Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 268–278.

УДК 511.7, 517.1

Довірчість сімейств множин відносно пакувальної розмірності

О. В. Слуцький

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. У статті формулюється означення фрактальної пакувальної розмірності $\dim_P$, пакувальної розмірності з нецентрованими кулями $\dim_{P(unc)}$, а також пакувальної розмірності з нецентрованими кулями відносно деякої системи множин. Доводиться, що в широкому класі просторів (зокрема в $\mathbb{R}^n$) $\dim_{P(unc)} = \dim_P$. Вводиться поняття довірчості та доводиться, що множина s-адичних інтервалів є довірчою при обчисленні $\dim_{P(unc)}$.

Faithfullness of sets families with respect to packing dimension

O. Slutskiy

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. In this paper we give a definitions of packing dimension $\dim_P$, packing dimension with uncentred balls $\dim_{P(unc)}$ and packing dimesnsion with uncentred balls with respect to some family of sets. The theorem about equation $\dim_P = \dim_{P(unc)}$ in wide class of spaces (including $\mathbb{R}^n$) is proven. We introduce the notion of faithfulness of any set with respect to the packing dimension and prove that family of of s-adic intervals is faithful.

Вступ

Основним об'єктом, що розглядається у статті, є пакувальна розмірність $\dim_P$ [**17, 10**]. Інтерес до цієї розмірності у світі досить швидко зростає: в 1997 році Xiao розглядає пакувальну розмірність траєкторії броунівського руху [**18**]; в 2002 році L. Olsen довів, що для множини E_{EA} суттєво анормальних s-адичних чисел мають місце рівності: $\dim_H(E_{EA}) = 0$, $\dim_P(E_{EA}) = 1$ [**14**]; у 2003–2008 році публікацій, пов'язаних з $\dim_P$ стає все більше; у 2008 році M. Das [**9**]доводить аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності; у 2011 році J. Li [**11, 12**] доводить аналоги деяких теорем S. Albeverio, М. Працьовитого, Г. Торбіна щодо пакувальної розмірності міри [**2, 3**]; у 2012 році О. Слуцький пропонує більш простий та загальний

E-mail: angell2006@ukr.net

спосіб доведення теореми Біллінгслі для $\dim_P$, ввівши «пакувальну розмірність з нецентрованими кулями» [**16**]; виходять також інші публікації, в яких розглядається $\dim_P$.

У порівнянні з розмірністю Хаусдорфа–Безиковича пакувальна розмірність має ряд цікавих властивостей. Зокрема, такими властивостями є рівність $\dim_P(E) = \overline{\dim_{MB}}(E)$ [**10**] та нерівність $\dim_H(E) \leqslant \dim_P(E)$. Завдяки першій властивості обчислення $\dim_P$ може бути суттєво простішим у порівнянні з обчисленням $\dim_H$; завдяки другій властивості можливо отримати досить сильну верхню оцінку розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Пакувальна розмірність виступає до деякої міри «двоїстою» до розмірності Хаусдорфа–Безиковича і має ті самі аналітичні переваги в застосуваннях, що й розмірність Хаусдорфа–Безиковича, зокрема зчисленну стабільність.

В цій статті буде розглянуто поняття «пакувальна розмірність відносно системи множин» та «довірчість системи множин при обчисленні пакувальної розмірності». Ці поняття введені аналогічно до таких самих понять, що стосуються розмірності Хаусдорфа–Безиковича [**1, 3**].

Поняття «довірчість системи множин при обчисленні пакувальної розмірності» дає можливість шукати пакувальну квазі-передміру як супремум не по абсолютно всім відкритим кулям (сімейство яких є континуальним), а по вужчим сімействам, в ідеалі — зчисленним. Отже, доведення довірчості певних сімейств множин (в ідеалі — якомога менших сімейств) дає можливість рахувати пакувальну розмірність набагато простіше і зручніше.

Основний результат статті — це теорема про довірчість системи s-адичних циліндрів при обчисленні пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.

1. Пакувальна розмірність

Нехай (M, ρ) — метричний простір, в якому для довільної множини $E \subset M$ та для довільного числа $r > 0$ існує не більш ніж зчисленне покриття цієї множини відкритими кулями, діаметри яких не перевищують r.

Якщо E — деяка множина, то її діаметр ми будемо позначати через $|E|$.

Нагадаємо поняття пакувальної розмірності [**10, 17**], давши ланцюжок означень.

Означення 1. Нехай $E \subset M, \alpha \geqslant 0, r > 0$. Тоді α-вимірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів покриття r називається число

$$\mathcal{P}_r^\alpha(E) := \sup \left\{ \sum_i |E_i|^\alpha \right\},$$

де супремум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним наборам відкритих куль $\{E_i\}$ з діаметрами, що не перевищують r, для яких виконуються такі умови:

(1) центри куль E_i належать E;

(2) $E_i \cap E_j = \emptyset \, \forall i \neq j$.

Зауваження 1. *В $\mathbb{R}^n$ вимогу того, щоб набір $\{E_i\}$ був не більш ніж зчисленним можна опустити, тому що вона випливає з вимоги того, щоб кулі не перетиналися.*

Означення 2. α-вимірною пакувальною квазі-мірою множини E називається число

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E) := \lim_{r\to 0} \mathcal{P}_r^\alpha(E).$$

Зауваження 2. *На відміну від схожого за побудовою об'єкта — α-вимірної міри Хаусдорфа — α-вимірна пакувальна квазі-міра множини E не є мірою, тому що вона є скінченно-адитивною, проте не зчисленно-адитивною. Наприклад, при $\alpha = 1$ квазі-міра одноточкової множини дорівнює 0, але квазі-міра множини $\mathbb{Q} \cap [0;1]$ (в просторі $\mathbb{R}^1$) дорівнює 1.*

Означення 3. α-вимірною пакувальною мірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^\alpha(E) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 3. *Як і для міри Хаусдорфа, для пакувальної міри виконується така властивість:*

$$\forall E \subset M \begin{cases} \mathcal{P}^\alpha(E) < +\infty & \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \qquad \mathcal{P}^{\alpha+\varepsilon}(E) = 0 \\ \mathcal{P}^\alpha(E) > 0 & \Rightarrow \forall \varepsilon \in (0;\alpha) \quad \mathcal{P}^{\alpha-\varepsilon}(E) = +\infty. \end{cases}$$

Означення 4. Пакувальною розмірністю множини E називається число

$$\dim_P(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = +\infty\}.$$

Зауваження 4. *Згідно з попереднім зауваженням, пакувальна розмірність довільної множини існує і єдина (враховуючи ту умову, яку ми наклали на метричний простір (M, ρ)). Вона може бути невід'ємним дійсним числом або дорівнювати $+\infty$.*

2. Пакувальна розмірність з нецентрованими кулями

Зараз ми введемо деяке узагальнення пакувальної розмірності. Мотивацією до його введення є той факт, що означення пакувальної розмірності не дає можливості ввести розмірність Біллінгслі [**6**].

Означення 5. Нехай $E \subset M, \alpha \geqslant 0, r > 0$. Тоді α-вимірною пакувальною передмірою з нецентрованими кулями множини E з максимальним діаметром елементів покриття r називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E) := \sup \left\{ \sum_i |E_i|^{\alpha} \right\},$$

де супремум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним наборам відкритих куль $\{E_i\}$ з діаметрами, що не перевищують r, для яких виконуються такі умови:

(1) $E_i \cap E \neq \emptyset \, \forall i$;
(2) $E_i \cap E_j = \emptyset \, \forall i \neq j$.

Зауваження 5. *Як бачимо, означення $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ відрізняється від означення $\mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E)$ лише однією умовою: в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E)$ множині E повинні належати центри куль, а в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ множина E повинна мати непустий перетин із кожною з куль E_i. Отже, кулі E_i повинна належати хоча б одна з точок множини E, але ця точка не обов'язково має бути центром кулі E_i.*

Означення 6. α-вимірною пакувальною квазі-мірою з нецентрованими кулями множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) := \lim_{r \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E).$$

Означення 7. α-вимірною пакувальною мірою з нецентрованими кулями множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) := \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) : E \subset \bigcup E_j \right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Означення 8. Пакувальною розмірністю з нецентрованими кулями множини E називається число

$$\dim_{P(unc)}(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) = +\infty\}.$$

Теорема 1. *Нехай для метричного простору (M, ρ) існує така константа C, що $\forall r > 0$ у довільній відкритій кулі радіуса $3r$ міститься не більше, ніж C неперетинних відкритих куль радіуса r. Тоді в цьому просторі*

$$\dim_{P(unc)}(E) = \dim_P(E).$$

ДОВЕДЕННЯ. **Покажемо, що** $\dim_{P(unc)}(E) \geqslant \dim_P(E)$**.**

Числа $\mathcal{P}^\alpha_{r(unc)}(E)$ та $\mathcal{P}^\alpha_r(E)$ є супремумами, причому перше з них — це супремум, взятий по більшій множині. Тому

$$\mathcal{P}^\alpha_{r(unc)}(E) \geqslant \mathcal{P}^\alpha_r(E).$$

Оскільки граничний перехід зберігає нестрогу нерівність, то

$$\mathcal{P}^\alpha_{0(unc)}(E) \geqslant \mathcal{P}^\alpha_0(E).$$

Аналогічно

$$\mathcal{P}^\alpha_{(unc)}(E) \geqslant \mathcal{P}^\alpha(E).$$

Нехай $\dim_{P(unc)}(E) = \alpha_0$. За означенням $\dim_{P(unc)}(E)$ маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{P}^{\alpha_0+\varepsilon}_{(unc)}(E) = 0 \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{P}^{\alpha_0+\varepsilon}_0(E) = 0 \Rightarrow$$

$$\dim_P(E) \leqslant \alpha_0.$$

Отже, $\dim_{P(unc)}(E) \geqslant \dim_P(E)$, що й вимагалось довести.

Покажемо, що $\dim_{P(unc)}(E) \leqslant \dim_P(E)$**.**

Коли $\dim_{P(unc)}(E) = 0$, твердження очевидне.

Розглянемо випадок, коли $\dim_{P(unc)}(E) \neq 0$. Нехай $0 < t < s < \dim_{P(unc)}(E)$.

Оскільки $s < \dim_{P(unc)}(E)$, то $\mathcal{P}^s_{(unc)}(E) = +\infty$. Звідси $\mathcal{P}^s_{0(unc)}(E) = +\infty$, а тому існує таке $r > 0$, що $\mathcal{P}^s_{r(unc)}(E) > 1$.

Розглянемо набір куль, відповідний ситуації, коли $\mathcal{P}^s_{r(unc)}(E) > 1$. Позначимо цей набір через B. Ці кулі попарно не перетинаються, їх діаметри не перевищують r, і кожна з куль має непорожній перетин з множиною E.

Введемо позначення:

$$B_k = \{A : A \in B, 2^{-k-1} \leqslant |A| < 2^{-k}\}.$$

Позначимо кількість куль у множині B_k через n_k. Хоча б одне із чисел n_k повинне задовольняти нерівність

$$n_k \geqslant 2^{kt}(1 - 2^{t-s}).$$

Справді, нехай

$$n_k < 2^{kt}(1 - 2^{t-s}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді
$$\sum_{E_i \in B} |E_i|^s < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-ks} < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kt-ks}(1-2^{t-s}) = 1,$$
що суперечить умові $\mathcal{P}^s_{r(unc)}(E) > 1$. Отже,
$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : n_{k_0} \geqslant 2^{k_0 t}(1-2^{t-s}).$$

Розглянемо всі кулі із набору B_{k_0}. Нехай
$$B_{k_0} = \{A_1, A_2, \dots, A_{n_{k_0}}\}.$$
Нехай T_i — це одна з точок перетину кулі A_i з множиною E. Розглянемо множину B', яка складається з куль, центрами яких є точки T_i, а діаметри дорівнюють 2^{-k_0}. Зрозуміло, що кількість таких куль також дорівнює n_{k_0}.

У загальному випадку кулі з множини B' можуть перетинатися. Для того, щоб ці кулі попарно не перетиналися, виконаємо своєрідне «прибирання».

Візьмемо кулю A_1. Приберемо з множини B' ті кулі, які містяться в кулі з центром T_1 і радіусом $3 \cdot 2^{-k-1}$. Це якраз і є ті кулі, які перетинаються з кулею A_1. Кількість куль, які ми прибираємо, може бути оцінена константою C (за умовою теореми). Так само приберемо з множини B' ті кулі, які перетинаються з кулею A_2 (якщо ми ще не прибрали кулю A_2), і так далі.

Після закінчення «прибирання» кількість куль, а отже і сумарний t-об'єм множини B' зменшиться не більше, ніж у C разів. Отже,
$$\sum_{E_i \in B'} |E_i|^t \geqslant n_{k_0} \cdot \frac{2^{-k_0 t}}{C} \geqslant 2^{k_0 t}(1-2^{t-s}) \cdot \frac{2^{-k_0 t}}{C} = \frac{1-2^{t-s}}{C}.$$
Звідси випливає, що
$$\mathcal{P}^t_{2^{-k_0}}(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C}.$$
Оскільки нерівність $\mathcal{P}^s_{r(unc)}(E) > 1$ повинна виконуватися для як завгодно малого радіуса, то і нерівність
$$\mathcal{P}^t_{2^{-k_0}}(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C}$$
буде виконуватися для як завгодно великих значень k_0. Тому
$$\mathcal{P}^t_0(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C},$$
а отже, і
$$\mathcal{P}^t(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C},$$
звідки маємо нерівність $t \leqslant \dim_P(E)$. Отже, з нерівності $t < \dim_{P(unc)}(E)$ випливає нерівність $t \leqslant \dim_P(E)$. Тому $\dim_{P(unc)}(E) \leqslant \dim_P(E)$, що й вимагалося довести. $\square$

Наслідок 1. *Якщо* $M = \mathbb{R}^n$, *то* $\dim_{P(unc)}(E) = \dim_P(E)$.

Доведення. Нехай B_{3r} — куля радіуса $3r$, B_r — куля радіуса r, а $\lambda(\cdot)$ — n-вимірна міра Лебега. Тоді

$$\lambda(B_{3r}) = 3^n \cdot \lambda(B_r).$$

Отже, у відкритій кулі радіуса $3r$ може поміститися не більше, ніж $C = 3^n$ неперетинних відкритих куль радіуса r, і простір $\mathbb{R}^n$ задовольняє умови попередньої теореми. □

3. Пакувальна розмірність відносно систем множин. Довірчість

Зафіксуємо деяке сімейство Φ відкритих куль з простору M, причому накладемо вимогу, щоб для будь-якої множини існувало не більш ніж зчисленне покриття кулями як завгодно малого діаметра з сімейства Φ.

Означення 9. Нехай $E \subset M, \alpha \geqslant 0, r > 0$. Тоді α-вимірною пакувальною передмірою з нецентрованими кулями множини E з максимальним діаметром елементів покриття r відносно сімейства множин Φ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi) := \sup \left\{ \sum_i |E_i|^{\alpha} \right\},$$

де супремум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним наборам відкритих куль $\{E_i\}$ з діаметрами, що не перевищують r, для яких виконуються такі умови:

(1) $E_i \cap E \neq \emptyset \, \forall i$;
(2) $E_i \cap E_j = \emptyset \, \forall i \neq j$;
(3) $E_i \in \Phi \, \forall i$.

Зауваження 6. *Як бачимо, означення $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi)$ відрізняється від означення $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ лише однією умовою: в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi)$ розглядаються покриття довільними кулями, а в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ — лише покриття кулями з сімейства Φ.*

Означення 10. α-вимірною пакувальною квазі-мірою з нецентрованими кулями множини E відносно сімейства множин Φ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E, \Phi) := \lim_{r \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi).$$

Означення 11. α-вимірною пакувальною мірою з нецентрованими кулями множини E відносно сімейства множин Φ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E, \Phi) := \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j, \Phi) : E \subset \bigcup E_j \right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Означення 12. Пакувальною розмірністю з нецентрованими кулями множини E відносно сімейства множин Φ називається число

$$\dim_{P(unc)}(E, \Phi) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E, \Phi) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E, \Phi) = +\infty\}.$$

Зауваження 7. *Якщо до множини* Φ *належать абсолютно всі відкриті кулі з даного простору, то очевидно, що* $\dim_{P(unc)}(E, \Phi) = \dim_{P(unc)}(E)$. *Отже, поняття «пакувальної розмірності з нецентрованими кулями відносно певної системи множин» є узагальненням поняття «пакувальної розмірності з нецентрованими кулями».*

Теорема 2. *Для довільної множини* Φ *відкритих куль виконується нерівність*

$$\dim_{P(unc)}(E, \Phi) \leqslant \dim_{P(unc)}(E).$$

Доведення. Позначимо через Φ_0 множину всеможливих відкритих куль з простору M. Тоді очевидно, що

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E) = \mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi_0).$$

За означенням, число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi)$$

є супремумом певної множини чисел.

Оскільки $\Phi \subseteq \Phi_0$, то (згідно з властивостями супремума)

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi_0).$$

З нестрогої нерівності між пакувальними передмірами випливає аналогічна нестрога нерівність між пакувальними розмірностями, тобто

$$\dim_{P(unc)}(E, \Phi) \leqslant \dim_{P(unc)}(E),$$

що й вимагалось довести. □

Означення 13. Нехай сімейство множин Φ має таку властивість:

$$\forall E \subset M \quad \dim_{P(unc)}(E, \Phi) = \dim_{P(unc)}(E).$$

Тоді сімейство Φ називається довірчим для обчислення пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.

Зауваження 8. *Варто нагадати, що поняття «довірчість» введено і для розмірності Хаусдорфа–Безиковича* $\dim_H$ **[13]**. *Також для* $\dim_H$ *доведена нерівність:*

$$\dim_H(E, \Phi) \geqslant \dim_H(E).$$

Як бачимо, у нерівності для $\dim_H$ *знак протилежний (це пов'язано з тим, що в означенні для* $\dim_H$ *не супремум, а інфімум). Ця зміна знаку змушує нас при* *доведенні довірчості оцінювати відповідні передміри не зверху (як в* $\dim_H$*), а знизу, що в деяких випадках суттєво змінює процес доведення.*

Один з таких випадків ми розглянемо нижче.

4. Довірчість системи s-адичних циліндрів

Означення 14. Нехай $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. Нагадаємо, що s-адичним представленням дійсного числа $x \in [0;1]$ називається запис виду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s^k}, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, s-1\}.$$

При цьому числа a_k називаються s-адичними цифрами числа x. Множина таких чисел x, у яких перші n цифр фіксовані, називається s-адичним циліндром n-го рангу і є відрізком для довільного натурального n. В подальшому ми будемо називати s-адичним інтервалом множину внутрішніх точок відповідного s-адичного циліндра.

Теорема 3. *Нехай* $s \geqslant 2$ *— це фіксоване натуральне число,* Φ *— множина всіх* s*-адичних інтервалів. Тоді* Φ *— довірча для обчислення пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.*

Доведення. Нехай E' — довільна множина з відрізка $[0;1]$. Нехай S_Q — множина s-адично раціональних точок, тобто

$$S_Q := \left\{ \frac{m}{s^n} : n \in \mathbb{N}, m \in \{0, 1, 2, 3, \dots, s^n - 1\} \right\}.$$

Нехай $E = E' \setminus S_Q$. Оскільки S_Q — зчисленна, то $\dim_P(S_Q) = 0$. Отже,

$$\dim_P(E) = \dim_P(E' \setminus S_Q) = \dim_P(E').$$

Зафіксуємо дійсні числа $\alpha \geqslant 0$ та $r > 0$ та розглянемо довільну не більш ніж зчисленну сукупність неперетинних відкритих куль $\{E_i\}$, центри яких належать E, а діаметри не перевищують r.

Нехай Δ_i — це s-адичний інтервал мінімального рангу, який міститься всередині відкритої кулі E_i та містить її центр (зауважимо, що центр кулі E_i обов'язково міститься в певному s-адичному інтервалі, оскільки в множині E відсутні s-адично раціональні точки). Тоді всередині цієї ж кулі може міститися не більше, ніж $2s - 1$ інтервалів цього ж рангу (не більше, ніж $s - 1$ інтервалів зліва від Δ_i, бо інакше E_i міститиме s-адичний інтервал попереднього рангу, і аналогічно не більше, ніж $s - 1$ інтервалів справа від Δ_i). Звідси випливає, що

$$|E_i| \leqslant |\Delta_i| \cdot (2s - 1),$$

а тому
$$\sum_i |E_i|^\alpha \leqslant (2s-1)^\alpha \sum_i |\Delta_i|^\alpha.$$
Інтервали E_i задовольняють всі умови, які накладаються на відкриті кулі в означенні $\mathcal{P}_r^\alpha(E)$, а інтервали Δ_i — всі умови, які накладаються на відкриті кулі в означенні $\mathcal{P}_{r(unc)}^\alpha(E,\Phi)$. Тому при (враховуючи, що перехід до супремума зберігає нерівності)
$$\mathcal{P}_r^\alpha(E) \leqslant (2s-1)^\alpha \mathcal{P}_{r(unc)}^\alpha(E,\Phi).$$
Взявши від обох частин границю при $r \to 0$, маємо таку нерівність:
$$\mathcal{P}_0^\alpha(E) \leqslant (2s-1)^\alpha \mathcal{P}_{0(unc)}^\alpha(E,\Phi).$$
Взявши від обох частин відповідний інфімум, маємо таку нерівність:
$$\mathcal{P}_(^\alpha E) \leqslant (2s-1)^\alpha \mathcal{P}_{(unc)}^\alpha(E,\Phi).$$
З останньої нерівності випливає, що якщо $\mathcal{P}^\alpha(E) = +\infty$, то й $\mathcal{P}_{(unc)}^\alpha(E,\Phi) = +\infty$, а отже, $\dim_{P(unc)}(E,\Phi) \geqslant \dim_P(E)$.

Оскільки ми працюємо в $\mathbb{R}^1$, то $\dim_P(E) = \dim_{P(unc)}(E)$. Оскільки $\dim_P(E) = \dim_P(E')$, і $\dim_{P(unc)}(E) = \dim_{P(unc)}(E')$, то
$$\forall E' \subset [0;1] \dim_{P(unc)}(E',\Phi) \geqslant \dim_{P(unc)}(E'),$$
що й вимагалось довести. $\square$

Література

[1] *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.* On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion (in preparation).

[2] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\tilde{Q}$-representation of real numbers and fractal probability distributions, http://arxiv.org/abs/math/0308007.

[3] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singular probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci.Math. — 2005. — 129. — P. 357–367.

[4] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory I // llinois J. Math. — 1960. — vol. 4. — P. 187–209.

[5] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II // Ill. J. Math. — 1961. — 5. — P. 291–198.

[6] Billingsley P. *Ergodic theory and information.* — John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965.

[7] *Chatterji S. D* Certain induced measures on the unit interval // J. London Math. Soc. — 1963. — 38. — P. 325–331.

[8] *Chatterji S. D.* Certain induced measures and the fractional dimensions of their supports // Z.Wahrscheinlichkeitstheorie. — 1964. — 3. — P. 184–192.

[9] *Das M.* Billingsley's packing dimension // Proc. Amer. Math. Soc. — 2008. — 136. — P. 273–278.

[10] Falconer K. J. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications.* — Chichester, Wiley, 2003.

[11] *Jinjun Li* Packing dimension of measures associated with $\tilde{Q}$-representation // Mediterr. J. Math. — 2011. — Vol. 9, 4. — P. 655–668.

[12] *Jinjun Li* A class of probability distribution functions preserving the packing dimension // Statistics and probability letters. — 2011. — Vol. 81, 12. — P. 1782–1791

[13] *Нікіфоров Р. О., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-цифрами // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2012. — 86. — С. 150–162.

[14] *L. Olsen* Extremely non-normal numbers // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2004. — 137, no. 1. — P. 43–53.

[15] Rogers C. A. *Hausdorff Measures.* — Cambridge University Press, London, 1970.

[16] *Слуцький О. В., Торбін Г. М.* Аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності // Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки. — 2012. — 13 (2).

[17] *Tricot C.* Two definitions of fractional dimension // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1982. — 91. — P. 57-–74.

[18] *Xiao Y. M.* Packing dimension of the image of fractional Brownian motion // Statistics & Probability Letters. — 1997. — 33. — P. 379—387.