ГТТИ, 1950.

3. Стеклов В. А., Quelques remarques complémentaires sur les quadratures, Изв. Росс. Акад. Наук, 1918, № 7.

4. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа, ГТТИ, 1953.

5. Steffensen J. F., On numerical integration of differential equations, Skandinavisk Aktuarientidskrift, 1922.

6. Milne W., Numerical integration of ordinary differential equations, The American mathematical monthly, 1926.

БФ 00689 16.I.56 Тип. КГПИ, Франко, 44. Зак. 28—100