Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 204–210.

УДК 511.72+519.21

Про аномальну фрактальність одного класу множин ланцюгових дробів із зростаючими елементами

Д. В. Кюрчев

(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

Анотація. Розглядається множина елементарних ланцюгових дробів, елементи яких утворюють строго зростаючу послідовність. Побудовано сингулярну ймовірнісну міру, зосереджену на такій множині. Також вивчено один клас підмножин цієї множини, розмірність Хаусдорфа-Безиковича яких дорівнює нулю.

Abstract. We take into consideration the set of elementary continued fractions whose partial quotients form a strictly increasing sequence. We construct a singular probability measure supported on this set. We also study one class of the subsets of this set, whose Hausdorff-Besicovitch dimension equals zero.

Відомо [**1**], що кожне ірраціональне число x єдиним чином представляється у вигляді нескінченного ланцюгового дробу

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \equiv [a_0; a_1, a_2, \ldots], \tag{1}$$

а кожне раціональне — у вигляді скінченного ланцюгового дробу

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n], \tag{2}$$

де a_0 — ціле, a_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — натуральні числа, які називаються його елементами. Будемо розглядати далі лише випадок, коли $x \in (0, 1]$, тобто $a_0 = 0$, і вживати позначення $x = [a_1, a_2, \ldots]$ або $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ відповідно.

В метричній теорії ланцюгових дробів виникає чимало множин, числа яких володіють певними властивостями свого елементарного ланцюгового представлення. Як правило, такі множини однаково малі з точки зору міри Лебега (вона дорівнює нулю), проте відрізняються своїми фрактальними властивостями[**10**]. Проблемам обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича таких множин присвячено цілий ряд наукових досліджень: [**2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**]. Створено прийоми, що дозволяють знаходити розмірність з певною точністю та знайдено її оцінки, проте точні формули для обчислення розмірності множин, визначених в термінах ланцюгових дробів, у більшості випадків не відомі.

Багато досліджень присвячено проблемам знаходження розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини $E'_M = \{x : x = [a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots], a_i \leq m \; \forall i = 1, 2, \ldots\}$, зокрема, це роботи Ярніка[**2**], Гуда[**3**], Кінні і Пітчера[**4**], Хенслі[**8**] та інші.

Починаючи з роботи [**3**], вивчалися фрактальні властивості множин ланцюгових дробів із зростаючими елементами. Серед цих множин були і такі, розмірність Хаусдорфа-Безиковича яких дорівнює нулю. Так, в роботі [**3**] стверджується, що множина

$$\{x : x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots], \overline{\lim_{n\to\infty}} (\ln a_n)^{\frac{1}{n}} \to \infty\}$$

має нульову розмірність Хаусдорфа-Безиковича, проте запропоноване в [**3**] доведення виявилося некоректним і було обґрунтовано набагато пізніше в роботі [**9**], що свідчить про складність і нетривіальність таких задач.

В роботах [**5**] і [**7**] отримано оцінки розмірності Хаусдорфа-Безиковича множин чисел, елементи ланцюгового представлення яких зростають не повільніше деякої наперед заданої функції $f(n)$: $a_n(x) \geq f(n)$. Чим швидше зростають елементи $a_n(x)$, тим меншою є розмірність відповідної множини. Зокрема, в роботі [**7**] доведено, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $\{x : x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots], \; a_n \geq 2^{2^{2^n}} \; \forall n = 1, 2, \ldots\}$ дорівнює нулю.

В даній роботі ми розглядаємо клас множин E_M та множину $E = \bigcup\limits_{M=1}^{\infty} E_M$. Елементи ланцюгового представлення чисел цих множин $a_n(x)$ зростають відносно повільно, проте через певні обмеження множини E_M і E виявляються також "бідними"у фрактальному сенсі — їх розмірність Хаусдорфа-Безиковича виявляється рівною нулю. Ми також будуємо сингулярну функцію розподілу, що відображає кожну множину E_M у множину E'_M.

Нехай M — додатне ціле число, $M > 1$. Означимо множини

$$E_M = \{x : \; x = [a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots]; \; 0 < a_k - a_{k-1} \leq M \; \forall k = 1, 2, 3, \ldots\},$$

$$E = \bigcup_{M=1}^{\infty} E_M.$$

Очевидно, що E_M і E континуальні. Розглянемо детальніше їх тополого-метричні та фрактальні властивості.

Нагадаємо [**10**], що *циліндричним відрізком* (*циліндром*) рангу n з основою $a_1 a_2 \ldots a_n$ називається множина $\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ чисел $x \in (0, 1]$, перші n елементів ланцюгового представлення яких дорівнюють $a_1, a_2, \ldots, a_n$ відповідно, тобто

$$\Delta_{a_1a_2\ldots a_n} = \begin{cases} [[a_1, a_2, \ldots, a_n + 1],\ [a_1, a_2, \ldots, a_n]]\,, \text{якщо } n - \text{непарне},\\ [[a_1, a_2, \ldots, a_n],\ [a_1, a_2, \ldots, a_n + 1]]\,, \text{якщо } n - \text{парне}. \end{cases}$$

Довжина циліндра $\Delta_{a_1a_2\ldots a_n}$ знаходиться за формулою[**1**]:

$$|\Delta_{a_1a_2\ldots a_n}| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}, \tag{3}$$

де q_n і q_{n-1} — знаменники підхідних дробів довільного числа даного циліндра, що визначаються рекурентно: $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$, $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Нехай I — множина ірраціональних чисел, $a_{-1} = 0$, $a_0 = 0$. Означимо функцію рівностями:

$$F(x) = \begin{cases} [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_i - a_{i-1}, \ldots], & \text{якщо } x \in I,\ a_i - a_{i-1} > 0\ \forall i \in N;\\ [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_{m-1} + 1], & \text{якщо } a_i - a_{i-1} > 0\ \forall i = \overline{1, m} \text{ і}\\ & a_{m+1} - a_m \leq 0;\\ [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_{m-1}], & \text{якщо } x = [a_1, \ldots, a_m],\ a_i - a_{i-1} > 0\\ & \forall i = \overline{1, m},\ a_m - a_{m-1} > 1;\\ [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_{m-1} - a_{m-2} + 1], & \text{якщо } x = [a_1, \ldots, a_m],\ a_i - a_{i-1} > 0\\ & \forall i = \overline{1, m},\ a_m - a_{m-1} = 1;\\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що функція $F(x)$ встановлює взаємно однозначу відповідність між множинами $[0; 1] \cap I$ і $E_N = \{x :\ x = [a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots];\ a_{k-1} < a_k\ \forall k = 2, 3, \ldots\}$. При цьому множина E_N є ніде не щільною. Використовуючи ідеї з [**1**] і [**10**], легко довести, що міра Лебега множини E_N дорівнює нулю. Дослідимо властивості функції $F(x)$.

Лема 1. *Функція $F(x)$ є сталою на всіх суміжних до множини E_N інтервалах.*

Доведення. Інтервал I_n, що має кінці $[a_1, \ldots, a_m - \ 1, a_m]$ і $[a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m]$, де $a_{k+1} - a_k > 0$, $k = \overline{1, m-2}$, і $a_m - a_{m-1} > 1$, є суміжним до множини E_N. Кожна точка x_0 з інтервалу I_n має ланцюгове зображення у вигляді

$$x_0 = [a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m - 1, a_{m+1}(x_0), a_{m+2}(x_0), \ldots],$$

де $1 \leq a_{m+1}(x_0) < a_m$. Тому для довільного $x_0 \in I_n$ має місце рівність:

$$F(x_0) = [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_{m-1}],$$

таке ж значення функція $F(x)$ приймає і на кінцях інтервалу I_n. Таким чином, значення $F(x_0)$ залежить від перших m символів числа x_0 і функція $F(x)$ є сталою на інтервалі I_n. □

Лема 2. *Функція $F(x)$ є неспадною на відрізку* $[0, 1]$.

Доведення. Покажемо, що для довільних двох точок x_1 і x_2 з відрізку $[0, 1]$, таких що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Нехай точки x_1 і x_2 належать множині E_N, і не є кінцями суміжних інтервалів. Тоді $x_1, x_2 \in I \cap E_N$. Отже, існує число m таке, що $a_i(x_1) = a_i(x_2)$, $i < m$, і $a_m(x_1) \neq a_m(x_2)$. Якщо m - парне, то $a_m(x_1) < a_m(x_2)$ і $F(x_1) < F(x_2)$; якщо m - непарне, то $a_m(x_1) > a_m(x_2)$ і $F(x_1) < F(x_2)$.

Нехай тепер обидві точки x_1 і x_2 є кінцями суміжних інтервалів. Якщо x_1 і x_2 - кінці одного інтервалу, то з доведення леми 1 випливає, що $F(x_1) = F(x_2)$. Якщо x_1 і x_2 - кінці різних суміжних інтервалів, то оскільки функція $F(x)$ набуває однакових значень на кінцях одного інтервалу I_n, можна розглядати лише ті x_1 і x_2, різниця за модулем останніх двох елементів ланцюгового зображення яких більша за одиницю. Якщо m — число, таке що $a_i(x_1) = a_i(x_2)$ при $i < m$ і $a_m(x_1) \neq a_m(x_2)$, то m - парне, $a_m(x_1) < a_m(x_2)$ і $F(x_1) < F(x_2)$. Якщо m - непарне, то аналогічно $F(x_1) < F(x_2)$. Якщо всі n елементів ланцюгового зображення числа x_1 співпадають з першими n елементами x_2, то n - парне і $F(x_1) < F(x_2)$; якщо ж всі l елементів x_2 співпадають з першими l елементами x_1, то l — непарне і $F(x_1) < F(x_2)$.

Якщо x_1 є кінцем деякого інтервалу і має вигляд $x_1 = [a_1, \ldots, a_m]$, $a_m - a_{m-1} > 1$, а $x_2 \in E_N$ і не є кінцем інтервалу, то за умови співпадання перших $l < m$ елементів, аналогічно попереднім випадкам, $F(x_1) < F(x_2)$. Якщо всі m елементів x_1 співпадають з першими m елементами x_2, то m - парне, і

$$F(x_1) = [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_{m-1}] < F(x_2) = [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_{m-1}, \ldots].$$

Аналогічно доводиться випадок, коли x_2 - кінець деякого інтервалу, а x_1 не є кінцем жодного інтервалу.

Випадки, коли точки x_1, x_2 є внутрішніми точками інтервалів I_n, зводяться до попередніх, оскільки за лемою 1 функція $F(x)$ є сталою на кожному інтервалі I_n (включаючи його кінці). $\square$

Лема 3. *Функція $F(x)$ є неперервною на відрізку* $[0, 1]$.

Доведення. Оскільки $F(x)$ є сталою на всіх суміжних до множини E_N інтервалах I_n, то вона неперервна у всіх внутрішніх точках інтервалів I_n. Залишається довести неперервність на множині E_N.

Нехай x_0 — ірраціональна точка множини E_N, тоді $x_0 = [a_1, a_2, \ldots]$, $a_{k+1} > a_k$ $\forall k = 1, 2, \ldots$. Розглянемо довільну послідовність (x_n), збіжну до x_0. Тоді x_n можна представити у вигляді

$$x_n = [a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}(x_n), a_{m+2}(x_n), \ldots],$$

де перші m елементів співпадають з елементами числа x_0 і $m \to \infty$ при $x_n \to x_0$. Звідси

$$F(x_n) \to [a_1, a_2 - a_1, \ldots] = F(x_0)$$

при $n \to \infty$ і функція $F(x)$ неперервна в точці x_0.

Нехай x_0 — раціональна точка множини E_N, тоді $x_0 = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$, де $a_m - a_{m-1} = 1$ або $a_m - a_{m-1} > 1$. При $a_m - a_{m-1} = 1$ для непарного m точка x_0 буде лівим кінцем деякого суміжного до E_N інтервалу, тому достатньо довести неперервність зліва.

Розглянемо довільну послідовність (x_n), збіжну до x_0, $x_n < x_0$ $\forall n \in N$. Починаючи з деякого номера n, $x_n = [a_1, a_2, \ldots, a_m, r_m]$, причому $r_m \to \infty$ при $x_n \to x_0$, звідки випливає, що $a_{m+1}(x_n) \to \infty$ і

$$F(x_n) = [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_{m-1} - a_{m-2}, 1, \ldots] \to$$
$$\to [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_{m-1} - a_{m-2} + 1] = F(x_0)$$

при $n \to \infty$. Для парного m при $a_m - a_{m-1} = 1$ доведення аналогічне (x_0 тоді буде правим кінцем інтервалу).

За умови $a_m - a_{m-1} > 1$ для непарного m точка x_0 буде лівим кінцем інтервалу I_n. Покажемо неперервність зліва в точці x_0. Розглянемо довільну послідовність (x_n), збіжну до x_0, $x_n < x_0$ $\forall n = 1, 2, \ldots$. Починаючи з деякого номера, члени послідовності мають вигляд $x_n = [a_1, a_2, \ldots, a_m, r_m]$, і при $x_n \to x_0$ маємо $r_m \to \infty$ і $a_{m+1}(x_n) \to \infty$, звідки випливає, що

$$F(x_n) \to [a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_m - a_{m-1}] = F(x_0).$$

Для парного m у випадку $a_m - a_{m-1} > 1$ доведення аналогічне.

Крім того, очевидно, що

$$\lim_{x \to 0+} F(x) = F(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 1-0} F(x) = F(1) = 1.$$

Отже, функція $F(x)$ є неперервною на відрізку $[0; 1]$. □

Нагадаємо, що функція розподілу називається чисто сингулярною, якщо вона неперервна і її похідна майже скрізь в смислі міри Лебега рівна нулю.

Наслідком лем 1 — 3 є наступне твердження:

Теорема 1. *Функція $F(x)$ є сингулярною функцією розподілу на відрізку $[0, 1]$, множиною точок росту якої є множина E_N.*

Очевидно, що розглядувана функція $F(x)$ задає деяку неперервну ймовірнісну міру μ, зосереджену на множині E_N, і відображає кожну множину E_M у множину $E'_M = \{x : a_k(x) \leq M \quad \forall k \in N\}$.

Теорема 2. *Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини E дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай $x = [a_1, a_2, \ldots] \in E_M$, $q'_k = q_k(a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_k - a_{k-1})$. Оскільки міра Лебега

$$\lambda(\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_k}) = \frac{1}{q_k(q_k + q_{k-1})},$$

а значення $\mu(\Delta_{a_1,a_2,\ldots,a_k})$ дорівнює мірі Лебега відрізка з кінцями $[a_1, a_2-a_1, \ldots, a_k - a_{k-1}]$ і $[a_1, a_2-a_1, \ldots, a_k - a_{k-1}+1]$, то

$$\mu(\Delta_{a_1,a_2,\ldots,a_k}) = \frac{1}{q'_k(q'_k+q'_{k-1})}.$$

Тоді

$$\frac{\ln\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k})}{\ln\lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k})} = \frac{\ln q'_k(q'_k+q'_{k-1})}{\ln q_k(q_k+q_{k-1})} = \frac{\ln q'_k}{\ln q_k + \ln(q_k+q_{k-1})} + \\ + \frac{\ln(q'_k+q'_{k-1})}{\ln q_k + \ln(q_k+q_{k-1})} < \frac{2\ln q'_k}{\ln q_k} + \frac{\ln 2}{\ln q_k}.$$

Знайдемо границю, використовуючи відому з **[1]** нерівність

$$a_1a_2\ldots a_k < q_k(a_1,a_2,\ldots,a_k) < (a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1):$$

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln q'_k}{\ln q_k} \le \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln((a_1+1)(a_2-a_1+1)\ldots(a_k-a_{k-1}+1))}{\ln(a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_k)} = \\ = \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln(a_k-a_{k-1}+1)}{\ln a_k} \le \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln(M+1)}{\ln a_k} = 0.$$

Оскільки $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\frac{\ln q'_k}{\ln q_k} = 0$ і $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\frac{\ln 2}{\ln q_k} = 0$, то

$$\varlimsup_{k\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k})}{\ln\lambda(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k})} = 0. \tag{4}$$

З (4) випливає, що для будь-якого $\delta > 0$ існує номер $k_0 = k_0(x)$ такий, що для будь-якого $k > k_0$ $\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k}) \ge \lambda^\delta(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k})$.

Нехай

$$E_\eta = \{x:\ x\in E_M \text{ і } \mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k}) \ge \eta \text{ або } \mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k}) \ge \lambda^\delta(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k}) \quad \forall k=1,2,\ldots\},$$

де $\eta > 0$ і пробігає зчисленну множину значень, як завгодно близьких до нуля. Очевидно, що E_η розширюється із зменшенням η. Більше того, для будь-якого $x \in E_M$ можна вказати $\eta = \mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_{k_0}}) > 0$. При цьому якщо $\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k}) < \eta$, то $k > k_0$ і $\mu(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k}) \ge \lambda^\delta(\Delta_{a_1a_2\ldots a_k})$, тобто $x\in E_\eta$. Отже, $\lim E_\eta = \bigcup\limits_\eta E_\eta = E_M$.

Нехай $0 < \eta_1 < \eta$. Розглянемо μ — η_1-покриття циліндричними відрізками Δ_i множини E_η ($\mu(\Delta_i) \le \eta_1$). Тоді

$$\mu_{\eta_1}(E_\eta) = \inf_{\substack{\Delta_i \text{ - циліндричний} \\ \text{відрізок} \\ \bigcup\limits_i \Delta_i \supseteq E_\eta \\ \mu(\Delta_i)\le\eta_1}} \sum_{i=1}^\infty \mu(\Delta_i) \ge \inf_{\substack{\Delta_i \text{ - циліндричний} \\ \text{відрізок} \\ \bigcup\limits_i \Delta_i \supseteq E_\eta \\ \lambda^\delta(\Delta_i)\le\eta_1}} \sum_{i=1}^\infty \lambda^\delta(\Delta_i) \ge$$

$$\geq \inf_{\substack{F_i \text{ - замкнений} \\ \text{відрізок} \\ \bigcup_i F_i \supseteq E_\eta \\ \lambda^\delta(F_i) \leq \eta_1}} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^\delta(F_i) = \lambda_{\delta,\eta_1}(E_\eta).$$

Відомо [**1**], що $\lambda(E'_M) = 0$. Враховуючи той факт, що використання в якості класу покриттів циліндричних відрізків дає вірне значення міри Лебега, отримуємо:

$$\lim_{\eta_1 \downarrow 0} \mu_{\eta_1}(E_\eta) = \mu(E_\eta) \leq \mu(E_M) = \lambda(E'_M) = 0,$$

звідки, враховуючи нерівності для інфімумів, отримуємо: $\lambda_\delta(E_\eta) = \lim_{\eta_1 \downarrow 0} \lambda_{\delta,\eta_1} = 0$ і $\alpha_0(E_\eta) < \delta$ для будь-якого $\eta > 0$. Таким чином, розмірність Хаусдорфа-Безиковича

$$\alpha_0(E_M) = \alpha_0(\bigcup_\eta E_\eta) = \sup_\eta \alpha_0(E_\eta) \leq \delta$$

для будь-якого $\delta > 0$, тобто $\alpha_0(E_M) = 0$. Тоді для множини E

$$\alpha_0(E) = \alpha_0(\bigcup_M E_M) = \sup_M \alpha_0(E_M) = 0.$$

□

Відмітимо, що за класифікацією фрактальних множин, наведеній в [**10**], множини E_M і E є аномально фрактальними.

Література

[1] *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. — М.: Наука, 1978. —116с.

[2] *Jarnik V.* Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximation // Prace Mat.-Fiz., Warsaw. — 1928. —36. — P.91-106.

[3] *Good J.T.* The fractional dimensional theory of continued fractions // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1941. — 37. — P.244-246.

[4] *Kinney J.R., Pitcher T.S.* The dimension of some sets defined in terms of f-expansions // Z. Wahrscheinlihkeitstheorie verw. Geb. — 1966. — 4. — P.293-315.

[5] *Hirst K.E.* Continued fractions with sequences of partial quotients // Proc. AMS. - Vol. 38, No. 2. - 1973. - P.221-227.

[6] *Ramharter G.* Some metrical properties of continued fractions // Mathematika. — 1983. — 30. — P.117-132.

[7] *Cusick T.W.* Hausdorff dimension of sets of continued fractions // Quan. J. Math. Oxford. — (2), 41. — 1990. — P.277-286.

[8] *Hensley D.* Continued Fraction Cantor sets, Hausdorff Dimension and Functional Analysis // Journal of number theory. - 1992. -40. - P. 336-358.

[9] *Ganessa Moorthy C.* A problem of Good on Hausdorff dimension // Mathematika. - 39. - 1992. - P. 244-246.

[10] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296с.