

УДК 519.21

Еволюція стохастичних систем. Дифузійний феномен

В. С. Королюк

(Інститут математики НАН України)

Для стохастичних процесів накопичення-споживання застосовуються дві схеми апроксимації: усереднення та дифузійна апроксимація.

Дифузійний феномен полягає в тому, що апроксимуюча дифузія є завершальним етапом апроксимації. Крім того, на відміну від реальності стохастичних систем, дифузійна апроксимація не має природної інтерпретації, проте її властивості достатньо ефективно відображають реальні еволюційні стохастичні системи.

Стохастичні системи накопичення та споживання визначаються двома функціями інтенсивностей моментів накопичення $\alpha_+(u)$ та моментів споживання $\alpha_-(u)$ та двома функціями розподілу об'ємів накопичення $G_+(u) = \mathbb{P}\{\alpha_+ \leq u\}$ та споживання $G_-(u) = \mathbb{P}\{\alpha_- \leq u\}$.

Надалі будмо припускати, що об'єми споживання та накопичення фіксовані й рівні 1: $\alpha_{\pm} = 1$ з ймовірністю 1. Це припущення спрощує подальший розгляд проблеми дифузійної апроксимації стохастичних мереж, не зменшуючи істотно її загальності.

Еволюція марковської стохастичної системи з функціями інтенсивностей $\alpha_{\pm}(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$, в евклідовому просторі \mathbb{R}^d описується марковським процесом $\nu(t)$, $t \geq 0$, що фіксує об'єм (стан) стохастичної системи в момент часу $t \geq 0$.

Ймовірнісний зміст інтенсивностей $\alpha_{\pm}(u)$ виражається апроксимацією ймовірностей зміни станів за малий проміжок часу $\Delta \rightarrow 0$ ($\Delta > 0$):

$$\mathbb{P}\{\nu(t + \Delta) = u \pm 1 | \nu(t) = u\} = \Delta \alpha_{\pm}(u) + o(\Delta). \quad (1)$$

Локальна поведінка процесу $\nu(t)$ описується породжуючим оператором (генератором), що на тест-функції $\varphi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, приймає дійсні значення і

$$L\varphi(u) = \alpha_+(u)\varphi(u+1) + \alpha_-(u)\varphi(u-1) - \alpha(u)\varphi(u), \quad (2)$$

де $\alpha(u) := \alpha_+(u) + \alpha_-(u)$.

Ймовірнісний зміст породжуючого оператора (ПО) марковського процесу виражається апроксимацією математичного сподівання зміни стану процесу на тест-функції

$$E[\varphi(\nu(t + \Delta)) - \varphi(u) | \nu(t) = u] = \Delta L\varphi(u) + o(\Delta). \quad (3)$$

Використовуючи ПО, ми переходимо до аналізу поведінки марковського процесу від траєкторії процесу до функцій на траєкторіях процесу, що істотно збагачує математичний апарат аналізу.

2. Основна проблема аналізу еволюції стохастичних систем полягає у визначенні *глобальних характеристик системи* на зростаючих інтервалах часу, використовуючи *локальні характеристики системи* на малих інтервалах часу.

Не зважаючи на досить просту форму локальних характеристик процесів накопичення-споживання, що задається функціями інтенсивностей $\alpha_{\pm}(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$, вивчення глобальної поведінки є досить складною проблемою. Тому, природно, виникає *проблема спрощеного опису* еволюції стохастичної системи, завдяки чому аналіз глобальної поведінки системи стає ефективним.

Найбільш ефективним математичним методом спрощеного аналізу, на мій погляд, є асимптотичний аналіз, що використовує операцію граничного переходу. Для асимптотичного аналізу необхідно розглядати систему *в схамі серій*, що визначається певним *параметром серії*, який, за традиціями школи Крилова-Боголюбова, будмо вважати малом параметром серії $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$).

Звісно, в першу чергу виникає проблема введення параметра серії в локальні характеристики системи. Для еволюційних стохастичних систем типу накопичення-споживання малий параметр серії ε природно вводити у вигляді *масштабування по простору й за часом*, а саме:

$$\nu_{\varepsilon}(t) = \varepsilon \nu\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Відповідне перетворення локальних характеристик, а саме породжуючого оператора, буде мати вигляд:

$$L^{\varepsilon} \varphi(u) = \varepsilon^{-1} [\alpha_{+}(u) \varphi(u + \varepsilon) + \alpha_{-}(u) \varphi(u - \varepsilon) - \alpha(u) \varphi(u)]. \quad (5)$$

Зауважимо, що тепер $u = \nu_{\varepsilon}(t)$.

Тепер можна переходити до асимптотичного аналізу процесу $\nu_{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, що визначається оператором (5). Для цього розглянемо достатньо гладку тест-функцію, що має дві обмежені неперервні похідні. Застосовуючи формулу Тейлора до виразу (5) (тут для наочності використовується скорочене позначення $C(u) \varphi'(u) := \sum_{k=1}^d C_k(u) \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k}$), маємо асимптотичне представлення:

$$L^{\varepsilon} \varphi(u) = C(u) \varphi'(u) + \theta^{\varepsilon}(u) \varphi(u), \quad (6)$$

де головний член визначається *функцією швидкостей*

$$C(u) = \alpha_{+}(u) - \alpha_{-}(u), \quad (7)$$

а залишковий член

$$|\theta^{\varepsilon}(u) \varphi(u)| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Звернемо увагу, що головний член у (6) визначає генератор детермінованої еволюційної системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), \quad u(0) = 0. \quad (9)$$

Тобто напівгрупа

$$\mathbf{C}_t \varphi(u) := \varphi(u(t)), \quad u(0) = 0, \quad (10)$$

має генератор

$$\mathbf{C} \varphi(u) = C(u) \varphi'(u). \quad (11)$$

Маючи асимптотичне представлення (6), можна зробити висновок (користуючись сучасними методами доведення граничних теорем для випадкових процесів), що має місце збіжність при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\varepsilon \nu \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \Rightarrow \nu(t), \quad t \geq 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (12)$$

Таку збіжність називають *усередненням*: стохастичні (випадкові) зміни системи на зростаючих інтервалах часу усереднюються і перетворюються у детермінований рух, що визначається розв'язком еволюційного рівняння (6).

Зауважимо, що згідно з означенням функцій інтенсивностей в (1), середній зсув процесу $\nu(t)$ за одиницю часу якраз дорівнює функції швидкості руху $C(u)$ (див. (7)). Якщо усереднена система в (6) є стійкою і має єдину точку рівноваги (еквілібріум) ρ :

$$C(\rho) = 0, \quad (13)$$

тоді можна переконатися в тому, що має місце *збіжність до точки рівноваги*:

$$\varepsilon \nu \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \Rightarrow \rho, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Траєкторії стохастичної системи наближаються до точки рівноваги.

3. Флюктуації стохастичної системи. Зрозуміло, що в усередненні (12) або (14) втрачається істотна інформація про стохастичну систему — *випадкові зміни станів*. Тому, природно, виникає нова проблема вивчення *флюктуацій* стохастичної системи відносно рівноваги (еквілібріуму).

Треба тепер розглянути нове масштабування стохастичного процесу $\nu(t)$, $t \geq 0$, щоб в асимптотичному аналізі проявились випадкові флюктуації відносно рівноваги. Нове масштабування має вигляд:

$$\zeta_\varepsilon(t) := \varepsilon \nu \left(\frac{t}{\varepsilon^2} \right) - \varepsilon^{-1} \rho, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Пояснення до (15) дуже прості. Згідно зі схемою усереднення (14), має місце збіжність

$$\varepsilon^2 \nu \left(\frac{t}{\varepsilon^2} \right) - \rho \Rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Щоб виявити флюктуації треба масштабувати різницю, наприклад, розділивши її на ε .

Тепер переносимо масштабування (15) на породжуючий оператор (3):

$$\varepsilon^2 \tilde{L}_0^\varepsilon \varphi(u) = [\alpha_+(\rho + \varepsilon u) \varphi(u + \varepsilon) + \alpha_-(\rho + \varepsilon u) \varphi(u - \varepsilon) - \alpha(\rho + \varepsilon u) \varphi(u)]. \quad (16)$$

Зауважимо, що умова (15) означає

$$\varepsilon^2 \nu \left(\frac{t}{\varepsilon^2} \right) = \rho + \varepsilon \zeta_\varepsilon(t).$$

Породжуючи оператор процесу $\zeta_\varepsilon(t)$ бжується з породжуючого оператора процесу $\nu(t)$. Отже, для початкової умови $\zeta_\varepsilon(t) = u$ маємо початкову умову $\varepsilon^2 \nu \left(\frac{t}{\varepsilon^2} \right) = \rho + \varepsilon u$. Цим пояснюється вираз (16).

Тепер можна реалізувати асимптотичний аналіз породжуючого оператора (16) на достатньо гладких тест-функціях $\varphi(u)$, що мають три обмежених неперервних похідних.

Застосовуючи формули тейлора у виразі (16), припускаючи, що інтенсивності $\alpha_\pm(u)$ також неперервно диференційовні, маємо асимптотичне представлення ПО процесу флюктуації (15):

$$\tilde{L}_0^\varepsilon \varphi(u) = u C'(\rho) \varphi'(u) + \frac{1}{2} b(\rho) \varphi''(u) + \theta^\varepsilon(u) \varphi(u). \quad (17)$$

Тут використали умови (13).

Головний член асимптотики

$$L \varphi(u) = u C'(\rho) \varphi'(u) + \frac{1}{2} b(\rho) \varphi''(u) \quad (18)$$

визначає дифузійний процес типу Орнштейна-Уленбека $\zeta(t)$, $t \geq 0$, а залишковий член задовольняє умови (8).

Маючи асимптотичне представлення (17), можна довести слабку збіжність флюктуацій:

$$\varepsilon \nu \left(\frac{t}{\varepsilon^2} \right) - \varepsilon^{-1} \rho \Rightarrow \zeta(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (19)$$

Таким чином, виходить друга апроксимація стохастичної системи:

$$\varepsilon^2 \nu \left(\frac{t}{\varepsilon^2} \right) \simeq \rho + \varepsilon \zeta(t), \quad t \geq 0. \quad (20)$$

4. Дифузійний феномен апроксимації процесів накопичення-споживання полягає, по-перше, в тому, що ця апроксимація є завершальною. Подальших членів асимптотичного розкладу (20) немає. По-друге, парадоксальність дифузійної апроксимації полягає в тому, що реальна стохастична система, що описується процесом наокичення-споживання $\nu(t)$, $t \geq 0$, апроксимується дифузійним процесом $\zeta(t)$,

$t \geq 0$, що не має фізичної інтерпретації. Стохастичне рівняння для процесу $\zeta(t)$, $t \geq 0$, має вигляд:

$$d\zeta(t) = C'(\rho)\zeta(t)dt + \sqrt{b(\rho)}dW_t. \quad (21)$$

Тут W_t , $t \geq 0$, — процес броунівського руху, траєкторії якого ніде не диференційовні функції. Швидкість зміни процесу в будь-який момент часу дорівнює нескінченності. В той же час, дифузійна апроксимація (20) на зростаючих інтервалах часу цілком спостережна. Вона визначається лише трьома параметрами-константами: точка рівноваги ρ , швидкість детермінованого зсуву $C'(\rho) = \alpha'_+(\rho) - \alpha'_-(\rho)$ та дисперсія флюктуацій $b(\rho) = \alpha_+(\rho) + \alpha_-(\rho)$.

Наприклад, процес (21) має нормальний стаціонарний розподіл (за умови $C'(\rho) < 0$). Це дає можливість ефективного обчислення стаціонарних характеристик стохастичної системи. Більше того, розглядаючи траєкторії реальної системи $\nu(t)$, $t \geq 0$, як траєкторії дифузійної апроксимації можна побудувати стаціонарні оцінки параметрів ρ , $\alpha(\rho) = C'(\rho)$, $b(\rho)$, тим самим повністю визначити характер глобальної поведінки стохастичної системи.

5. Дифузійний феномен зникає, якщо замість самого процесу $\nu_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, розглядати його усереднення (по розподілу) з тест-функцією $\varphi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, що визначається напівгрупою:

$$L_t^\varepsilon \varphi(u) := E[\varphi(\nu_\varepsilon(t)) | \nu_\varepsilon(0) = 0] =: \Phi_t^\varepsilon(u), \quad (22)$$

генератором якої є породжуючий оператор нормованого процесу накопичення-споживання (5). Детермінована еволюційна система $\Phi_t^\varepsilon(u)$ визначається розв'язком еволюційного рівняння:

$$\frac{d\Phi_t^\varepsilon(u)}{dt} = L^\varepsilon \Phi_t^\varepsilon(u), \quad \Phi_0^\varepsilon(u) = \varphi(u). \quad (23)$$

До цього рівняння застосовні методи асимптотичного розвинення за малим параметром ε (в розвитку яких приймав і приймає активну участь М.І.Шкіль).

Проте, члени асимптотичного розкладу вже не мають такої наочної інтерпретації, як у схемі дифузійної апроксимації самої стохастичної системи.