

УДК 511.72

## Ряди Енгеля та їх застосування

М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман

(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова)

АНОТАЦІЯ. В роботі обґрунтовується, що довільне число  $x \in (0, 1]$  можна єдиним чином подати у вигляді ряду Серпінського-Енгеля

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)\dots(2+g_1+\dots+g_n)} \equiv \Delta_{g_1g_2\dots g_n\dots}^E,$$

де  $g_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Вивчається геометрія такого зображення (властивості циліндричних множин, геометричний зміст цифр, основне метричне відношення тощо). Використовуючи здобуті метричні співвідношення, досліджуються множини канторівського типу спеціального виду.

ABSTRACT. In this paper we prove that any number  $x \in (0, 1]$  can be uniquely represented in the form of Sierpiński–Engel series:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)\dots(2+g_1+\dots+g_k)} \equiv \Delta_{g_1g_2\dots g_k\dots}^E,$$

where  $g_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . We study the geometry of such a representation (properties of cylindrical sets, geometric interpretation of digits, basic metric relation, etc.). Using obtained metric relations, we solve metric problems and study special sets of Cantor type.

### Вступ

У 1911 році В. Серпінський в роботі [6] розглядає алгоритми розвинення (розклади) дійсних чисел в знакододатні та знаковмінні ряди, членами яких є числа, обернені до натуральних. Серед них ряди Остроградського 1-го та 2-го виду [1]–[7], а також ряди виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k},$$

де  $(a_n)$  — монотонно неспадна послідовність натуральних чисел,  $a_n \geq 2$ . Стосовно останніх він доводить, що кожне число з півінтервала  $(0, 1]$  можна розкласти в такий

ряд. Наводяться приклади розкладів деяких чисел, зокрема,

$$e - 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 47 \cdot 2207} + \dots$$

Авторство останнього розкладу Серпінський приписує Люку (Lukas E.), посилаючись на 331 сторінку його монографії ("Theorie des nombres T.1, Paris, 1891), де такий розклад називається рядом Пелля (Pell). Більше того, Серпінський вказує загальний алгоритм розкладу чисел виду  $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ ,  $a \in \mathbb{N}$ , який ґрунтується на рівності

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \frac{1}{a_1} + \frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4}}{2a_1},$$

де  $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ , а також зупиняється на питанні швидкості збіжності рядів цього класу.

Через три роки (1913 – 1914) ряди вказаного виду фігурують в тезах доповіді німецького математика Енгеля [5] без посилань на Серпінського. Так склалось, що в подальших дослідженнях такі ряди стали називати рядами Енгеля. В першу чергу, це завдяки німецькому математику — Штратемейеру (Stratemeier G.), який присвятив таким рядам своє дисертаційне дослідження (одним з опонентів на захисті якого був Енгель) [9]. В цьому випадку, як і в багатьох інших, вибір терміну не мав науково-історичного обґрунтування (нам, принаймні, невідомі інші роботи Енгеля, де б вивчалися чи використовувалися такі ряди). Оскільки ж термін "ряди Енгеля" прижився в науковій літературі [7, 8, 10, 11, 12], то ми далі будемо підтримувати цю традицію.

Вбачаючи перспективність у використанні розкладів чисел в ряди Енгеля для вивчення функцій, перетворень і мір зі складною локальною структурою, зокрема, їх фрактальних властивостей, в даній роботі ми здійснюємо свій самостійний виклад основ метричної теорії таких розкладів, запропонувавши їм нову різницеву форму запису. Ми доводимо кілька нових результатів, які стосуються тополого-метричних властивостей множин дійсних чисел з обмеженнями на вживання символів алфавіту.

## 1. Ряди Енгеля

*Означення 1.* Рядом Енгеля називається вираз виду

$$\frac{1}{q_1 + 1} + \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)} + \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)(q_3 + 1)} + \dots, \quad (1)$$

де  $q_k$  — натуральні числа, причому  $q_{k+1} \geq q_k$ .

Прикладами рядів Енгеля є:

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{u_k}}$ , де  $(u_k)$  — класична послідовність Фібоначчі без першого члена, тобто  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$ ;

2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^{m_1+m_2+\dots+m_k}}$ , де  $s$  — фіксоване натуральне число, більше 1,  $(m_k)$  — неспадна послідовність натуральних чисел;
3.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ;
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{k=1}^n p_k \right]^{-1}$ ,  $(p_k)$  — зростаюча послідовність всіх простих чисел.

Згідно з теоремою Д'Аламбера кожний ряд Енгеля є збіжним. Очевидно, що сума ряду (1) належить  $\left( \frac{1}{q_1+1}, 1 \right]$ .

Якщо всі  $q_k = s - 1$ , то очевидно, що ряд є сумою всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії, перший член і знаменник якої дорівнюють  $\frac{1}{s}$ .

## 2. Розклади чисел в ряди Енгеля

**Лема 1.** Довільне число  $x$  з  $(0, 1]$  єдиним чином розкладається в ряд Енгеля, тобто існує послідовність натуральних чисел  $(q_k)$  така, що  $q_{k+1} \geq q_k$  і

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)\dots(q_k+1)} \equiv \Delta_{q_1 q_2 \dots q_n \dots} \quad (2)$$

ДОВЕДЕННЯ. Очевидно, що число  $x = 1$  має єдиний розклад в ряд Енгеля:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \Delta_{(1)}.$$

Нехай  $x$  — довільне дійсне число з  $(0, 1]$ . Оскільки півінтервали  $\left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ ,  $n \in N$ , не перетинаються і  $(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ , то існує натуральне число  $q_1$  таке, що

$$\frac{1}{q_1+1} < x \leq \frac{1}{q_1}. \quad (3)$$

Якщо  $x = \frac{1}{q_1}$ , то

$$x = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_1+1} + \frac{1}{(q_1+1)^2} + \frac{1}{(q_1+1)^3} + \dots = \Delta_{(q_1)}$$

і розклад числа  $x$  в ряд Енгеля знайдено.

Якщо  $x < \frac{1}{q_1}$ , то з нерівностей (3) маємо

$$0 < x_1 \equiv x - \frac{1}{q_1+1} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1+1} = \frac{1}{q_1(q_1+1)}$$

і

$$x = \frac{1}{q_1+1} + x_1, \quad \text{де } 0 < x_1 < \frac{1}{q_1(q_1+1)}.$$

Тоді, очевидно, знайдеться натуральне  $q_2$  таке, що

$$\frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)} < x_1 \leq \frac{1}{(q_1 + 1)q_2}. \quad (4)$$

Причиною існування такого  $q_2 \in N$  знову є те, що

$$\left(0, \frac{1}{q_1(q_1 + 1)}\right] = \bigcup_{q_2=q_1}^{\infty} \left(\frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)}, \frac{1}{(q_1 + 1)q_2}\right].$$

Якщо  $x_1 = \frac{1}{(q_1 + 1)q_2}$ , то  $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)^k} = \Delta_{q_1(q_2)}$ .

Якщо  $x_1 < \frac{1}{(q_1 + 1)q_2}$ , то з нерівностей (4) отримуємо

$$0 < x_2 \equiv x_1 - \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)} \leq \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)q_2}$$

і

$$x = \frac{1}{q_1 + 1} + x_1 = \frac{1}{q_1 + 1} + \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)} + x_2.$$

Тоді, очевидно, знайдеться натуральне  $q_3$  таке, що

$$\frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)(q_3 + 1)} < x_2 \leq \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)q_3}. \quad (5)$$

Якщо  $x_2 = \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)q_3}$ , то  $x_2 = \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_3 + 1)^k}$  і

$$x = \frac{1}{q_1 + 1} + \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_3 + 1)^k}\right) = \Delta_{q_1 q_2 (q_3)}.$$

Якщо ж  $x_2 < \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1)q_3}$ , то процес продовжується.

Якщо за скінченне число кроків ми отримаємо  $x_n = \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_n + 1)q_{n+1}}$ , то

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_k + 1)} + \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_n + 1)} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_{n+1} + 1)^k}\right) = \Delta_{q_1 q_2 \dots q_n (q_{n+1})}.$$

Якщо  $x_n < \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_n + 1)q_{n+1}}$  для довільного натурального  $n$ , то процес обчислення  $x_n$  і  $q_n$  необмежений і його результатом є рівність (2). Те, що сума ряду (2) дорівнює  $x$  випливає з того, що

$$x_n \leq \frac{1}{(q_1 + 1)(q_2 + 1) \dots (q_n + 1)q_{n+1}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доведемо єдиність. Припустимо, що деяке  $x \in (0; 1]$  має два різні розклади  $x \equiv \Delta_{q_1 \dots q_k \dots} = \Delta_{q'_1 \dots q'_k \dots} \equiv x'$ . Тоді існує номер  $m$  такий, що  $q_1 = q'_i$  при  $i < m$  і  $q_m \neq q'_m$ . Не порушуючи загальності, нехай  $q'_m < q_m$ . Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} x' - x &= \frac{1}{(q_1 + 1) \dots (q_{m-1} + 1)} \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(q'_m + 1) \dots (q'_{m+i} + 1)} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(q_m + 1) \dots (q_{m+i} + 1)} \right) > \\ &> \frac{1}{(q_1 + 1) \dots (q_{m-1} + 1)} \cdot \left( \frac{1}{q'_m + 1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q_m + 1)^k} \right) = \\ &= \frac{1}{(q_1 + 1) \dots (q_{m-1} + 1)} \cdot \left( \frac{1}{q'_m + 1} - \frac{1}{q_m} \right) \geq 0, \end{aligned}$$

тобто  $x' > x$ . Отримане протиріччя доводить єдиність.  $\square$

**Зауваження.** На відміну від розкладів чисел в ланцюгові дроби або ряди Остроградського 1-го та 2-го виду, розклади чисел в ряди Енгеля завжди нескінченні, в тому числі і для раціональних чисел.

**Зауваження.** Вираз (2) можна переписати у вигляді

$$x = \frac{1}{2 + g_1} + \frac{1}{(2 + g_1)(2 + g_1 + g_2)} + \frac{1}{(2 + g_1)(2 + g_1 + g_2)(2 + g_1 + g_2 + g_3)} + \dots, \quad (6)$$

де  $g_1 = q_1 - 1$ ,  $g_{k+1} = q_{k+1} - q_k \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Вираз (6) скорочено позначатимемо  $\Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^E$  і називатимемо *E-зображенням*. При цьому  $g_k = g_k(x)$  називається *k-тим символом (цифрою) E-зображення або k-тим E-символом x*.

Приклади E-розкладів чисел:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s+1} &= \Delta_{s0 \dots 0 \dots}^E = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3} + \dots, \\ e - 2 &= \Delta_{(1)}^E = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що E-зображення числа  $x \in (0, 1]$  є його кодуванням за допомогою символів нескінченного алфавіту  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Зауваження.** Якщо  $q_k = \text{const} = s - 1$ , то розклад числа в ряд Енгеля є класичним s-адичним розкладом.

### 3. Основи метричної теорії

#### 3.1. Циліндричні множини

*Означення 2.* Циліндром рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$  називається множина  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}$  всіх точок півінтервалу  $(0, 1]$ , які мають E-зображення виду  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m g_{m+1} g_{m+2} \dots}^E$ , тобто таке E-зображення, перші  $m$  символів якого співпадають з  $c_1, c_2, \dots, c_m$  відповідно.

Безпосередньо з означення циліндра випливають наступні властивості.

ВЛАСТИВИСТЬ 1.  $\inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2+c_1)(2+c_1+c_2)\dots(2+c_1+c_2+\dots+c_k)} =$   
 $= \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1}(c_{m+1})0\dots0\dots}^E = a.$

ВЛАСТИВИСТЬ 2.  $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(0)}^E \equiv b =$   
 $= a + \frac{1}{(2+c_1)(2+c_1+c_2)\dots(2+c_1+c_2+\dots+c_m)(1+c_1+c_2+\dots+c_m)}.$

ВЛАСТИВИСТЬ 3. Циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$  є півінтервалом  $(a, b]$ .

Означення 3. Циліндричним інтервалом рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$  (символічно:  $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$ ) називається інтервал з тими ж кінцями, що й циліндр  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$ .

ВЛАСТИВИСТЬ 4. Довжина  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$  обчислюється за формулою

$$|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E| = \frac{1}{(2+c_1)(2+c_1+c_2)\dots(2+c_1+c_2+\dots+c_m)(1+c_1+c_2+\dots+c_m)} =$$

$$= \frac{1}{(2+\sigma_1)(2+\sigma_2)\dots(2+\sigma_m)(1+\sigma_m)}.$$

ВЛАСТИВИСТЬ 5. Мають місце рівності:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E| = 0; \quad \lim_{c \rightarrow \infty} |\Delta_c^E| = 0.$$

ВЛАСТИВИСТЬ 6.  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E = \bigcup_{c=0}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c}^E.$

ВЛАСТИВИСТЬ 7. Якщо  $m \leq k$ , то

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E \cap \Delta_{d_1 d_2 \dots d_k}^E = \begin{cases} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E, & \text{коли } c_i = d_i, i = \overline{1, m}; \\ \emptyset, & \text{коли } \exists c_i \neq d_i. \end{cases}$$

ВЛАСТИВИСТЬ 8.  $\sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(c+1)}^E = \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c}^E;$   
 $\sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(c+j)}^E < \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c}^E$  при  $j > 1.$

ВЛАСТИВИСТЬ 9. Для довільної послідовності  $(c_n)$ ,  $c_n \in N_0$ , виконується,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E \equiv \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^E = x \in (0, 1].$$

### 3.2. Основне метричне відношення, його оцінки та наслідки

**Лема 2.** Для довільних  $c_1, c_2, \dots, c_m, c_{m+1} \in N_0$  має місце рівність

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c_{m+1}}^E|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|} = \frac{1+c_1+\dots+c_m}{(2+c_1+c_2+\dots+c_m+c_{m+1})(1+c_1+c_2+\dots+c_m+c_{m+1})} =$$

$$= \frac{1+\sigma_m}{(2+\sigma_m+c_{m+1})(1+\sigma_m+c_{m+1})} = \frac{1+\sigma_m}{(2+\sigma_{m+1})(1+\sigma_{m+1})} \equiv \delta(\sigma_m, c_{m+1}),$$

де  $\sigma_k = c_1 + c_2 + \dots + c_k.$

ДОВЕДЕННЯ. Дане твердження є наслідком властивості 4 циліндричних множин та означення різницевого зображення чисел рядами Енгеля.  $\square$

**Наслідок 1.** Якщо  $c_1 + \dots + c_m = s_1 + \dots + s_n$ , то

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|} = \frac{|\Delta_{s_1 s_2 \dots s_n}^E|}{|\Delta_{s_1 s_2 \dots s_n}^E|} \quad \text{при } i \in N_0.$$

**Наслідок 2.** Для довільного набору  $c_1, c_2, \dots, c_m, c_{m+1}$  ( $c_i \in N_0$ ) має місце нерівність

$$\frac{1}{(2 + \sigma_{m+1})^2} \leq \frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c_{m+1}}^E|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|} \leq \frac{1}{2 + \sigma_m + c_{m+1}},$$

причому, рівність має місце при  $c_{m+1} = 0$ .

**Наслідок 3.** Мають місце рівності

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|} = \frac{|\Delta_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}^E|}{|\Delta_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}^E|} = \frac{1 + \sigma_m}{(2 + \sigma_m + i)(1 + \sigma_m + i)},$$

де  $\sigma_m = c_1 + c_2 + \dots + c_m$ .

**Лема 3.** Мають місце нерівності:

$$\frac{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c}^E|}{|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|} \leq \frac{1}{2(2c + 1)} \leq \frac{1}{2}. \quad (7)$$

ДОВЕДЕННЯ. З виразу  $\delta(\sigma_m, c)$  отримуємо

$$f(x) \equiv \delta(x - 1, c) = \frac{x}{(x+1+c)(x+c)}, \quad \text{де } x = \sigma_m + 1.$$

Функція  $f(x)$ ,  $x \geq 1$ , набуває найбільшого значення в точці  $x = \sqrt{c(c+1)}$ , що легко перевіряється засобами диференціального числення. Враховуючи, що  $\sigma_m + 1$  набуває лише натуральних значень, отримуємо

$$\max f(x) = f(c) = f(c+1) = \frac{1}{2(2c+1)}.$$

Перша нерівність доведена. Оскільки  $c \geq 0$ , то має місце друга нерівність з (7).

Зауважимо, що перша з рівностей (7) має місце, коли  $\sigma_m = c$  або  $\sigma_m = -c$ , а друга, при  $c = 0$ .  $\square$

### 3.3. Найпростіші метричні задачі

**Лема 4.** Якщо  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$  — фіксований циліндр, то

$$\lambda \left( \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E \right) = \frac{\sigma_m + 1}{\sigma_m + k + 2} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|,$$

де  $\sigma_m = c_1 + \dots + c_m$ .

ДОВЕДЕННЯ. Враховуючи властивості циліндричних множин, маємо

$$\begin{aligned} I_k &\equiv \lambda \left( \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \sum_{i=k+1}^{\infty} |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E| = \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{(2 + \sigma_1) \dots (2 + \sigma_m)(2 + \sigma_m + i)(1 + \sigma_m + i)} = \\ &= \frac{1}{(2 + \sigma_1) \dots (2 + \sigma_m)} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{(2 + \sigma_m + i)(1 + \sigma_m + i)}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{1}{(2 + \sigma_m + i)(1 + \sigma_m + i)} = \frac{1}{1 + \sigma_m + i} - \frac{1}{2 + \sigma_m + i},$$

то

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{(2 + \sigma_1) \dots (2 + \sigma_m)} \cdot \frac{2}{1 + \sigma_m + k} = \\ &= \frac{1}{(2 + \sigma_1) \dots (2 + \sigma_m)(1 + \sigma_m)} \cdot \frac{1 + \sigma_m}{1 + \sigma_m + k} = \\ &= \frac{\sigma_m + 1}{\sigma_m + k + 2} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|. \end{aligned}$$

Лему доведено.  $\square$

**Наслідок 4.** Для довільного набору  $c_1, c_2, \dots, c_m$  ( $c_i \in N_0$ ) мають місце нерівності

$$\frac{1}{k+2} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E| \leq \lambda \left( \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) \leq \frac{\sigma_m + 1}{\sigma_m + 2} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|.$$

**Наслідок 5.** Якщо  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$  — фіксований циліндр, то

$$\lambda \left( \bigcup_{i=\sigma_m+1}^{\infty} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \frac{1}{2} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|,$$

де  $\sigma_m = c_1 + \dots + c_m$ .

**Наслідок 6.** Для довільного циліндра  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$  має місце нерівність

$$\lambda \left( \bigcup_{i=0}^k \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \frac{k+1}{\sigma_m + k + 2} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E| \leq \frac{k+1}{k+2} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|.$$

**Наслідок 7.** Якщо  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$  — фіксований циліндр, то

$$\lambda \left( \bigcup_{i=0}^{\sigma_m} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \frac{1}{2} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|,$$

де  $\sigma_m = c_1 + \dots + c_m$ .



**Лема 5.** Якщо  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E$  — фіксований циліндр, то

$$\lambda \left( \bigcup_{i=k}^n \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \frac{(1+n-k)(\sigma_m+1)}{(\sigma_m+k+1)(\sigma_m+n+2)} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|, \quad (8)$$

ДОВЕДЕННЯ. Оскільки  $I_k^n \equiv \lambda \left( \bigcup_{i=k}^n \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \sum_{i=k}^n |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E|$ , то

$$I_k^n = \sum_{i=k}^n \frac{1}{(2+\sigma_1) \dots (2+\sigma_m)(2+\sigma_m+i)(1+\sigma_m+i)} =$$

$$= \frac{1}{(2+\sigma_1) \dots (2+\sigma_m)} \sum_{i=k}^n \frac{1}{(2+\sigma_m+i)(1+\sigma_m+i)}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{(2+\sigma_m+i)(1+\sigma_m+i)} = \frac{1}{1+\sigma_m+i} - \frac{1}{2+\sigma_m+i},$$

маємо

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{(2+\sigma_m+i)(1+\sigma_m+i)} = \frac{1+n-k}{(1+\sigma_m+k)(2+\sigma_m+n)}.$$

Тому має місце рівність (8). □

**Наслідок 8.** Має місце рівність

$$\lambda \left( \bigcup_{i=p \cdot \sigma_m}^{q \cdot \sigma_m} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \frac{(1+\sigma_m(q-p))(\sigma_m+1)}{(1+(p+1)\sigma_m)(2+(q+1)\sigma_m)} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|.$$

**Наслідок 9.** Має місце рівність

$$\lambda \left( \bigcup_{i=\sigma_m+1}^{3\sigma_m+2} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \frac{1}{4} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|.$$

**Наслідок 10.** Має місце рівність

$$\lambda \left( \bigcup_{i \in N_0 \setminus (k,n)} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^E \right) = \frac{(1+k+\sigma_m)^2 - (k^2 - kn - k)}{(\sigma_m+k+1)(\sigma_m+n+2)} \cdot |\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^E|.$$

#### 4. Множини канторівського типу спеціального виду

**Теорема 1.** Нехай  $M$  — фіксоване натуральне число. Міра Лебега множини

$$A_\sigma^M = \{x : x = \Delta_{c_1 \dots c_n \dots}, \quad c_{n+1} > c_1 + \dots c_n \text{ при } n \geq M\}$$

дорівнює нулю.

ДОВЕДЕННЯ. Нехай

$$L_M \equiv \bigcup_{c_1=0}^{\infty} \dots \bigcup_{c_M=0}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_M}^E = (0, 1],$$

$$L_{M+k} \equiv \bigcup_{c_1=0}^{\infty} \dots \bigcup_{c_M=0}^{\infty} \bigcup_{c_{M+1} > \sigma_M} \dots \bigcup_{c_{M+k} > \sigma_{M+k-1}} \Delta_{c_1 \dots c_M c_{M+1} \dots c_{M+k}}^E,$$

$k = 1, 2, \dots$ . Тоді  $\lambda(L_M) = 1$ , а

$$\lambda(L_{M+k+1}) \equiv \sum_{c_1=0}^{\infty} \dots \sum_{c_M=0}^{\infty} \sum_{c_{M+1} > \sigma_M} \dots \sum_{c_{M+k+1} = \sigma_{M+k} + 1}^{\infty} |\Delta_{c_1 \dots c_M c_{M+1} \dots c_{M+k+1}}^E|.$$

Враховуючи попередню лему, маємо

$$\begin{aligned} \sum_{c_{M+k+1} = \sigma_{M+k} + 1}^{\infty} |\Delta_{c_1 \dots c_M c_{M+1} \dots c_{M+k+1}}^E| &= \frac{\sigma_{M+k} + 1}{\sigma_{M+k} + \sigma_{M+k} + 2} |\Delta_{c_1 \dots c_M c_{M+1} \dots c_{M+k}}^E| = \\ &= \frac{1}{2} |\Delta_{c_1 \dots c_M c_{M+1} \dots c_{M+k}}^E|. \end{aligned}$$

Тоді  $\lambda(L_{M+k+1}) = \frac{1}{2} \lambda(L_{M+k}) = \frac{1}{2^k} \lambda(L_M) = \frac{1}{2^k}$ .

Очевидно, що  $L_{M+k+1} \subset L_{M+k}$  і  $A_{\sigma}^M = \bigcap_{k=1}^{\infty} L_{M+k}$ .

Тому  $\lambda(A_{\sigma}^M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda L_{M+k} = 0$ . □

**Теорема 2.** Міра Лебега множини  $A$  всіх чисел  $x$  півінтервала  $(0, 1]$ , для яких нерівність

$$c_{n+1}(x) > c_1(x) + \dots + c_n(x)$$

виконується для всіх  $n$ , більших деякого  $n_0$ , дорівнює нулю.

ДОВЕДЕННЯ. Легко бачити, що

$$A = \bigcup_{M=1}^{\infty} A_{\sigma}^M.$$

Тому множина  $A$ , будучи об'єднанням зчисленної кількості нуль-множин Лебега, сама є нуль-множиною. □

**Теорема 3.** Для майже всіх (в розумінні міри Лебега) чисел  $x \in (0, 1]$  нерівність  $c_{n+1}(x) \leq c_1(x) + \dots + c_n(x)$  виконується для нескінченної множини значень  $n$ .

ДОВЕДЕННЯ. Легко бачити, що множина  $\overline{A}$  всіх чисел, що мають властивість, вказану в умові теореми, є доповненням до множини  $A$ . Тобто

$$\overline{A} = (0, 1] - A.$$

Тоді  $\lambda(\overline{A}) = 1 - \lambda(A) = 1$ , що й вимагалось довести. □

**ЗАУВАЖЕННЯ 1.** Властивість числа  $x \in (0, 1]$  :  $c_{n+1}(x) \leq c_1 + \dots + c_n(x)$  є нормальною.

**Теорема 4.** Якщо для множини  $E$  існує зростаюча послідовність натуральних чисел  $(m_k)$  така, що для всіх  $x \in E$  виконуються або нерівність

$$c_{m_k}(x) > c_1(x) + \dots + c_{m_k-1}(x) \quad (9)$$

або нерівність протилежного знаку, то  $E$  є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

**ДОВЕДЕННЯ.** Оскільки твердження для обох нерівностей доводиться аналогічно, то припустимо, що для всіх  $x \in E$  виконується нерівність (9). Розглянемо множину

$$B \equiv B[\Delta^E, (m_k)] = \{x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^E, c_{m_k}(x) > c_1(x) + \dots + c_{m_k-1}(x), c_i \in N_0, i \notin \{m_k\}\}.$$

Зрозуміло, що для множини  $B$  умови теореми виконуються. Більше того, для довільної множини  $E$  існує множина  $B$ , що містить  $E$ . Тому теорему досить довести для множини  $B$ .

Нехай  $F_k$  — об'єднання циліндрів рангу  $k$ , серед внутрішніх точок яких є точки множини  $B$ ,  $\overline{F}_{k+1} = F_k \setminus F_{k+1}$ . Тоді, очевидно, що  $F_i = (0, 1] \equiv F_0$  при  $i < m_1$ ,  $\overline{F}_{m_k}$  є об'єднанням циліндрів рангу  $m_k$ , що не містять точок множини  $B$ , але належать циліндрам рангу  $m_k - 1$ , які входять до  $F_{m_k-1}$ . Тому

$$F_{k+1} \subset F_k \subset F_{k-1} \subset \dots \subset F_1 \subset F_0, \quad B = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

і

$$\lambda(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(F_k).$$

Нехай  $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m_k-1}}^E$  — довільний циліндр, що входить до  $F_{m_k-1}$ . Тоді циліндричний інтервал  $\nabla_{c_1 c_2 \dots c_{m_k-1} i}^E$  не містить точок множини  $B$ . Тому  $B$  є ніде не щільною множиною.

Згідно з наслідком 7 леми 4

$$\lambda(F_{m_k}) = \frac{1}{2} \lambda(F_{m_k-1}) = \frac{1}{2} \lambda(F_j), \quad \text{при } m_{k-1} \leq j < m_k.$$

Тому

$$\lambda(F_{m_k}) = \frac{1}{2^{k-1}} \lambda(F_0) = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{і} \quad \lambda(B) = 0,$$

що й вимагалось довести. □

**Наслідок 11.** Якщо всі точки множини  $B$  мають властивість: нерівність

$$c_{n+1}(x) > c_1(x) + \dots + c_n(x) \quad \text{або} \quad c_{n+1}(x) \leq c_1(x) + \dots + c_n(x)$$

виконується нескінченну кількість разів, то міра Лебега множини  $B$  дорівнює нулю.

## Література

- [1] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Використання рядів Остроградського для аналітичного задання розподілів випадкових величин і відображень // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу. — 2001. — Київ: Ін-т. Матем. НАН України, 2003. — С. 59-76.
- [2] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2004. — № 70. — С. 131-144.
- [3] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. — Серія 1. Фіз мат науки. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. — № 5.— С. 217-227.
- [4] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [5] *Engel F.* Entwicklunj der cahlen nach Stammbrüchen. Verhandl. d. 52 Versammlunj deuescher Philologen und Schulmänner in Marburg von 29. September bis 3 october 1913, Leipzig 1914. — S. 190-191.
- [6] *Sierpinski W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi. Sprawozdania z posiedsen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III 4 (1911).-P. 56-77. (є франц. переклад: Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries // Oeuvres choisies, T.1, PWN Warchawa, 1974, P. 236-254.)
- [7] *Williams D.* On Renyi's "record" problem Engel's series //Bull. London Math. Soc. **5** (1973) P. 235-237.
- [8] *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. Oxford Science Publications. — New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1995. — 295 pp.
- [9] *Stratemeyer G.* Entwicklung positiver Zahlen nach Stammbrüchen (Dissertation) // Mitteil. des mathem. Seminars d. Universität Giessen. — 1931. — Vol. II, no. 20. — Pp. 1-28.
- [10] *Мельничук Ю. В.* О представлении действительных чисел быстро сходящимися рядами // Цепные дроби и их применения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. — С. 77-78.
- [11] *Erdős P., Rényi A., Szűsz P.* On Engel's and Sylvester's series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. — 1958. — Vol. 1. — Pp. 7-32.
- [12] *Erdős P., Shallit J. O.* New bounds on the length of finite Pierce and Engel series // Sémin. Théor. Nombres Bordeaux (2). — 1991. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 43-53.
- [13] *Rényi A.* A new approach to the theory of Engel's series // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Math. — 1962. — Vol. 5. — Pp. 25-32.
- [14] *Melnichuk Yu. V.* Fast converging series representations of real numbers and their implementations in digital processing // Computational number theory (Debrecen, 1989). — Berlin: de Gruyter, 1991. — Pp. 27-29.