

А. В. СУТКОВАЯ

Вопросы приближенных вычислений в общеобразовательной трудовой политехнической средней школе

Автореферат
диссертации, представленной на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук по методике преподавания
математики

Научный руководитель — и. о. профессора И. Е. Шиманский



НБ НПУ

імені М.П. Драгоманова



100313882

КИЕВ — 1964

Невиданный рост народного хозяйства в нашей стране за последние годы требует выполнения огромного количества вычислительной работы.

В XX в. появились быстродействующие вычислительные машины, без которых невозможно было бы решить многие проблемы современной физики, математики, химии.

Однако в целом ряде случаев приходится прибегать к обычным письменным и устным вычислениям. Рационализация таких вычислений — весьма важная задача, так как она должна обеспечить их быстроту и во многих случаях безошибочность.

Механизация вычислений не только не умаляет значения рациональных приемов обычных вычислений, но, наоборот, повышает их роль, поскольку математическая подготовка «задания» вычислительной машине требует умения подобрать наиболее рациональный способ вычисления.

Среди вычислительных работ, проводящихся в школе в связи с изучением различных разделов математики, особое место занимают приближенные вычисления, о которых еще в 1923 г. писал известный методист И. Н. Кавун:

«По мере того, как между чистой математикой и прикладными науками будут завязываться в школе частые взаимоотношения, приближенные числа и операции над ними сделаются в обыходе школьных знаний неизбежными. Ибо, если в самой математике число бывает приближенным часто, то в прикладных науках оно бывает таковым почти всегда. Из этого факта не только не надо скрывать от учащихся, но надо его возможно ярче подчеркивать. Выяснения смысла приближенного числа и обучение действиям над такими числами должны взять на себя преподающие математику»¹.

Выполненная нами работа посвящена вопросам теории и методики приближенных вычислений.

Этим вопросам занимались многие известные математики. Прежде всего следует назвать основателя русской школы при-

¹ И. Н. Кавун, Приближенные вычисления, ГИЗ, М.-П. 1923, стр. 108.

ближенных вычислений, инженера-кораблестроителя, Героя Социалистического Труда, академика Алексея Николаевича Крылова. В 1907 г. вышло первое издание его труда «Лекции о приближенных вычислениях», в котором находим рациональные приемы приближенных вычислений и правило записи приближенных чисел. Это правило получило широкую популярность в науке и технике и вошло в математическую литературу под названием «принципа акад. А. Н. Крылова».

В разработке теории приближенных вычислений в элементарной математике велика заслуга и известного методиста проф. В. М. Брадиса. В его трудах «Арифметика приближенных вычислений», «Как надо вычислять», «Теория и практика вычислений», «Средства и способы элементарных вычислений», «Вычислительная работа в курсе математики средней школы» и в других параллельно с теорией приближенных вычислений в элементарной математике указаны пути их включения в школьный курс.

Разработке методик и элементарных способов изложения теории приближенных вычислений посвятили свои труды И. Н. Кавун, М. Л. Франк, Я. С. Безикович и другие.

По данной теме написано много работ советскими учеными и педагогами-методистами, в частности, вопросам приближенных вычислений посвящены статьи П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, И. К. Андропова, В. У. Грибанова, М. Г. Васильева, С. В. Филичева, М. П. Салум, И. Е. Шиманского, К. И. Нешкова, Г. Н. Скобелева, Т. Я. Нестеренко, Е. С. Дубинчук, Д. М. Маергойза, М. Б. Гельфанда и других. Изданы брошюры В. У. Грибанова «Приближенные вычисления в средней школе», И. Н. Шевченко «Некоторые сведения о приближенных вычислениях», К. Я. Латышевой «Элементы приближенных вычислений» (на укр. языке), З. И. Слепкань «Тригонометрические вычисления в школе» (на укр. языке) и другие.

Выпущены специальные сборники по вопросам приближенных вычислений (например, сборник материалов педагогических чтений «Приближенные вычисления в курсе математики восьмилетней школы» под редакцией И. Н. Шевченко и К. И. Нешкова), книги, полностью или частично посвященные вопросам теории и методики приближенных вычислений. Так, например, в книге П. Ф. Фильчакова «Математический практикум. Вычисления» (на укр. языке) рассматриваются основные вопросы теории приближенных вычислений и их применения. Некоторые вопросы приближенных вычислений даны в пособиях для учителей [И. Б. Погребысский и П. Ф. Фильчаков, «Тригонометрия»

(на укр. языке), глава V; И. К. Андронов, «Арифметика дробных чисел и основных величин», глава VIII и другие], в учебниках по методике преподавания математики (В. М. Брадис, «Методика преподавания математики в средней школе», Е. С. Березанская, «Методика арифметики», «Методика преподавания математики» под общей редакцией С. Е. Ляпина и другие). Этой теме посвящена докторская диссертация проф. В. М. Брадиса, «Вычислительная работа в курсе математики средней школы» (машинопись).

По данной теме написано ряд кандидатских диссертаций: в 1958 г. — «Приближенные вычисления в средней школе» (В. У. Грибанов, Москва), в 1962 г. — «Некоторые вопросы методики приближенных вычислений в восьмилетней школе» (Р. А. Хабиб, Москва), «Приближенные вычисления в курсе математики восьмилетней школы» (Ш. Н. Асанидзе, Тбилиси), «Приближенные вычисления в общеобразовательной политехнической средней школе» (И. Б. Лобанов, Львов), «Культура тригонометрических вычислений в восьмилетней и средней школе» (З. И. Слепкань, Киев).

Упомянутые работы в основном исследуют вопросы приближенных вычислений в курсе школьной математики, в частности, определяют те направления, по которым должна развиваться методика преподавания приближенных вычислений.

Включение раздела о приближенных вычислениях в программу по математике повысило интерес учителей к этой теме. За последние годы появились отдельные статьи, авторы которых на основе опыта работы в школе рассматривают приемы закрепления навыков приближенных вычислений, ставят вопросы активизации учащихся при изучении основных понятий и правил приближенных вычислений, одновременно отмечая низкую культуру вычислений с приближенными данными.

Проведенный нами анализ домашних и классных самостоятельных контрольных работ и письменных работ по математике на аттестат о среднем образовании учащихся школ г. Киева и Киевской области, а также письменных и устных ответов абитуриентов, поступавших в последние годы на физико-математический факультет Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького, на механико-математический факультет Киевского государственного университета им. Т. Г. Шевченко и в другие вузы г. Киева, показывает недостаточные знания учащихся в области приближенных вычислений. Это подчеркивается также и в отчетах о работе школ и отделов народного образования почти всех областей УССР. Так, например, в отчете

промышленного областного отдела народного образования Крымской области за 1962/63 учебный год написано:

«Опрос учащихся во время посещения уроков работниками облоно и ИУУ, результаты текущих и экзаменационных работ показали, что в знаниях части учащихся по отдельным математическим предметам имеются такие существенные недочеты:

а) по арифметике много ошибок... на приближенные вычисления, в частности, при определении значащих цифр приближенного числа» (стр. 72).

Повышению вычислительной культуры учащихся, как показали результаты массового опыта преподавания приближенных вычислений (начиная с 1959/60 учебного года) и опыт автора диссертации (который работает над данной темой с 1958 года), противодействует ряд факторов.

1. Разнобой, а в ряде случаев просто путаница:

а) в определении некоторых понятий приближенных вычислений;

б) в формулировке правил приближенных вычислений;

в) в использовании терминологии (цифры верные, правильные, сомнительные и т. д.);

г) в записи приближенных чисел. Рассмотрим, например, записи приближенного числа 14000, полученного после округления 14238 с точностью до 1000. В работах по приближенным вычислениям встречаем самые разнообразные формы записи: 14 тысяч; $14 \cdot 1000$; $14 \cdot 10^3$; $1,4 \cdot 10^4$; 14000, 14000 и т. д. Нередко приближенные числа записывают как точные, что, естественно, приводит к неясности.

2. Различный подход к формулировке правил подсчета цифр. В учебниках и методической литературе по приближенным вычислениям правила действий I степени даются на основании десятичных знаков, а правила действий II и III степеней — на основании значащих цифр. Наш эксперимент показал, что при выполнении действий с приближенными данными ученики часто затрудняются, на что нужно ориентироваться: на число десятичных знаков или на число значащих цифр. К тому же, в литературе по приближенным вычислениям в большинстве случаев правила действий I степени непосредственно не охватывают действий с целыми приближенными числами.

3. Отсутствие правил действий с приближенными числами, имеющими разные наименования, в учебниках и задачниках по математике, в разных пособиях и методических разработках.

4. Несогласованность вычислений с приближенными и точными числами в учебниках и задачниках по арифметике, алгебре,

геометрии, тригонометрии, физике, астрономии, химии, основам производства (где действия над приближенными числами очень часто выполняются как действия над точными числами) приводит к тому, что значительная часть учителей математики ограничивается изучением и применением приближенных вычислений только в пределах времени, отведенного программой, и не практикует использования полученных сведений при изучении других разделов.

5. Некоторые учителя математики, физики, химии и других дисциплин сами еще недостаточно владеют теорией и методикой преподавания приближенных вычислений и поэтому не могут предостеречь учеников от ошибок при выполнении действий над приближенными числами.

6. Одностороннее применение принципа А. Н. Крылова — только при оценке результатов вычислений; в школе различные же вопросы, связанные с измерениями, не рассматриваются.

7. Ряд недочетов в методической и теоретической литературе по приближенным вычислениям.

Проф. В. М. Брадис, сделавший много по введению приближенных вычислений в среднюю школу, писал¹, что и с научной и с методической стороны только в отношении способа подсчета цифр остается сделать еще очень много. А именно: 1) дать доступное школе обоснование правил подсчета цифр; 2) установить окончательный список и текст правил, подлежащих изучению в разные годы школьной работы, что можно сделать лишь на основе опыта; 3) выработать рациональные обозначения (прежде всего для точных и приближенных чисел); 4) устранить в учебной литературе противоречия правилам подсчета цифр по отношению к данным и результатам вычислений (по математике, физике и др. дисциплинам, связанным с вычислениями).

В. У. Грибанов, анализируя данное высказывание проф. В. М. Брадиса, сделал такой вывод:

«Если теория приближенных вычислений, как мы уже отметили выше, представлена, вообще говоря, достаточно хорошо, то методика преподавания этого раздела в школе остается почти неразработанной... Таким образом, проблема о приближенных вычислениях в школе является теперь проблемой исключительно методической»².

С этим заключением нельзя полностью согласиться, поскольку

¹ В. М. Брадис, Арифметика приближенных вычислений, ГИЗ, М.—Л., 1930, стр. 255.

² В. У. Грибанов, Приближенные вычисления в средней школе, Учпедгиз, М., 1958, стр. 10, 11.

в существующей литературе теория, которой приходится пользоваться для обоснования школьных приемов приближенных вычислений, в действительности изложена не совсем удачно. В частности, обоснования правил подсчета цифр в существующем изложении¹ мало доступны не только ученикам, но зачастую и студентам. Кроме того, в обосновании встречаются недочеты.

Более того, в журнале «Математика в школе» в статье «О приближенных вычислениях в VI классе» С. В. Смирнов высказывает мнение о том, что «правила «подсчета цифр» неверны и вводить их в преподавание не следует»².

Этой статьей редакция журнала открывает дискуссию по вопросам приближенных вычислений, отмечая, что за последнее время «получено большое количество статей от учителей школ и научных работников, в которых высказываются различные, иногда прямо противоположные мнения по отдельным вопросам методики изучения приближенных вычислений, о месте этой темы в школьной программе и о некоторых теоретических основах, которыми необходимо руководствоваться при школьном преподавании»³.

Все вышесказанное говорит о том, что в области преподавания приближенных вычислений в школе еще много недостатков.

1. В первую очередь, нужно уточнить содержание и методику изложения темы «Приближенные вычисления», привести ее в соответствие, с одной стороны, с данными современной науки и техники, а с другой — с новыми задачами преподавания математики в школе.

2. Дать новое, более простое обоснование некоторых вопросов теории приближенных вычислений, связанных со школьной практикой.

3. Определить объем материала по приближенным вычислениям в V—XI классах.

4. Внести ясность в изложение некоторых понятий прибли-

¹ См.: В. М. Брадис, Опыт обоснования некоторых практических действий над приближенными числами, ИТПИ, 1927, вып. 3, стр. 103—140.

И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. 1. Физматгиз, М., 1962, глава 1.

Г. Н. Положий, Н. А. Пахарева, И. З. Степаненко, П. С. Бондаренко, И. М. Великовяненко, Математический практикум, под ред. Г. Н. Положего, ГИФМЛ, М., 1960, глава 1.

Дж. Скарборо, Численные методы математического анализа, ГТТИ, М.—Л., 1934, глава 1.

Я. С. Беликович, Приближенные вычисления, Гостехиздат, Л.—М., 1949, глава 2.

² Журн. «Математика в школе», 1964, № 1, стр. 60.

³ Там же, стр. 64.

женных вычислений, в формулировки правил, уточнить терминологию и требования к записи приближенных чисел.

5. Найти пути для обеспечения преемственности в усвоении элементов теории и овладении практикой приближенных вычислений при переходе от арифметики к алгебре, геометрии, тригонометрии и при переходе от изучения математики к изучению смежных с ней дисциплин.

Для этого автор выполнил такую работу:

1. Проанализировал методическую и учебную литературу по приближенным вычислениям, а также программы, учебники, задачки по математике, физике, химии и другим дисциплинам с целью улучшения изложения некоторых вопросов теории и методики приближенных вычислений и устранения отмеченных ранее недостатков.

2. Исследовал постановку обучения учащихся приближенным вычислениям в советской школе и в школах социалистических стран, в частности, в школах Германской Демократической Республики, где изучению приближенных вычислений уделяется значительное внимание.

3. Определил уровень знаний и умений учащихся в области культуры вычислений с приближенными числами, и с этой точки зрения поставил требования к программе, к учебной и методической литературе, а также обосновал методику изучения приближенных вычислений в восьмилетней и средней школе.

4. Обобщил передовой опыт учителей математики по изучению приближенных вычислений и разработал пути дальнейшего усовершенствования методики изучения приближенных вычислений.

Как результат решения этих задач, в ходе экспериментальной проверки и была написана настоящая диссертация, состоящая из введения, трех глав, заключения и библиографии; в качестве приложения к работе даются рецензии и протоколы.

Во «Введении» кратко обосновывается необходимость усовершенствования методики изучения приближенных вычислений и их теоретического обоснования в связи с новыми требованиями к преподаванию математики в восьмилетней и средней школе. Здесь же дается краткое содержание каждой главы диссертации и перечень опубликованных автором работ по материалам диссертации, приводятся отдельные отзывы и рецензии на них.

В первой главе «Вопросы теории приближенных вычислений» дается анализ обоснований некоторых вопросов теории приближенных вычислений, указываются их недочеты и излагаются новые обоснования правил подсчета цифр. В этой же главе даются

ся краткий обзор научной и учебно-методической литературы по вопросам теории приближенных вычислений.

Особенно плодотворным является обоснование теории приближенных вычислений академиком А. Н. Крыловым, выдвинувшим принцип записи приближенных чисел, известный под названием принципа А. Н. Крылова.

Профессор В. М. Брадис положил принцип А. Н. Крылова в основу правил подсчета цифр и обосновал практическую надежность этих правил, максимально упрощающих вычисления с приближенными данными.

Однако применение сформулированных проф. В. М. Брадисом правил связано с определенными ограничениями и неудобствами. Так, для действий первой ступени проф. В. М. Брадис обосновывает такое правило: «При сложении и вычитании приближенных чисел в результате сохранять столько десятичных знаков, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом десятичных знаков».

Сложение и вычитание над целыми приближенными числами по этому правилу можно выполнять только тогда, когда числа записаны в виде произведения десятичной дроби на степень десяти.

Например:

$$\begin{aligned} 120 + 1146 &= 1,2 \cdot 10^3 + 11,46 \cdot 10^2 = \\ &= (1,2 + 11,46) \cdot 10^2 \approx 12,7 \cdot 10^2 = 1270. \end{aligned}$$

Такое обоснование правил подсчета цифр для действий I ступени является простым, но оно непосредственно не охватывает действий с целыми приближенными числами.

Правила подсчета цифр для действий II и III ступеней обосновываются проф. В. М. Брадисом очень громоздко и сложно.

В диссертации дан подробный анализ недочетов (см. I главу диссертации) в изложении данного вопроса в работе Дж. Скарборо¹.

Дж. Скарборо обосновывает правило подсчета цифр для действий первой ступени только на конкретных примерах, а для действий второй и третьей ступеней данные им в общем виде обоснования очень громоздки и соответствующие правила не охватывают действий с произвольными приближенными числами.

Более просто, по нашему мнению, правила вычислений без

¹ Дж. Скарборо, Численные методы математического анализа, ГТТИ, М.—Л., 1934, глава I.

строгого учета погрешностей можно обосновать, если предельную абсолютную погрешность в общем виде записывать так, как это сделали И. С. Бѣрезин и Н. П. Жидков в книге «Методы вычислений» и П. С. Бондаренко, используя для этого хорошо известную форму записи произвольного числа в системе счисления с основанием g ¹:

$N = \pm (a_m g^m + a_{m-1} g^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} g^{m-n+1})$, а именно: $E_n = \Delta N = g^{m-n+1}$, где m — показатель наибольшей степени g , входящий в сумму степеней g , умноженных соответственно на верную цифру: $a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_{m-n+1}$ (где $a_m \neq 0$, а n — количество верных значащих цифр числа).

Пользуясь такой записью абсолютной погрешности, но только в десятичной системе счисления, Я. С. Безикович в своей книге «Приближенные вычисления» обосновывает правила подсчета цифр. При этом он не упрощает соответствующих правил, а только изменяет их содержание.

Так, например, для сложения он сформулировал следующее правило:

«В сумме будет столько же или на единицу меньше верных цифр, как и в наибольшем из слагаемых, если точность остальных слагаемых не ниже точности первого слагаемого. В противном случае число верных знаков соответственно уменьшается. Чтобы получить сумму с n верными цифрами, надо наибольшее из слагаемых взять с n или $n + 1$ верными цифрами, а в остальных слагаемых отбросить (по правилу дополнения) все цифры, стоящие справа после разряда, отвечающего последней из оставленных цифр в наибольшем из слагаемых»².

Это правило имеет преимущество перед правилами, которые дал проф. В. М. Бродис, поскольку оно непосредственно охватывает и действия с целыми приближенными числами. О недостатках правила сам автор здесь же пишет:

«Приведенное нами правило, вполне пригодное для обычных расчетов, является слишком грубым, когда расчеты приходится вести более аккуратно, и в особенности, когда в сумму входит большое число малых слагаемых».

К сожалению, в литературе по приближенным вычислениям до сего времени нет простых обоснований (в общем виде) правил подсчета цифр, при помощи которых можно было бы непосред-

¹ Г. Н. Положий, Н. А. Пахарева, И. С. Степаненко, П. С. Бондаренко, И. М. Великопаваненко, Математический практикум, под редакцией Г. Н. Положего, ГИФМЛ, М., 1960, стр. 13.

² Я. С. Безикович, Приближенные вычисления, Гостехиздат, Л.—М., 1949, стр. 37.

ственно выполнить действия над произвольными приближенными числами.

Учитывая положительные и отрицательные стороны обоснования теории приближенных вычислений в имеющейся литературе и приняв во внимание терминологию приближенных вычислений, с которой рекомендуют знакомить учащихся, автор диссертации предлагает новое обоснование некоторых вопросов теории приближенных вычислений (общая формула записи произвольного приближенного числа, предельная абсолютная и предельная относительная погрешности приближенного числа и общие формулы их записи, округление чисел до k значащих цифр, обоснование правил подсчета цифр). Центральное место занимает новое обоснование правила подсчета цифр для действий первой ступени. Это правило устанавливается при помощи предельных погрешностей¹.

Предельную абсолютную погрешность приближенного числа

$$N = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_{m-n+1} 10^{m-n+1}$$

(m — показатель наибольшей степени 10, входящий в сумму степеней 10, умноженных соответственно на их значащие цифры $a_m, a_{m-1}, \dots, a_{m-n+1}$, где a_m — первая значащая цифра, отличная от нуля, а все другие значащие цифры числа вместе с последней (n -ой) значащей цифрой (a_{m-n+1}) могут быть равными нулю) следует записать в общем виде так: $\Delta N = 10^{m-n+1}$. Например, для чисел $a = 2400 = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 2 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-4}$ абсолютные погрешности соответственно равны $\Delta a = 10$ (где $m=3$; $n=3$); $\Delta b = 10^{-4}$ ($m=-2$ и $n=3$).

При помощи правил учета погрешностей, сформулированных проф. В. М. Брадисом² (за исключением первого из них), можно непосредственно выполнять действия как над целыми, так и над дробными приближенными числами.

Однако, сложение и вычитание над целыми приближенными числами можно выполнять по этому правилу только тогда, когда данные записаны в виде произведения десятичной дроби на степень 10 (см. пример на стр. 10).

Для того, чтобы избежать громоздких записей при выполнении действий первой ступени над целыми приближенными числами, необходимо сформулировать правило действий сложения и вычитания приближенных чисел таким образом, чтобы оно непо-

¹ С термином «предельная погрешность» учеников не знакомят, предельную погрешность в школе называют просто погрешностью.

² В. М. Брадис, Средства и способы элементарных вычислений, изд-во АПН РСФСР, 1951, стр. 76.

средственно охватывало и действия с целыми приближенными числами. Автор диссертации обосновывает такое правило:

«При сложении и вычитании приближенных чисел (как целых, так и дробных) окончательный результат надо округлять так, чтобы его последняя значащая цифра стояла в том же разряде, что и последняя значащая цифра того из данных компонентов, в котором она стоит в наивысшем разряде».

Для обоснования этого правила рассматриваются два произвольных числа N и N_1 с предельными абсолютными погрешностями $\Delta N = 10^{m-n+1}$; $\Delta N_1 = 10^{p-q+1}$, где $\Delta N \geq \Delta N_1$.

При выполнении действий первой ступени могут представиться следующие случаи:

I. Оба числа целые (или дробные), и их последние значащие цифры стоят в одном и том же разряде.

II. Оба числа целые (или дробные), и их последние значащие цифры стоят в разных разрядах.

III. Одно число целое, а второе — дробное.

Придавая различные значения m, n, p и q , получим приближенные числа, целые или дробные, а именно:

а) при $m-n+1 = p-q+1 = 0$ — числа N и N_1 будут целыми приближенными, в которых последние значащие цифры стоят в разряде $10^{m-n+1} = 10^0 = 1$.

Пример. Приближенные числа $N \approx 345$; $N_1 \approx 37$ имеют соответственно такие абсолютные погрешности:

$$10^{2-3+1} = 10^0 = 1; 10^{1-2+1} = 10^0 = 1, \text{ где } m=2; n=3; p=1 \text{ и } q=2.$$

б) При $m-n+1 = p-q+1 > 0$ числа N и N_1 будут целыми приближенными, в которых последние значащие цифры стоят в разряде $10^{m-n+1} > 1$.

Пример. Приближенные числа $N \approx 40$; $N_1 \approx 120$ имеют соответственно такие абсолютные погрешности: $10^{1-1+1} = 10 > 1$; $10^{2-2+1} = 10 > 1$, где $m=1$; $n=1$; $p=2$ и $q=2$.

в) При $m-n+1 = p-q+1 < 0$ числа N и N_1 являются приближенными десятичными дробями, в которых последние значащие цифры стоят в разряде $10^{m-n+1} < 1$.

Пример. Приближенные числа $N \approx 3,21$; $N_1 \approx 0,07$ имеют соответственно такие абсолютные погрешности:

$$10^{0-3+1} = 10^{-2} < 1; 10^{-2-1+1} = 10^{-2} < 1, \text{ где } m=0; n=3; p=-2 \text{ и } q=1.$$

Ясно, что при произвольных значениях $m-n+1 = p-q+1$ (положительных, отрицательных и равных нулю) получим при-

ближенные числа (N и N_1), которые удовлетворяют случай I, с предельными абсолютными погрешностями, не большими единицы разряда 10^{m-n+1} .

Если $m-n+1 > p-q+1$; $m-n+1 > 0$ и $p-q+1 > 0$ или $m-n+1 > p-q+1$; $m-n+1 < 0$ и $p-q+1 < 0$, то получим приближенные числа (N и N_1), которые удовлетворяют случай II, соответственно с предельными абсолютными погрешностями, не большими единицы разрядов: 10^{m-n+1} ; 10^{p-q+1} , где $10^{m-n+1} > 10^{p-q+1}$.

Примеры: 1. Приближенные числа $N \approx 1200$; $N_1 \approx 30$ имеют соответственно такие абсолютные погрешности:

$$10^{3-2+1} = 10^2; 10^{1-1+1} = 10, \text{ где } 10^2 > 10.$$

2. Приближенные числа $N \approx 0,004$; $N_1 \approx 0,0217$ имеют соответственно такие абсолютные погрешности:

$$10^{-3-1+1} = 10^{-3}; 10^{-2-3+1} = 10^{-4}, \text{ где } 10^{-3} > 10^{-4}.$$

Если $m-n+1 \geq 0$; $p-q+1 < 0$, то получим два приближенных числа: одно целое (N) и второе дробное (N_1). В целом приближенном числе последняя значащая цифра стоит в разряде 10^{m-n+1} , а в дробном — в разряде 10^{p-q+1} , где, очевидно, $10^{m-n+1} > 10^{p-q+1}$.

Примеры: 1. Приближенные числа $N \approx 15$; $N_1 \approx 2,3$ имеют соответственно такие абсолютные погрешности: $10^{1-2+1} = 10^0 = 1$; $10^{0-2+1} = 10^{-1}$, где $1 > 10^{-1}$.

2. Приближенные числа $N \approx 20$; $N_1 \approx 0,03$ имеют соответственно абсолютные погрешности: $10^{1-1+1} = 10$; $10^{-2-1+1} = 10^{-2}$, где $10 > 10^{-2}$.

Предельную абсолютную погрешность выражения ($N \pm N_1$) для всех трех случаев определим по формуле:

$$\Delta(N \pm N_1) = \Delta N + \Delta N_1 = 10^{m-n+1} + 10^{p-q+1} \leq 2 \cdot 10^{m-n+1} < 10^{m-n+2}.$$

Предельной абсолютной погрешностью приближенного числа мы считаем единицу разряда последней его значащей цифры. В действительности абсолютные погрешности этих слагаемых, как правило, равны половине этого разряда. Поэтому из приведенного выше доказательства ясно, что в выражении ($N \pm N_1$) окончательный результат надо округлять так, чтобы его последняя значащая цифра стояла в том же разряде, что и последняя значащая цифра того из данных компонентов N или N_1 , в котором она стоит в наивысшем разряде.

Такое положение распространяется и на случай нескольких

слагаемых¹, если учесть, что предельные абсолютные погрешности принимают всевозможные значения от $-0,5$ до $+0,5$ (и в редких случаях могут быть меньше $-0,5$ или больше $+0,5$) единицы разряда последней значащей цифры приближенного числа. При этом процесс накопления погрешностей идет параллельно с процессом их компенсации.

На основании этих рассуждений сформулировано правило для действий первой ступени над приближенными числами (см. стр. 13):

Определим по этому правилу сумму приближенных чисел 120 ; 1146 , которую мы рассматривали выше.

Число 120 имеет две значащие цифры, последняя значащая цифра 2 стоит в разряде десятков. Число 1146 имеет четыре значащих цифры, последняя значащая цифра 6 стоит в разряде единиц, то есть в более низком разряде, чем в первом числе последняя значащая цифра 2 . Ясно, что последняя значащая цифра результата должна стоять в разряде десятков, поскольку одна из последних значащих цифр слагаемых стоит в высшем разряде — в разряде десятков. Далее действие надо выполнять, как с точными числами, а потом результат округлить до разряда определенной значащей цифры (в данном случае до десятков):

$$120 + 1146 = 1266 \approx 1270.$$

Вторая глава диссертации — «Методика преподавания приближенных вычислений в общеобразовательной трудовой политехнической школе» — посвящена методике изложения приближенных вычислений в общеобразовательной трудовой политехнической школе. Здесь дается также краткий анализ состояния изучения вопроса о приближенных вычислениях в практике советской школы и школ Германской Демократической Республики и делаются некоторые замечания относительно изучения приближенных вычислений студентами в педагогических институтах.

В этой главе разработан материал по узловым вопросам методики преподавания приближенных вычислений в школе, а именно: по основным понятиям приближенных вычислений (понятие приближенного числа, источники получения приближенных чисел, запись приближенных чисел и соответствующая терминология, округление чисел с точностью до произвольного десятичного

¹ Слагаемые могут быть и точными, в таком случае их погрешности равны нулю.

знака и с точностью до 1, 2, 3 и т. д. значащих цифр, приближенное частное и извлечение квадратного корня с произвольной точностью, абсолютная и относительная погрешности чисел, оценка точности приближенных чисел по количеству десятичных знаков и значащих цифр); по методике вычислений (прикидка, правила подсчета цифр, строгий учет погрешностей при выполнении действий с приближенными данными — метод предельных погрешностей). Но основное место в этой главе, как и в первой главе диссертации, занимает вопрос о правилах подсчета цифр при изложении действий над приближенными числами как один из самых актуальных вопросов в практике преподавания.

Установлен объем материала по приближенным вычислениям, который должен непосредственно изучаться на специально выделенных по программе уроках. Установлены наиболее целесообразные правила приближенных вычислений, удобная терминология и форма записи. Действия над приближенными числами даются сначала для целых, а затем для дробных чисел в отличие от принятого в существующей методической литературе порядка, где действия I ступени, как правило, объясняются на основании приближенных десятичных дробей, а действия над целыми приближенными числами изучаются позже или совсем не изучаются.

Знания по приближенным вычислениям, полученные учениками во время изучения на специально отведенных программой уроках математики, необходимо закреплять и углублять при изучении других разделов математики и смежных с ней дисциплин. К сожалению, на эти вопросы в школе обращается очень мало внимания. Ученики выполняют действия с приближенными числами, как с точными, что приводит ко многим ошибкам.

Пренебрежение приближенными вычислениями в школе приводит к тому, что выпускники в своей трудовой деятельности часто не пользуются ими и выполняют при вычислениях много лишней работы.

Еще академик А. Н. Крылов в своем курсе «Теория корабля» писал, что в проектах, составленных заводами для Морского технического комитета, до 9/10, а иногда до 34/35 вычислительной работы тратилось зря на выписывание лишних цифр¹.

В практике одной из аэрологических обсерваторий имел место такой факт: на математическую обработку одного наблюдения над ветром на разных высотах затрачивалось раньше 2 часа, а при применении приближенных вычислений та же самая работа

¹ Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. IX, Теория корабля, часть I, изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 116.

без какого-либо нарушения необходимой точности выполнялась за 10 минут¹.

Вместе с тем следует отметить, что стремление к максимальному сокращению времени при вычислениях, измерениях и т. д. в конечном результате часто ведет к большим ошибкам.

Все это свидетельствует о том, что при изучении математических дисциплин в школе необходимо прививать учащимся культуру вычислений, причем вся методика вычислений «должна соответствовать требованиям теории приближенных вычислений и содействовать преодолению «фетишизма» круглого числа, распространенного в школе»².

Вопрос о согласовании методики приближенных вычислений с теорией — центральный во второй главе диссертации.

Третья глава диссертации, озаглавленная «**Применение при-ближенных вычислений на уроках математики и на уроках смежных с ней дисциплин**», посвящена вопросам применения приближенных вычислений при решении задач и упражнений на уроках арифметики, алгебры, геометрии, физики, при выполнении практических и лабораторных работ по математике и физике с учетом точности некоторых измерительных приборов. В этой же главе рассматриваются условия получения результатов измерения с наименьшей погрешностью.

Экспериментальная проверка методических положений, изложенных в диссертации, осуществлялась на протяжении пяти лет (1958—1963) в школах Киева и Киевской области. В экспериментальной работе принимали участие учителя киевских школ: Байкова Д. Г. (СШ № 135), Рихтер Р. С., Бориско Е. Г. (СШ № 155), Бакалинская Н. А. и Тищенко В. В. (СШ № 30), Меняйлов Н. Е. (СШ № 151) и учительница Ирпенской восьмилетней школы Бенецкая В. В.; преподаватели математики и физики Киевской области: Горбань И. П. (Пятигорская средняя школа Тетиевского района), Лимарчук Г. И. и Рабенко М. И. (Кашперовская средняя школа Тетиевского района) и другие.

В течение 1959/60 и 1960/61 учебных годов автор проводил спецсеминары по теме «Приближенные вычисления» на IV курсе физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького.

В процессе проведения эксперимента автор разработал и предварительно обсудил с учителями г. Киева и г. Ирпеня ка-

¹ Я. С. Безикович, Приближенные вычисления, Гостехиздат, Л.—М., 1949, стр. 10.

² И. Б. Погребинский, П. Ф. Фильчаков, Тригонометрия, «Радянська школа», К., 1954, стр. 3.

лендарные и поурочные планы работы по математике, физике и химии, которые непосредственно связаны с данной темой.

В Пятигорской, Кашперовской и в других школах учителя в процессе изложения материала по приближенным вычислениям руководствовались методическим письмом Министерства просвещения УССР за 1960 г.¹.

На это письмо имеются положительные отзывы (см. стр. 15 диссертации).

С целью популяризации и дальнейшего обобщения методических положений, выдвинутых в диссертации, автор выступал с лекциями на заседаниях методических объединений учителей математики, физики, химии и основ производства отдельных школ г. Киева (№ 155, 135, 30 и др.) разных районов г. Киева (Радянского, Дарницкого, Печерского, Октябрьского и др.). В Тетиевском районе Киевской области на августовских учительских конференциях автор прочитал три лекции: на секции математиков — «Приближенные вычисления в восьмилетней школе» (1960 г.) и «Приближенные вычисления в старших классах» (1961 г.), на секции физики и основ производства — «Применение приближенных вычислений на уроках физики» (1962 г.).

Автор выступал с лекцией по теме диссертации на семинаре заведующих кабинетами математики областных институтов усовершенствования квалификации учителей Украинской республики в 1961 г.

С докладами по теме диссертации автор выступал также в 1960, 1961, 1962, 1963 и 1964 гг. на научных конференциях Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького и на республиканских педагогических чтениях учителей математики Украины в г. Полтаве в сентябре 1961 г. Доклад «Применение приближенных вычислений при решении задач и упражнений по математике» будет напечатан в сборнике материалов республиканских педагогических чтений.

Основные положения диссертации отражены в следующих опубликованных работах автора:

1. Наближені обчислення в V—VIII класах восьмирічної школи. Методичний лист Міністерства освіти УРСР, «Радянська школа», К., 1960.
2. Наближені обчислення в V—VIII класах восьмирічної

¹ Методическое письмо МП УССР разработано и экспериментально проверено автором диссертации. Обработка и общая редакция материала осуществлена доц. А. С. Бугаев.

школи. Тези доповідей звітно-наукової конференції Київського державного педагогічного інституту ім. О. М. Горького за 1959 рік, К., 1960.

3. О приближенных вычислениях (из обзора статей по приближенным вычислениям), журнал «Математика в школе», М., 1961, № 5.

4. Деякі питання методики викладання наближених обчислень у політехнічній середній школі. Тези доповідей звітно-наукової конференції кафедр Київського державного педагогічного інституту ім. О. М. Горького за 1960 рік, К., 1961.

5. Regeln zur Bewertung von Ziffern, Mathematik und Physik in der Schule. Ausgabe A, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 9 (1962), Heft 6, S. 425.

6. Вивчення наближених обчислень у восьмирічній школі. журнал «Радянська школа», К., 1962, № 3.

7. Застосування наближених обчислень у курсі фізики політехнічної школи, «Викладання фізики в школі» (Збірник статей за ред. В. К. Мітюрьова), «Радянська школа», К., 1962.

8. Деякі питання методики викладання правил округлення чисел. Тези доповідей звітно-наукової конференції кафедр Київського державного педагогічного інституту ім. О. М. Горького за 1961 рік, К., 1962.

9. Някои методически указания за изучаване правилата за отброяване на цифрите в общообразователните трудово-политехнически училища, «Математика и физика». Двумесечно методическо списание орган на Министерството на просветата и културата и Съюза на българските учители, 1963, № 1.

10. Методичні вказівки до вивчення курсу «Математика» (розділ IV — Арифметика основних величин), «Радянська школа», К., 1963.

11. Один із способів доведення формули залежності між граничною відносною похибкою наближеного числа та кількістю його значущих цифр. Тези доповідей звітно-наукової конференції кафедр Київського державного педагогічного інституту ім. О. М. Горького за 1962 рік, К., 1963.

12. Методичні вказівки до вивчення курсу «Елементарна математика», випуск II (розділ «Теорія і практика обчислень»), «Радянська школа», К., 1963.

13. Контрольно-тренувальні вправи до вивчення курсу «Елементарна математика», випуск III (розділ «Теорія і практика обчислень»), «Радянська школа», К., 1964.

14. Деякі методичні вказівки щодо вивчення студентами-заочниками наближених обчислень в педагогічних інститутах. «Заоч-

на педагогічна освіта» (Збірник статей), випуск 6, «Радянська школа», К., 1964.

15. Один із способів обґрунтування правил підрахунку цифр. Тези доповідей звітно-наукової конференції кафедр Київського державного педагогічного інституту ім. О. М. Горького за 1963 рік, К., 1964

и в работах, принятых к печати:

16. Викладання наближених обчислень в середній школі Німецької Демократичної Республіки, Наукові записки КДПІ імені О. М. Горького, «Радянська школа», Київ.

17. Застосування наближених обчислень при розв'язуванні задач і вправ з математики, Збірник матеріалів республіканських педагогічних читань, «Радянська школа», Київ.

18. Застосування наближених обчислень при виконанні практичних (лабораторних) робіт з математики в загальноосвітній трудовій політехнічній школі, Наукові записки КДПІ імені О. М. Горького, «Радянська школа», Київ.

Авторы отдельных работ ссылаются на вышеуказанные печатные статьи по данной диссертации и рекомендуют их для использования в научно-практической работе. Так, например, см. „Empfehlungen des Redaktionskollegiums zur Verwendung des Gleichheitszeichens und zum Rechnen mit Näherungswerten“ (Die Gestaltung dieser Empfehlung wurde vom Kollegen Paul Polster ausgeführt), Mathematik und Physik in der Schule, Ausgabe A, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 10(1963), Heft 1, S. 16.

БФ 25195. Подписано к печати 21.11 1964 г. Формат бумаги 60×841/16.
Печ. лист. 1,25. Заказ 209. Тираж 150.

Типография Киевского государственного педагогического института
имени А. М. Горького, ул. Франко, 44.