Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2006, № 7.— С. 12–19.

УДК 629.7/539.02/821.74

Побудова вектора управління при дослідженні процесу охолодження виливків в дисперсному середовищі

В. П. Кравченко, М. І. Шут, П. В. Русаков, І. О. Шинський

(Фізико-технологічний інститут металів та сплавів НАН України, Київ)

Анотація. Розглянута задача математичної побудови вектора управління процесом керованого охолодження циліндричного виливка, оточеного шаром піщаної суміші, який являє собою пористе дисперсне середовище, що проводитьтепло.

Abstract. The task of construction of a vector of monitoring process heat sink cooling of the cylinder in surrounded gas-permeability sandy composite layer is considered.

При одержанні виливків за моделями, що піддаються термодеструкції у формі під дією потоку металевого розплаву [1], структурні перетворювання металевої рідини у виливок відбуваються в результаті складних процесів тепло і масообміну в системі **модель - метал - піщана форма.** Тому під час заповнення форми рідким металом необхідно оптимально керувати підтримкою рівноваги газового тиску на розділі поверхонь модель - форма [2], і здійснювати цілеспрямоване керування формуванням структури металу методами регульованого охолодження. В *ливарних* цехах визначення контрольованих параметрів процесу охолодження виливка у формі здійснюється як за розрахунковим часом, так і за допомогою пірометрів і тепловізорів. В основному фіксуються температури металу наприкінці заливання у форму, і після завершення процесу прискореного охолодження. Регулювання процесу формування структури шляхом регульованого прискореного тепловідводу з поверхні виливка з урахуванням подібних дискретних вимірів буде мати малу точність і невелику ефективність, тому що пірометр здійснює вимір тільки температури поверхні металу. Ливарникам відомо, що прискорене охолодження виливка, наприклад гільзи 2 циліндра ДВЗ [1] супроводжується значними температурними перепадами по перетині профілю. Тобто реалізація необхідних траєкторій охолодження з можливістю мінімізації температурної неоднорідності і напружено-деформованого стану [3]

[1] ДВЗ — двигун внутрішнього згорання

є вирішальною для досягнення рівномірних чи диференційованих по перетину і довжині циліндричного виливка механічних властивостей. Але аналізуючи попередні технології процесів лиття, можна підкреслити, що в реальних схемах ще не задіяна достатня кількість фізичних параметрів, якими можна і необхідно керувати, щоб досягти заданих критеріїв якості готової продукції. Таким чином, і зараз існує нагальна потреба комплексного продовження дослідження процесів лиття і побудови моделей керування. Розглянемо задачу охолодження циліндричного виливка, оточеного шаром піщаної суміші, який являє собою пористе дисперсне середовище що проводить тепло. Тепловіддача відбувається через пористий шар, за умовами проходження через нього повітряного (газового) потоку. Беручи до уваги гіперболічне рівняння теплопровідності [4] і розглядаючи процес охолодження як нестаціонарний процес, теплофізичний стан такої системи управління апроксимуємо звичайним диференціальним рівнянням 2-го порядку

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = \nu(t) \tag{1}$$

де x(t) - розподіл температури по часу; ν(t) - функція управління. В даному випадку параметром управління вибираємо швидкість повітряного потоку, яким продувається шар, що проводить тепло. Зведемо рівняння (1) до системи звичайних диференційних рівнянь першого порядку в нормальній формі.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\sum_{K=1}^{2} a_K(t)x_K(t) + \nu(t) \tag{2}$$

$$t \in G = (0, \infty) \in R^1, \quad G_i = (t_{i-1}, t_i) \subset G, \quad (t \geq 0)$$

Розглядаючи дану систему , як структурно - неоднорідну [5,6], до системи рівнянь (2) додамо систему додаткових співвідношень, які являть собою систему умов сполучення такого вигляду

$$[x_K(t)]_{t=t_i} = 0 \tag{3}$$

$$(k = 1, 2;\ i = 1, \ldots .;\ t \geq 0)$$

Рішення системи рівнянь (2), як розв'язок задачі Коші будемо шукати при початкових умовах

$$\overline{x}(t_0) = [x_1(t_0, x_2(t_0)] \tag{4}$$

$$t_0 = 0$$

Розв'язуючи задачу Коші для системи (2) при початкових умовах

$$x^i_{k,j}(t_{i-1}) = \delta_{k,j}$$

$$(k = 1, 2;\ i = 1, K)$$

одержимо матрицю нормальних фундаментальних розв'язків для системи рівнянь, неоднорідної по відношенню до системи (2)

$$\Phi^i(t) = \{\phi^i_{k,j}(t)\} \tag{5}$$

$$(t \in G_i \subset G \in R^1, \quad k,j = 1,2; \quad i = 1,K; \quad t \geq 0)$$

на кожному і - проміжку інтервалу інтегрування $(0, t = \infty)$ Розв'язками системи диференційних рівнянь (2) являються функція $x_i(t)$ зміни температури виливка при охолодженні, та швидкість охолодження виливка яка визначається функцією $x_2(t)$. Тоді загальний розв'язок крайової задачі (2)-(4), регулювання процесу формування структури шляхом прискореного тепловідводу з поверхні виливка, запишеться таким чином

$$x^i_k(t) = \sum_{j=1}^{2} u^{(i)}_{j,k}\phi^{(i)}_{k,j}(t)x_j(0) + \psi^{(i)}_k(t) \tag{6}$$

$$(t \in G_i \subset G \in R^1, \quad k = 1,2; \quad i = 1,K; \quad t \geq 0)$$

де коефіцієнти $u^{(i)}_{j,k}$ визначаються за знайденими рекурентними формулами [6]

В співвідношенні (6) вектор $\overline{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$ це частинний розв'язок неоднорідної системи рівнянь (2) при нульових початкових умовах

$$x^i_k(t_{i-1}) = 0$$

$$k = 1,2; \quad i = 1, \ldots; \quad t = 0$$

Цей розв'язок можна знайти методом варіації довільних сталих [7].

$$\psi^{(i)}_k(t) = \sum_{j=1}^{2} u^{(i)}_{j,k}\phi^{(i)}_{j,k}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{det\Phi^i_j(\tau)}{det\Phi^i(\tau)} d\tau$$

Тут $\Phi^i_j(\tau)$ матриця одержана з матриці (5) шляхом заміни j - го стовпця на вектор, $\{0, \nu(t)\}$

Ввівши позначення

$$R^i_j = \frac{det\Phi^i_{j-1}(t)}{det\Phi^i(t)}\ , \tag{7}$$

частковий розв'язок системи рівнянь (2) можна записати

$$\psi^{(i)}_k(t) = \sum_{j=1}^{2} u^{(i)}_{j,k}\phi^{(i)}_{j,k}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_j(t)\nu(\tau) d\tau$$

Тоді розв'язок вихідної крайової задачі (2) - (4) запишеться таким чином

$$x^{(i)}_k(t) = \sum_{j=1}^{2} u^{(i)}_{j,k}\phi^{(i)}_{k,j}(t) \left[x_j(0) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} R_j(\tau)\nu(\tau) d\tau \right] \tag{8}$$

$$(t \in G_i \subset G \in R^1, \quad k = 1,2; \quad i = 1, \ldots; \quad t \geq 0)$$

Будемо розглядати управління системи (2) відносно початку координат, тобто $x_k(t) = 0, \forall t$.

Враховуючи це, з системи розв'язків (8) одержимо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно координат $x_j(0)$.

Одержана однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь в силу того, що $\phi_{k,i}^{(i)}(t) \neq 0$,буде мати нетривіальний розв'язок лише при умові

$$x_j(0) + \int_{t_{i-1}}^{t_s} R_j^{(i)}(\tau)\nu(\tau)d\tau = 0$$

Таким чином, для визначення фазових траєкторій системи рівнянь (2) при управлінні $\nu(t)$ одержимо наступне рівняння:

$$x_j(0) = -\int_{t_{i-1}}^{t_s} R_j^{(i)}(\tau)\nu(\tau)d\tau \tag{9}$$

$$(j = 1, 2;\ i = 1, 2K)$$

Розглядаючи дану систему управління, введемо обмеження на абсолютну величину управляючої дії, а саме на величину швидкості повітряного потоку:

$$|\nu(\tau)| \leq V \tag{10}$$

Для визначення області управління F скористаємося визначенням опорної гіперплощини [8]. Гіперплощина, яка містить хоча б одну точку області управління, називається опорною, коли область управління повністю лежить в одному з двох підпросторів, на які ця гіперплощина ділить простір стану розглядуваної системи. Для побудови області управління візьмемо довільний одиничний вектор $\overline{I} = \{i_1, i_2\}$ і побудуємо всі можливі опорні гіперплощини для області управління.

Враховуючи замкненість та симетричність області управління, таких гіперплощин буде дві [8]. Кожна з цих гіперплощин ділить простір стану системи управління на два підпростори, в одному з яких немає точок області управління. Позначимо через $P(\overline{I}, \overline{T})$ ту площину, для якої одиничний вектор I направлений в напівпростір, який не містить області управління. Тоді через $P(-\overline{I}, \overline{T})$ позначимо симетричну їй площину. Тут $\overline{T}$ вектор $\overline{T} = \{t_0, t_1, K\}$.

Нехай $d(\overline{I}, \overline{T})$ — відстань від початку координат до опорних площин $P(\overline{I}, \overline{T})$ та $P(-\overline{I}, \overline{T})$ в розумінні евклідової метрики. Приймаючи до уваги умову випуклості області управління їй будуть належати ті і тільки ті точки, координати яких задовольняють нерівностям $\left(\overline{I}, \overline{x}(t)\right)$ має місце співвідношення:

$$d(\overline{I}, \overline{T}) = \sup_{x \in F}\left(\overline{I}, \overline{x}(t)\right) = \sup_{x \in F} \sum_{j=1}^{2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} -R + j(\tau)\nu(\tau)d\tau$$

Скалярний добуток $\left(\overline{I}, \overline{x}(t)\right)$ досягає своєї верхньої межі на границі області управління, тобто, враховуючи (9), можемо записати:

$$d(\overline{I}, \overline{T}) = \int_0^T \nu(\tau) \sum_{j=1}^{2} -R_j(\tau) i_j d\tau \tag{11}$$

Максимізуючи вираз (11) при обмеженні (10) можна одержати наступне управління:

$$\nu(\tau) = V sgn\left(\sum_{j=1}^{2} -R_j(\tau) i_j\right) \tag{12}$$

Таким чином, враховуючи позначення (7), маємо, що знайшовши чисельним методом значення нормальних фундаментальних розв'язків (2), співвідношення (12) дає можливість побудувати вектор управління для дослідження області управління процесом охолодження циліндричного виливка як розглядуваної структурно-неоднорідної технічної системи. Для реалізації пропонованого способу управління можливо розробка і у застосування алгоритму, аналогічного алгоритму МГОА [2] [9], який дає можливість враховувати вплив цілого ряду параметрів процесу теплопередачі.

Отже, при формуванні циліндричного виливка в піщаній формі, точне рішення задачі одержання литий структури з заданими властивостями пов'язано з точністю математичної моделі, яка відображає області керування процесом охолодження виливка. Розглянемо технологічні аспекти реалізації принципу векторного управління на прикладі побудови технічної системи для формоутворення циліндричного виливка у піщаній формі. В нашому випадку будемо розглядати цілісний об'єкт як систему n взаємозалежних теплових акумуляторів, рисі, з температурами $T_i (i = 1, \ldots, n)$, що обмінюються між собою і навколишнім середовищем ненульовими потоками тепла qij $(j = 0, \ldots, n)$.

Ефективність застосування цих моделей у пошуках технічного рішення буде залежати від багатьох факторів, у тому числі і від упровадження нових методів і способів відбору через шар піску теплових потоків від поверхні виливка. Теоретичний і практичний інтерес має дослідження областей управління і розробка моделей систем регульованого остудження циліндричного виливка з використанням масиву даних першої похідної температури по площині поверхні (рис.2). Цьому сприяють новітні досягнення в технічній галузі по розробці малоінерційних інфрачервоних сканерів та інші технічні розробки.

Викладені шляхи дослідження областей управління процесом остудження виливків дозволяють сформолювати принципи і можливі напрямки оптимізації параметрів для керування якістю литих деталей різного функціонального призначення.

[2]МГОА - метод групового обліку аргументів

Рис 1. Теплофізична схема регульованого остудження циліндричного виливка при дискретизації параметрів по площині поверхні.

$T_1, T_2, T_3, ..., T_i (i = 1, ..., n)$ — температури дискретних площин поверхні виливка; $q_{10}, q_{20}, q30, ..., q_{i0}$ — регульовані теплові потоки з дискретних площин поверхні;

Література

[1] *Шинский О.И.* Механизм формирования качества отливок, получаемых по газифицируемым моделям // Литейное производство. — 1991, № 1.

[2] *Русаков П.В., Шинский О.И.* Параметрическая модель процесса литья и формообразования отливки при подаче расплава в газифицируемую форму под давлением // Метал и литье Украины, 2005. — № 9-10. — 1974. — С.48-51.

[3] *Русаков П.В., Шинский О.И.* Методы оперативного контроля и формирования напряженно-деформированного состояния отливок в процессе финишной обработки // Международный научно-технический конгрес "Литейное производство: высококачественные отливки на основе зффективных технологий". — К. — 2004. — С. 124-125.

[4] *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа. — 1967.— 599 с.

[5] *Кравченко В.П.* Определение решений при произвольном числе их сопряжений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН УССР. — № 6. — 1972. — С. 512-514.

[6] *Кравченко В.П., Шут Н.И.* Об одном методе решения задач теплопроводности для непрерывно дискретних стержневых систем // Инженерно-физический журнал — Минск.: т. 70. № 2. — 1977. — С.290-295.

[7] *Тихонов А.И. Васильев А.Б. Свешников А.Г.* Дифференциальнse уравнения. — М.:Наука, 1980 — 230 с.

[8] *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. — М.: Наука, 1974. — 310 с.

[9] *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод саморганизации моделей сложных систем. — К.: Наукова думка. 1982. — 296 с.

Рис. 2. Стільниковий регулятор параметру першої похідної температури.