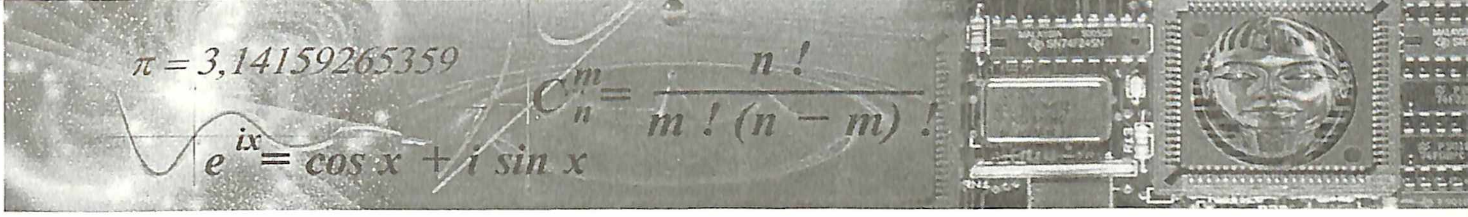
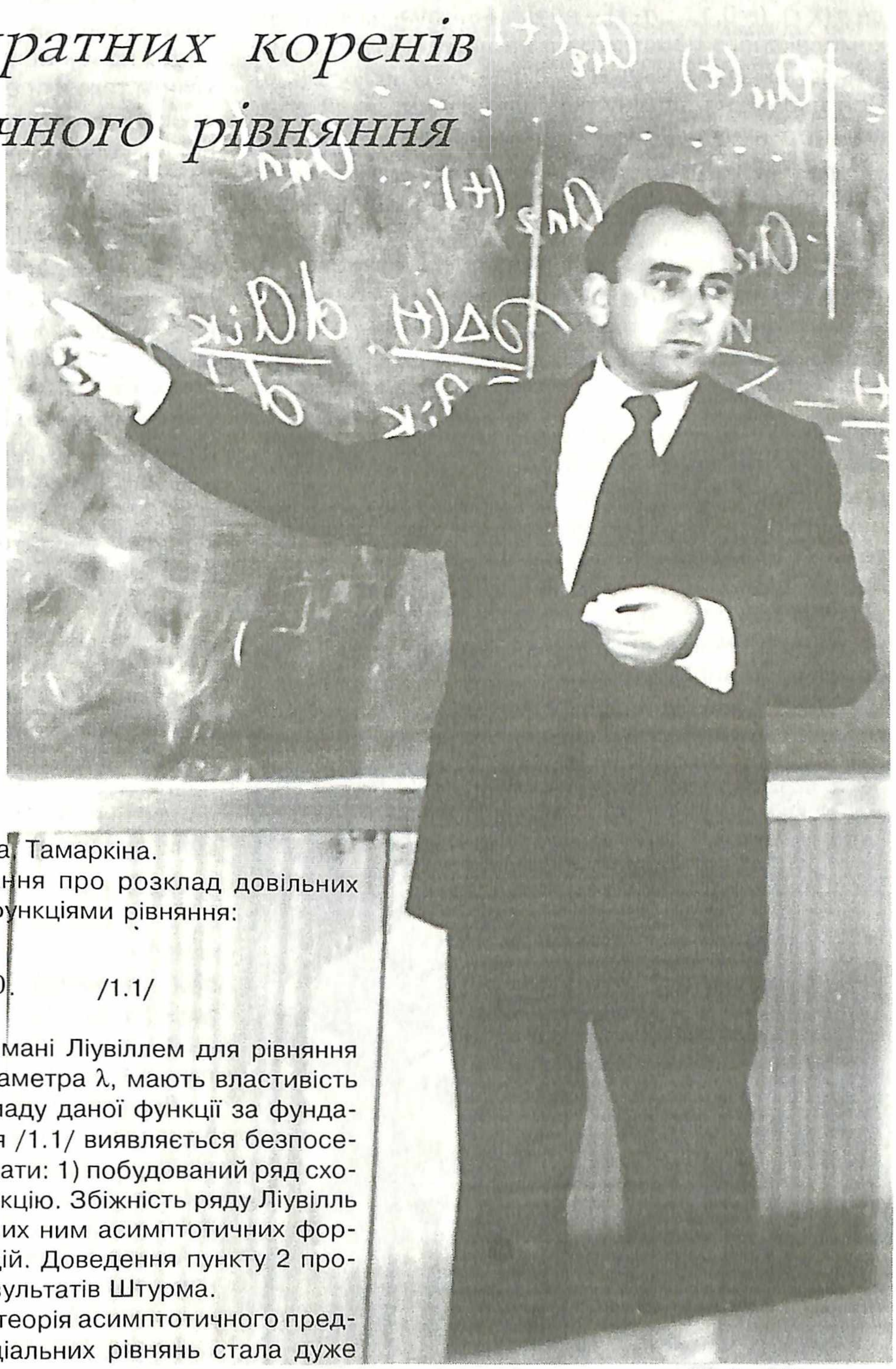


ПРО асимптотичний розклад розв'язків систем диференціальних рівнянь у випадку кратних коренів характеристичного рівняння



1. Короткий історичний огляд

У статті викладено результати, які стосуються дослідження лінійних диференціальних систем, коефіцієнти яких залежать від «повільного» часу $\tau = \varepsilon t / \varepsilon > 0$ – малий параметр. Фундаментальні результати дослідження таких систем отримані С.Ф. Фещенком, С.Г. Крейном, Ю.Л. Далецьким, І.З. Штокалом, І.М. Рапопортом. На праці названих авторів безпосередньо вплинули асимптотичні методи М.М. Крилова, М.М. Боголюбова, Ю.А. Митропольського.

Перші спроби побудови асимптотичного розкладу для розв'язків диференціальних рівнянь, що містять параметр, зустрічаємо ще у працях Ліувілля, Шлезингера, Тамаркіна.

Так, Ліувілль розглянув питання про розклад довільних функцій за фундаментальними функціями рівняння:

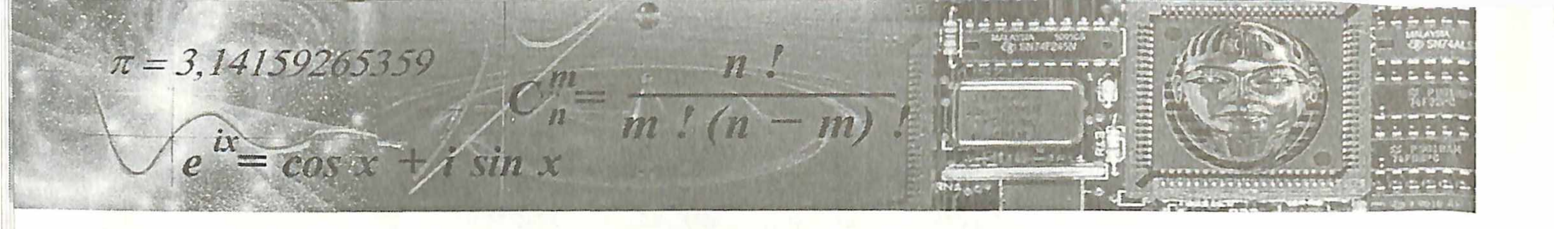
$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda q(x) - r(x))y = 0. \qquad /1.1/$$

Фундаментальні функції, отримані Ліувіллем для рівняння /1.1/ при великих значеннях параметра λ, мають властивість ортогональності. Тому вид розкладу даної функції за фундаментальними функціями рівняння /1.1/ виявляється безпосередньо. Залишається лише показати: 1) побудований ряд сходиться і 2) представляє дану функцію. Збіжність ряду Ліувілль доводить за допомогою виведених ним асимптотичних формул для фундаментальних функцій. Доведення пункту 2 проведено за допомогою деяких результатів Штурма.

Після праць Штурма і Ліувілля теорія асимптотичного представлення розв'язків диференціальних рівнянь стала дуже швидко розвиватися.

Однак усі ці дослідження стосувалися самоспряженості диференціальних рівнянь. Ці обмеження зняли у своїх дослідженнях Шлезингер, Біркгоф, Тамаркін.

М.І. Шкіль,
академік АПН та АНВШ України, доктор фіз-мат наук, професор, ректор Національного педагогічного університету ім. М.П. Драгоманова.



Так, Біркгоф розглянув питання про побудову асимптотичного розв'язку для диференціального рівняння

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \rho a_{n-1}(x,\rho)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \rho^n a_0(x,\rho)y = 0 \text{ , /1.2/}$$

де $a_i(x,r)$, $(i=0,1,\ldots,n-1)$ – аналітичні функції відносно комплексного параметра ρ на нескінченності і мають похідні всіх порядків за дійсною змінною $x\in[a,b]$. При цьому, на відміну від Шлезингера, який довів асимптотичну властивість розв'язків лише на деякому фіксованому промені $arq\rho=a$ для великих $/\rho/$, Біркгоф доводить аналогічні властивості для області $\Theta<arq\rho<\Psi$.

Тамаркін узагальнює результати Біркгофа для систем лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x,\rho)y_k, i=1,\ldots,n \text{ , /1.3/}$$

де $a_{ik}(x,\rho)$ – однозначні функції комплексного параметра ρ, аналітичні біля точки $\rho=\infty$, але які мають особливості при $\rho=\infty$ (полюс порядку $r\geq1$). Виведені ним асимптотичні вирази для розв'язків системи /1.3/ містять у собі, як окремі випадки, аналогічні формули, встановлені Шлезингером іншим шляхом для систем виду /1.3/ і Біркгофом для одного диференціального рівняння порядку n (останні розглядали випадок $r=1$).

У 1936 році з'явилася праця Тржитзинського, де поданий виклад стану питання про асимптотичне представлення розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з узагальненням теорії Шлезингера–Біркгофа–Тамаркіна на випадок лінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

У період 1940-1945 років з'явилася низка праць В.С. Пугачова, в яких, на відміну від попередніх дослідників, асимптотичне представлення розв'язків репрезентовано у більш загальному вигляді.

До праць асимптотичного характеру слід зараховувати також праці Г.Л. Турритина і М. Хукухара, де проведено асимптотичне розщеплення системи лінійних диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких залежать від параметра, на системи більш низького порядку.

Завершуючи короткий історичний огляд класичних праць з асимптотичного представлення розв'язків лінійних диференціальних рівнянь, слід зазначити, що ці методи у подальшому отримали всебічний і плідний розвиток.

Як уже зазначалося вище, під впливом асимптотичних методів Крилова–Боголюбова–Митропольського бурхливо почали розвиватися дослідження лінійних диференціальних рівнянь, що сингулярно містять малий параметр.

Перші результати у цьому напрямку були отримані С.Ф. Фещенком у 1948-49 рр. Для рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon\rho(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{dt} + q(\tau,\varepsilon)y = \varepsilon f(\tau,\varepsilon)\cdot e^{i\Theta(t,\varepsilon)} \text{ , /1.4/}$$

де $\rho(\tau,\varepsilon)$, $q(\tau,\varepsilon)$, $f(\tau,\varepsilon)$ – функції, що повільно змінюються і допускають розклад за степенями малого параметра ε. При цьому розглянутий, дуже важливий з точки зору додатків до задач математичної фізики, а також з теоретичного боку, випадок, коли функція

$$\nu(\tau)\left(\nu(\tau) = \frac{d\Theta(t,\varepsilon)}{dt}\right)$$

при деяких τ із області його зміни збігається з одним із простих коренів характеристичного рівняння, складеного для рівняння /1.4/. Цей випадок автор назвав «резонансним».

Доведені С.Ф. Фещенком теореми дозволяють будувати асимптотичний розв'язок рівняння /1.4/ у «резонансному» і «нерезонансному» (коли $\nu(\tau)$ при будь-якому τ не збігається з жодним із коренів характеристичного рівняння) випадках.

Аналогічні теореми були отримані С.Ф. Фещенком для системи лінійних диференціальних рівнянь вигляду /1.4/.

Потім С.Ф. Фещенко отримав дуже важливі результати, що стосуються асимптотичного розщеплення систем лінійних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x\,, \qquad /1.5/$$

де x – n-мірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ – дійсна квадратна матриця порядку n, що допускає представлення

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau)\,. \qquad /1.6/$$

Зокрема ним доведені такі теореми.

Теорема 1.1. Припустимо, що корені характеристичного рівняння

$$\det\|A_0(\tau) - \lambda \cdot E\| = 0\,, \qquad /1.7/$$

де E – одинична матриця, можна розбити на дві групи $\lambda_1(\tau),\ldots\lambda_r(\tau)$ и $\lambda_{r+1}(\tau),\ldots,\ \lambda_n(\tau)$ так, що жоден корінь першої групи при всіх $\tau\in[0;L]$ не дорівнює кореням другої групи. Тоді, якщо $A(\tau,\varepsilon)$ на сегменті $[0,L]$ має похідні по τ всіх порядків, то система диференціальних рівнянь /1.5/ має формальний розв'язок вигляду

$$x = U_1(\tau,\varepsilon)\xi_1 + U_2(\tau,\varepsilon)\xi_2\,, \qquad /1.8/$$

де $U_1(\tau,\varepsilon)$, $U_2(\tau,\varepsilon)$ – прямокутні матриці з розмірами відповідно $(n \times r)$, $(n \times n\text{-}r)$, а ξ_1 – r-мірний вектор, ξ_2 – n-r-мірний вектор, що визначаються системами диференціальних рівнянь

$$\frac{d\xi_1}{dt} = W_1(\tau,\varepsilon)\xi_1,\quad \frac{d\xi_2}{dt} = W_2(\tau,\varepsilon)\xi_2\,, \qquad /1.9/$$

порядку відповідно r і n-r.

Теорема 1.2. Якщо $A(\tau,\varepsilon)$ задовольняє умови теореми 1.1 і власні числа матриць

$$\Delta_i(\tau) = \frac{1}{2}(W_i^*(\tau) + W_i^*(\tau)),\ i = 1{,}2\,,$$

де – $W_1^*(\tau), W_2^*(\tau)$ – діагональні клітини матриці $T^{-1}(\tau)A_0(\tau)T(\tau)$ ($T(\tau)$ – матриця перетворення, $T^{-1}(\tau)$ – обернена до $T(\tau)$, $W_1^*(\tau)$, $W_1^*(\tau)$ – матриці, спряжені відповідно до матриць $W_1(\tau), W_2(\tau)$), недодатні, то для будь-якого $L > 0$ і $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ можна вказати таку постійну $c > 0$, яка не залежить від ε, якщо $x|_{t=0} = x_m|_{t=0}$ (x_m – m-наближення), то

$$\|x - x_m\| \le \varepsilon^m c\,. \qquad /1.10/$$

За допомогою теорем 1.1, 1.2 можна асимптотично знизити порядок системи /1.5/. Зокрема, якщо всі корені рівняння /1.7/ різні на відрізку $[0;L]$, то ці теореми дають можливість отримати асимптотичний розв'язок системи /1.5/.

Однак за допомогою теорем про асимптотичне розщеплення можна в основному понизити порядок вихідної системи. У випадку кратних коренів характеристичного рівняння за допомогою цих теорем неможливо отримати розв'язок вихідної системи диференціальних рівнянь. Крім того, цей випадок досить часто зустрічається як під час досліджень теоретичних питань, так і під час розв'язку практичних задач. Так, уже під час вивчення найпростішого рівняння, яким є рівняння Штурма–Ліувілля /1.1/, доводиться мати справу з кратним коренем. З цими коренями стикаються під час дослідження системи диференційних рівнянь з малим параметром при частині похідних, у задачах оптимального рівняння. Можна помітити, що випадок кратних коренів, особливо той варіант, коли кратним кореням відповідають кратні елементарні дільники, досить важкий. Це зумовлено тим, що вихідна система диференціальних рівнянь, загалом кажучи, не має розв'язків, що припускають розкладення за цілими степенями параметра ε. Такі розв'язки, на відміну від випадку простих коренів, представляються формальними рядами за різними дробовими степенями цього параметра, причому показники степеня залежать не лише від кратності кореня характеристичного рівняння, але і від відповідних елементарних дільників, а також від деяких співвідношень між коефіцієнтами системи, що розглядається.

Випадок кратних коренів характеристичного рівняння був всебічно вивчений М.І. Шкілем. Ці результати частково викладені у статті.

2. Асимптотичні розклади у випадку кратних коренів характеристичного рівняння.

Розглянемо систему вигляду /1.5/. Припустимо, що характеристичне рівняння /1.7/ має, хоча б, один корінь $\lambda=\lambda_0(t)$ постійної кратності $k, (2 \le k<n)$, якому відповідає елементарний дільник тієї ж кратності.

Теорема 2.1. Якщо $A(\tau,\varepsilon)$ має на відрізку $[0;L]$ похідні по τ всіх порядків і матриця

$$C(\tau) = T^{-1}(\tau)\left(\frac{dT(\tau)}{d\tau} - A_1(\tau)\cdot T(\tau)\right), \qquad /2.1/$$

де $T(\tau)$ – матриця, що приводить $A_0(\tau)$ до жорданової форми, а $T^{-1}(\tau)$– матриця зворотна до $T(\tau)$, така, що при будь-якому $\tau\in[0;L]$ її елемент

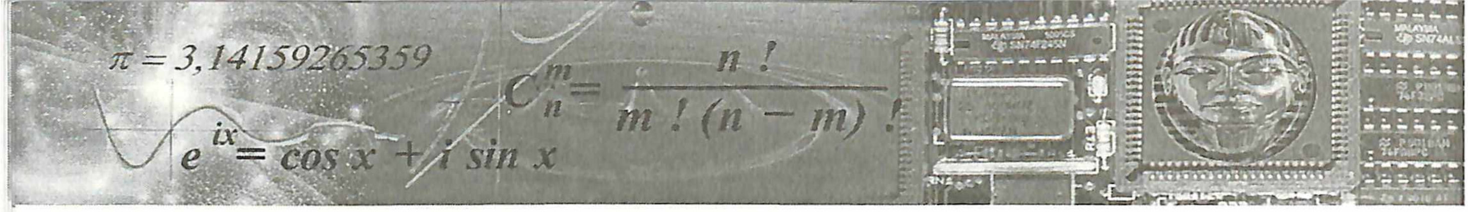
$$c_{k1}(\tau)\neq 0, \qquad /2.2/$$

то система диференціальних рівнянь /1.5/ має формальний розв'язок вигляду

$$x = u(\tau,\mu)\exp\left(\int_0^t \lambda(\tau,\mu)dt\right), \qquad /2.3/$$

де n-мірний вектор $u(\tau,\mu)$ і скалярна функція $\lambda(\tau,\mu)$ допускають розклад

$$u(\tau,\mu) = \sum_{S=0}^{\infty} \mu^S u_S(\tau);\ \lambda(\tau,\mu) = \lambda_0(\tau) + \sum_{S=1}^{\infty} \mu^S \lambda_S(\tau)$$



у яких

$$\mu=\varepsilon^{1/k}. \qquad /2.5/$$

Підкреслимо, якщо $c_{k1}(\tau)\equiv 0$, проте при цьому $c_{k-1,1}(\tau)+c_{k2}(\tau)\neq 0$, то вихідна система має формальний розв'язок вигляду /2.3/, в якому $u(\tau,\mu),\lambda(\tau,\mu)$ представляються формальними рядами за степенями параметра $\mu=\varepsilon^{1/k-1}$.

Наведемо більш загальний результат.

Нехай виконуються умови:

1) матриця $A(\tau,\varepsilon)$ на відрізку $[0;L]$ має похідні по τ всіх порядків;

2) характеристичне рівняння /1.7/ має один корінь постійної кратності k;

3) кореню $\lambda_0(\tau)$ відповідає $r\geq 1$ елементарних дільників вигляду

$$(\lambda-\lambda_0(\tau))^{\kappa_1},\ldots,(\lambda-\lambda_0(\tau))^{\kappa_r};$$

4) виконується одне із співвідношень

а) $k_1=k_2=\ldots=k_r=k$,

б) $k_1>k_2>\ldots>k_r$.

Тоді для випадку а) справедлива така теорема.

Теорема 2.2. Якщо виконуються умови 1)-4), то для того, щоб вектор

$$x=u(\tau,\mu)\exp\left(\int_0^t \lambda(\tau,\mu)dt\right), \qquad /2.6/$$

де n-мірний вектор $u(\tau,\mu)$ і скалярна функція $\lambda(\tau,\mu)$ можуть представлятися формальними рядами

$$u(\tau,\mu)=\sum_{S=0}^{\infty}\mu^S u_S(\tau);\ \lambda(\tau,\mu)=\sum_{S=0}^{\infty}\mu^S\lambda_S(\tau), \qquad /2.7/$$

в яких $\mu=\varepsilon^{1/k}$, був формальним вектор-розв'язком системи /1.5/, необхідно і достатньо, щоб функція $(\lambda_1(\tau))^k$ при будь-якому $\tau\in[0;L]$ була коренем рівняння

$$\det\begin{Vmatrix}\rho+c_{k1}(\tau) & c_k c_{k+1}(\tau) & \ldots & c_{kl_{r-1}+1}(\tau)\\ c_{2k1}(\tau) & \rho+c_{2kk+1}(\tau) & \ldots & c_{2kl_{r-1}+1}(\tau)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ c_{n1}(\tau) & c_{nk+1}(\tau) & \ldots & \rho+c_{nl_{r-1}+1}(\tau)\end{Vmatrix}=0, \qquad /2.8/$$

де $c_{k1}(\tau),\ldots,c_{nl_{r-1}+1}(\tau)$, $l_{r-1}=(r-1)k$ – елементи матриці /2.1/.

Підкреслимо, що доведення достатньої умови даної теореми одночасно дає і метод побудови коефіцієнтів формальних рядів /2.7/.

Аналогічна теорема справедлива і для випадку б). Доведено також, що для обох випадків формальні розв'язки є асимптотичними розкладами за параметром ε істинних розв'язків системи /1.5/.

3. Точки повороту.

Теореми, приведені в п.1.2, вірні за умови, що корені характеристичного рівняння і відповідні їм елементарні дільники зберігають постійну кратність при будь-якому $\tau\in[0;L]$. Якщо ці умови порушуються (з'являються точки повороту), то побудова асимптотичних розвинень для розв'язків систем, що розглядаються, дуже і дуже важка. Більш-менш доступні для огляду результати при наявності точок повороту отримані лише для одного диференціального рівняння другого порядку, і систем двох диференціальних рівнянь. Дослідження цього випадку різними авторами проводилося з використанням функцій Ейрі чи зведенням диференціальних рівнянь, які розглядалися, до деяких еталонних рівнянь. Таким рівнянням є, наприклад, диференціальне рівняння Ейрі.

Автором даної статті вперше була здійснена спроба побудувати формальні розклади в елементарних функціях для розв'язків систем диференціальних рівнянь вигляду /1.5/.

Теорема 3.1. Нехай для системи диференціальних рівнянь /1.5/ виконуються умови:

1. Матриця $A(\tau,\varepsilon)$ допускає розклади

$$A(\tau,\varepsilon)=\sum_{S=0}^{\infty}\varepsilon^S A_S(\tau).$$

2. Матриці $A_S(\tau)(S=0,1,\ldots)$ необмежено диференційовані на відрізку $[0;L]$.

3. Існує ціле число $k\geq 1$, таке, що корені рівняння

$$det\left\|A_0(\tau)+\varepsilon A_1(\tau)+\ldots+\varepsilon^k A_k(\tau)-\lambda E\right\|=0, \qquad /3.1/$$

прості при будь-якому $\tau\in[0;L]$.

Тоді існує формальний вектор – розв'язок системи /1.5/ вигляду

$$x(t,\varepsilon)=U(\tau,\varepsilon)exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Lambda(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right)\cdot a, \qquad /3.2/$$

де $U(\tau,\varepsilon)$ – $(n\times n)$-матриця, яка допускає формальний розклад

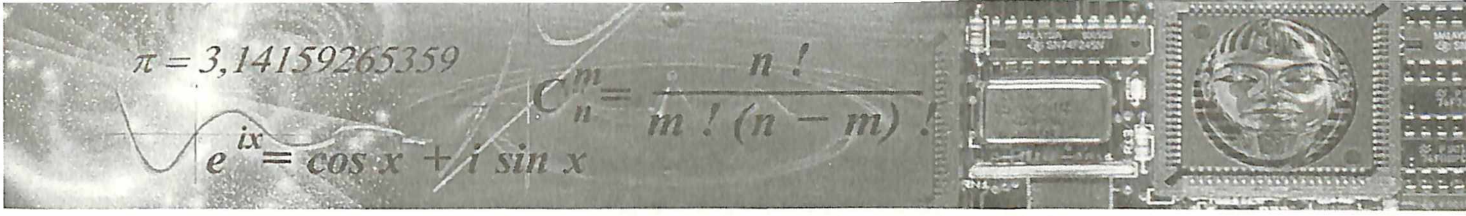
$$U(\tau,\varepsilon)=\sum_{S=0}^{\infty}\varepsilon^S U_S(\tau,\varepsilon), \qquad /3.3/$$

де $\Lambda(\sigma,\varepsilon)$ – діагональна матриця, складена із коренів рівняння /1.7/, a – постійний n-мірний вектор.

Підкреслимо, що на відміну від формального розкладу, наведеного у п.1-2, у розкладі /3.3/ коефіцієнти у свою чергу залежать від ε, що значною мірою ускладнює дослідження асимптотичних властивостей цих розкладів. Деякі результати у цьому напрямку отримані у працях автора і його учнів.

4. Спрощення формальних розкладів.

Проблеми, доведення існування формальних розв'язків системи /1.5/ у випадку кратних коренів характеристичного рівняння можна значно спрости-



ти, ввівши до розгляду друге алгебраїчне рівняння, пов'язане із системою /1.5/. Однак при цьому виникають нові, дуже непрості проблеми, які стосуються асимптотичних властивостей отриманих таким чином формальних розв'язків. Все вище сказане проілюструємо, розглядаючи дещо спрощену систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x\,, \qquad /4.1/$$

де $n\times n$-матриця $A(\tau)$ достатнє число разів диференційована на відрізку $[0;L]$, ($\tau=\varepsilon t$, $\varepsilon>0$ – малий параметр).

Припустимо, що характеристичне рівняння

$$\det\|A(\tau) - \lambda E\| = 0\,, \qquad /4.2/$$

на відрізку $[0;L]$ має один тотожно кратний корінь $\lambda=\lambda_0(\tau)$ кратності n, якому відповідає один кратний дільник тієї ж кратності.

Тоді за допомогою підставлення

$$x=V(\tau)y, \qquad /4.3/$$

де $V(\tau)$ – матриця, що приводить $A(\tau)$ до жорданової форми, систему /4.1/ можна привести до вигляду

$$\frac{dy}{dt} = B(\tau,\varepsilon)y\,, \qquad /4.4/$$

$$\text{де } B(\tau,\varepsilon)= W(\tau)- \varepsilon V^{-1}(\tau)V'(\tau), \qquad /4.5/$$

$W(\tau)$ – клітка Жордана, що відповідає кореню $\lambda_0(\tau)$, $V^{-1}(\tau)$ – матриця, обернена до $V(\tau)$, $V'(\tau)$ – похідна від $V(\tau)$.

Побудуємо рівняння

$$\det\|B(\tau,\varepsilon) - \rho E\| = 0\,. \qquad /4.6/$$

Будемо вважати, що корені $\rho_1(\tau,\varepsilon),\ldots,\rho_n(\tau,\varepsilon)$ рівняння /4.6/ прості для $\forall\tau\in[0;L]$ і $\forall\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, тобто

$$\rho_i(\tau,\varepsilon) \neq \rho_j(\tau,\varepsilon),\ i\neq j,\ \forall i,j=\overline{1,n}\,, \qquad /4{,}7/$$

Тоді здійснюючи у системі /4.4/ підстановку

$$y = U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)z,\ U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{S=0}^{m}\varepsilon^S U_s(\tau,\varepsilon)\,, \qquad /4.8/$$

($m \geq 1$ – натуральне число) і визначаючи матриці $U_S(\tau,\varepsilon)$ ($s=\overline{0,m}$) за методом пункту 2, прийдемо до системи диференціальних рівнянь у вигляді:

$$U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)\frac{dz}{dt} = U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)(\Lambda_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(\tau,\varepsilon))z\,, \qquad /4.9/$$

де діагональна матриця

$$\Lambda_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon) = \sum_{S=0}^{m}\varepsilon^S\Lambda_S(\tau,\varepsilon)\,, \qquad /4.10/$$

та $n\times n$-матриця $C_m(\tau)$ визначається за формулами п.2.

Нехай при будь-якому $\tau\in[0;L]$ і достатньо малому $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ виконуються умови:

1°. Матриця $U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)$ неособлива. Тоді систему /4.9/ можна записати у вигляді

$$\frac{dz}{dt} = (\Lambda_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(\tau,\varepsilon))z\,, \qquad /4.11/$$

2°. $\mathrm{Re}(\rho_j(\tau,\varepsilon,\varepsilon))_{\,j=\overline{1,n}} \leq 0$;

$$C_m(\tau,\varepsilon)=O(\varepsilon^{-\alpha})\ (\varepsilon\to 0), \qquad /4.12/$$

де $0\leq\alpha<m$, тоді систему /4.11/ можна проінтегрувати методом послідовних наближень (умови 2° забезпечують застосовуваність цього методу). Внаслідок чого для вектора z отримаємо асимптотичну формулу за параметром ε ($\varepsilon\to 0$):

$$z = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\sum_{S=0}^{m}\varepsilon^S\Lambda_S(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right)a + O\left(\varepsilon^{m-\alpha}\right)\,, \qquad /4.13/$$

де α – постійний n-мірний вектор.

3°. Матриця $U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)$ обмежена за нормою. Тоді використовуючи /4.3/, /4.8/, 4.13/, отримаємо асимптотичну формулу для вектора x.

Наприкінці зауважимо, що формулу /4.13/, отримано за припущенням виконання умов 1°–2°, у яких явно не фігурують коефіцієнти системи /4.1/. Виникає питання: яким умовам треба підпорядкувати матрицю $A(\tau)$, щоб виконувалися умови 1°–3°? Відповідь на це питання і становить ті проблеми, про які згадувалося на початку п.4.

Вирішення цих проблем вимагає подальших досліджень.

Приклад. Розглянемо скалярне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\rho(\tau)x = 0\,, \qquad /4.14/$$

де $\rho(\tau)\neq 0$ на відрізку $[0;L]$ і має неперервні похідні до другого порядку включно.

Рівняння /4.14/ можна уявити у вигляді системи /4.4/ де $y=(y_1,y_2)$ ($y_1=x$, $y_2=dx/dt$) – двовимірний вектор, $B(\tau,\varepsilon)$ – квадратична матриця вигляду

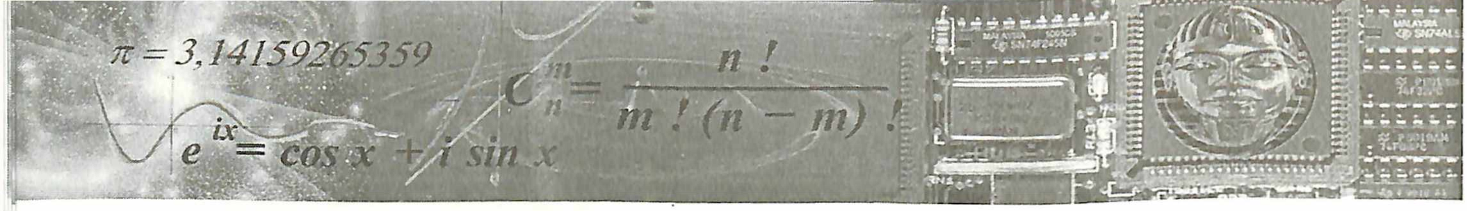
$$B(\tau,\varepsilon) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon\rho(\tau) & 1 \end{Vmatrix}. \qquad /4.15/$$

Тоді в силу припущення, рівняння /4.6/ має прості корені:

$$\rho_1(\tau,\varepsilon) = \sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)},\ \rho_2(\tau,\varepsilon) = -\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}\,, \qquad /4.16/$$

До системи /4.4/ із матрицею /4.15/ застосуємо перетворення /4.8/, поклавши $m=1$.

Тоді отримаємо систему вигляду /4.9/, у якій матриці $U_1(\tau,\varepsilon,\varepsilon)$ і $\Lambda_1(\tau,\varepsilon,\varepsilon)$ рівні:



$$U_1(\tau,\varepsilon,\varepsilon)=\begin{Vmatrix} 1+\dfrac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}}, & 1-\dfrac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}} \\ \sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}-\dfrac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)}, & -\dfrac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)} \end{Vmatrix},$$

$$\Lambda_1(\tau,\varepsilon,\varepsilon)=diag\left(\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}+\frac{\varepsilon\rho'(\tau)}{4\rho(\tau)},-\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}+\frac{\varepsilon\rho'(\tau)}{4\rho(\tau)}\right),$$

$$U_1^{-1}(\tau,\varepsilon,\varepsilon)=\frac{1}{a(\tau,\varepsilon)}\begin{Vmatrix} -\dfrac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)}, & \dfrac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}}-1 \\ \dfrac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)}-\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}, & 1+\dfrac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}} \end{Vmatrix},$$

$$a(\tau,\varepsilon)=\frac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)}-\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}-\frac{\varepsilon^2(\rho'(\tau))^2}{32\rho^2(\tau)\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}}. \quad /4.17/$$

Матриця $C_1(\tau,\varepsilon)$ визначається за формулою

$$C_1(\tau,\varepsilon)=-U_1^{-1}(\tau,\varepsilon,\varepsilon)(U_1(\tau,\varepsilon)\Lambda_1(\tau,\varepsilon)+U_1'(\tau,\varepsilon)), \quad /4.18/$$

де

$$U_1(\tau,\varepsilon)=\frac{\varepsilon\rho'(\tau)}{8\rho(\tau)\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}}\begin{Vmatrix} 1, & -1 \\ -\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)}, & -\sqrt{-\varepsilon\rho(\tau)} \end{Vmatrix},$$

$$\Lambda_1(\tau,\varepsilon)=diag\left(\frac{\rho'(\tau)}{4\rho(\tau)},\frac{\rho'(\tau)}{4\rho(\tau)}\right) \quad /4.19/$$

Безпосереднє обчислення елементів матриці $C_1(\tau,\varepsilon)$ (за причини громіздкості ми їх не виписуємо) показує, що вони в околі точки $\varepsilon=0$ при будь якому $\tau\in[0;L]$ мають порядок $O(\varepsilon^{-1/2})$. Тому, припустивши виконання умови:

$$\operatorname{Re}\Lambda_1(\tau,\varepsilon,\varepsilon)\le 0, \quad /4.20/$$

(ця умова буде виконуватися, коли функція $\rho(\tau)>0$ для $\forall\tau\in[0;L]$) для вектора z отримаємо асимптотичну формулу

$$z=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Lambda_1(\sigma,\varepsilon,\varepsilon)d\sigma\right)a+O\left(\varepsilon^{1/2}\right), \quad /4.21/.$$

На фото (зліва направо): професор М. І. Шкіль, професор Є.В. Коршак, академік В.М. Глушков.