Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 253–267.

УДК 511.72+517.5+517.13

Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел

С. О. Сербенюк

Інститут математики НАН України

Анотація. Дана стаття присвячена вивченню представлення чисел з відрізка $[0;1]$ у вигляді ряду Кантора. А саме,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n} \equiv \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...},$$

де (d_n) — фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, $\varepsilon_n \in \{0,\dots,d_n-1\}$. Вивчаються критерії представлення раціональних чисел та критерій скінченного представлення чисел такими рядами.

Cantor series expansion of real numbers: expansion of rational numbers

S. Serbenuyk

Institute for Mathematics of NASU

Abstract. The article deals with investigation of expansion of real numbers from $[0;1]$ by the Cantor series. That is

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n} \equiv \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...},$$

where (d_n) — fixed sequence of natural numbers, $d_n > 1$, $\varepsilon_n \in \{0,1,...,d_n-1\}$. Criteria of rational numbers expansion by the series and criterion of finite expansion of numbers by the Cantor series are investigating.

Вступ

У 1869 році Георг Кантор в роботі [**1**] розглянув розклади чисел $x \in [0;1]$ у знакододатні ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 ... q_k},$$

E-mail: simon6@ukr.net

© С. О. Сербенюк, 2013

де (q_k) — деяка фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, та $\varepsilon_k(x) \in \{0, 1, ..., d_n - 1\}$.

В [**1**] Кантор частково розглядає проблему представлення раціональних чисел такими рядами, довівши, що для рядів з періодичною послідовністю (q_k) критерієм задання раціональних чисел є періодичність послідовності (ε_k). Також Кантором було доведено і властивість про те, що якщо всі члени послідовності (q_k), починаючи з деякого номеру діляться на деяке число q, то в представленні раціональних чисел $\frac{p}{q}$ елементи послідовності (ε_k), починаючи з деякого номеру, набувають значення більшого, ніж попередні.

Вбачаючи перспективність у використанні розкладів чисел в ряди Кантора, які є узагальненням традиційної s-кової системи числення, для вивчення функцій, перетворень і мір зі складною локальною структурою, доцільно розглянути геометрію та метричну теорію таких розкладів, але в першу чергу варто знайти критерії представлення раціональних чисел.

Досліджуючи проблему представлення раціональних чисел рядами Кантора, можна використати підхід, згідно якого досліджувати дану проблему для різних типів послідовностей (q_k). Наприклад, для періодичної, обмеженої неперіодичної та необмеженої. Цей «поділ» (q_k) на послідовності такого виду здійснено при вивченні критерію раціональності для чисел з періодичною послідовністю цифр (ε_k). Як виявилось, критерії раціональності для обмеженої неперіодичної та необмеженої послідовностей (q_k) є ідентичними. Це є наявним недоліком підходу «поділу» (q_k) на різні види і дослідження основної задачі для кожного з них, оскільки в результаті на послідовність (q_k) можна накладати безліч обмежень, тим самим отримавши багато критеріїв, частина з яких точно будуть еквівалентними між собою. Тому найбільш раціональним буде знаходження загального критерію раціональності при довільній послідовності (q_k), який, очевидно, при різних умовах, накладених на (q_k), може видозмінюватись.

В такому разі перш за все важливо встановити критерій так званого скінченного представлення чисел рядами Кантора (критерій D-раціональності), оскільки, як виявилось, існують послідовності (q_k), що всі раціональні числа мають скінченне представлення рядами Кантора, визначених такими послідовностями. В [**1**] закладено основну ідею цього критерію, що можна легко помітити. У моїй статті наводиться чітке формулювання критерію D-раціональності та мій найбільш спрощений варіант його доведення.

Виявляється, для знаходження загального критерію раціональності корисним є поняття оператора $\hat{\varphi}$ зсуву цифр представлення числа рядом Кантора (квазіоператора зсуву цифр). На основі цього поняття можна чітко довести критерій раціональності та описати останній, використовуючи як представлення, так і зображення чисел рядами Кантора. Проте, цей критерій можна дещо спростити задля його практичного застосування. Відомо, якщо справедливою є умова, що зрештою $\frac{b_n}{a_n-1} = const$, то число $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_1 a_2 ... a_n}$ є раціональним [**8**], а також (вступ [**9**]), що необхідною та достатньою умовою раціональності числа $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!}, |b_n| < n$ є умова $\frac{b_n}{n-1} = const$ (із результатів, зазначених далі в статті, слідує, що для останнього ряду дану умову у випадку $b_n \in \{0, 1, ..., n-1\}$ задовольняють лише D-раціональні числа).

У даній статті розглядається представлення $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n}$, $\varepsilon_n \in \{0, 1, ..., d_n - 1\}$. Умова $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$ відіграє важливу роль при проведенні досліджень, але основна увага приділяється розгляду умов $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$, $\hat{\varphi}^n(x) = x$ та визначенню закономірності для обчислення значень ε_n в представленні таких чисел x, що задовольняють останню умову, і застосуванню отриманих результатів для формулювання критерію раціональності.

1. Означення та приклади рядів Кантора

Нехай маємо деяку фіксовану послідовність (d_n) натуральних чисел, більших одиниці, та послідовність множин (A_n), де $A_n \equiv \{0, 1, ..., d_n - 1\}$.

Означення 1. *Числовим знакододатним рядом Кантора (далі: рядом Кантора)* називається вираз виду

$$\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + ... + \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n} + ..., \text{ де } \varepsilon_n \in A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Число d_n називатимемо *n-тим елементом*, а число ε_n — *n-тою цифрою суми ряду (*1*)*.

Факт представлення числа $x \in [0, 1]$ у вигляді розкладу (1)

$$x = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + ... + \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n} + ...$$

позначається $\Delta^D_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_n ...}$ і таке позначення називається *зображенням числа x рядом Кантора.*

Число, яке має зображення рядом Кантора $\Delta^D_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_{n-1} [\varepsilon_n - 1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]...}$, $\varepsilon_n \neq 0$, називається *квазіперіодичним з квазіперіодом* $[d_n - 1]$.

Означення 2. Числа, зображення яких рядом Кантора містять період (0), називаються *D-раціональними числами.* Загалом, D-раціональні числа мають два представлення рядом Кантора (періодом (0) та квазіперіодом $[d_n - 1]$).

Якщо послідовність (d_n) елементів ряду Кантора є сталою, то ряд (1) набуває вигляду s-кового представлення дійсних чисел.

Прикладами рядів Кантора є наступні ряди:

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{(n+1)!} \text{ — факторіальний ряд Кантора;}$$

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{p_1 p_2 ... p_n}, \quad \text{де } p_n \in P, \quad \text{P — множина простих чисел;}$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n};$$

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (2n+1)}.$$

З того, що кожен з можливих рядів Кантора визначається нескінченною послідовністю натуральних чисел, слідує континуальність множини рядів Кантора.

2. Критерій D-раціональності

Теорема 1. *Раціональне число* $\frac{p}{q} \in (0,1)$ *є D-раціональним тоді і тільки тоді, коли існує такий номер* n_0*, що* $d_1 d_2 ... d_{n_0} \equiv 0 (mod\ q)$.

Остання теорема, очевидно, слідує з двох наступних теорем.

Теорема 2. *Якщо число* $\frac{p}{q} \in (0,1)$ *є D-раціональним, то існує такий номер* n_0*, що* $d_1 d_2 ... d_{n_0} \equiv 0 (mod\ q)$.

Доведення. Справді, нехай
$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + ... + \frac{\varepsilon_{n-1}}{d_1 d_2 ... d_{n-1}} + \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_{n-1} d_n} + \frac{0}{d_1 d_2 ... d_n d_{n+1}} + \frac{0}{d_1 d_2 ... d_n d_{n+1} d_{n+2}} + ...,$$
$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1 d_2 d_3 ... d_n + \varepsilon_2 d_3 ... d_n + ... + \varepsilon_{n-1} d_n + \varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n},$$
$$p d_1 d_2 ... d_n = q \varepsilon_n + q(\varepsilon_1 d_2 d_3 ... d_n + \varepsilon_2 d_3 ... d_n + ... + \varepsilon_{n-1} d_n),$$
$$\varepsilon_n = \frac{p d_1 d_2 ... d_n - q(\varepsilon_1 d_2 d_3 ... d_n + \varepsilon_2 d_3 ... d_n + ... + \varepsilon_{n-1} d_n)}{q}.$$

Оскільки в останній рівності ε_n є натуральним числом, то вираз в правій частині також є натуральним числом. Враховуючи, що $(p,q) = 1$, отримаємо $d_1 d_2 ... d_n \equiv 0 (mod\ q)$. □

Теорема 3. *Якщо існує такий номер n_0, що $d_1d_2...d_{n_0} \equiv 0(mod\ q)$ в представленні числа $\frac{p}{q} \in (0,1)$ рядом Кантора (1), то число $\frac{p}{q}$ є D-раціональним.*

Доведення. Нехай $(p,q) = 1$, $p < q$, існує такий номер n_0, що $d_1d_2...d_{n_0} \equiv 0(mod\ q)$ та

$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1d_2} + ... + \frac{\varepsilon_{n_0}}{d_1d_2...d_{n_0}} + \frac{\varepsilon_{n_0+1}}{d_1d_2...d_{n_0}d_{n_0+1}} + ... = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\varepsilon_k}{d_1d_2...d_k} + r_{n_0},$$

де $r_{n_0} = \frac{1}{d_1d_2...d_{n_0}}\left(\frac{\varepsilon_{n_0+1}}{d_{n_0+1}} + \frac{\varepsilon_{n_0+2}}{d_{n_0+1}d_{n_0+2}} + ...\right)$ — залишок ряду.

$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1 d_2...d_{n_0} + ... + \varepsilon_{n_0}}{d_1d_2...d_{n_0}} + r_{n_0}$$

Позначивши $\phi = \frac{d_1d_2...d_{n_0}}{q} \in \mathbb{N}$ (за умовою) , отримаємо

$$p\phi = (\varepsilon_1 d_2...d_{n_0} + ... + \varepsilon_{n_0}) + d_1d_2...d_{n_0}r_{n_0}.$$

Оскільки у лівій частині останньої рівності знаходиться натуральне число, то й в правій також натуральне. Звідси слідує, що $d_1d_2...d_{n_0}r_{n_0} = 0$ або $d_1d_2...d_{n_0}r_{n_0} = 1$. Що й потрібно було довести. □

Зауваження 1. *Остання теорема була сформульована ще Кантором* [**1**], *однак у неї було дещо інше формулювання та більш громіздке доведення.*

3. Критерії раціональності

*Означення 3. Оператором зсуву цифр (або квазіоператором зсуву цифр) представлення (*1) називається відображення $\hat{\varphi}$ таке, що для $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}$ справедливою є рівність:

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_2d_3...d_n}.$$

Перейдемо до доведення основних тверджень.

Нехай маємо послідовність $(\hat{\varphi}^n(x))$, породжену оператором зсуву цифр представлення (1) числа x:

$$\hat{\varphi}^0(x) = x,$$

$$\hat{\varphi}(x) = d_1x - \varepsilon_1,$$

$$\hat{\varphi}^2(x) = d_2\hat{\varphi}(x) - \varepsilon_2 = d_1d_2x - d_2\varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

....

$$\hat{\varphi}^n(x) = d_n\hat{\varphi}^{n-1}(x) - \varepsilon_n = x\prod_{j=1}^{n} d_j - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i d_{i+1}d_{i+2}...d_n\right) - \varepsilon_n,$$

....

Очевидним є той факт, що

$$\hat{\varphi}^n(x) \equiv \left(\prod_{j=1}^{n} d_j\right) \cdot \Delta^D_{\underbrace{0...0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3}...}, \tag{2}$$

звідки слідує

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{d_1 d_2 ... d_j} + \frac{1}{d_1 d_2 ... d_n}\hat{\varphi}^n(x). \tag{3}$$

Нехай $\mathbb{Q} \ni x = \frac{a}{b}$, $a < b$ та $(a,b) = 1$. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$ з (3) випливає рівність:

$$\hat{\varphi}^n(x) = \frac{a d_1 d_2 ... d_n - b(\varepsilon_1 d_2 d_3 ... d_n + \varepsilon_2 d_3 ... d_n + ... + \varepsilon_{n-1} d_n + \varepsilon_n)}{b} = \frac{a_n}{b}. \tag{4}$$

Оскільки при $n \to \infty, 0 \leq \frac{a_n}{b} \leq 1$ з того, що $b = const$ слідує $a_n \in \{0, 1, 2, ..., b - 1\}$, а отже існує таке $c \in \mathbb{N}$, що $a_n = a_{n+c}$. Мало того, існує підпослідовність (n_m) послідовності натуральних чисел, що $a_{n_m} = const$ для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Таким чином, доведено наступне твердження.

Лема 1. *Якщо $x \in \mathbb{Q}$, то існують такі $n \in \mathbb{Z}^+$ і $c \in \mathbb{N}$, що $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$.*

Перевіримо справедливість оберненого твердження. Справді, якщо існують такі $n \in \mathbb{Z}^+$ і $c \in \mathbb{N}$, що $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$, тоді з (2)

$$x\left(\prod_{k=n+1}^{n+c} d_k - 1\right) = \left(\prod_{k=n+1}^{n+c} d_k\right) \cdot \sum_{i=1}^{n+c} \frac{\varepsilon_i}{d_1 d_2 ... d_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{d_1 d_2 ... d_j},$$

$$x \equiv \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n(0)} + \frac{d_{n+1}...d_{n+c}}{d_{n+1}...d_{n+c} - 1}\Delta^D_{\underbrace{0...0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+c}(0)}.$$

Отже, з врахуванням (3) справедливим є твердження:

Лема 2. *Якщо існують такі $n \in \mathbb{Z}^+$ і $c \in \mathbb{N}$, що $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$, то $x \in \mathbb{Q}$ і справедливою є наступна рівність:*

$$\hat{\varphi}^n(x) \equiv \frac{d_1 d_2 ... d_n d_{n+1} ... d_{n+c}}{d_{n+1}...d_{n+c} - 1}\Delta^D_{\underbrace{0...0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+c}(0)}.$$

З останніх двох лем слідує твердження наступної теореми.

Теорема 4. *Число x є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують $n \in \mathbb{Z}^+$ і $c \in \mathbb{N}$ такі, що $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$.*

Теорема 5. *Число $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують $n \in \mathbb{Z}^+$ і $c \in \mathbb{N}$ такі, що*

$$\Delta^D_{\underbrace{0...0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3}...} = d_{n+1}...d_{n+c}\Delta^D_{\underbrace{0...0}_{n+c}\varepsilon_{n+c+1}\varepsilon_{n+c+2}\varepsilon_{n+c+3}...}.$$

Твердження теорем 4 і 5 є еквівалентними.

Таким чином, критерієм раціональності представлення дійсних чисел $x \in [0;1]$ рядами Кантора є умова: $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$, де $n \in \mathbb{Z}^+$ і $c \in \mathbb{N}$. Розглянемо самий простий випадок, коли $c = const = 1$ і $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тобто, коли для довільного $n \in \mathbb{Z}^+$ $\hat{\varphi}^n(x) = const$. Такі числа, відмінні від 0 та 1, справді існують. Наприклад,

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} + \ldots = \hat{\varphi}^n(x) = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо критерії виконання умови $\hat{\varphi}^n(x) = const$.

Лема 3. *Якщо $\hat{\varphi}^n(x) = x$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то*

$$\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const = x.$$

Доведення. Якщо $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+1}(x) = const$, тоді

$$\hat{\varphi}^n(x) = d_{n+1}\hat{\varphi}^n(x) - \varepsilon_{n+1},$$

звідки

$$\hat{\varphi}^n(x) = \frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1} - 1} = const, \quad \text{тобто} \tag{5}$$

$$x = \frac{\varepsilon_1}{d_1 - 1} = \frac{\varepsilon_1}{d_2} + \frac{\varepsilon_2}{d_1(d_2 - 1)} = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 (d_3 - 1)} = \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{d_1 \ldots d_i} + \frac{\varepsilon_n}{d_1 \ldots d_{n-1}(d_n - 1)} = \ldots.$$

□

Зауваження 2. *Якщо $\hat{\varphi}^n(x) = const$ для всіх $n \geq n_0$, де n_0 — фіксоване додатне ціле число, то з* (3) *випливає, що умова $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$ є справедливою для всіх $n > n_0$ та*

$$x = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\varepsilon_i}{d_1 d_2 \ldots d_i} + \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_{n_0}} \cdot \frac{\varepsilon_{n_0+1}}{d_{n_0+1} - 1}.$$

Лема 4. *Нехай $\mathbb{Z}^+ \ni n_0$ — фіксоване число. Умова $\hat{\varphi}^n(x) = const$ є справедливою для всіх $n \geq n_0$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$ для всіх $n > n_0$.*

Доведення. *Необхідність* випливає з останньої леми.

Достатність. Нехай для всіх $n > n_0$

$$const = p = \frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1} - 1} = \ldots = \frac{\varepsilon_{n+i}}{d_{n+i} - 1} = \ldots.$$

Скориставшись рівністю

$$\frac{\varepsilon_n}{d_n} = \frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} - \frac{\varepsilon_n}{d_n(d_n - 1)},$$

отримаємо

$$\hat{\varphi}^n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{d_{n+1}...d_i}=\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1}-1}-\frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1}(d_{n+1}-1)}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(\prod_{j=n+1}^{n+i}\frac{1}{d_j}\right)\left(\frac{\varepsilon_{n+i+1}}{d_{n+i+1}-1}-\frac{\varepsilon_{n+i+1}}{d_{n+i+1}(d_{n+i+1}-1)}\right)\right]=$$

$$=p\left(1-\frac{1}{d_{n+1}}\right)+p\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{d_{n+i+1}}\right)\left(\prod_{j=n+1}^{n+i}\frac{1}{d_j}\right)\right]=p.$$

□

Природнім є наступне твердження.

Наслідок 1. *Множина чисел, для представлення яких рядом Кантора* (1) *справедливою є умова*

$$\hat{\varphi}^n(x)=x\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

є скінченною множиною порядку $\min_n d_n$, *причому*

$$x=\frac{\varepsilon}{d-1},\ \text{де } d=\min_n d_n \text{ та } \varepsilon\in\{0,1,...,d-1\}.$$

При дослідженні критерію раціональності важливою є задача обчислення значень елементів послідовності (ε_n) раціонального числа $x=\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}$. Виявляється, ці значення просто визначити для випадку $\hat{\varphi}^n(x)=x$, $n=1,2,....$

Лема 5. *Нехай* $d=\min_n d_n$ *та* $\{0,1,...,d-1\}\ni\varepsilon$ *— фіксоване число.*

$\hat{\varphi}^n(x)=x=\frac{\varepsilon}{d-1}$ *тоді і тільки тоді, коли для представлення числа* x *рядом Кантора* (1) *справедливою є умова:*

$$\mathbb{Z}^+\ni\varepsilon_n=\frac{d_n-1}{d-1}\varepsilon$$

для всіх $n\in\mathbb{N}$.

Доведення. *Необхідність* випливає з наслідку 1 та рівності (5).

Достатність. Справді, нехай $\varepsilon_n=\frac{d_n-1}{d-1}\varepsilon$, тоді

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{d_n-1}{d-1}\varepsilon}{d_1d_2...d_n}=\frac{\varepsilon}{d-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n-1}{d_1d_2...d_n}=\frac{\varepsilon}{d-1}.$$

□

Наслідок 2. *Нехай* n_0 *— фіксоване ціле додатне число та*

$d_0=\min_{n>n_0}d_n$, ε_0 *— чисельник звичайного дробу* $\frac{\varepsilon_{n_0+k}}{d_1d_2...d_{n_0}d_{n_0+1}...d_{n_0+k}}$ *в розкладі* (1) *числа* x *за умови, що* $d_{n_0+k}=d_0$.

$\hat{\varphi}^n(x) = const$ для всіх $n \geq n_0$ тоді і тільки тоді, коли для кожного $n > n_0$ справджується умова:

$$\mathbb{Z}^+ \ni \varepsilon_n = \frac{d_n - 1}{d_0 - 1}\varepsilon_0$$

в представленні (1) *числа x.*

Повернімось тепер до рівностей (4). Зокрема, до існування послідовності (n_m) такої, що $a_{n_m} = const$ в цих рівностях. Нехай в представленні (1) числа $\mathbb{Q} \ni x \in [0;1]$ існує послідовність (n_m), що $\hat{\varphi}^{n_m}(x) = const$. Останню умову можна записати наступним чином:

$$const = \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{d_{n_1+1}...d_i} = \sum_{i=n_2+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{d_{n_2+1}...d_i} = ... = \sum_{i=n_m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{d_{n_m+1}...d_i} = ...$$

Очевидно, можливо звести ряд Кантора (1) до ряду Кантора, для якого умова $\hat{\varphi}^{n_m}(x) = const$ еквівалентна умові $\hat{\varphi}^k(x) = const$, $k = 0, 1, 2, ...$ Тобто,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\varepsilon_j}{d_1 d_2 ... d_j} + \frac{1}{d_1 ... d_{n_1}} x',$$

$$x' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n_m+1} d_{n_m+2} d_{n_m+3} ... d_{n_{m+1}} + \varepsilon_{n_m+2} d_{n_m+3} ... d_{n_{m+1}} + ... + \varepsilon_{n_{m+1}-1} d_{n_{m+1}} + \varepsilon_{n_{m+1}}}{(d_{n_1+1} ... d_{n_2})(d_{n_2+1} ... d_{n_3}) ... (d_{n_m+1} ... d_{n_{m+1}})}. \tag{6}$$

Саме для ряду Кантора (6) і є справедливою умова $\hat{\varphi}^m(x') = const$ для $m = 0, 1, ...$

Підсумовуючи наведені вище результати, отримаємо твердження.

Теорема 6. *Число x, представлене у вигляді розкладу в ряд Кантора* (1), *є раціональним тоді і тільки тоді, коли існує підпослідовність (n_m) послідовності натуральних чисел така, що для всіх $m = 1, 2, ...$, виконуються умови:*

- $\frac{\sigma_m}{\delta_m} = \frac{\varepsilon_{n_m+1} d_{n_m+2} ... d_{n_{m+1}} + \varepsilon_{n_m+2} d_{n_m+3} ... d_{n_{m+1}} + ... + \varepsilon_{n_{m+1}-1} d_{n_{m+1}} + \varepsilon_{n_{m+1}}}{d_{n_m+1} d_{n_m+2} ... d_{n_{m+1}} - 1} = const$;
- $\sigma_m = \frac{\delta_m}{\delta}\sigma$, *де $\delta = \min_{m \in \mathbb{N}} \delta_m$ та σ — число в чисельнику звичайного дробу із нескінченної суми* (6), *знаменник якого дорівнює $(\delta_1 + 1)(\delta_2 + 1)...(\delta + 1)$.*

Можна сформулювати більш простіший критерій раціональності. Нехай існують такі $n \in \mathbb{Z}^+$ та $n \in \mathbb{N}$, що справедливою є теорема 4. Тоді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{d_1 d_2 ... d_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{d_1 d_2 ... d_i} + \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{d_1 d_2 ... d_n d_{n+1}} + ... + \frac{\varepsilon_{n+c}}{d_1 d_2 ... d_n d_{n+1} ... d_{n+c}} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+c+j}}{d_1 d_2 ... d_{n+c+j}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{d_1 d_2 ... d_i} + \frac{\varepsilon_{n+1} d_{n+2} ... d_{n+c} + ... + \varepsilon_{n+c-1} d_{n+c} + \varepsilon_{n+c}}{d_1 d_2 ... d_n (d_{n+1} d_{n+2} ... d_{n+c})} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+c+j}}{d_1 d_2 ... d_{n+c+j}}.$$

Для заданого початкового ряду справджується $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$, в той час як для ряду, записаному в останньому рядку, справедливою є умова $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+1}(x)$. З останньої умови слідує, що

$$\hat{\varphi}^n(x) = \frac{\varepsilon_{n+1}d_{n+2}...d_{n+c} + \varepsilon_{n+2}d_{n+3}...d_{n+c} + ... + \varepsilon_{n+c-1}d_{n+c} + \varepsilon_{n+c}}{d_{n+1}d_{n+2}...d_{n+c} - 1}.$$

А отже, справедливим є твердження наступної теореми.

Теорема 7. *Число x, представлене рядом (1), є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують такі числа $n \in \mathbb{Z}^+$ і $c \in \mathbb{N}$, що справедливою є умова*

$$d_1d_2...d_n(d_{n+1}d_{n+2}...d_{n+c} - 1) \vdots\, b, \ \text{де } x = \frac{a}{b}.$$

4. Критерій зображення раціональних чисел рядом Кантора з періодичною послідовністю цифр (ε_n) та обмеженою неперіодичною послідовністю елементів (d_n)

Дослідимо, як видозмінюються загальні критерії раціональності при деяких умовах, що накладаються на послідовності (d_n) та (ε_n).

Нехай s — фіксоване натуральне число, більше 2, $A = \{0, 1, ..., s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення,

$$A_0 \equiv A \setminus \{0\} \equiv \{1, 2, ..., s - 1\},$$

$L \equiv (A_0)^{\infty} \equiv (A_0) \times (A_0) \times (A_0) \times ....$ — простір односторонніх послідовностей елементів множини A_0.

Розглянемо множину S:

$$S \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L \right\}, \tag{7}$$

властивості якої були уже вивчені [**6**].

Виберемо довільне число x' з множини S. Таким чином, ми зафіксуємо послідовність $(d_n) \equiv (s^{\alpha_n})$. Замінимо всі значення в чисельниках α_n на ε_n, де $\varepsilon_n \in \{0, 1, ..., s^{\alpha_n} - 1\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

В результаті отримаємо представлення чисел з відрізка $[0, 1]$ рядом Кантора виду

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}} \tag{8}$$

з обмеженою послідовністю елементів.

Нехай послідовність (ε_n), починаючи з деякого номера n, є періодичною з періодом $(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+t})$. Тобто

$$x_0 = g_n + \frac{1}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{s^{\alpha_{n+1}}} + \frac{\varepsilon_{n+2}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}}} + ... + \frac{\varepsilon_{n+t}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+t}}} + \right.$$

$$+\frac{\varepsilon_{n+1}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+t+1}}}+\frac{\varepsilon_{n+2}}{s^{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+t+2}}}+...+\frac{\varepsilon_{n+t}}{s^{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+2t}}}+...+\frac{\varepsilon_{n+j}}{s^{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+kt+j}}}+...),$$

де $j=\overline{1,t}$ та $k=0,1,...,$

$$g_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_i}}.$$

Звідси, згрупувавши по j елементи останнього ряду і домноживши залишок ряду на $s^{\alpha_1+...+\alpha_n}$, отримаємо

$$s^{\alpha_1+...+\alpha_n}r_n=\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{s^{\alpha_{n+1}}}+\frac{\varepsilon_{n+1}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+t+1}}}+...+\frac{\varepsilon_{n+1}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+kt+1}}}+...\right)+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon_{n+2}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}}}+\frac{\varepsilon_{n+2}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+t+2}}}+...+\frac{\varepsilon_{n+2}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+kt+2}}}+...\right)+...+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon_{n+j}}{s^{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+j}}}+\frac{\varepsilon_{n+j}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+t+j}}}+...+\frac{\varepsilon_{n+j}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+kt+j}}}+...\right)+...+$$
$$+\left(\frac{\varepsilon_{n+t}}{s^{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+t}}}+\frac{\varepsilon_{n+t}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+2t}}}+...+\frac{\varepsilon_{n+t}}{s^{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+(k+1)t}}}+...\right).$$

Таким чином, кожна із сум в дужках (якщо винести за дужки ε_{n+j}) є s-ковим рядом. Перейдемо до відповідних s-кових зображень, винісши із s-кових сум множник ε_{n+j}.

$$s^{\alpha_1+...+\alpha_n}r_n\equiv$$
$$\equiv\varepsilon_{n+1}\Delta^s_{\underbrace{00000...0}_{\alpha_{n+1}-1}1\underbrace{0000000000000000...0}_{\alpha_{n+2}+...+\alpha_{n+t+1}-1}1...\underbrace{0000000000000000000...0}_{\alpha_{n+kt+2}+...+\alpha_{n+(k+1)t+1}-1}1...}+$$
$$+\varepsilon_{n+2}\Delta^s_{\underbrace{000000000000...0}_{\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}-1}1\underbrace{0000000000000000...0}_{\alpha_{n+3}+...+\alpha_{n+t+2}-1}1...\underbrace{0000000000000000000...0}_{\alpha_{n+kt+3}+...+\alpha_{n+(k+1)t+2}-1}1...}+$$
$$+...+\varepsilon_{n+j}\Delta^s_{\underbrace{000000000000...0}_{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+j}-1}1...\underbrace{0000000000000000000...0}_{\alpha_{n+kt+j+1}+...+\alpha_{n+(k+1)t+j}-1}1...}+$$
$$+...+\varepsilon_{n+t}\Delta^s_{\underbrace{000000000000...0}_{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+t}-1}1...\underbrace{0000000000000000000...0}_{\alpha_{n+kt+1}+...+\alpha_{n+(k+1)t}-1}1...}.$$

Оскільки число

$$x_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon_i}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_i}}+r_n$$

раціональне тоді і тільки тоді, коли r_n буде раціональним числом, тому задача про критерій раціональності числа x_0 зводиться до задачі про критерій раціональності чисел виду

$$x_j^*=\Delta^s_{\underbrace{000000000000...0}_{\alpha_{n+1}+...+\alpha_{n+j}-1}1...\underbrace{0000000000000000000...0}_{\alpha_{n+kt+j+1}+...+\alpha_{n+(k+1)t+j}-1}1...},\tag{9}$$

де

$$x_j^* \equiv \Delta^{(S_{(s,0)})}_{\underbrace{000...0}_{j-1}1\underbrace{000...0}_{t-1}1...\underbrace{000...0}_{t-1}1...},$$

при позначенні $\Delta^{(S_{(s,0)})}_{\varepsilon_1\varepsilon_2...}$ зображення числа рядом Кантора (8).

Для спрощення міркувань, вважатимемо, що період починається цифрою 0 (в s-ковому зображенні числа x_j^*). Очевидно, що в s-ковому зображенні числа x_j^* період може починатися після k_j-ї цифри 1 (k_j — фіксоване число і залежить лише від x_j^*). Слід зазначити, що в s-ковому зображенні числа x_j^* k_j-та цифра 1 знаходиться на позиції:

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + ... + \alpha_{n+j} + ... + \alpha_{n+(k_j-1)t+j}.$$

Спочатку розглянемо лише випадок, коли всі числа x_j^* мають в s-ковому зображенні в періоді лише одну цифру 1. Тоді для всіх натуральних чисел $k \geq k_j$ виконується умова (умова сталої кількості цифр 0 у періоді):

$$\alpha_{n+(k-1)t+j+1} + ... + \alpha_{n+kt+j} = A_j = const \quad \text{для} \quad j = \overline{1,t}, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Вибравши k_0 таким чином, щоб

$$k_0 = \max_{j=\overline{1,t}} \{k^{(j)}\},$$

та з критерію раціональності чисел, які представлені в s-ковій СЧ і, вважаючи, що числа x_j^* є раціональними, отримаємо систему t рівнянь з $2t-1$ невідомими:

$$\begin{cases} \alpha_{n+kt+2} + ... + \alpha_{n+(k+1)t+1} = A_1, \\ \alpha_{n+kt+3} + ... + \alpha_{n+(k+1)t+2} = A_2, \\ \alpha_{n+kt+4} + ... + \alpha_{n+(k+1)t+3} = A_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n+kt+j+1} + ... + \alpha_{n+(k+1)t+j} = A_j, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n+kt+1} + ... + \alpha_{n+(k+1)t} = A_t, \end{cases} \tag{10}$$

де $k = k_0 - 1, k_0, k_0 + 1, ...$

Перейдемо до розгляду випадку, коли всі числа x_j^* мають в s-ковому зображенні в періоді довільне число цифр 1.

Нехай в періоді числа x_j^* міститься ω_j цифр 1 та ξ_j цифр 1 міститься в неперіодичній частині s-кового зображення цього числа.

В такому випадку, спільний для всіх $j = \overline{1,t}$ порядковий номер k_0 цифри 1, одразу після якої починається період в s-ковому зображенні числа (9), є довільним розв'язком системи конгруенцій:

$$k_0 \equiv \xi_j (mod\ \omega_j), \quad j = \overline{1,t}.$$

Тоді, для всіх де $k = k_0 - 1, k_0, k_0 + 1, ...$, отримаємо систему умов, аналогічну системі умов (10):

$$[\alpha_{n+kt+j+1} + ... + \alpha_{n+(k+1)t+j}] + [\alpha_{n+(k+1)t+j+1} + ... + \alpha_{n+(k+2)t+j}] + ...+$$

$$+[\alpha_{n+(k+\omega_j-1)t+j+1} + ... + \alpha_{n+(k+\omega_j)t+j}] - \omega_j = B_j = const, \quad j = \overline{1,t},$$

оскільки період в s-ковому зображення числа x_j^* матиме вигляд :

$$(\underbrace{0000000000000000000...0}_{\alpha_{n+kt+j+1} + ... + \alpha_{n+(k+1)t+j} - 1} \quad 1... \quad \underbrace{0000000000000000000...0}_{\alpha_{n+(k+\omega_j-1)t+j+1} + ... + \alpha_{n+(k+\omega_j)t+j} - 1} \quad 1).$$

Останню систему умов можна, очевидно, записати наступним чином:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\omega_1} (\alpha_{n+(k+i-1)t+2} + ... + \alpha_{n+(k+i)t+1}) = B_1 = const, \\ \sum\limits_{i=1}^{\omega_2} (\alpha_{n+(k+i-1)t+3} + ... + \alpha_{n+(k+i)t+2}) = B_2 = const, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{\omega_j} (\alpha_{n+(k+i-1)t+j+1} + ... + \alpha_{n+(k+i)t+j}) = B_j = const, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{\omega_t} (\alpha_{n+(k+i)t+1} + ... + \alpha_{n+(k+i+1)t}) = B_t = const, \end{cases}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $k = k_0 - 1, k_0, k_0 + 1, ...$

Таким чином, сформулюємо теорему.

Теорема 8. *Нехай число $x_0 \in (0;1)$ в представленні рядом Кантора (8) з обмеженою послідовністю елементів є періодичним з періодом $(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+t})$ (відмінним від періоду (0)).*

Число x_0 є раціональним тоді і тільки тоді, коли період $(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+t})$ є таким, що для деякого $n \in \mathbb{N}$ та для всіх $k \geq k_0 - 1 \in \mathbb{N}$ для відмінних від цифри 0 цифр з $(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+t})$ існують відповідно числа $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_j$ ($j \leq t$, j визначається кількістю позицій в періоді, на яких знаходяться відмінні від цифри 0 цифри), що *виконується система умов:*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\omega_1} (\alpha_{n+(k+i-1)t+2} + ... + \alpha_{n+(k+i)t+1}) = const, \\ \sum\limits_{i=1}^{\omega_2} (\alpha_{n+(k+i-1)t+3} + ... + \alpha_{n+(k+i)t+2}) = const, \\ .... \\ \sum\limits_{i=1}^{\omega_j} (\alpha_{n+(k+i-1)t+j+1} + ... + \alpha_{n+(k+i)t+j}) = const, \end{cases}$$

де k_0 *— фіксоване натуральне число.*

Останні теореми легко узагальнити на весь клас рядів Кантора з обмеженою послідовністю елементів.

Справді, оскільки $d_n \equiv s^{\alpha_n}$, то з того, що $\log_s d_n \equiv \log_s s^{\alpha_n} = \alpha_n$ випливає, що

$$const = \sum_n \alpha_n \Leftrightarrow \sum_n \log_s d_n = \log_s \prod_n d_n = const.$$

Тобто

$$\sum_n \alpha_n = const \Leftrightarrow \prod_n d_n = const.$$

Формулювання теореми 8 буде наступним.

Теорема 9. *Нехай число* $x_0 \in (0;1)$ *в представленні рядом Кантора (*1*) з обмеженою послідовністю елементів є періодичним з періодом* $(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+t})$ *(відмінним від періоду* (0)*).*

Число x_0 *є раціональним тоді і тільки тоді, коли період* $(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+t})$ *є таким, що для деякого* $n \in \mathbb{N}$ *та для всіх* $k \geq k_0 - 1 \in \mathbb{N}$ *для відмінних від цифри* 0 *цифр з* $(\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}...\varepsilon_{n+t})$ *існують відповідно числа* $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_j$ *(*$j \leq t$*,* j *визначається кількістю позицій в періоді, на яких знаходяться відмінні від цифри* 0 *цифри), що виконується система умов:*

$$\begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{\omega_1} (d_{n+(k+i-1)t+2} \cdot ... \cdot d_{n+(k+i)t+1}) = const, \\ \prod\limits_{i=1}^{\omega_2} (d_{n+(k+i-1)t+3} \cdot ... \cdot d_{n+(k+i)t+2}) = const, \\ .... \\ \prod\limits_{i=1}^{\omega_j} (d_{n+(k+i-1)t+j+1} \cdot ... \cdot d_{n+(k+i)t+j}) = const, \end{cases}$$

де k_0 *— фіксоване натуральне число.*

Очевидно, що подібним чином можна сформулювати критерій задання раціонального числа рядом Кантора з періодичною послідовністю цифр (ε_n) та необмеженою монотонно неспадною послідовністю елементів (d_n) на основі використання s-кового представлення чи представлення чисел рядами Енгеля [**3**], [**4**].

Література

[1] *Cantor G.* Ueber die einfachen Zahlensysteme // Z. Mathl. Phys. — 1869.— Bd. 14.— S. 121–128.

[2] Mance B. *Normal numbers with respect to the Cantor series expansion.* — The Ohio State University, 2010. — 290 p.

[3] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2008, №9.— С. 212–224.

[4] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2006, №7.— С. 105–116.

[5] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[6] *Сербенюк С.О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини дійсних чисел, визначеної в термінах s-кового зображення // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2010, № 11— С. 241 – 250.

[7] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. *Фрактальные множества, функции, распределения.* — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[8] *Hancl J., Tijdeman R.* On the irrationality of Cantor and Ahmes series //Publ. Math. Debrecen. — 2004. — 65, no. 3-4. — P. 371—380.

[9] *Hancl J., Tijdeman R.* On the irrationality of factorial series // Acta Arith. — 2005. — 118. — P. 383–401.

[10] *Ралко Ю. В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.— 2009, № 10— С. 132–140.