

УДК 519.41/47

## Деякі не розщиплювані $p$ -групи над своїм циклічним комутантом порядку $p^2$

О. О. Мазурок

(Національний університет технологій та дизайну)

АНОТАЦІЯ. Описано  $p$ -групи  $G$  не розщиплювані над своїм циклічним комутантом порядку  $p^2$ , у яких  $G/G'$  — прямий добуток циклічних груп.

ABSTRACT.  $p$ -groups  $G$  are described, which are non-uncoupled over their cycle commutant of  $p^2$  power and their  $G/G'$  being right product of cycle groups.

Досить відомою задачею теорії груп є задача опису груп не розщиплюваних над деякою своєю підгрупою.

Група  $G$  називається не розщиплюваною над своєю підгрупою  $H$ , якщо жодна власна підгрупа групи  $G$ , що містить  $H$ , не доповнюється в  $G$ , тобто для підгрупи  $N$  групи  $G$  з умови  $H \leq N < G$  група  $G$  не містить такої підгрупи  $D$ , що  $G = N \cdot D$  і  $N \cap D = 1$ .

В теоремі даної роботи описуються групи із назви роботи.

[теорема із [1]] Всі  $p$ -групи  $G$ , що містять таку нормальну підгрупу  $\langle f \rangle$  порядку  $p^2$ , для якої  $G/\langle f \rangle$  — прямий добуток локально циклічних груп, а сама група  $G$  не має розкладу  $G = X \rtimes Y$ , де  $f \in X$ ,  $Y$  — неединична локально циклічна  $p$ -група, вичерпуються групами типів:

- 1)  $G$  — локально циклічна  $p$ -група порядку більше  $p$ ;
- 2)  $G = U \times \langle x \rangle$ ,  $U$  — локально циклічна  $p$ -група,  $|x| = p^\delta$ ,  $\delta > 0$ ,  $|U| > p^{\delta+1}$ ,  $p$  — довільне просте число,  $f = u \cdot x^{p^{\delta-1}}$ ,  $u \in U$ ,  $|u| = p^2$ ;
- 3)  $G = \langle a \rangle \rtimes \langle x \rangle$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $|x| = p^\gamma$ ,  $\alpha - 1 > \gamma > 0$ ,  $[a, x] = a^{p^{\alpha-1}}$ ,  $f = u \cdot x^{p^{\gamma-1}}$ ,  $u \in \langle a \rangle$ ,  $|u| = p^2$ ;
- 4)  $G = \langle a, f \rangle$  — група кватерніонів порядку 8;
- 5)  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $|b| = p^\beta$ ,  $|d| = p^{\alpha-1}$ ,  $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = p$ ,  $b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{1+p^{\alpha-2}}$ ,  $p^{\alpha-2} > 2$ ,  $\beta > \alpha$ ,  $\langle f \rangle = G'$ ;
- 6)  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ ,  $|a| = 8$ ,  $|b| = 2^\beta$ ,  $\beta > 1$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$ ,  $b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1}$ ,  $\langle f \rangle = G'$ ;
- 7)  $G = U \cdot \langle x \rangle$ ,  $U = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \triangleleft G$ ,  $|a| = |x| = 8$ ,  $|b| = 2$ ,  $U \cap \langle x \rangle = \langle a^4 \rangle = \langle x^4 \rangle$ ,  $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a^2, b \rangle = \langle f \rangle$ ,  $[b, x] = f^2$ ;

8)  $G = U \cdot \langle x \rangle$ ,  $U = (\langle b \rangle \times \langle a \rangle) \triangleleft G$ ,  $|a| = |x| = 8$ ,  $|b| = 2$ ,  $U \cap \langle x \rangle = \langle a^4 \rangle = \langle x^4 \rangle$ ,  $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a^2, b \rangle = \langle f \rangle$ ,  $[b, x] = 1$ .

Всі  $p$ -групи  $G$  з комутантом порядку  $p^2$ , які мають таку нормальну підгрупу  $\langle f \rangle$  порядку  $p^3$ , для якої  $G/\langle f \rangle$  — прямий добуток локально циклічних груп і  $G$  не має власних доповнюваних підгруп, що містять  $f$ , вичерпуються групами типів:

- 1)  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ ,  $|a| = 2^3$ ,  $|b| = 2^\beta$ ,  $\beta > 1$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$ ,  $b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1}$ ,  $\langle f \rangle$  — довільна підгрупа порядку 8, що містить  $G' = \langle a^2 \rangle$ ;
- 2)  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $|b| = p^\beta$ ,  $|d| = p^{\alpha-1}$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = p$ ,  $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$ ,  $b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{1+p^{\alpha-2}}$ ,  $\beta > \alpha > 2$ ,  $p^{\alpha-2} > 2$ ,  $\langle f \rangle$  — довільна підгрупа порядку  $p^3$ , що містить  $a^{p^{\alpha-2}}$ ;
- 3)  $G = \langle a \rangle \rtimes \langle x \rangle$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $|x| = p^\gamma$ ,  $\alpha > 3$ ,  $\gamma > 1$ ,  $\alpha > \gamma + 2$ ,  $x^{-1} \cdot a \cdot x = a^{1+p^{\alpha-2}}$ ,  $f = u \cdot v$ ,  $u \in \langle a \rangle$ ,  $|u| = p^3$ ,  $v \in \langle x \rangle$ ,  $|v| = p$ ;
- 4)  $G = (A \times \langle x \rangle) \rtimes \langle y \rangle$ ,  $A$  — локально циклічна  $p$ -група,  $|x| = p^\gamma$ ,  $|y| = p^\delta$ ,  $|A| > p^{\gamma+1}$ ,  $\gamma > \delta + 1$ ,  $\delta > 0$ ,  $f = u \cdot v \cdot z$ ,  $u \in A$ ,  $|u| = p^3$ ,  $v \in \langle x \rangle$ ,  $|v| = p^2$ ,  $z \in \langle y \rangle$ ,  $|z| = p$ ,  $\langle f^p \rangle = \langle [x, y], [A, \langle y \rangle] \rangle$ ;
- 5)  $G = (\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle) \rtimes \langle y \rangle$ ,  $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$  — група типу 2) розглядуваної теореми,  $|y| = p^\delta$ ,  $\alpha > \delta + 2$ ,  $\delta > 0$ ,  $f = u \cdot z$ ,  $u \in \langle a \rangle$ ,  $|u| = p^3$ ,  $z \in \langle y \rangle$ ,  $|z| = p$ ,  $G' = \langle f^p \rangle$ .

**ДОВЕДЕННЯ. Необхідність.** Нехай виконуються умови теореми. Тоді за результатами роботи [1]  $G = C \cdot D$ ,  $C \cap D = \langle f^p \rangle = G'$ ,  $D = \prod_{i \in I}^n G_i$ , де  $G_i = \langle f^p \rangle \rtimes X_i$ ,  $X_i$  — примарна чи без скруту локально циклічна група,  $D/\langle f^p \rangle$  — прямий добуток всіх  $G_i/\langle f^p \rangle$ ,  $C$  — група одного типів 1)–8) леми. Якщо  $f \in C$ , то  $|I| = 0$  і  $C = G$ . Нехай  $f \notin C$ ,  $|I| > 0$ . Припустимо, що  $|I| > 1$ , тоді неважко показати, що  $G/C$  містить підгрупу  $X/C$ , що включає  $f \cdot C$  і доповнюється в  $G/C$  підгрупою  $(C \cdot G_i)/C$  для деякого  $i \in I$ . Ясно, що  $G = X \cdot G_i$ ,  $X \cap G_i = \langle f^p \rangle$ . Звідси  $f \in X$ ,  $G = X \rtimes X_i$ , що суперечить умові теореми. Отже,  $|I| \in \{0, 1\}$ .

Нехай  $|I| = 0$ . Тоді  $C = G$  — група одного з типів 1)–8) леми. Оскільки  $|G'| = p^2$ , а в групі  $G$  кожного з типів 1)–4) згаданої леми  $|G'| < p^2$ , то  $G$  може бути лише групою типів 5)–8) згаданої леми.

Нехай  $G$  — група типу 6) леми. Тоді  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ ,  $|a| = 2^\alpha$ ,  $G' = \langle a^2 \rangle = \langle f^2 \rangle$ , звідси  $\alpha = 3$ ,  $\langle f \rangle$  — довільна підгрупа з  $G$  порядку 8, що містить  $a^2$ , і  $G$  — група типу 1) розглядуваної теореми.

Нехай  $G$  — група типу 5) згаданої леми. За результатами [2] в  $G$  не доповнюється жодна власна підгрупа, що містить  $G' = \langle f^2 \rangle$ . Звідси  $\langle f \rangle$  — довільна підгрупа з  $G$ , що містить  $G' = \langle f^p \rangle = \langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle$ , і  $G$  — група типу 2) розглядуваної теореми.

В групах  $G$  кожного з типів 7) та 8) леми не існує циклічної підгрупи порядку 8, що містить  $G' = \langle f^p \rangle$ , тому  $G$  не може бути групою кожного з цих типів.

Нехай  $|I| > 0$ , тоді  $|I| = 1$  і  $G = C \rtimes Y$ , де  $Y$  — неединична локально циклічна група,  $C \cap \langle f \rangle = \langle f^p \rangle$ . При  $|C| = p^3$  одержимо:  $G = \langle f \rangle \rtimes Y$ , що суперечить умові

теореми. Отже,  $|C| > p^3$  і  $f = d \cdot z$ ,  $d \in C$ ,  $z \in Y$ ,  $z \neq 1$ . Оскільки  $|C \cdot f| = p = |C \cdot d \cdot z| = |C \cdot z|$ ,  $C \cap \langle z \rangle = 1$ , то  $|z| = p$ . Оскільки для групи  $C$  типу 4) леми  $|C| = p^3$ , то  $C$  не може бути групою розглянутого типу. Припустимо, що  $C$  — група типу 6) леми, тоді  $G = (\langle f \rangle \cdot B) \rtimes Y$ , що суперечить умові теореми. Отже,  $C$  може бути лише групою одного з типів 1)–3), 5), 7), 8) леми. Зауважимо, що всі квазіциклічні підгрупи з  $G$  належать  $Z(G)$ .

Нехай  $C$  — група типу 1) леми. Тоді ні  $C$ , ні  $Y$  не може бути квазіциклічною групою і  $C = \langle a \rangle$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $Y = \langle x \rangle$ ,  $|x| = p^\gamma$ , і  $G$  — метациклічна група з комутантом  $\langle f^p \rangle$  порядку  $p^2$ . Ясно, що  $f^p \in \Phi(\langle a \rangle)$ , тому  $\alpha > 2$ . При  $\alpha = 3$   $G = \langle f \rangle \rtimes \langle x \rangle$ , що суперечить умові теореми. Звідси  $\alpha > 3$ . За будовою метациклічних груп [3]  $\langle f^p \rangle = \langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle \leq Z(G)$  і  $\gamma > 1$ ,  $\langle z \rangle = \omega(\langle z \rangle)$ ,  $d \in \langle a \rangle$ . За результатами [4]  $f^p = (d \cdot z)^p = d^p \cdot z^p \cdot [d, z]^{-(1/2)p(p-1)} = d^p \cdot a_1$ , де  $a_1 = [d, z]^{-(1/2)p(p-1)}$ . Оскільки  $|z| = p$ , то  $|a_1| \leq 2$ . Ясно, що  $|f^p| = |d^p \cdot a_1|$ , тоді  $|d^p| = p^2$ , а  $|d| = p^3$ . Покладемо  $d = u$ , тоді  $f = u \cdot z$ . Нехай  $\langle c \rangle = \omega(\langle a \rangle)$ , тоді  $\langle c \rangle \leq Z(G)$  і  $G/\langle c \rangle$  та  $\langle f \rangle/\langle c \rangle$  задовольняють умову леми, і  $G$  може бути лише групою типу 3) леми, для якої  $\alpha - 1 > \gamma + 1$ , і  $G$  — група типу 3) розглядуваної теореми.

Нехай  $C$  — група типу 2) леми, тоді  $C = A \times \langle x \rangle$ ,  $A$  — локально циклічна група,  $|x| = p^\gamma$ ,  $\gamma > 0$ ,  $|A| > p^{\gamma+1}$ ,  $f^p = u_1 \cdot v_1$ ,  $u_1 \in A$ ,  $|u_1| = p^2$ ,  $v_1 \in \langle x \rangle$ ,  $|v_1| = p$  і  $d = u \cdot v$ ,  $u \in A$ ,  $v \in \langle x \rangle$ . Ясно, що  $G' = \langle f^p \rangle = [C, Y]$ . Звідси  $Y = \langle y \rangle$ ,  $|y| = p^\delta$ ,  $\delta > 0$ . Зрозуміло, що  $f^p \in \langle u_1 \rangle \times \langle v_1 \rangle \subset A \times \langle v_1 \rangle = V \triangleleft G$ ,  $V \cap \langle f \rangle = \langle f^p \rangle$ . Ясно, що  $|G' \cdot f| = p$  і значить  $(G' \cdot f)^p = (G' \cdot (u \cdot v \cdot z))^p = G' \cdot (u^p \cdot v^p) = G'$ . Звідси  $u^p \cdot v^p = (u_1 \cdot v_1)^i = u_1^i \cdot v_1^i$ . Оскільки  $\langle u_1 \rangle \cap \langle v_1 \rangle = 1 = A \cap \langle x \rangle$ , то  $v^p = v_1^i$ ,  $u^p = u_1^i$ ,  $|v^p| = |v_1^i|$ ,  $|u^p| = |u_1^i|$ . Звідси  $|v^p| \leq p$ ,  $|v| \leq p^2$ ,  $|u^p| \leq p^2$ ,  $|u| \leq p^3$ . Оскільки  $V \triangleleft G$  і  $\Phi(V) = \Phi(A)$ , то  $\Phi(A) \triangleleft G$ . Припустимо, що  $|A| = p^3$ , тоді  $G = (\langle f \rangle \rtimes \langle x \rangle) \rtimes \langle y \rangle$ , що суперечить умові теореми. Звідси  $|A| > p^3$ , але тоді  $u \in \Phi(A)$  і  $\langle u \rangle \triangleleft G$ , і значить  $[u, z] \in \langle c \rangle = \omega(A) = \omega(\langle f \rangle) = \omega(G') \subset Z(G)$ . Ясно, що  $\langle a \rangle \leq A$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $\alpha > 3$ , тому  $\langle a^p \rangle \triangleleft G$  і  $[a^p, y] \in \langle c \rangle$ . За результатами [4] та умовою  $u_1 \in \langle a^{p^2} \rangle$  маємо, що  $[u_1, y] = 1$ , а значить  $u_1 \in Z(G)$ . Припустимо, що  $u \in \langle u_1 \rangle$ , тоді  $|u| < p^3$ ,  $|u^p| < p^2$ , а значить  $|u_1^i| < p^2$ , звідки  $i \cdot p$ , а тому  $v^p = 1$  і  $v \in \langle v_1 \rangle$ ;  $v \in \omega(C) = (\langle c \rangle \times \langle v_1 \rangle) \triangleleft G$ , звідки  $[v, z] \in \langle c \rangle$ . За [4]  $f^p = u^p \cdot v^p \cdot z^p \cdot h = u^p \cdot h$ , де  $h = [v, z]^{-(1/2)p(p-1)}$  і  $|h| \leq 2$ . Оскільки  $u \in \langle u_1 \rangle$ ,  $|u_1| = p^2$ , то  $|u^p| \leq p$ . Звідси  $|f| < p^3$ , що неможливо. Отже,  $|u| = p^3$ , а значить  $i$  не кратне  $p$ ,  $|v^p| = p$ ,  $|v| = p^2$ . Ясно, що  $|V \cdot x| = p^{\gamma-1}$ ;  $C/V = \langle V \cdot x \rangle$ ,  $|V \cdot f| = p$ ,  $V \cdot f = V \cdot v \cdot z$ . Нехай  $\langle y \rangle$  містить такий елемент  $g$ , що  $|g| = p^{\gamma-1}$ , тоді можна знайти таке натуральне  $j$  не кратне  $p$ , що  $\langle (V \cdot x \cdot g^j)^{p^{\gamma-2}} \rangle = \langle V \cdot v \cdot z \rangle$ , де  $\langle z \rangle = \omega(\langle g \rangle)$ . Звідси  $G = (V \cdot \langle x \cdot g^j \rangle) \rtimes \langle y \rangle$ , що неможливо за умовою. Отже,  $\gamma - 1 > \delta$  і  $G$  — група типу 4) розглядуваної теореми.

Нехай  $C$  — група типу 3) леми. Тоді  $C = \langle a \rangle \rtimes \langle x \rangle$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $|x| = p^\gamma$ ,  $\alpha > \gamma + 1$ ,  $\gamma > 0$ ,  $[a, x] = a^{p^{\alpha-1}}$ . При  $\alpha = 3$   $G = (\langle f \rangle \rtimes \langle x \rangle) \rtimes Y$ , що суперечить умові теореми. Звідси  $\alpha > 3$ . За відомими результатами [5]  $\langle f^p \rangle = G' = C' \cdot Y' \cdot [C, Y] = C' \cdot [C, Y]$ . Оскільки  $|C'| = p$ , а  $|f^p| = p^2$ , то  $|[C, Y]| = p^2$  і  $[C, Y] = \langle [a, y], [x, y] \rangle$ , і значить  $Y = \langle y \rangle$ ,

$|y| = p^\delta$ . Припустимо, що  $|[a, y]| < p^2$ . Тоді  $[[x, y]] = p^2$ . Покладемо  $a_1 = a \cdot x$ . Оскільки  $C' = \omega(\langle a \rangle) = \langle c \rangle \leq Z(G)$ , то  $[a_1, y] = [a, y] \cdot [[a, y], x] \cdot [x, y] = [a, y] \cdot [x, y]$ . Оскільки  $|[a, y]| < p^2$ , а  $[[x, y]] = p^2$ , то  $|[a_1, y]| = p^2$ . З умов  $\alpha > \gamma - 1$  та  $|G'| = p^2$  випливає, що  $\langle a \rangle \cap \langle a_1 \rangle = \langle a^{p^\gamma} \rangle \ni c$  і  $|a_1| = |a|$ . Тепер  $G = (\langle a_1 \rangle \rtimes \langle x \rangle) \rtimes \langle y \rangle$  і  $|[a_1, y]| = p^2$ . Замінивши  $a_1$  на  $a$ , можна вважати, що  $|[a, y]| = p^2$ . Ясно, що  $\omega(C) = (\omega(\langle a \rangle) \times \omega(\langle x \rangle)) \triangleleft G$  і в  $G$  існує підгрупа  $V = \langle a \rangle \rtimes \omega(\langle x \rangle)$ , для якої  $V \cap \langle f \rangle = \langle f^p \rangle$  і значить  $V \triangleleft G$ . Тепер, як і в попередньому випадку, встановлюємо, що  $\gamma > \delta + 1$ . Легко перевірити, що  $|[a, y^p]| = p$  і  $[[x, y^p]] \leq p$ . Покладемо  $x_1 = x^i \cdot y^{pj}$ . За [4]  $|x_1| = |x|$ ,  $\omega(\langle x_1 \rangle) = \omega(\langle x \rangle)$ ,  $[a, x_1] = [a, x]^i \cdot [a, y^p]^j = c^i \cdot c^j$ , де  $i, j$  — такі не кратні  $p$  числа, що  $(i + j) \not\equiv 0 \pmod{p}$ , а значить  $[a, x_1] = 1$ ,  $G = (\langle a \rangle \times \langle x_1 \rangle) \rtimes \langle y \rangle$  і прийдемо до вище розглянутого випадку, коли  $C$  — група типу 2) леми, в якому  $G$  — група типу 4) розглядуваної теореми.

Нехай  $C$  — група типу 5) леми. Тоді  $C = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $|b| = p^\beta$ ,  $\beta > \alpha > 2$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = p$ ,  $G' = C' = \langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle$ . Припустимо, що  $\alpha = 3$ , тоді  $\langle f^p \rangle = \langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle$  і значить  $G = (\langle f \rangle \cdot \langle b \rangle) \rtimes \langle y \rangle$ , що неможливо. Отже,  $\alpha > 3$ . Тепер  $d = u \cdot v$ ,  $u \in \langle a \rangle$ ,  $v \in \langle b \rangle$ . За будовою метациклічних груп [2]  $\langle f^p \rangle = C' = G' \leq Z(C)$ . Якщо  $Y$  — квазіциклічна, то  $Y \leq Z(G)$  і  $f^p \in Z(G)$ ; якщо  $Y$  — циклічна група, то  $\langle a \rangle \rtimes Y$  — метациклічна група, і знову за [3]  $[\langle f^p \rangle, Y] = 1$ ; отже, завжди  $G' \leq Z(G)$ . За [4]  $f^p = u^p \cdot v^p \cdot z^p \cdot a_1 = u^p \cdot v^p \cdot a_1$ , де  $a_1 = ([u, v] \cdot [u, z] \cdot [v, z])^{-(1/2)p(p-1)}$ . Оскільки  $\langle f^p \rangle = \langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle$ , то  $v^p \in \langle a \rangle$ , а значить  $|v| \leq p^2$  і тому  $v \in Z(G)$ . Звідси  $[u, z] = [v, z] = 1$ . Оскільки  $|z| = p$ , то  $[[v, z]] \leq p$ . Звідси  $|a_1| \leq p$ . З умови  $|f^p| = p^2$  випливає, що  $|u^p| = p^2$  і тому  $|u| = p^3$ . Припустимо, що  $|v| = p^2$ . Покладемо  $a_1 = a^i \cdot b^{j \cdot p^{\beta-\alpha+1}}$ . За [4]  $a_1^{p^{\alpha-3}} = a^{i \cdot p^{\alpha-3}} \cdot b^{j \cdot p^{\beta-2}} \cdot [a, b]^{-(1/2)ijp^{\beta-2} \cdot (p^{\alpha-3}-1)}$ . Оскільки  $\beta > \alpha > 3$  і  $|G'| = p^2$ , то  $-(1/2)i \cdot j \cdot p^{\beta-2} \cdot (p^{\alpha-3} - 1) = t \cdot p^2$ , де  $t$  — ціле число, і значить  $a_1^{p^{\alpha-3}} = a^{i \cdot p^{\alpha-3}} \cdot b^{j \cdot p^{\beta-2}}$ . Оскільки  $|a^{p^{\alpha-3}}| = |u|$  і  $|b^{p^{\beta-2}}| = |v|$ , то можна підібрати  $i$  та  $j$  не кратні  $p$  так, щоб  $a^{i \cdot p^{\alpha-3}} = u$ ,  $b^{j \cdot p^{\beta-2}} = v$ . З того, що  $a_1^{p^{\alpha-2}} = (u \cdot v)^p = u^p \cdot v^p$ ,  $|u^p| = p^2$ ,  $v^p \in \langle u^p \rangle$ ,  $|v^p| = p$  випливає, що  $\langle u^p, v^p \rangle = \langle u^p \rangle$  і тому  $\omega(\langle a_1 \rangle) = \omega(\langle b \rangle)$ ,  $|a_1| = |a|$ ,  $C' = \langle u^p \rangle = \langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle$  і  $C = \langle a_1 \rangle \cdot \langle b \rangle$ , тобто, не порушуючи загальності, надалі вважатимемо, що  $d \in \langle a \rangle$  і значить  $v = 1$ ,  $f = u \cdot z$ ,  $|u| = p^3$ . Оскільки  $\langle z \rangle = \omega(Y)$ , то  $f \in H = \langle a \rangle \rtimes Y$ . Припустимо, що  $H$  містить  $c$ ,  $\langle c \rangle$  містить  $f$ , і  $H = \langle c \rangle \rtimes D$ . Тоді покладемо  $C_1 = \langle c \rangle \cdot \langle b \rangle$  і одержимо:  $G = C_1 \rtimes D$ ,  $f \in \langle c \rangle \leq C_1$ ,  $D \neq 1$ , що суперечить умові теореми. Отже,  $H$  не містить доповнених в  $H$  циклічних підгруп, що включають  $f$ . За результатами [1]  $G$  — група типу 5) розглядуваної теореми.

Нехай, нарешті,  $C$  — група типу 7) чи 8) леми. Тоді  $G = U \cdot \langle x \rangle$ ,  $U = \langle b \rangle \times \langle a \rangle$ ,  $|b| = 2$ ,  $|a| = 8$ ,  $|x| = 8$ ,  $U \cap \langle x \rangle = \omega(\langle a \rangle) = \omega(\langle x \rangle) = \omega(U)$ ,  $C' = G' = C \cap \langle f \rangle = \langle f^2 \rangle = \langle b \cdot a^2 \rangle$ . Зауважимо, що  $\exp(C) = 8$ ,  $\Phi(C) = \langle b \rangle \times \langle a^2 \rangle \times \langle h \rangle$ ,  $h = a^2 \cdot x^2$ ,  $|h| = 2$ , всі підгрупи порядку 4 із  $C$  належать  $\Phi(C)$  і містять  $\omega(\langle a \rangle)$ , всі елементи порядку 2 із  $C$  належать  $\omega(C) = \omega(\Phi(C)) = \langle b \rangle \times \omega(\langle a \rangle) \times \langle h \rangle$ . Для всіх елементів  $g$  порядку 8 із  $C$   $\omega(\langle g \rangle) = \omega(\langle a \rangle)$ , і  $\langle g^2 \rangle \triangleleft C$ . Нехай  $|v| = 2$ , тоді  $v \in \omega(C)$ ; покажемо, що  $[\langle v \rangle, G] \subset \langle c \rangle$ , де  $\langle c \rangle = \omega(\langle a \rangle) = \omega(\langle f \rangle) \leq Z(G)$ . Дійсно, якщо  $v \in \langle c \rangle$ , то це очевидно. Нехай  $v \notin \langle c \rangle$ ,

тоді в  $G$  існує нормальна підгрупа  $V = \langle f^2 \rangle \times \langle v \rangle$ , у якої  $\omega(V) = \langle c \rangle \times \langle v \rangle$ . Оскільки  $\omega(V)$  — характеристична підгрупа нормальної в  $G$  підгрупи  $V$ , то  $\omega(V) \triangleleft G$  і значить  $[\omega(V), G] \leq \langle c \rangle$ . Нехай  $|d| = 8$ ; тоді  $f^2 = (d \cdot z)^2 = d \cdot z \cdot d \cdot z = d^2 \cdot (d^{-1} \cdot z \cdot d \cdot z) = d^2 \cdot [d \cdot z]$ . Ясно, що  $|d^2| = 4$ . Якщо  $|[d \cdot z]| < 4$ , то  $\langle f^2 \rangle = \langle d^2 \rangle$ , що неможливо, оскільки в  $C$  немає циклічних підгруп порядку 8, що містять  $C'$ . Отже,  $|d| \neq 8$ . Нехай  $|d| = 4$ . За результатами [7] в 2-групі  $C$  підгрупа  $\Phi(C)$  породжена елементами виду  $g^2$ , де  $g$  — твірний елемент  $C$ . Оскільки елементи порядку 4 належать  $\Phi(C)$ , то  $|g| = 8$  і, за попереднім  $\langle g^2 \rangle \triangleleft C$ , і значить  $\Phi(C)$  породжена нормальними в  $G$  циклічними підгрупами порядку 4. Зрозуміло, що  $[\langle g^2 \rangle, G] \leq \langle c \rangle = \omega(\langle a \rangle) \leq Z(G)$ . Оскільки  $d$  є скінченним добутком  $g_1^2 \dots g_i^2 \dots g_n^2 \dots$ , де  $|g_i| = 8$ ,  $\langle g_i^2 \rangle \triangleleft G$ ,  $[\langle g_i^2 \rangle, G] \leq \langle c \rangle$ , то  $[\langle d \rangle, G] \leq \langle c \rangle$ . За [4]  $f^2 = d^2 \cdot z^2 \cdot [d \cdot z]^{-1} = d^2 \cdot [d \cdot z]^{-1}$ . Оскільки  $[d \cdot z] \in \langle c \rangle$ ,  $|c| = 2$ ,  $|d^2| = 2$ , то  $|f^2| \leq 4$ , що неможливо. Припустимо, що  $|d| = 2$ . За попереднім  $[\langle d \rangle, G] \subset \langle c \rangle$ , і знову за [4]  $f^2 = d^2 \cdot z^2 \cdot [d \cdot z]^{-1} = [d \cdot z]^{-1}$ ,  $|[d \cdot z]^{-1}| \leq |c| = 2$ . Звідси  $|f| \leq 4$ , що неможливо. Одержані суперечності показують, що  $C$  не може бути групою ні типу 7), ні типу 8) леми.

Всі випадки розглянуто, необхідність доведено.

*Достатність.* Нехай  $G$  — група одного з типів 1)–5) розглядуваної теореми. Ясно, що  $G$  —  $p$ -група,  $G'$  — циклічна підгрупа порядку  $p^2$ ; в групах  $G$  кожного з типів 1)–5) вказана нормальна підгрупа  $\langle f \rangle > G'$  і  $G/\langle f \rangle$  — прямий добуток локально циклічних груп. Лишається показати, що в  $G$  немає власних доповнюваних підгруп, що містять  $f$ .

Припустимо протилежне. Тоді  $G = X \rtimes Y$ ,  $Y$  — неединична локально циклічна група,  $f \in X$ . За результатами [3] в групах типів 1) та 2) розглядуваної теореми не доповнюється жодна власна підгрупа, що містить  $G'$ , тому в групах типів 1) та 2) допущений розклад неможливий; для них достатність доведена.

Нехай  $G$  — група одного з типів 3)–5) теореми. Тоді  $\exp(G) > p^3$ ,  $\langle f^p \rangle = G'$ ,  $G$  містить  $\langle a \rangle$ , таку що  $|a| = p^\alpha$ ,  $\alpha > 3$ ;  $G^{p^{\alpha-2}}$  містить  $a^{p^{\alpha-2}}$ , в групі  $G$  типу 4)  $a \in A$ ; оскільки  $f \in X$ , то  $\langle a \rangle \cap Y = 1$ ; в групах  $G$  типів 3) та 5)  $\langle f^p \rangle = \langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle \leq Z(G)$ ; в групі  $G$  типу 4)  $\langle a \rangle \cap \langle f \rangle = \omega(\langle a \rangle) = \omega(\langle f \rangle)$ ,  $\alpha > 4$ , і значить  $a^{p^{\alpha-2}} \in Z(G)$ .

Нехай  $G$  — група типу 3) теореми. Припустимо, що в ній є неабелева підгрупа  $Q$  порядку  $2^3$ . Тоді в  $G$  існує підгрупа  $B = \langle a \rangle \cdot Q$ . Оскільки  $|Z(Q)| = 2$  і  $a^{p^{\alpha-2}} \in Z(G)$ , то  $\langle a \rangle \cap Q = Z(Q)$ , а значить фактор-група  $B/\langle a \rangle$  є підгрупою типу  $(2, 2)$  циклічної групи  $G/\langle a \rangle$ , що неможливо. Отже, в  $G$  не існує неабелевих підгруп порядку  $p^3$ . З цього випливає, що метациклічна підгрупа  $\omega(G)$  метациклічної групи  $G$  є абелевою групою типу  $(p, p)$ , а тому  $\omega(G) = \omega(\langle a \rangle) \times \omega(\langle x \rangle) = \omega(X) \times \omega(Y)$ . Оскільки  $\omega(\langle a \rangle) \leq X$ , то  $\langle x \rangle \cap Y = 1$  і  $|Y| \geq p^\gamma$ . За попереднім  $|\omega(X)| = p$  і  $X$  не містить підгрупи кватерніонів, а тому  $X$  — циклічна група. Оскільки  $\langle a^{p^{\alpha-2}} \rangle = \langle f^p \rangle \subset X$  і очевидно  $G/\langle f^p \rangle = (X/\langle f^p \rangle) \times ((\langle f^p \rangle \times Y)/\langle f^p \rangle)$  — група типу  $(p^{\alpha-2}, p^\gamma)$ ,  $\alpha - 2 \geq \gamma$ , то  $|X/\langle f^p \rangle| \geq |Y|$  і значить  $|Y| = p^\gamma$ . З умови  $\alpha > \gamma + 2$  і  $|G : X| = p^\gamma$  випливає, що  $a^{p^{\alpha-3}} \in X$ , але тоді  $u \in X$ , і значить  $u^{-1} \cdot f = v \in X$ , де  $|v| = p$ . Звідси  $\omega(G) = (\omega(\langle u \rangle) \times \omega(\langle v \rangle)) \leq X$ ,

тобто в циклічній групі  $X$   $\omega(X)$  — група типу  $(p, p)$ , що неможливо. Ця суперечність показує, що достатність для груп типу 3) розглядуваної теореми стала очевидною.

Доведення достатності для груп типу 4) проводиться аналогічно, як і для типу 3).

Нехай  $G$  — група типу 5) розглядуваної теореми. Тоді  $G/G' = (X/G') \times ((G' \times Y)/G')$ ,  $\langle a \rangle \cap Y = \langle b \rangle \cap Y = 1$ , і довільна підгрупа  $\langle g \rangle$  порядку більше  $p^\delta$  має з  $G'$  неединичний перетин. Звідси  $|Y| \leq p^\delta$ . Оскільки очевидно, що  $G/G'$  — абелева група типу  $(p^{\alpha-2}, p^{\beta-1}, p^\delta)$ , то  $|Y| = p^\delta = |G : X|$ . Оскільки  $\alpha > \delta + 2$ , то елемент  $u \in \langle a^{p^{\alpha-3}} \rangle \leq X$ , а значить  $u^{-1} \cdot f = z \in X$ . Очевидно, що  $\omega(G) = \omega(\langle a \rangle) \times \langle h \rangle \times \langle z \rangle = (\omega(X) \times \omega(Y))$  — група типу  $(p, p, p)$ , де  $\omega(\langle a \rangle) \times \langle h \rangle = \omega(\langle a^{p^{\alpha-2}} \cdot b^{p^{\beta-2}} \rangle)$ . Оскільки очевидно, що  $b^{p^{\beta-2}} \in X$ , то  $\omega(X) = \omega(\langle a \rangle) \times \langle h \rangle \times \langle z \rangle = \omega(G) \not\subseteq \omega(Y)$ , що неможливо. Достатність для груп типу 5) доведено.

Достатність доведено.

Теорему доведено. □

Метациклічні  $p$ -групи  $G$  з комутантом  $G'$  порядку  $p^3$ , у яких не доповнюється жодна власна підгрупа, що містить  $G'$ , вичерпуються групами типів:

- 1)  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle b \rangle \cdot \langle d \rangle$ ,  $|a| = p^\alpha$ ,  $|b| = p^\beta$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| \in \{p, p^2\}$ ,  $\langle b \rangle \cap \langle d \rangle = 1$ ,  $b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{1+p^{\alpha-3}}$ ,  $\beta > \alpha > 3$ ,  $p^{\alpha-3} > 2$ ;
- 2)  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ ,  $|a| = 2^4$ ,  $|b| = 2^\beta$ ,  $\beta > 1$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$ ,  $b^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1}$ ;
- 3)  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ ,  $|a| = 2^4$ ,  $|b| = 2^\beta$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$ ,  $\beta \geq 4$ ,  $b^{-1} \cdot a \cdot b = a^r$ ,  $r \in \{3, 7\}$ ;
- 4)  $G = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ ,  $|a| = 2^4$ ,  $|b| = 2^3$ ,  $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$ ,  $b^{-1} \cdot a \cdot b = a^7$ .

В групі типів: 2) при  $\beta \leq 4$ ; 3) при  $\beta = 4$ ; 4) наслідку не доповнюється жодна власна неединична підгрупа.

## Література

- [1] Класифікація груп з деякими обмеженнями для комутантів порядку  $p \cdot q$  / О.О. Мазурок; Ін-т математики НАН України. — Київ, 1997. — 48 с. — Деп. в ДНТБ України 21.04.97; № 311-Ук97. — Анот. в РЖ “Депоновані наукові роботи”, № 1, 1998.
- [2] Курдаченко Л.А., Горецкий В.Э. Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 42–46.
- [3] Кузенний М.Ф., Семко М.М. Метагамільтонові групи та їх узагальнення. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. — 232 с.
- [4] Холл М. Теория групп. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 468 с.
- [5] Курош А.Г. Теория групп. — Москва: Наука, 1967. — 648 с.
- [6] Мазурок О.О. Розщиплюваність  $p$ -групи з невеликим комутантом над фіксованою підгрупою // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — № 6. — С. 102–106.
- [7] Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. — 1954. — **60**. — S. 409–434.