Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 61–71.

УДК 512.53

Основи аналізу функцій дуальної змінної

Л. А. Вотякова
(Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського)

Анотація. В роботі побудовано основи аналізу функцій дуальної змінної: означено в стандартний спосіб похідна і введено (за Вейєрштрассом) поняття аналітичної функції, зокрема означено основні елементарні функції.

Abstract. In this paper built foundation of analysis functions of dual variable: on the algebra of dual numbers the norm is introduced the concept of derivative of such functions are developed, the fragment of theory of elementary functions built.

1. Вступ. Як зазначено в роботі [**1**] "багатство теорії функцій комплексної змінної стимулює пошук подібної теорії для єдиної нетривіальної асоціативної алгебри кватерніонів". Якраз в цій роботі подано огляд головних результатів кватерніонного аналізу, причому найбільш істотними є результати для функцій, які подаються кватерніонними рядами, точніше рядами з чотирьох дійсних змінних.

Цілком природною є спроба побудови теорії аналітичних функцій на алгебрах без ділення, насамперед на алгебрах дуальних і подвійних чисел. В цій роботі базисною множиною є множина дуальних чисел , для якої нами побудовано матричне подання, через яке наділено топологічною структурою. Як результат, маємо повний нормований простір, норма якого породжується скалярним добутком. В стандартний спосіб означається похідна функції дуальної змінної, зокрема для степеневої функції з натуральним показником маємо: $(\delta^n)' = n\delta^{n-1}$. Остання рівність і стала основною для явного подання сум степеневих рядів з дуальними членами і означення базисних елементарних функцій.

2. Алгебра дуальних чисел, її матричне подання, наділення нормою. Нехай маємо множину $= \{x + y|x, y \in\}$. Наділимо її алгебраїчною структурою, а саме означимо для будь-яких $\delta_1 = x_1 + y_1, \delta_2 = x_2 + y_2 \in, \alpha \in$

$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 &:= x_1 + x_2 + (y_1 + y_2), \\ \alpha\delta_1 &:= \alpha x_1 + (\alpha y_1), \\ \delta_1 \cdot \delta_2 &:= x_1 x_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2), \end{aligned} \tag{1}$$

зокрема

$$\delta^n = (x + y)^n = x^n + nx^{n-1}. \tag{2}$$

В очевидний спосіб перевіряється, що є алгебра рангу 2 над полем [**2**], яку називають алгеброю дуальних чисел [**3**]. Алгебра є комутативною алгеброю з одиницею, але з дільниками нуля $((0 + y_1)(0 + y_2) = 0)$. Для кожного $\delta = x + y$ добуток $\delta\bar{\delta}$, де $\bar{\delta} = x - y$ — дуальне число, спряжене до дуального числа δ, є дійсне число x^2, а тому, коли $x_2 \neq 0$, то

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\delta_1 \bar{\delta_2}}{\delta_2 \bar{\delta_2}} = \frac{1}{x_2^2}(x_1 + y_1)(x_2 - y_2) =$$
$$= \frac{x_1}{x_2} + \frac{-x_1 y_2 + y_1 x_2}{x_2^2} \tag{3}$$

є часткою від ділення дуального числа δ_1 на дуальне число δ_2. Якщо $x_1 = x_2 = 0, y_2 \neq 0$, то

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} := \frac{y_1}{y_2}. \tag{4}$$

Нарешті, якщо $x_1 \neq 0, x_2 = 0$, то не існує дуального числа δ такого, що $\delta\delta_2 = \delta_1$.

Таким чином, алгебра є алгеброю без ділення (напевно краще було б сказати "алгебра, у якій ділення не завжди виконується").

Число $\sqrt{\delta\bar{\delta}}$ модулем дуального числа δ. Однак, щоб забезпечити подання дуального числа, подібне до тригонометричної форми комплексного числа, необхідно вважати, що його модуль рівняється x (у поданні $\delta = x + y$ дійсне число x назвемо дійсною частиною δ, а y — дуальною частиною). Зрозуміло, що ним не можна скористатись для наділення алгебри нормою.

Напевно це основна причина через що (наскільки нам відомо) алгебра не була наділена топологією. Для наділення алгебри топологічною структурою застосуємо прийом, який успішно спрацював в [**4**] і [**5**], а саме побудуємо матричне подання алгебри , наділимо матричну алгебру певною нормою і перенесемо її на алгебру .

Очевидно, що множина

$$M^\delta = \{ \begin{pmatrix} x - y & y \\ -y & x + y \end{pmatrix} | x, y \in \},$$

відносно звичайних операцій додавання і множення матриць і множення матриці на число, є алгебра рангу 2, причому ізоморфна алгебрі . Для нормування алгебри M^δ скористаємось нормою Гільберта–Шмідта

$$\| \begin{pmatrix} x - y & y \\ -y & x + y \end{pmatrix} \| := \left((x - y)^2 + y^2 + (-y)^2 + (x + y)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{2x^2 + 4y^2}$$

і перенесемо її на алгебру , а саме означимо на функцію

$$\|\delta\| = \|x + y\| := \sqrt{2x^2 + 4y^2}, \tag{5}$$

яка виявляється задовольняє аксіоми норми. Більше того, для будь-яких $\delta_1, \delta_2 \in$

$$\|\delta_1 \delta_2\| \leq \|\delta_1\| \cdot \|\delta_2\|. \tag{6}$$

Для будь-яких $\delta_1, \delta_2 \in$

$$\|\delta_1 + \delta_2\|^2 + \|\delta_1 - \delta_2\|^2 = 2(\|\delta_1\|^2 + \|\delta_2\|^2),$$

тобто норма породжується скаклярним добутком, сам скалярний добуток має вигляд

$$(\delta_1, \delta_2) = 2x_1x_2 + 4y_1y_2. \tag{7}$$

Оскільки базисні елементи $1 + 0\cdot, 0 + 1\cdot$ алгебри є ортогональними ($\|1 + 0 \cdot \| = \sqrt{2}, \|0 + 1 \cdot \| = 2$), то дуальні числа можна подати точками площини, на якій обрано прямокутну систему координат.

3. Повнота алгебри . Нехай маємо послідовність дуальних чисел $\delta_n = (x_n + y_n)$. Вона породжує дві послідовності дійсних чисел (x_n) і (y_n). Неважко обгрунтувати, що послідовність (δ_n) збігається тоді і лише тоді, коли збігаються послідовності (x_n) і (y_n), причому

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{8}$$

Як приклад, розглянемо послідовність

$$\left((1 + \frac{\delta}{n})^n\right),$$

де $\delta \in$. Оскільки

$$(1 + \frac{\delta}{n})^n = (1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n})^n = (1 + \frac{x}{n})^n + n(1 + \frac{x}{n})^{n-1}\frac{y}{n},$$

і

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x, \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^{n-1} = e^x,$$

то в силу (8) для кожного $\delta \in$

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{\delta}{n})^n = e^x + e^x y. \tag{9}$$

Теорема 1. *Алгебра як нормований простір з нормою (5) є повним.*

Доведення. Нехай послідовність (δ_n) є збіжною і

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta_0.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{2}$, існує n_0 таке, що для всіх $n > n_0$

$$\|\delta_n - \delta_0\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

для кожного натурального p

$$\|\delta_{n+p} - \delta_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отож для всіх $n \geq n_0$ і кожного натурального p

$$\|\delta_{n+p} - \delta_n\| \leq \|\delta_{n+p} - \delta_0\| + \|\delta_n - \delta_0\| < \varepsilon,$$

тобто послідовність (δ_n) фундаментальна.

Нехай послідовність (δ_n) фундаментальна. А оскільки

$$|x_{n+p} - x_n| \leq \sqrt{2(x_{n+p} - x_n)^2} \leq$$

$$\leq \left(2(x_{n+p} - x_n)^2 + 4(y_{n+p} - y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\delta_{n+p} - \delta_n\|,$$

аналогічно

$$|y_{n+p} - y_n| \leq \|\delta_{n+p} - \delta_n\|,$$

то з фундаментальності послідовності (δ_n) випливає фундаментальність, а отже, збіжність послідовностей $(x_n), (y_n)$. А тому в силу (8) послідовність (δ_n) збіжна, і алгебра повна. $\square$

Нехай маємо функцію $w = f(\delta)$, визначену в області E, і нехай $w = u(x, y) + v(x, y)$ її алгебраїчне подання. Як приклад, многочлен

$$P_n(\delta) = a_0\delta^n + a_1\delta^{n-1} + ... + a_n$$

з дійсними коефіцієнтами подається у вигляді

$$P_n(\delta) = P_n(x) + P_n'(x)y. \tag{10}$$

В очевидний спосіб доводиться

Теорема 2. *Функція* $w = f(\delta)$, *визначена в деякому околі точки* $\delta_0 = x_0 + y_0$, *неперервна у цій точці тоді і лише тоді, коли неперервні у точці* (x_0, y_0) *функції* $u(x, y), v(x, y)$.

Як приклад, дробово-раціональна функція

$$\frac{P_m(\delta)}{Q_n(\delta)},$$

де $P_m(\delta), Q_n(\delta)$ многочлени з дійсними коефіцієнтами ($Q_n(\delta)$ — многочлен ненульового степеня), неперервна у кожній точці $\delta \in$, за винятком точок вигляду (x_0, y), де x_0 — дійсний корінь многочлена $Q_n(x)$.

Справді,

$$\frac{P_m(\delta)}{Q_n(\delta)} = \frac{P_m(x) + P_m'(x)y}{Q_n(x) + Q_n'(x)y} =$$

$$= \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} + \frac{-P_m(x)Q_n'(x) + P_m'(x)Q_n(x)}{Q_n^2(x)}y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} + \left(\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\right)' y. \tag{11}$$

Звертаємо увагу на (10) і (11) та виділимо клас функцій дуальної змінної, алгебраїчне подання яких має вигляд

$$f(\delta) = f(x) + f'(x)y. \tag{12}$$

4. Степеневі ряди з дуальними членами. Символ вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) \tag{13}$$

назвемо рядом з дуальними членами, а послідовність

$$(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \delta_k \right)$$

послідовністю його часткових сум. Ряд (13) збігається, якщо збігається послідовність часткових сум.

Оскільки ряд (13) породжує два ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \tag{14}$$

то очевидно, що ряд (13) збігається тоді і лише тоді, коли збігаються ряди (14), причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{15}$$

Як приклад, розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n, \tag{16}$$

де $\delta = x + y \in$. Оскільки

$$\sum_{k=0}^{n} \delta^k = \sum_{k=0}^{n} (x^k + kx^{k-1}y) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)' y,$$

то ряд (16) збігається для всіх δ, у яких $|x| < 1$, причому його сума рівняється

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{(1 - x)^2} y = \frac{1 - x + y}{(1 - x)^2} = \frac{1}{1 - \delta}.$$

Нехай маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n, \tag{17}$$

де $a_0, a_1, \ldots$ — дійсні числа, тобто (17) степеневий ряд, складений із степенів дуальних чисел, але з дійсними коефіцієнтами. Для такого ряду має місце такий аналог теореми Абеля.

Теорема 3. *Якщо ряд (17) збігається у точці $\delta_0 = x_0 + y_0$ ($x_0 \neq 0$), то він збігається для всіх δ, для яких $|x| < |x_0|$.*

Доведення. Нехай ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0^n + n x_0^{n-1} y)$$

збігається. Тоді збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n,$$

і в силу теореми Абеля степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

збігається для всіх x, для яких $|x| < |x_0|$, тобто збігається на інтервалі $(-|x_0|, |x_0|)$. Враховуючи, що на цьому інтервалі збігається ряд, складений з похідних його членів, маємо, що для всіх x ($|x| < |x_0|$) збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}.$$

А тому ряд (17) збігається для всіх δ, для яких $|x| < |x_0|$. □

Враховуючи структуру області збіжності степеневого ряду, маємо, що ряд (17) збігається у смузі $\{\delta||x| < r\}$, де r радіус збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

На підставі отриманого результату маємо можливість означити основні елементарні функції, а саме за аналітичною функцією $f(x)$, тобто функцією, яка є сумою певного степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{18}$$

будуємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n. \tag{19}$$

Якщо ряд (18) збігається на інтервалі $(-r; r)$, то ряд (19) збігається на смузі $\Pi_\Gamma = \{\delta||x| < r\}$. Тоді відповідність, яка кожному дуальному числу $\delta \in \Pi_\Gamma$ відносить відповідну суму ряду (19), є функція, визначена на Π_Γ, причому вона подається у вигляді

$$f(\delta) := f(x) + f'(x)y. \tag{20}$$

Таким чином, маємо:

$$e^\delta := e^x + e^x y,$$

$$\sin\delta := \sin x + \cos x \cdot y,$$

$$\cos\delta := \cos x - \sin x \cdot y,$$

визначені для кожного $\delta \in$, причому для будь-яких $\delta_1, \delta_2 \in$

$$e^{\delta_1+\delta_2} = e^{\delta_1} e^{\delta_2},$$

$$\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1,$$

$$\sin(\delta_1+\delta_2) = \sin\delta_1\cos\delta_2 + \cos\delta_1\sin\delta_2,$$

$$\cos(\delta_1+\delta_2) = \cos\delta_1\cos\delta_2 - \sin\delta_1\sin\delta_2;$$

$$\ln(1+\delta) := \ln(1+x) + \frac{y}{1+x},$$
$$(1+\delta)^{\alpha} := (1+x)^{\alpha} + \alpha(1+x)^{\alpha-1}y,$$

визначені для кожного $\delta \in \{\delta||x| < 1\}$, причому

$$(1+\delta)^{\alpha_1+\alpha_2} := (1+\delta)^{\alpha_1}(1+\delta)^{\alpha_2};$$
$$\arcsin\delta = \arcsin x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\operatorname{arctg}\delta = \operatorname{arctg} x + \frac{y}{1+x^2},$$

визначені для кожного $\delta \in \{\delta||x| < 1\}$.

З рівняння

$$e^{\delta} = e^{x} + e^{x}y = u + v$$

дістанемо $x = \ln u, y = \frac{v}{u}$.

Отож функція

$$f(\delta) = \ln x + \frac{1}{x}y$$

є функцією оберненою до функції $f(\delta) = e^{\delta}$, яка визначена для всіх δ з додатною дійсною частиною. А оскільки для будь-яких δ_1 $(x_1 > 0)$, $\delta_2(x_2 > 0)$

$$\ln(\delta_1\delta_2) = \ln(x_1x_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)) =$$
$$= \ln(x_1x_2) + \frac{x_1y_2 + y_1x_2}{x_1x_2} = \ln\delta_1 + \ln\delta_2,$$

то природно назвати її логарифмічною функцією дуальної змінної і позначити

$$\ln\delta = \ln x + \frac{y}{x}.$$

Оскільки з рівняння

$$\delta^n = x + y,$$

де $x > 0$, маємо:

$$\sqrt[n]{x+y} = \sqrt[n]{x} + (\sqrt[n]{x})'y,$$

тобто

$$\delta^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} + (\sqrt[n]{x})'y.$$

Тоді для будь-якого додатного раціонального числа $r = \frac{m}{n}$ маємо:

$$\delta^r = (\delta^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{x} + (\sqrt[n]{x})'y)^m =$$
$$= x^r + m(\sqrt[n]{x})^{m-1}(\sqrt[n]{x})'y =$$
$$= x^r + \frac{m(\sqrt[n]{x})^{m-1}}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}y = x^r + rx^{r-1}y.$$

Врахувавши, що

$$\frac{1}{\delta^n} = \frac{1}{x^n + nx^{n-1}y} = \frac{x^n - nx^{n-1}y}{x^{2n}} = x^{-n} - nx^{-n-1}y,$$

означимо

$$\delta^{-n} := x^{-n} - nx^{-n-1}y.$$

А з рівності $\delta^{\frac{1}{n}}\alpha^{-\frac{1}{n}} = 1$ означимо $\delta^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)' y$. Таким чином, для будь-якого раціонального r маємо:

$$\delta^r = x^r + rx^{r-1}y.$$

Нехай послідовність раціональних чисел (r_n) збігається до ірраціонального числа α. Тоді для кожного $x > 0$ послідовності (x^{r_n}) і $(r_n x^{r_n-1})$ збігаються відповідно до x^α і $\alpha x^{\alpha-1}$. Отже, послідовність дуальних чисел (δ^{r_n}), де $x > 0$, збігається до певного дуального числа, і таким чином, за означенням маємо:

$$\delta^\alpha = \lim_{n\to\infty} \delta^{r_n},$$

де

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \alpha.$$

Якщо $\alpha_1, \alpha_2 \in$, то для кожного $\delta(x > 0)$ маємо:

$$\delta^{\alpha_1}\delta^{\alpha_2} = \lim_{n\to\infty}(x^{r_n^{(1)}} + r_n^{(1)}x^{r_n^{(1)}-1}y)\lim_{n\to\infty}(x^{r_n^{(2)}} + r_n^{(2)}x^{r_n^{(2)}-1}y),$$

де

$$\lim_{n\to\infty} r_n^{(1)} = \alpha_1, \lim_{n\to\infty} r_n^{(2)} = \alpha_2.$$

Тоді

$$\delta^{\alpha_1}\delta^{\alpha_2} = \lim_{n\to\infty}(x^{r_n^{(1)}} + r_n^{(1)}x^{r_n^{(1)}-1}y)\cdot(x^{r_n^{(2)}} + r_n^{(2)}x^{r_n^{(2)}-1}y) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(x^{r_n^{(1)}+r_n^{(2)}} + (r_n^{(2)}x^{r_n^{(1)}+r_n^{(2)}-1} + r_n^{(1)}x^{r_n^{(1)}+r_n^{(2)}-1})y) =$$
$$= x^{\alpha_1+\alpha_2} + (\alpha_1+\alpha_2)x^{\alpha_1+\alpha_2-1} = \delta^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Аналогічно переконуємось, що

$$\delta_1^\alpha\delta_2^\alpha = (\delta_1\delta_2)^\alpha.$$

5. Похідна функції дуальної змінної. Нехай функція $w = f(\delta)$ дуальної змінної визначена в деякому околі точки δ_0, і нехай в цьому околі, за винятком точки δ_0, визначена функція

$$\frac{f(\delta) - f(\delta_0)}{\delta - \delta_0}.$$

Якщо існує

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\delta) - f(\delta_0)}{\delta - \delta_0},$$

то її назвемо *похідною* функції $f(\delta)$ у точці δ_0 і позначатимемо $f'(\delta_0)$.

Нехай маємо функцію $f(\delta) = \delta^n (n \geq 1)$ і точку $\delta_0 \in$. Позначимо

$$\triangle\delta = \triangle x + \triangle y = x - x_0 + (y - y_0),$$

причому $x \neq x_0$. Тоді

$$\frac{f(\delta) - f(\delta_0)}{\delta - \delta_0} = \frac{(\delta_0 + \triangle\delta)^n - \delta_0^n}{\triangle\delta} =$$

$$= \frac{1}{\triangle\delta}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \delta_0^{n-k}(\triangle\delta)^k =$$

$$= \frac{1}{\triangle x^2}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \delta_0^{n-k}\triangle x^2(\triangle\delta)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k \delta_0^{n-k}(\triangle\delta)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \delta_0^{n-k}(\delta-\delta_0)^{k-1}.$$

Якщо ж $x = x_0, y \neq y_0$, то

$$\frac{f(\delta)-f(\delta_0)}{\delta-\delta_0} := \sum_{k=1}^{n} C_n^k \delta_0^{n-k}((y-y_0))^{k-1} =$$

$$= n\delta_0^{n-1} + C_n^2\delta_0^{n-2}(y-y_0).$$

І очевидно, що

$$(\delta^n)' = n\delta^{n-1}.$$

Теорема 4. *Якщо функція $w = f(\delta)$ в деякому околі точки δ_0 подається у вигляді*

$$f(\delta) = f(x) + f'(x)y,$$

у точці x_0 функція $f(x)$ має другу похідну, то

$$f'(\delta_0) = f'(x_0) + f''(x_0)y_0. \tag{21}$$

Доведення. Нехай $\triangle\delta = \delta - \delta_0 = x - x_0 + (y - y_0) = \triangle x + \triangle y$ і $\triangle x \neq 0$. Тоді

$$\frac{f(\delta)-f(\delta_0)}{\delta-\delta_0} = \frac{f(\delta_0+\triangle\delta)-f(\delta_0)}{\triangle\delta} =$$

$$= \frac{1}{\triangle\delta}(f(x_0+\triangle x+(y_0+\triangle y)) - f(x_0+y_0)) =$$

$$= \frac{1}{\triangle\delta}(f(x_0+\triangle x) - f(x_0) + f'(x_0+\triangle x)(y_0+\triangle y) - f'(x_0)y_0) =$$

$$= \frac{1}{\triangle x^2}((f(x_0+\triangle x)-f(x_0))\triangle x - (f(x_0+\triangle x)-f(x_0))\triangle y +$$

$$+(f'(x_0+\triangle x)(y_0+\triangle y) - f'(x_0)y_0)\triangle x) =$$

$$= \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x} + \frac{f'(x_0+\triangle x)-f'(x_0)}{\triangle x}y_0 +$$

$$+\frac{1}{\triangle x^2}(f'(x_0+\triangle x)\triangle x - (f(x_0+\triangle x)-f(x_0)))\triangle y =$$

$$= \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x} + \frac{f'(x_0+\triangle x)-f'(x_0)}{\triangle x}y_0 +$$

$$+\frac{1}{\triangle x^2}(f'(x_0+\triangle x)\triangle x - f'(x_0+\theta(\triangle x))\triangle x)\triangle y =$$

$$= \frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x} + \frac{f'(x_0+\triangle x)-f'(x_0)}{\triangle x}y_0 +$$

$$+f''(x_0+\theta_1(\triangle x)\triangle x)(1-\theta(\triangle x))\triangle y.$$

Якщо ж $\triangle x = 0$, то

$$\frac{f(\delta)-f(\delta_0)}{\delta-\delta_0} := f'(x_0)+f''(x_0)y_0+O(\triangle y).$$

Отже,

$$\lim_{\delta\to\delta_0}\frac{f(\delta)-f(\delta_0)}{\delta-\delta_0} = f'(x_0)+f''(x_0)y_0.\square$$

Якщо

$$f(\delta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\delta^n,$$

то степеневий ряд можна почленно диференціювати, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n n\delta^{n-1}=f'(\delta)$$

на тій же смузі збіжності. Більше того його можна диференціювати скільки завгодно разів.

На підставі (21) для основних елементарних функцій маємо:

$$\begin{array}{ll}
1^o(\delta^n)'=n\delta^{n-1}, & 5^o(ln(1+\delta))'=\frac{1}{1+\delta},\\
2^o(e^\delta)'=e^\delta, & 6^o((1+\delta)^\alpha)'=\alpha(1+\delta)^{\alpha-1},\\
3^o(\sin\delta)'=\cos\delta, & 7^o(\arcsin\delta)'=(1-\delta^2)^{-\frac{1}{2}},\\
4^o(\cos\delta)'=-\sin\delta, & 8^o(\operatorname{arctg}\delta)'=(1+\delta^2)^{-1}.
\end{array}$$

Більше того,

$$(\ln\delta)'=\frac{1}{\delta},\quad (\delta^\alpha)'=\alpha\delta^{\alpha-1}.$$

Також мають місце основні *правила диференціювання.* Якщо функції $f(\delta), g(\delta)$ в деякій області $E\subset$ задовольняють умови теореми 4, то для всіх $\delta\in E$

$$\begin{gathered}
(a)(f(\delta)+g(\delta))'=f'(\delta)+g'(\delta),\\
(b)(f(\delta)g(\delta))'=f'(\delta)g(\delta)+f(\delta)g'(\delta),\\
(c)\left(\frac{f(\delta)}{g(\delta)}\right)'=\frac{f'(\delta)g(\delta)-f(\delta)g'(\delta)}{g^2(\delta)}.
\end{gathered}\tag{22}$$

Для прикладу доведемо рівність (c). Оскільки

$$\frac{f(\delta)}{g(\delta)}=\frac{f(x)+f'(x)y}{g(x)+g'(x)y}=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}y,$$

то

$$\left(\frac{f(\delta)}{g(\delta)}\right)'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'+\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)''y.$$

З другого боку,

$$\frac{f'(\delta)g(\delta)-f(\delta)g'(\delta)}{g^2(\delta)}=$$

$$=\frac{(f'(x)+f''(x)y)(g(x)+g'(x)y)-(f(x)+f'(x)y)(g'(x)+g''(x)y)}{(g(x)+g'(x)y)^2}=$$

$$= \frac{1}{g^4(x)}(f'(x)g(x) - f(x)g'(x) + (f''(x)g(x) - f(x)g''(x))y)(g^2(x) - 2g(x)g'(x))) =$$
$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} + \frac{1}{g^4(x)}(f''(x)g^3(x) - f(x)g''(x)g^2(x) - 2f'(x)g'(x)g^2(x) +$$
$$+2f(x)g(x)(g'(x))^2)y = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' + \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'' y.$$

(d) *Ланцюгове правило.* Якщо функція дуальної змінної $f(\delta)$ визначена на області E, образ множини E $f(E)$ включається в область визначення функції $g(\delta)$, то на області E визначена складена функція $g(f(\delta))$. Якщо ж крім того

$$f(\delta) = f(x) + f'(x)y, g(\delta) = g(x) + g'(x)y,$$

то

$$g(f(\delta)) = g(f(x) + f'(x)y) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)y. \tag{23}$$

За умови, що $f(\delta)$ і $g(\delta)$ диференційовні, маємо:

$$(g(f(\delta)))' = g'(f(\delta))f'(\delta). \tag{24}$$

Справді, в силу подання (23)

$$(g(f(\delta)))' = (g(f(x)))' + (g'(f(x))f'(x))'y =$$
$$= g'(f(x))f'(x) + (g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x))y =$$
$$= (g'(f(x)) + g''(f(x))f'(x)y)(f'(x) + f''(x)y) =$$
$$= g'(f(\delta))f'(\delta).$$

Таким чином, побудовано основи диференціального числення функцій дуальної змінної.

В наступній публікації буде побудовано основи інтегрального числення.

Література

[1] *Садберн Е.* Кватернионный анализ//Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — №2. — С. 130–157.

[2] *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры: Пер. с англ. — М: Мир, 1986 — 518 с.

[3] *Яглом И.М.* Комплексные числа. — М: Мир, 1963 — 192 с.

[4] *Вотякова Л.А.* V_3–алгебра//Наукові записки ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 2003. — Вип. 3. — С. 199–202.

[5] *Працьовитий М.В., Вотякова Л.А.* Аналіз на алгебрі двічі стохастичних матриць//Науковий часопис НПУ ім. М. Драгоманова, 2005. — С. 282–300.