Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 168–173.

УДК 519.21

Про один клас ймовірнісних мір в R^2 заданих за допомогою Q^*-представлення дійсних чисел

В. В. Коваль
(Університет м. Утрехт, Нідерланди)

Анотація. В роботі вивчається структура ймовірнісних мір в R^2, заданих розподілом елементів свого W^*-представлення, яке, в свою чергу, є природнім двовимірним аналогом Q^*-представлення дійсних чисел.

Abstract. In the paper we study the structure of probability measures on R^2 defined by the distributions of the elements of their W^*-representation, which is a two dimensional analogue of Q^*-representation of real numbers.

1. Вступ.

Існує багато робіт, присвячених вивченню структури імовірнісних мір (випадкових величин), заданих розподілами символів свого Q^*-представлення. Зокрема, для цього класу мір справджується аналог теореми Джесена-Вінтнера про чистоту розподілу та теорема про розклад сингулярної міри на компоненти з різними топологометричними властивостями. Також фрактальні властивості (міра Хаусдорфа та розмірність Хаусдорфа-Безиковича) носіїв цих розподілів є добре вивченими.

В даній роботі розглядається клас ймовірнісних мір, породжених W^*-представленням елементів простору R^2. Таке представлення є природнім аналогом Q^*-представлення, і фактично є Q^*-розкладом (взагалі з двома різними матрицями Q_1^* та Q_2^*) кожної з компонент точки простору. Цей клас мір є значно багатшим і за структурою відрізняється від одновимірного аналогу. Зокрема, рівномірний розподіл на довільній гладкій кривій буде сингулярним (бо зосереджений на множині нульової площі), що йде в розріз з уявленням про одновимірні сингулярні розподіли як такі, що зосереджені переважно на фрактальних множинах. Також вивчення фрактальних властивостей цих розподілів значно ускладнюється. Наприклад в якості спектра можуть виступати самоафінні множини, складнощі в обчисленні розмірності яких відомі тривалий час.

Стаття має таку структуру. Другий розділ присвячений огляду Q^*-представленню дійсних чисел. Третій - введенню W^*-представлення елементів простору R^2. В четвертому розділі вводиться випадковий елемент, заданий розподілами компонент свого W^*-представлення і для нього наводиться критерій дискретності.

2. Q^*-представлення дійсних чисел.

Нехай s є фіксованим натуральним числом, $s \geq 2$, і нехай $Q^* = \|q_{ik}\|$, де $i \in A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $k = 1, 2, \ldots$, фіксована нескінченна матриця з наступними властивостями:

(1) $q_{ik} > 0$,
(2) $\sum\limits_{i} q_{ik} = 1$,
(3) $\prod\limits_{k=1}^{\infty} q_{i_k k} = 0$ для довільної послідовності $\{i_k\}$, $i_k \in A$,
(4) $q_* = \inf\limits_{ik}\{q_{ik}\} > 0$.

Легко показати [**10**], що для довільного дійсного числа $x \in [0, 1]$ існує послідовність $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in A$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i} \right), \tag{1}$$

де $\beta_{0k} = 0$, $\beta_{\alpha_k k} = \sum\limits_{j=0}^{\alpha_k - 1} q_{jk}$, $k = 1, 2, \ldots$. навпаки: для довільної послідовності $\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in A$ вираз (1) збігається до елемента з $[0, 1]$.

Представлення дійсного числа x у вигляді (1) називається Q^*-представлення x і символічно позначається

$$x = \Delta^{Q^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}. \tag{2}$$

Число α_k називається k-им Q^*-символом в розкладі x.

Нехай $\eta_1, \ldots, \eta_k$ є незалежні випадкові величини з наступними розподілами

η_k	0	1	$\ldots$	$s-1$
	p_{0k}	p_{1k}	$\ldots$	$p_{(s-1)k}$

Тоді випадкова величина

$$\eta = \Delta^{Q^*}_{\eta_1 \ldots \eta_k \ldots}, \tag{3}$$

називається випадковою величиною з незалежними Q^* символами. Вона набуває значення на відрізку $[0, 1]$. Вивченню цієї випадкової величини присвячена, зокрема, робота [**4**].

3. W^*-представлення елементів з R^2

Нехай $s > 1$ і $r > 1$ є фіксовані натуральні числа, і нехай $m = sr$ $A_1 = \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $A_2 = \{0, 1, \ldots, r-1\}$, $\overline{A} = A_1 \times A_2$, де $\times$ позначає прямий добуток множин. зафіксуємо дві матриці $Q_1^* = \|q_{ik}\|$, $Q_2^* = \|q'_{jk}\|$, $i \in A_1$, $j \in A_2$, які задовольняють умови 1) – 4) для Q^*-представлення.

Множина

$$\Delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \equiv \Delta^{Q_1^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \times \Delta^{Q_2^*}_{\beta_1\ldots\beta_m} = \\ = \left\{(x, y) : x \in \Delta^{Q_1^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, y \in \Delta^{Q_2^*}_{\beta_1\ldots\beta_m}\right\}$$

називається циліндричною множиною рану $(k \times m)$.

Для циліндричних множин виконуються наступні властивості:

(1) $\Delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \bigcup\limits_{\alpha=0}^{s-1} \Delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha} = \bigcup\limits_{\beta=0}^{r-1} \Delta^{\beta_1\ldots\beta_m\beta}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \bigcup\limits_{\beta=0}^{r-1}\bigcup\limits_{\alpha=0}^{s-1} \Delta^{\beta_1\ldots\beta_m\beta}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha}$.

(2) $\left|\Delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right| = \left(\prod\limits_{i=1}^{k} q^2_{\alpha_i i} + \prod\limits_{j=1}^{m} {q'}^2_{\beta_j j}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$

якщо $k \to \infty$ і $m \to \infty$. Де $|\cdot|$ позначає діаметр множини.

(3) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \equiv \Delta^{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots} = M(\Delta^{Q_1^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}, \Delta^{Q_2^*}_{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}) \in [0,1]^2$.

(4) $\Delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots} = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \Delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k+i}} = \{(x, y) : x = \Delta^{Q_1^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}, y \in \Delta^{Q_2^*}_{\beta_1\ldots\beta_m}\}$,

$\Delta^{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \bigcap\limits_{j=0}^{\infty} \Delta^{\beta_1\ldots\beta_{m+j}}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \{(x, y) : x \in \Delta^{Q_1^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}, y \in \Delta^{Q_2^*}_{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}\}$.

(5) $\lambda_1\left(\Delta^{\beta_1\ldots\beta_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}\right) = |\Delta^{Q_2^*}_{\beta_1\ldots\beta_m}| = \prod\limits_{j=1}^{m} q'_{\beta_j j}$,

$\lambda_1\left(\Delta^{\beta_1\ldots\beta_m\ldots}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right) = |\Delta^{Q_1^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k}| = \prod\limits_{i=1}^{k} q_{\alpha_i i}$.

Згідно з властивістю 3 ми можемо кожній точці з $[0,1]^2$ поставити у відповідність впорядковану пару нескінчених послідовностей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots)$ і $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \ldots)$ символів з алфавітів $A_1 = \{0, \ldots, s-1\}$ і $A_2 = \{0, \ldots, r-1\}$ відповідно. Представлення точки $M \in [0,1]^2$ як перерізу циліндричних множин

$$M = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^{\beta_1\ldots\beta_k}_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \equiv \\ \equiv \Delta^{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots} \tag{4}$$

будемо називати W^*-представленням M. Очевидно, що

$$\Delta^{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots} = M(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \Delta^{Q_1^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}, \\ y = \Delta^{Q_2^*}_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}. \end{cases}$$

Майже всі (відносно міри Лебега λ_2) точки з $[0,1]^2$ мають єдине W^*-представлення бо майже всі (відносно міри Лебега λ_1) точки з $[0,1]$ мають єдине Q^*-представлення.

Перепозначимо елементи множини $\overline{A} = A_1 \times A_2$ наступним чином:

$$\begin{array}{llll}
(0,0) \equiv \overline{0}, & (1,0) \equiv \overline{r}, & \ldots & (s-1,0) \equiv \overline{(s-1)r}, \\
(0,1) \equiv \overline{1}, & (1,1) \equiv \overline{r+1}, & \ldots & (s-1,1) \equiv \overline{(s-1)r+1}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(0,r-1) \equiv \overline{r-1}, & (1,r-1) \equiv \overline{2r-1}, & \ldots & (s-1,r-1) \equiv \overline{sr-1}.
\end{array}$$

Отримаємо новий алфавіт $\overline{A} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$, де $m = sr$. Нехай

$$\square_{\gamma_1 \ldots \gamma_k} \equiv \left\{ M(x,y) : x \in \Delta^{Q_1^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}, y \in \Delta^{Q_2^*}_{\beta_1 \ldots \beta_k} \right\},$$

де $\overline{\gamma_i} = (\alpha_i, \beta_i)$.Тоді для кожної точки $M \in [0,1]^2$ існує послідовність $\{\gamma_k\}$, $\overline{\gamma_k} \in \overline{A}$, така що

$$M = \square_{\gamma_1 \ldots \gamma_k \ldots} \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} \square_{\gamma_1 \ldots \gamma_k} \tag{5}$$

і для довільної послідовності $\{\gamma_k\}$, $\overline{\gamma_k} \in \overline{A}$: $\square_{\gamma_1 \ldots \gamma_k \ldots} = M \in [0,1]^2$. γ_k будемо називати k-им W^*-символом точки M: $\gamma_k = \gamma_k(M)$.

4. Випадкові елементи, задані розподілом своїх W^* символів

Нехай η_k є послідовністю незалежних дискретно розподілених випадкових величин, що приймають значення $0, 1, 2, \ldots, m-1 \quad (m = sr)$ з імовірностями

$$P\{\eta_k = i\} = p_{ik} \geq 0, \; p_{0k} + p_{1k} + \ldots + p_{(m-1)k} = 1.$$

Випадковий елемент

$$\xi = \square_{\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \ldots} \in [0,1]^2$$

будемо називати випадковим елементом з незалежними W^* символами. Властивості розподілу ξ визначаються матрицями Q_1^*, Q_2^* і нескінченною стохастичною матрицею $\|p_{ik}\|$, $(i = \overline{0, m-1}, k \in N)$.

Нагадаємо, що імовірнісна міра називається сингулярною, якщо в неї існує носій нульової міри Лебега і дискретною, якщо в неї існує не більш як зчисленний носій.

Нехай μ_ξ це імовірнісна міра, яка відповідає розподілу випадкового елемента ξ з незалежними W^* символами.

Теорема. Міра μ_ξ є дискретною тоді і тільки тоді, коли

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0. \tag{6}$$

Доведення. Покажемо необхідність умови (6). Нехай $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i}\{p_{ik}\} = 0$. Тоді для довільної точки $w \in [0,1]^2$ маємо

$$\mu_\xi(w) \le \prod_{k=1}^{\infty} \max_{i}\{p_{ik}\} = 0,$$

тобто міра не має атомів і є, відповідно, неперервною.

Покажемо достатність. Позначимо w_k, k-ий символ W^* представлення точки w і позначимо

$$D_{\mu_\xi} = \left\{ w : \prod_{k=1}^{\infty} p_{w_k k} > 0 \right\}.$$

Очевидно, що множина D_{μ_ξ} є зчисленною. З властивостей нескінченних добутків слідує що подія $w \in D_{\mu_\xi}$ не залежить від довільної скінченної кількості елементів w_k і є хвостовою, тобто для неї справджується закон Колмогорова нуля-одиниці (дивись наприклад [**1**]) і як наслідок $\mu_\xi\left(D_{\mu_\xi}\right) = 0$ або $\mu_\xi\left(D_{\mu_\xi}\right) = 1$. З умови (6) слідує, що $\mu_\xi\left(D_{\mu_\xi}\right) > 0$ і тому $\mu_\xi\left(D_{\mu_\xi}\right) = 1$. Теорему доведено.

Нагадаємо, що топологічним носієм міри називається найменша замкнена множина повної міри. Добре відомо, що для сингулярних мір, в якості топологічних носіїв часто виступають фрактальні множини. Для міри μ_ξ в загальному випадку спектр має складну локальну структуру.

Зафіксуємо два натуральних числа m і n $(m \le n)$. Нехай

$$Q_1^* = \begin{pmatrix} 1/n & \dots & 1/n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/n & \dots & 1/n & \dots \end{pmatrix}$$

і

$$Q_2^* = \begin{pmatrix} 1/m & \dots & 1/m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/m & \dots & 1/m & \dots \end{pmatrix}$$

та $p_{ik} = p_i$ для всіх k. Тоді спектр міри μ_ξ породженої цим преставленням співпадає з килимом МакМалена [**5**] і його розмірність обчислюється за формулою

$$\alpha_0(S_{\mu_\xi}) = \log_m \left(\sum_{j=0}^{m-1} a(j)^{\log_n m} \right),$$

де $a(j)$ позначає кількість ненульових p_i для яких елемент i в якості другої компоненти має цифру j.

Подальшими питаннями для дослідження природньо постають знаходження критерія сингулярності міри μ_ξ , її структура з точки зору вмісту різних компонент за тополого-метричною структурою (Кантора, Салема та Працьовитого) та фрактальні властивості топологічного носія.

Література

[1] *А.А. Боровков*, Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986.

[2] *М.В. Працьовитий*, Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998.

[3] *Н.В. Працевитый, Г.М. Торбин*, Случайные величины с независимыми Q^* знаками // Случайные эволюции. — Киев: Институт математики. — 1992. — С.95-104.

[4] *S.Albeverio, G.Torbin,* Fractal properties of singular probability distributions with independent Q^*-digits // *Bull.Sci.Math.* 129 (2005), P. 356-367.

[5] *C.McMullen,* The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets // *Nagoya Math. J.* 96 (1984), P. 1-9.