Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 190–203.

УДК 519.21

Деякі метричні співвідношення, породжені Ф-зображенням дійсних чисел

Н. М. Василенко

(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена геометричним аспектам подання чисел неповними сумами ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{u_i}$, де u_i — i−ий член класичної послідовності Фібоначчі (Φ−зображенню). Вивчається специфіка перекриттів циліндричних множин, що відповідають Φ−зображенню чисел, розв'язуються супутні метричні задачі.

Abstract. We study the geometry of representation of real numbers by incomplete sums of the series $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{u_i}$, where u_i is the i-th term of the classical Fibonacci sequence (F-representation). The features of overlaps of the cylindrical sets corresponding to the F-representation of the numbers are described and the related metric problems are solved.

Нехай $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — класична послідовність Фібоначчі, тобто $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $n \geq 1$. Відомо [**1**, ст. 150], [**5**], що довільне ціле додатне число a можна подати у вигляді

$$a = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i u_i, \quad \text{де} \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\}, i = \overline{0, k},$$

а також те, що сума S ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n} + r_n = S_n + r_n$ є числом ірраціональним і наближено рівним $2,35988566$ [**2**].

Доведено [**4**], що довільне дійсне число $x \in [0, S]$ можна подати у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} = \frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} + \cdots + \frac{f_k}{u_k} + \cdots, \tag{1}$$

де $f_k \in \{0, 1\}$, $k \in N$. Таке подання числа називається його Φ-*розкладом* (Φ-*поданням*). Символічно це записується $x = \Delta_{f_1 \ldots f_k \ldots}$, де f_i залежить від x, тобто $f_i = f_i(x)$ і називається Φ-*зображенням* цього числа.

Нагадаємо, що ***циліндричною множиною рангу*** k ***з основою*** $(c_1 c_2 \ldots c_k)$, $c_i \in \{0, 1\}$, що відповідає розкладу (1), називається множина $\Delta_{c_1 \ldots c_k}$ всіх чисел x, які можуть бути представлені у вигляді (1) і при цьому $f_i = c_i, i = \overline{1,k}$, тобто

$$\Delta_{c_1\ldots c_k} = \left\{ x : x = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{u_i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{f_i}{u_i},\ f_i \in \{0;1\} \right\}.$$

У роботі [**4**] вивчалися властивості циліндричних множин, які відповідають Ф-зображенню чисел. Метою даної роботи є дослідження специфіки перекриттів циліндричних множин. Результати дослідження мають бути корисними для розвитку метричної та ймовірнісної теорії дійсних чисел. Зокрема, при вивченні розподілу випадкової величини

$$\xi = \Delta_{\eta_1\ldots\eta_k\ldots},$$

де
1) η_k — послідовність незалежних випадкових величин (далі в.в.) з наперед заданими розподілами;
2) η_k — послідовність в.в., що утворюють ланцюг Маркова.
Непростою, але цікавою, є задача про розподіл Ф-символів рівномірно розподіленої на $[0, S]$ в.в. ξ.

Далі будуть корисними наступні нерівності.
Для довільних натуральних k і n :

$$\frac{1}{u_{2k-1}} > \frac{1}{u_{2k}} + \frac{1}{u_{2k+1}}; \tag{2}$$

$$\frac{1}{u_{2k}} < \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{1}{u_{2k+2}}; \tag{3}$$

$$\frac{1}{u_n} > \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+3}}; \tag{4}$$

$$\frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+3}}; \tag{5}$$

$$\frac{1}{u_n} < r_n; \tag{6}$$

$$\frac{1}{u_{2k-1}} > r_{2k}; \tag{7}$$

$$\frac{1}{u_{2k}} < r_{2k+1}; \tag{8}$$

$$\frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_{n+1}} + r_{n+2}. \tag{9}$$

Перекриття циліндричних множин k-го рангу $\Delta_{\underbrace{01\ldots1}_{k}} \bigcap \Delta_{\underbrace{10\ldots0}_{k}}$ будемо позначати $\Pi^k\left(01\ldots1, 10\ldots0\right)$, $k \in N$. Перекриття циліндричних множин $\Delta_{c_1\ldots c_n\underbrace{01\ldots1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_n\underbrace{10\ldots0}_{m}}$ рангу $(n + m)$ позначатимемо $\Pi^{n+m}_{c_1\ldots c_n}\left(01\ldots1, 10\ldots0\right)$.

Властивість 1. [**4**] *Циліндрична множина рангу k з основою $(c_1 \dots c_k)$, $c_k \in \{0,1\}$, є відрізком* $\Delta_{c_1 \dots c_k} \equiv [\Delta_{c_1 \dots c_k 00 \dots}; \Delta_{c_1 \dots c_k 11 \dots}]$.

Інтервал з тими ж кінцями позначатимемо через $\nabla_{c_1 \dots c_k}$.

Властивість 2. [**4**] *Довжина циліндричної множини k-го рангу*

$$|\Delta_{c_1 \dots c_k}| = r_k \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Властивість 3. [**4**] *Циліндричні множини* $\Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{m+k}}$ *і* $\Delta_{c_1 \dots c_m (1-\alpha_{m+1}) \dots (1-\alpha_{m+k})}$ *симетричні відносно середини* $\Delta_{c_1 \dots c_m}$, *де* $c_i, \alpha_j \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{m+1, m+k}$.

Наслідок. [**4**] *Циліндричні множини* $\Delta_{c_1 \dots c_k}$ *і* $\Delta_{(1-c_1) \dots (1-c_k)}$ *симетричні відносно середини відрізка* $[0, S]$, *де* $c_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,k}$.

Властивість 4. *Кожні дві циліндричні множини $(k+1)-$го рангу, які належать одній циліндричній множині $k-$го рангу перекриваються, причому*

$$\left| \Delta_{c_1 \dots c_k 0} \bigcap \Delta_{c_1 \dots c_k 1} \right| = r_{k+1} - \frac{1}{u_{k+1}}.$$

Властивість 5. *Для циліндричних множин рангу* $(2k+1)$, $k \geq 1$:

$$\Pi^{2k+1}_{c_1 \dots c_{2k-1}}(00, 10) = \left[\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1000 \dots}; \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0011 \dots}\right],$$
$$\Pi^{2k+1}_{c_1 \dots c_{2k-1}}(01, 11) = \left[\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1100 \dots}; \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0111 \dots}\right],$$

причому $\left|\Pi^{2k+1}_{c_1 \dots c_{2k-1}}(00, 10)\right| = \left|\Pi^{2k+1}_{c_1 \dots c_{2k-1}}(01, 11)\right| = r_{2k+1} - \frac{1}{u_{2k}}$.

Доведення. Враховуючи властивість 3, доведення досить провести для першої рівності. Як відомо (див. властивість 1)

$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 00} = \left[\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0000 \dots}; \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0011 \dots}\right] = \left[\sum_{i=1}^{2k-1} \tfrac{c_i}{u_i}; \sum_{i=1}^{2k-1} \tfrac{c_i}{u_i} + r_{2k+1}\right],$$
$$\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 10} = \left[\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1000 \dots}; \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1011 \dots}\right] = \left[\sum_{i=1}^{2k-1} \tfrac{c_i}{u_i} + \tfrac{1}{u_{2k}}; \sum_{i=1}^{2k-1} \tfrac{c_i}{u_i} + \tfrac{1}{u_{2k}} + r_{2k+1}\right].$$

Для того, щоб з'ясувати чи є непорожнім переріз, розглянемо різницю

$$\sup \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 00} - \inf \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 10} = \sum_{i=1}^{2k-1} \frac{c_i}{u_i} + r_{2k+1} - \sum_{i=1}^{2k-1} \frac{c_i}{u_i} - \frac{1}{u_{2k}} = r_{2k+1} - \frac{1}{u_{2k}} > 0,$$

оскільки має місце нерівність (8).

Отже, циліндричні множини $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 00}$ і $\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 10}$ перетинаються, причому

$$\left|\Pi^{2k+1}_{c_1 \dots c_{2k-1}}(00, 10)\right| = \left|\left[\Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 1000 \dots}; \Delta_{c_1 \dots c_{2k-1} 0011 \dots}\right]\right| = r_{2k+1} - \frac{1}{u_{2k}}.$$

$\square$

Властивість 6. *Для циліндричних множин рангу* $(2k+1)$, $k \in N$:

$$\Pi^{2k+1}_{c_1\dots c_{2k-2}}(010,100) = \left[\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}10000\dots}; \Delta_{c_1\dots c_{2k-2}01011\dots}\right],$$
$$\Pi^{2k+1}_{c_1\dots c_{2k-2}}(011,101) = \left[\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}10100\dots}; \Delta_{c_1\dots c_{2k-2}01111\dots}\right],$$

причому $\left|\Pi^{2k+1}_{c_1\dots c_{2k-2}}(010,100)\right| = \left|\Pi^{2k+1}_{c_1\dots c_{2k-2}}(011,101)\right| = r_{2k+1} - \frac{1}{u_{2k-1}} + \frac{1}{u_{2k}}$.

Доведення. Враховуючи властивість 3, доведення досить провести для першої рівності. Як відомо (див. властивість 1)

$$\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}010} = \left[\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}01000\dots}; \Delta_{c_1\dots c_{2k-2}01011\dots}\right] = \left[\sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k}}; \sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k}} + r_{2k+1}\right],$$
$$\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}100} = \left[\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}10000\dots}; \Delta_{c_1\dots c_{2k-2}10011\dots}\right] = \left[\sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-1}}; \sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-1}} + r_{2k+1}\right].$$

З'ясуємо чи перетинаються циліндричні множини $\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}010}$ і $\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}100}$. Для цього розглянемо різницю

$$\sup\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}010} - \inf\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}100} = \sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k}} + r_{2k+1} - \sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} - \frac{1}{u_{2k-1}} =$$
$$= r_{2k+1} - \frac{1}{u_{2k-1}} + \frac{1}{u_{2k}}.$$

Оскільки за нерівністю (9)

$$\frac{1}{u_{2k-1}} < \frac{1}{u_{2k}} + \sum_{i=2k+2}^{\infty}\frac{1}{u_i},$$

то

$$\sup\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}010} - \inf\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}100} > 0.$$

Отже, циліндричні множини $\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}010}$ і $\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}100}$ перетинаються, причому

$$\left|\Pi^{2k+1}_{c_1\dots c_{2k-2}}(010,100)\right| = \left|\left[\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}10000\dots}; \Delta_{c_1\dots c_{2k-2}01011\dots}\right]\right| = r_{2k+1} - \frac{1}{u_{2k-1}} + \frac{1}{u_{2k}}.$$

□

Властивість 7. *Для циліндричних множин рангу* $2k(k \geq 1)$:

$$\Pi^{2k}_{c_1\dots c_{2k-2}}(00,10) = \emptyset, \quad \Pi^{2k}_{c_1\dots c_{2k-2}}(01,11) = \emptyset.$$

Доведення. Для доведення скористаємося тими ж міркуваннями, що й при доведенні властивості 5. Розглянемо

$$\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}00} = \left[\sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i}; \sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + r_{2k}\right],$$
$$\Delta_{c_1\dots c_{2k-2}10} = \left[\sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-1}}; \sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-1}} + r_{2k}\right].$$

Оскільки

$$\sup\{\Delta_{c_1...c_{2k-2}00}\} - \inf\{\Delta_{c_1...c_{2k-2}10}\} = \sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} + r_{2k} - \sum_{i=1}^{2k-2}\frac{c_i}{u_i} - \frac{1}{u_{2k-1}} = r_{2k} - \frac{1}{u_{2k-1}} < 0$$

(див. (7)), то $\Pi_{c_1...c_{2k-2}}(00,10) = \emptyset$.

З властивості 3 також слідує, що $\Pi_{c_1...c_{2k-2}}(01,11) = \emptyset$. $\square$

Властивість 8. *Для циліндричних множин рангу $2k (k \geq 2)$:*

$$\Pi^{2k}_{c_1...c_{2k-3}}(010,100) = \left[\Delta_{c_1...c_{2k-3}10000...}; \Delta_{c_1...c_{2k-3}01011...}\right],$$

$$\Pi^{2k}_{c_1...c_{2k-3}}(011,101) = \left[\Delta_{c_1...c_{2k-3}10100...}; \Delta_{c_1...c_{2k-3}01111...}\right],$$

причому $\left|\Pi^{2k}_{c_1...c_{2k-3}}(010,100)\right| = \left|\Pi^{2k}_{c_1...c_{2k-3}}(011,101)\right| = r_{2k} + \dfrac{1}{u_{2k-1}} - \dfrac{1}{u_{2k-2}}$.

Доведення. Враховуючи властивість 3, доведення досить провести для першої рівності. Відомо, що

$$\Delta_{c_1...c_{2k-3}010} =$$
$$= \left[\Delta_{c_1...c_{2k-3}01000...}; \Delta_{c_1...c_{2k-3}01011...}\right] = \left[\sum_{i=1}^{2k-3}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-1}}; \sum_{i=1}^{2k-3}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-1}} + r_{2k}\right],$$

$$\Delta_{c_1...c_{2k-3}100} =$$
$$= \left[\Delta_{c_1...c_{2k-3}10000...}; \Delta_{c_1...c_{2k-3}10011...}\right] = \left[\sum_{i=1}^{2k-3}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-2}}; \sum_{i=1}^{2k-3}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-2}} + r_{2k}\right].$$

Розглянемо різницю

$$\sup\{\Delta_{c_1...c_{2k-3}010}\} - \inf\{\Delta_{c_1...c_{2k-3}100}\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2k-3}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{2k-1}} + r_{2k} - \sum_{i=1}^{2k-3}\frac{c_i}{u_i} - \frac{1}{u_{2k-2}} = \frac{1}{u_{2k-1}} + r_{2k} - \frac{1}{u_{2k-2}} > 0,$$

оскільки має місце нерівність (9).

Отже, циліндричні множини $\Delta_{c_1...c_{2k-3}010}$ і $\Delta_{c_1...c_{2k-3}100}$ мають непорожній переріз. Причому,

$$\left|\Pi^{2k}_{c_1...c_{2k-3}}(010,100)\right| = \left|\left[\Delta_{c_1...c_{2k-3}10000...}; \Delta_{c_1...c_{2k-3}01011...}\right]\right| = \frac{1}{u_{2k-1}} + r_{2k} - \frac{1}{u_{2k-2}}.$$

$\square$

Теорема 1. *Нехай маємо циліндричні множини* $\Delta_{c_1...c_n\underbrace{01...1}_{m}}$ *і* $\Delta_{c_1...c_n\underbrace{10...0}_{m}}$. *Якщо $n = 2k (k \in N)$, то*

1) *для $m = 1,2,3$*

$$\Delta_{c_1...c_n0}\bigcap\Delta_{c_1...c_n1} = \Delta_{c_1...c_n01}\bigcap\Delta_{c_1...c_n10} = \Delta_{c_1...c_n011}\bigcap\Delta_{c_1...c_n100} =$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}}; \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{u_i} + r_{n+1}\right];$$

2) *для* $m = 4$

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n 0111} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n 1000} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + r_{n+1} - r_{n+4}; \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}} + r_{n+4} \right],$$

причому

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n 0111} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n 1000} \neq \Delta_{c_1 \ldots c_n 0} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n 1};$$

3) *для* $m \geq 5$

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01 \ldots 1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10 \ldots 0}_{m}} = \emptyset.$$

Якщо $n = 2k - 1 (k \in N)$, *то*

1) *для* $m = 1, 2$

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n 0} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n 1} = \Delta_{c_1 \ldots c_n 01} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n 10} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}}; \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + r_{n+1} \right];$$

2) *для* $m = 3, 4$

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01 \ldots 1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10 \ldots 0}_{m}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + r_{n+1} - r_{n+m}; \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}} + r_{n+m} \right],$$

причому

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01 \ldots 1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10 \ldots 0}_{m}} \neq \Delta_{c_1 \ldots c_n 0} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n 1};$$

3) *для* $m \geq 5$

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01 \ldots 1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10 \ldots 0}_{m}} = \emptyset.$$

Доведення. Врахувавши нерівність (6), одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}} < \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + r_{n+1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + r_n.$$

Звідки

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n 0} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n 1} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}}; \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + r_{n+1} \right].$$

З'ясуємо, для яких $m \in N$ має місце рівність

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01 \ldots 1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10 \ldots 0}_{m}} = \Delta_{c_1 \ldots c_n 0} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n 1}. \tag{10}$$

Розглянемо циліндричні множини рангу $(n + m), n, m \in N$:

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01 \ldots 1}_{m}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + r_{n+1} - r_{n+m}; \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + r_{n+1} \right],$$

$$\Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10 \ldots 0}_{m}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}}; \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{u_i} + \frac{1}{u_{n+1}} + r_{n+m} \right].$$

Для виконання рівності (10) необхідно і достатньо (див. рис. 1), щоб

$$\inf \Delta_{c_1\ldots c_n\underbrace{01\ldots1}_{m}} < \inf \Delta_{c_1\ldots c_n1} \Longleftrightarrow \sup \Delta_{c_1\ldots c_n\underbrace{10\ldots0}_{m}} > \sup \Delta_{c_1\ldots c_n0},$$

що рівносильно нерівності

$$r_{n+1} - r_{n+m} < \frac{1}{u_{n+1}}. \tag{11}$$

Для $n = 2k$ нерівність (11) набуває вигляду:

$$\frac{1}{u_{2k+1}} > r_{2k+1} - r_{2k+m}. \tag{12}$$

Оскільки $\frac{1}{u_{2k+1}} > \frac{1}{u_{2k+2}}$ і $\frac{1}{u_{2k+1}} > \frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+3}}$ (див. (2)), то нерівність (12) має місце для $m = 2, 3$.

При $n = 2k-1$ нерівність (11) набуває вигляду:

$$\frac{1}{u_{2k}} > r_{2k} - r_{2k-1+m}. \tag{13}$$

Нерівність (13) має місце лише для $m = 2$, оскільки $\frac{1}{u_{2k}} > \frac{1}{u_{2k+1}}$, а $\frac{1}{u_{2k}} < \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{1}{u_{2k+2}}$ (див. (3)).

Отже, для $n = 2k$

$$\Delta_{c_1\ldots c_n0} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_n1} = \Delta_{c_1\ldots c_n01} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_n10} = \Delta_{c_1\ldots c_n011} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_n100}.$$

Для $n = 2k-1$

$$\Delta_{c_1\ldots c_n0} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_n1} = \Delta_{c_1\ldots c_n01} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_n10}.$$

З'ясуємо для яких $m \in N$

$$\Delta_{c_1\ldots c_n0} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_n1} \neq \Delta_{c_1\ldots c_n\underbrace{01\ldots1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1\ldots c_n\underbrace{10\ldots0}_{m}} \neq \emptyset. \tag{14}$$

Для виконання умов системи (14) необхідно, щоб (див. рис. 2):

$$\inf \Delta_{c_1\ldots c_n1} < \inf \Delta_{c_1\ldots c_n\underbrace{01\ldots1}_{m}} < \sup \Delta_{c_1\ldots c_n\underbrace{10\ldots0}_{m}},$$

що рівносильно виконанню системи нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u_{n+1}} < r_{n+1} - r_{n+m}, \\[2mm] r_{n+1} - r_{n+m} < \dfrac{1}{u_{n+1}} + r_{n+m}. \end{cases} \tag{15}$$

Якщо $n = 2k$, то система нерівностей (15) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u_{2k+1}} < r_{2k+1} - r_{2k+m}, \\[2mm] r_{2k+1} - r_{2k+m} < \dfrac{1}{u_{2k+1}} + r_{2k+m}. \end{cases} \tag{16}$$

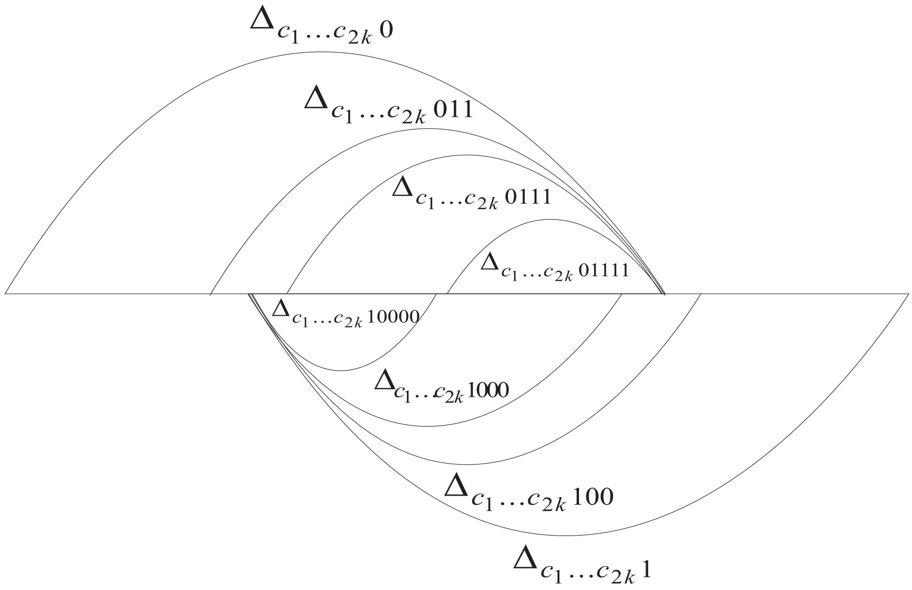

Рис. 1

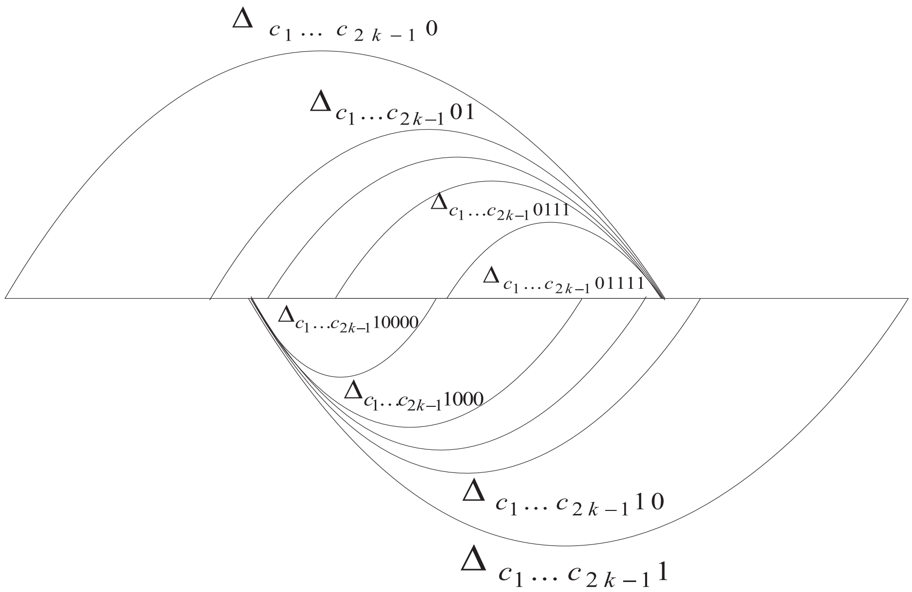

Рис. 2

Оскільки за нерівністю (5)

$$\frac{1}{u_{2k+1}} < \frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+3}} + \frac{1}{u_{2k+4}} = r_{2k+1} - r_{2k+4},$$

то перша нерівність системи (16) матиме місце для довільного $m \geq 4, m \in N$.

Перепишемо другу нерівність системи (16) у вигляді:

$$\frac{1}{u_{2k+1}} > (r_{2k+1} - r_{2k+m}) - r_{2k+m}.$$

Покажемо, що вона виконується лише для $m = 4$.

Нехай $m = 4$, матимемо:

$$\frac{1}{u_{2k+1}} > \frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+3}} + \frac{1}{u_{2k+4}} - r_{2k+4}.$$

Остання нерівність має місце для довільного $k \in N$, оскільки

$$\frac{1}{u_{2k+1}} > \frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+3}}, \quad \frac{1}{u_{2k+4}} < r_{2k+4}$$

(див. (2) та (6)).

Таким чином, система нерівностей (16) виконується лише для $m = 4$. А, отже, має місце твердження 2) теореми 1 для випадку $n = 2k$.

Покажемо, що для $m \geq 5$ знак другої нерівності системи (16) зміниться на протилежний.

Нехай $m = 5$. Доведемо, що для довільного $k \in N$ має місце нерівність

$$r_{2k+1} - r_{2k+5} > \frac{1}{u_{2k+1}} + r_{2k+5}. \tag{17}$$

Додамо до обох частин останньої нерівності $\frac{1}{u_{2k+5}}$, одержимо рівносильну їй нерівність

$$\sum_{i=2k+2}^{2k+4} \frac{1}{u_i} + \frac{2}{u_{2k+5}} > \frac{1}{u_{2k+1}} + r_{2k+4}. \tag{18}$$

Доведено (див. (7)), що $\dfrac{1}{u_{2k+3}} > r_{2k+4}$ для довільного $k \in N$. Покажемо, що для довільного $k \in N$

$$\frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+4}} + \frac{2}{u_{2k+5}} > \frac{1}{u_{2k+1}}. \tag{19}$$

Розглянемо різницю

$$\frac{2}{u_{2k+5}} + \left(\frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+4}} - \frac{1}{u_{2k+1}}\right) = \frac{2}{u_{2k+5}} + \frac{u_{2k+2}u_{2k+1} - u_{2k+4}u_{2k}}{u_{2k+1}u_{2k+2}u_{2k+4}} =$$

$$= \frac{2}{u_{2k+5}} + \frac{-1 - u_{2k}u_{2k+2}}{u_{2k+1}u_{2k+2}u_{2k+4}} = \frac{2u_{2k+1}u_{2k+2}u_{2k+4} - u_{2k+5}(1 + u_{2k}u_{2k+2})}{u_{2k+1}u_{2k+2}u_{2k+4}u_{2k+5}}.$$

Визначимо знак отриманого дробу. Очевидно, що його знаменник набуває додатних значень для довільного $k \in N$. Отже, визначимо знак чисельника. Оскільки для довільного $k \in N$ мають місце нерівності:

$$2u_{2k+4} > u_{2k+5}, \quad u_{2k+1}u_{2k+2} > u_{2k}u_{2k+2} + 1,$$

то $2u_{2k+1}u_{2k+2}u_{2k+4} - u_{2k+5}\left(1 + u_{2k}u_{2k+2}\right) > 0$, тобто чисельник набуває додатних значень для довільного $k \in N$. Тоді має місце нерівність (19), а, отже, і нерівності (18) та (17).

Таким чином, для $m \geq 5$

$$r_{2k+1} - r_{2k+m} > \frac{1}{u_{2k+1}} + r_{2k+m}, \quad \text{тобто} \quad \sup \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10\ldots0}_{m}} < \inf \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01\ldots1}_{m}}.$$

Це означає, що $\Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01\ldots1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10\ldots0}_{m}} = \emptyset$.

Нехай $n = 2k - 1$. Тоді система нерівностей (15) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u_{2k}} < r_{2k} - r_{2k-1+m}, \\ r_{2k} - r_{2k-1+m} < \dfrac{1}{u_{2k}} + r_{2k-1+m}. \end{cases} \tag{20}$$

Оскільки, $\frac{1}{u_{2k}} < \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{1}{u_{2k+2}}$, то перша нерівність системи матиме місце для довільного $m \geq 3, m \in N$.

Другу нерівність системи (20) перепишемо у вигляді:

$$\frac{1}{u_{2k}} > \left(r_{2k} - r_{2k-1+m}\right) - r_{2k-1+m}.$$

Покажемо, що остання нерівність виконується лише для $m = 3, 4$.

Нехай $m = 3$, матимемо:

$$\frac{1}{u_{2k}} > \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{1}{u_{2k+2}} - r_{2k+2}. \tag{21}$$

Оскільки

$$\frac{1}{u_{2k}} > \frac{1}{u_{2k+1}} \quad \text{і} \quad \frac{1}{u_{2k+2}} < r_{2k+2},$$

то нерівність (21) матиме місце для довільного $k \in N$.

Нехай $m = 4$, матимемо:

$$\frac{1}{u_{2k}} > \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+3}} - r_{2k+3}. \tag{22}$$

Оскільки

$$\frac{1}{u_{2k+2}} < r_{2k+3} \quad \text{і} \quad \frac{1}{u_{2k}} > \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{1}{u_{2k+3}}$$

(див. (8) та (4)), то нерівність (22) правильна для довільного $k \in N$.

Отже, система нерівностей (20) має місце для $m = 3, 4$. Тобто має місце твердження 2) теореми 1 для випадку $n = 2k - 1$.

Для $m \geq 5$

$$r_{2k} - r_{2k-1+m} > \frac{1}{u_{2k}} + r_{2k-1+m}.$$

Справді, для $m = 5$ матимемо:

$$r_{2k} - r_{2k+4} > \frac{1}{u_{2k}} + r_{2k+4}. \tag{23}$$

Нерівність (23) має місце для довільного $k \in N$, оскільки нескладно переконатися, що $\frac{1}{u_{2k}} < \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{1}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+4}}$ (див. (3)) і $r_{2k+4} < \frac{1}{u_{2k+3}}$ (див. (7)).
Отже, для $m \geq 5$

$$\sup \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10\ldots0}_{m}} < \inf \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01\ldots1}_{m}}, \quad \text{тобто} \quad \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{01\ldots1}_{m}} \bigcap \Delta_{c_1 \ldots c_n \underbrace{10\ldots0}_{m}} = \emptyset.$$

$\square$

Наслідок. *Мають місце співвідношення:*

$$\Delta_0 \bigcap \Delta_1 = \Delta_{01} \bigcap \Delta_{10} = \Delta_{011} \bigcap \Delta_{100} = \left[\frac{1}{u_1}; r_1\right],$$

$$\Delta_{0111} \bigcap \Delta_{1000} = \left[r_1 - r_4; \frac{1}{u_1} + r_4\right] \neq \Delta_0 \bigcap \Delta_1.$$

При $m \geq 5$

$$\Delta_{\underbrace{01\ldots1}_{m}} \bigcap \Delta_{\underbrace{10\ldots0}_{m}} = \emptyset.$$

Означення 1. ***Порядком перекриття*** двох циліндричних множин одного рангу назвемо число, що дорівнює найменшому рангу циліндричних множин, які утворюють це перекриття.

Через l_k $(k \in N)$ позначимо суму довжин перекриттів $k-$го порядку або відрізків перекриттів $k-$го порядку, які мають порожній переріз з перекриттями циліндричних множин рангу меншого або рівного $(k-1)$.

Нехай k — ранг циліндричних множин $(k \in N)$. Обчислимо для кожного рангу l_k та підрахуємо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k = |\Pi|$.

Для $k = 1$ маємо дві циліндричні множини першого рангу, які утворюють одне перекриття 1−го порядку: $\Delta_0 \bigcap \Delta_1 = \Pi^1(0,1)$.

Зрозуміло, що $l_1 = |\Pi^1(0,1)| = r_1 - \frac{1}{u_1}$ (за властивістю 4).

Для $k = 2$ маємо 2^2 циліндричних множин другого рангу, які мають $2^2 - 1 = 3$ перекриття (див. рис. 3):
$\Delta_{00} \bigcap \Delta_{01} = \Pi_0^2(0,1)$,
$\Delta_{01} \bigcap \Delta_{10} = \Delta_0 \bigcap \Delta_1 = \Pi^2(01,10) = \Pi^1(0,1)$,
$\Delta_{10} \bigcap \Delta_{11} = \Pi_1^2(0,1)$.
Причому,
1) перекриття 2-го порядку мають порожній переріз з перекриттям 1-го порядку і не перетинаються між собою;
2) $|\Pi_0^2(0,1)| = |\Pi_1^2(0,1)| = r_2 - \dfrac{1}{u_2}$ (за властивістю 4).
Тоді $l_2 = |\Pi_0^2(0,1)| + |\Pi_1^2(0,1)| = 2\left(r_2 - \frac{1}{u_2}\right)$.

Позначимо через $\Pi^2 = \Pi_0^2(0,1) \bigcup \Pi_1^2(0,1) \bigcup \Pi^1(0,1)$.

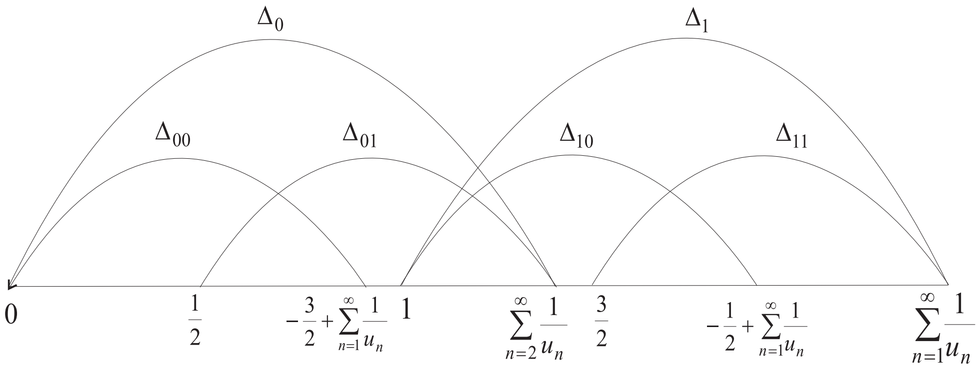

Рис. 3

Для $k=3$ маємо 2^3 циліндричних множин третього рангу, які мають $2^3-1=7$ перекриттів з сусідніми циліндричними множинами і $2^3-2=6$ перекриттів з не сусідніми циліндричними множинами (див. рис. 4). Але тільки 4 перекриття 3−го порядку частково перетинаються з Π^2.

$\Delta_{000}\bigcap\Delta_{001}=\Pi^3_{00}(0,1)$,
$\Delta_{001}\bigcap\Delta_{010}=\Delta_{00}\bigcap\Delta_{01}=\Pi^3_0(01,10)=\Pi^2_0(0,1)$,
$\Delta_{010}\bigcap\Delta_{011}=\Pi^3_{01}(0,1)$,
$\Delta_{011}\bigcap\Delta_{100}=\Delta_{01}\bigcap\Delta_{10}=\Delta_0\bigcap\Delta_1=\Pi^3(011,100)=\Pi^2(01,10)=\Pi^1(0,1)$,
$\Delta_{100}\bigcap\Delta_{101}=\Pi^3_{10}(0,1)$,
$\Delta_{101}\bigcap\Delta_{110}=\Delta_{10}\bigcap\Delta_{11}=\Pi^3_1(01,10)=\Pi^2_1(0,1)$,
$\Delta_{110}\bigcap\Delta_{111}=\Pi^3_{11}(0,1)$.

Причому,
1) $\Pi^3_{cc}(c,1-c)\bigcap\Pi^2\neq\emptyset$, $\Pi^3_{c(1-c)}(c,1-c)\bigcap\Pi^2\neq\emptyset$, $c\in\{0,1\}$;
2) $|\Pi^3_{00}(0,1)|=|\Pi^3_{01}(0,1)|=|\Pi^3_{10}(0,1)|=|\Pi^3_{11}(0,1)|=r_3-\dfrac{1}{u_3}$ (за властивістю 4).

Для перекриттів несусідніх циліндричних множин третього рангу характерно те, що вони повністю належать перекриттям циліндричних множин другого рангу. Тобто,

$\Delta_{000}\bigcap\Delta_{010}=\Pi^3_0(00,10)\subset\Pi^2_0(0,1)$,
$\Delta_{001}\bigcap\Delta_{011}=\Pi^3_0(01,11)\subset\Pi^2_0(0,1)$,
$\Delta_{010}\bigcap\Delta_{100}=\Pi^3(010,100)\subset\Pi^2(01,10)$,
$\Delta_{011}\bigcap\Delta_{101}=\Pi^3(011,101)\subset\Pi^2(01,10)$,
$\Delta_{100}\bigcap\Delta_{110}=\Pi^3_1(00,10)\subset\Pi^2_1(0,1)$,
$\Delta_{101}\bigcap\Delta_{111}=\Pi^3_1(01,11)\subset\Pi^2_1(0,1)$,

причому
$|\Pi^3_0(00,10)|=|\Pi^3_0(01,11)|=|\Pi^3_1(00,10)|=|\Pi^3_1(01,11)|=r_3-\dfrac{1}{u_2}$ (див. властивість 5);
$|\Pi^3(010,100)|=|\Pi^3(011,101)|=\dfrac{1}{u_2}+r_3-\dfrac{1}{u_1}$ (див. властивість 6).

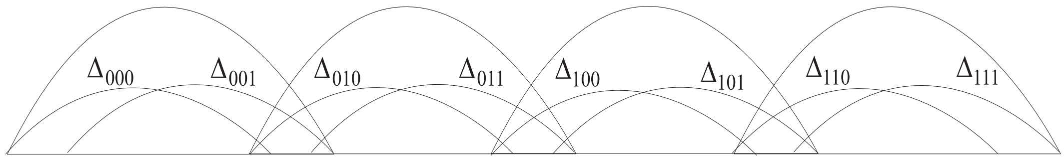

Рис. 4

Врахувавши особливості перекриття циліндричних множин 3−го рангу, можемо записати
$l_3 = (|\Pi^3_{00}(0,1)| - |\Pi^3_0(00,10)|) + (|\Pi^3_{01}(0,1)| - |\Pi^3_0(01,11)| - |\Pi^3(010,100)|) +$
$+ (|\Pi^3_{10}(0,1)| - |\Pi^3_1(00,10)| - |\Pi^3(011,101)|) + (|\Pi^3_{11}(0,1)| - |\Pi^3_1(01,11)|) =$
$= 2\left(\left(\dfrac{1}{u_2} - \dfrac{1}{u_3}\right) + \left(\dfrac{1}{u_1} - r_2\right)\right).$

Враховуючи наведені вище міркування, несkладно переконатися, що об'єднання перекриттів циліндричних множин третього рангу співпадає з відрізком $[\Delta_{00100\ldots};\Delta_{11011\ldots}] = \Pi^3$ довжиною $S - \dfrac{2}{u_3}$. Тому при здійсненні подальших міркувань будемо розглядати перекриття циліндричних множин на відрізках $[\Delta_{00000\ldots};\Delta_{00100\ldots}]$ і $[\Delta_{11011\ldots};\Delta_{11111\ldots}]$, симетричних відносно середини $[0,S]$ (див. наслідок з властивості 3).

Для $k=4$ маємо 2^4 циліндричних множин четвертого рангу. Але лише 4 з них утворюють 2 перекриття 4−го порядку, які не перетинаються з Π^3 :
$\Pi^4_{000}(0,1) \subset [\Delta_{00000\ldots};\Delta_{00100\ldots}]$, $\Pi^4_{111}(0,1) \subset [\Delta_{11011\ldots};\Delta_{11111\ldots}]$.
Причому $|\Pi^4_{000}(0,1)| = |\Pi^4_{111}(0,1)| = r_4 - \frac{1}{u_4}$ (за властивістю 4).

Тоді зрозуміло, що $l_4 = |\Pi^4_{000}(0,1)| + |\Pi^4_{111}(0,1)| = 2\left(r_4 - \dfrac{1}{u_4}\right)$.

Позначимо через $\Pi^4 = \Pi^4_{000}(0,1)\bigcup\Pi^4_{111}(0,1)\bigcup\Pi^3$.

Для $k=5$ маємо 2^5 циліндричних множин п'ятого рангу. Але лише 8 з них утворюють 4 перекриття 5−го порядку, які лише частково перетинаються з Π^4 :

$$\Pi^5_{0000}(0,1)\bigcap\Pi^4 \neq \emptyset, \quad \Pi^5_{0001}(0,1)\bigcap\Pi^4 \neq \emptyset,$$
$$\Pi^5_{1110}(0,1)\bigcap\Pi^4 \neq \emptyset, \quad \Pi^5_{1111}(0,1)\bigcap\Pi^4 \neq \emptyset.$$

Тоді
$l_5 = |\Pi^5_{0000}(0,1)\backslash\Pi^5_{000}(00,10)| + |\Pi^5_{0001}(0,1)\backslash(\Pi^5_{000}(01,11)\bigcup\Pi^5_{00}(010,100))| +$

$+ |\Pi^5_{1110}(0,1)\backslash(\Pi^5_{111}(00,10)\bigcup\Pi^5_{11}(011,101))| + |\Pi^5_{1111}(0,1)\backslash\Pi^5_{111}(01,11)| =$

$= 2\left(\left(\dfrac{1}{u_4} - \dfrac{1}{u_5}\right) + \left(\dfrac{1}{u_3} - r_4\right)\right).$

Здійснюючи аналогічні міркування для $k=2m$ $(m \geq 2)$ матимемо:
$l_{2m} = |\Pi^{2m}_{0\ldots0}(0,1)| + |\Pi^{2m}_{1\ldots1}(0,1)| = 2\left(r_{2m} - \dfrac{1}{u_{2m}}\right).$

Для $k = 2m+1 (m \geq 3)$ матимемо:

$$l_{2m+1} =$$
$$= \left|\Pi^{2m+1}_{0\ldots 0}(0,1)\backslash \Pi^{2m+1}_{0\ldots 0}(00,10)\right| + \left|\Pi^{2m+1}_{0\ldots 01}(0,1)\backslash \left(\Pi^{2m+1}_{0\ldots 0}(01,11)\bigcup \Pi^{2m+1}_{0\ldots 0}(010,100)\right)\right| +$$
$$+ \left|\Pi^{2m+1}_{1\ldots 10}(0,1)\backslash \left(\Pi^{2m+1}_{1\ldots 1}(00,10)\bigcup \Pi^{2m+1}_{1\ldots 1}(011,101)\right)\right| + \left|\Pi^{2m+1}_{1\ldots 1}(0,1)\backslash \Pi^{2m+1}_{1\ldots 1}(01,11)\right| =$$
$$= 2\left(\left(\frac{1}{u_{2m}} - \frac{1}{u_{2m+1}}\right) + \left(\frac{1}{u_{2m-1}} - r_{2m}\right)\right).$$

Отже,

$$|\Pi| = \sum_{k=1}^{\infty} l_k = \left(r_1 - \frac{1}{u_1}\right) + 2\left(r_2 - \frac{1}{u_2}\right) + 2\left(\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3}\right) + \left(\frac{1}{u_1} - r_2\right)\right) +$$
$$+2\left(r_4 - \frac{1}{u_4}\right) + 2\left(\left(\frac{1}{u_4} - \frac{1}{u_5}\right) + \left(\frac{1}{u_3} - r_4\right)\right) + \ldots$$
$$+ 2\left(r_{2m} - \frac{1}{u_{2m}}\right) + 2\left(\left(\frac{1}{u_{2m}} - \frac{1}{u_{2m+1}}\right) + \left(\frac{1}{u_{2m-1}} - r_{2m}\right)\right) + \ldots =$$
$$= S - \frac{2}{u_3} - 2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{u_{2i}} + 2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{u_{2i-1}}{u_{2i}u_{2i+1}} + 2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{u_{2i-1}} = S - \frac{2}{u_3} - 2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{u_{2i+1}} + 2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{u_{2i-1}} = S,$$

де

$$\Pi = \Pi^1(0,1) \bigoplus \bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi^{2m}_{c\ldots c}(c, 1-c) \bigoplus \bigcup_{m=1}^{\infty} (\Pi^{2m+1}_{c\ldots c}(c, 1-c)\backslash \Pi^{2m+1}_{c\ldots c}(cc, (1-c)c)) \bigoplus$$
$$\bigoplus \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\Pi^{2m+1}_{c\ldots c(1-c)}(c, 1-c)\backslash (\Pi^{2m+1}_{c\ldots c}(c(1-c), (1-c)(1-c)) \bigcup \Pi^{2m+1}_{c\ldots c}(c(1-c)c, (1-c)cc))\right),$$

$c \in \{0, 1\}$.

Таким чином, ми довели наступне твердження:

Теорема 2. *Міра Лебега множини точок* $[0, S]\backslash\Pi$ *рівна нулю.*

Література

[1] *Allouche J.-P., Shallit J.* Automatic sequences: theory, applications, generalizations. – Cambridge, England: Cambridge University Press,2003. - 588 p.

[2] *André-Jeannin, R.* "Irrationalite de la somme des inverses de certaines suites recurrentes. // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 308, 539-541, 1989.

[3] *Ribenboim, P.* My numbers, my friends: popular lectures on number theory. Springer-Verlag New York, 2000, 384 p.

[4] *Василенко Н.М.* Фібоначчієві подання дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — 6. — С. 261-271.

[5] *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1969. — 112 с.

[6] *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

[7] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[8] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наук. думка, 1992. — 208 с.