Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 227–239.

УДК 517.5

Фрактальні властивості лінійних множин однієї трипараметричної сім'ї

М. В. Працьовитий, І. О. Савченко

НПУ імені М. П. Драгоманова

Анотація. Дана робота присвячена дослідженню тополого-метричних і фрактальних властивостей множини

$$C_\lambda^A = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n, a_n \in A \right\},$$

де λ — задане число з $(0, 1)$, $A = \{0, a_1, a_2, ..., a_{s-1}\} \subset \mathbb{R}$, $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{s-1}$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$.

Основна увага приділяється одному класу самоподібних множин, конструкції яких містять нескінченні перекриття. Ми обчислюємо міру Лебега і розмірність Хаусдорфа–Безиковича відповідних множин.

Fractal properties of linear sets of three-parameter family

M. Pratsiovytyi, I. Savchenko

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. The article is devoted to the investigation of topological, measure-theoretic and fractal properties of the set

$$C_\lambda^A = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n, a_n \in A \right\},$$

where $A = \{0, a_1, a_2, ..., a_{s-1}\} \subset \mathbb{R}$, $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{s-1}$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (0, 1)$.

We draw our attention to a certain class of the self-similar sets the constructions of which contains endless overlaps. We calculate the Lebesque measure and Hausdorff–Besicovitch dimension of certain sets.

E-mail: igorsav4enko@rambler.ru

Вступ

Нехай λ — задане дійсне число з $(0,1)$, $A = \{0, a_1, a_2, ..., a_{s-1}\} \subset \mathbb{R}$, $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{s-1}$, $2 \leq s \in \mathbb{N}$. Розглядається множина чисел

$$C_\lambda^A = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda^n, a_n \in A \right\}.$$

На початку 90-х років минулого століття, розв'язуючи задачу: чи буде арифметична сума двох множин канторівського типу нуль-множиною Лебега, чи буде вона містити інтервал, математики прийшли до так званої проблеми «(0, 1, 3)» — множини C_λ^A з алфавітом $A = \{0, 1, 3\}$. У роботі **[6]** M. Kean, M. Smorodinsky, B. Solomyak довели, що при $\lambda \leq \frac{1}{3}$ вона має нульову міру Лебега, при $\lambda \geq \frac{2}{5}$ є відрізком. Головним результатом було те, що існує послідовність (λ_k) алгебраїчних чисел з інтервалу $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$ таких, що кожна множина $C_{\lambda_k}^A$ має нульову міру Лебега і розмірність Хаусдорфа–Безиковича меншу одиниці. У роботі **[8]** M. Pollicott, K. Simon довели, що розмірність Хаусдорфа–Безиковича цієї множини співпадає з самоподібною розмірністю для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ і дорівнює $\alpha_0(C_\lambda^A) = -\log_\lambda 3$. У цій же роботі доведено, що для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ розмірність $\alpha_0(C_\lambda^A) = 1$, а у додатку роботи **[6]** дещо модифікованим методом отримано той же самий результат для майже всіх $\lambda \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{5})$. Але висновків відносно міри Лебега з цього зробити не можна.

У роботах **[8]**, **[9]**, **[10]** вивчалися більш загальні множини, ніж в **[6]**. Наприклад, у роботі **[8]** M. Pollicott і K. Simon обчислювали розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини C_λ^A з алфавітом $A = \{s_1, s_2, ..., s_l\} \subset \{0, 1, ..., (n-1)\}$, де $2 \leq l \leq n-1$, $n \in \mathbb{N}$. Автори виділили «критичний проміжок» значень параметра $\lambda \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{l}]$, для яких виникали труднощі при дослідженні відповідних множин. Такі множини мають нескінченну кількість суміжних інтервалів і в той же час циліндри цих множин перетинаються один з одним — OSC (умова відкритої множини) для них не виконується. У роботі **[9]** встановлено, що для майже всіх (у розумінні міри Лебега) значень $\lambda > \frac{1}{l}$ міра Лебега множини C_λ^A є додатною, в той же час існує зліченна множина значень λ, для яких C_λ^A є нуль-множиною Лебега і має розмірність Хаусдорфа–Безиковича меншу одиниці.

У роботах **[2]**, **[3]**, **[7]** вивчались розподіли випадкових величин, спектрами яких є множини виду C_λ^A. Робота **[1]** присвячена задачі про кількість представлень чисел з множин виду C_λ^A у системах числення з надлишковим набором цифр (алфавітом).

Ми цікавимося тополого-метричними та фрактальні властивостями множини C_λ^A, в першу чергу, коли $A := S = \{0, s_1, s_2\} \subset \mathbb{R}$. Особлива увага приділяється одному класу самоподібних множин, конструкції яких містять нескінченні перекриття.

Наше дослідження властивостей множини C_λ^A спирається на поняття циліндричної множини (циліндра, циліндричного відрізка).

1. Циліндричні множини та їх властивості

Означення 1. Нехай $c_1, c_2, ..., c_m$ — фіксований набір чисел з множини A. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$* ($c_i \in A$) називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$, яка містить всі суми виду

$$\sum_{n=1}^{m} c_n\lambda^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n\lambda^n, \text{ де } x_n \in A.$$

Циліндричним відрізком рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ ($c_i \in A$) називається відрізок

$$\Delta_{c_1...c_m} = [\min \Delta'_{c_1...c_m},\ \max \Delta'_{c_1...c_m}].$$

З означень випливають наступні властивості циліндричних множин.

1) $\Delta'_{c_1...c_m} \subset [0, \frac{a_{s-1}\lambda}{1-\lambda}]$.

2) $\Delta'_{c_1...c_m} = \Delta'_{c_1...c_m0} \cup \Delta'_{c_1...c_ma_1} \cup ... \cup \Delta'_{c_1...c_ma_{s-1}}$.

3) $\min \Delta_{c_1...c_m} = \min \Delta'_{c_1...c_m} = \sum_{n=1}^{m} c_n\lambda^n$,

$\max \Delta_{c_1...c_m} = \max \Delta'_{c_1...c_m} = a_{s-1}r_m + \sum_{n=1}^{m} c_n\lambda^n$, де $r_m = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \lambda^n = \frac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda}$.

4) $\Delta_{c_1...c_mc_{m+1}} \subset \Delta_{c_1...c_m}$.

5) Діаметр циліндра не залежить від його основи, а лише від рангу:

$$|\Delta'_{c_1...c_m}| = a_{s-1}r_m = \frac{a_{s-1}\lambda^{m+1}}{1-\lambda} \to 0 \ (m \to \infty),$$

зокрема, $|C_\lambda^A| = \frac{a_{s-1}\lambda}{1-\lambda}$.

6) Для довільної послідовності (c_m), $c_m \in A$: $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1...c_m} = x \equiv \Delta_{c_1...c_m...} \in C_\lambda^A$.

7) Основне метричне співвідношення: $\frac{|\Delta'_{c_1...c_{m+1}}|}{|\Delta'_{c_1...c_m}|} = \lambda$.

8) Нехай $A \equiv L = \{0, 1, ..., l-1\}$, де $l \in N$. Тоді

$$\Delta_{c_1...c_{m-1}i} \cap \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)} = \begin{cases} [a + (i+1)\lambda^m,\ a + i\lambda^m + (l-1)r_m], & \text{якщо } \lambda > \frac{1}{l}; \\ \Delta_{c_1...c_{m-1}i(l-1)...(l-1)...} = \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)00...0...}, & \text{якщо } \lambda = \frac{1}{l}; \\ \varnothing, & \text{якщо } \lambda < \frac{1}{l}, \end{cases}$$

де $a = \sum\limits_{n=1}^{m-1} c_n\lambda^n, \quad \{i, i+1\} \in L$.

Доведення. Позначимо $d_m = \max \Delta_{c_1...c_{m-1}i} - \min \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)} = \frac{\lambda^m}{1-\lambda}(l\lambda - 1)$. Якщо $\lambda > \frac{1}{l}$, то $\max \Delta_{c_1...c_{m-1}i} > \min \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)}$; якщо $\lambda < \frac{1}{l}$, то $\max \Delta_{c_1...c_{m-1}i} < \min \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)}$; якщо $\lambda = \frac{1}{l}$, то $\Delta_{c_1...c_{m-1}i(l-1)...(l-1)...} = \Delta_{c_1...c_{m-1}(i+1)0...0...}$. Знак чисел d_m вказує на один з трьох наведених вище випадків. $\square$

Представлення числа x у вигляді

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda^m \tag{1}$$

називатимемо *циліндричним.* Вираз (1) символічно будемо записувати $x = \Delta_{c_1 \ldots c_m \ldots}$ і називатимемо *циліндричним зображенням числа (точки)* x. Коректність даного означення випливає з властивості 6.

2. Узагальнення множини підсум геометричного ряду

Множину C_λ^A з алфавітом $A = \{0, 1\}$ називають *множиною підсум (множиною неповних сум) ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$. Розглянемо множину C_λ^L, у якої $A \equiv L = \{0, 1, ..., l-1\}$.

Нагадаємо означення *α-міри Хаусдорфа* і *розмірності Хаусдорфа–Безиковича* множини $E \subset R^1$, які більш тонко характеризують «масивність» множин у випадку їх нуль-мірності (у розумінні міри Лебега).

Означення 2. Нехай $0 < \alpha$ — фіксоване дійсне число, *α-мірною мірою (α-мірою) Хаусдорфа множини* E називається значення функції множини, визначеною рівністю

$$H^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} m_\alpha^\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} m_\alpha^\varepsilon(E), \quad \text{де} \quad m_\alpha^\varepsilon(E) = \inf_{|E_j| \le \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\}$$

і точна нижня грань визначається за всеможливими не більш ніж зліченними покриттями множини E відрізками E_i, діаметри $|E_i|$ яких не перевищують ε.

Невід'ємне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : \ H_\alpha(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha : \ H_\alpha(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини* E.

Розмірність Хаусдорфа–Безиковича має *властивості*:

1) Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\alpha_0(E_1) \le \alpha_0(E_2)$; 2) $\alpha_0 \left(\bigcup_i E_i \right) = \sup_i \alpha_0(E_i)$.

Теорема 1. *Множина* C_λ^L *є*

1) ніде не щільною самоподібною множиною нульової міри Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{l})$, *розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої обчислюється за формулою*

$$\alpha_0(C_\lambda^L) = -\log_\lambda l;$$

2) відрізком $[0, \frac{(l-1)\lambda}{1-\lambda}]$ *при* $\lambda \in [\frac{1}{l}, 1)$.

Доведення. 1) За властивістю 8 циліндричних множин, при $\lambda \in (0, \frac{1}{l})$ перерізи $\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1} i} \cap \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1}(i+1)} = \varnothing$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тому множина $C_\lambda^L \subset [0, \frac{(l-1)\lambda}{1-\lambda}]$ має нескінченну кількість суміжних інтервалів виду $(\max \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1} i}, \ \min \Delta_{c_1 \ldots c_{n-1}(i+1)})$.

Для знаходження міри Лебега C^L_λ покажемо, що сума довжин усіх суміжних з нею інтервалів дорівнює її діаметру:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(l^n-1)d_n = \frac{l\lambda-1}{1-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}(l^n-1)\lambda^n = \frac{(l-1)\lambda}{1-\lambda} = |C^L_\lambda|.$$

Отже, C^L_λ є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Оскільки

$$C^L_\lambda = \Delta'_0 \cup \Delta'_1 \cup ... \cup \Delta'_{l-1}, \quad \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \varnothing, \quad C^L_\lambda \overset{\lambda}{\sim} \Delta'_i,$$

тобто, множина є самоподібною з коефіцієнтом λ і є об'єднанням l циліндрів першого рангу, які між собою не перекриваються, то її розмірність Хаусдорфа–Безиковича α_0 дорівнює самоподібній розмірності і є розв'язком рівняння:

$$l\lambda^x = 1,$$

звідки $\alpha_0(C^L_\lambda) = -\log_\lambda l$.

2) За властивістю 8 циліндричних множин при $\lambda \in [\frac{1}{l}, 1)$ перерізи $\Delta_{c_1c_2...c_{n-1}i} \cap \Delta_{c_1c_2...c_{n-1}(i+1)} \neq \varnothing$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. А це означає, що кожне число з відрізка $[0, \frac{(l-1)\lambda}{1-\lambda}]$ можна представити у вигляді ряду (1). Отже, дана множина є відрізком. $\square$

3. Трипараметрична сім'я множин C^S_λ

Перейдемо до дослідження множин, у яких $A \equiv S = \{0, s_1, s_2\} \subset \mathbb{R}$. Перекриття циліндрів одного рангу залежить від *трьох* параметрів s_1, s_2, λ. Для кожного натурального n і довільного фіксованого набору $c_1c_2...c_m$ ($c_i \in A$) можливим є один з наступних випадків:

1) $\Delta_{c_1...c_n0} \cap \Delta_{c_1...c_ns_1} = \varnothing = \Delta_{c_1...c_ns_1} \cap \Delta_{c_1...c_ns_2}$ — відсутність перекриттів циліндрів (OSC виконується);

2) $\begin{cases} \Delta_{c_1...c_n0} \cap \Delta_{c_1...c_ns_1} \neq \varnothing, \\ \Delta_{c_1...c_ns_1} \cap \Delta_{c_1...c_ns_2} \neq \varnothing \end{cases}$ — нескінченні перекриття циліндрів;

3) $\begin{cases} \Delta_{c_1...c_n0} \cap \Delta_{c_1...c_ns_1} \neq \varnothing, \\ \Delta_{c_1...c_ns_1} \cap \Delta_{c_1...c_ns_2} = \varnothing \end{cases}$ або 4) $\begin{cases} \Delta_{c_1...c_n0} \cap \Delta_{c_1...c_ns_1} = \varnothing, \\ \Delta_{c_1...c_ns_1} \cap \Delta_{c_1...c_ns_2} \neq \varnothing. \end{cases}$

Займемося дослідженням геометрії циліндричних множин. Розглянемо різниці:

$$d^1_n = \min \Delta_{c_1...c_{n-1}s_1} - \max \Delta_{c_1...c_{n-1}0} = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}(s_1 - \lambda(s_1+s_2)),$$

$$d^2_n = \min \Delta_{c_1...c_{n-1}s_2} - \max \Delta_{c_1...c_{n-1}s_1} = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}(s_2 - s_1 - \lambda(2s_2 - s_1)).$$

Числа d^1_n, d^2_n є діаметрами перерізів двох сусідніх циліндричних відрізків або довжинами суміжних з множиною інтервалів одного рангу.

Далі ми будемо використовувати числа $\lambda_1 = \frac{s_1}{s_1+s_2}$ і $\lambda_2 = \frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1}$, при яких межі сусідніх циліндрів довільного рангу співпадають, тобто, для кожного натурального n

виконуються рівності: $\max\Delta_{c_1\ldots c_n0} = \min\Delta_{c_1\ldots c_ns_1}$ при λ_1, $\max\Delta_{c_1\ldots c_ns_1} = \min\Delta_{c_1\ldots c_ns_2}$ при λ_2.

Лема 1. *1)* $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \frac{1}{2})$*;*
2) $s_1 < \frac{s_2}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 < \lambda_2$, $s_1 > \frac{s_2}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 > \lambda_2$, $s_1 = \frac{s_2}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$*;*
3) а) $d_n^1 > 0$ *при* $\lambda \in (0, \lambda_1)$*, тому* $\Delta_{c_1\ldots c_n0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_ns_1} = \varnothing$*;*
$d_n^1 \le 0$ *при* $\lambda \in [\lambda_1, 1)$*, тому* $\Delta_{c_1\ldots c_n0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_ns_1} \neq \varnothing$*;*
б) $d_n^2 > 0$ *при* $\lambda \in (0, \lambda_2)$*, тому* $\Delta_{c_1\ldots c_ns_1} \cap \Delta_{c_1\ldots c_ns_2} = \varnothing$*;*
$d_n^2 \le 0$ *при* $\lambda \in [\lambda_2, 1)$*, тому* $\Delta_{c_1\ldots c_ns_1} \cap \Delta_{c_1\ldots c_ns_2} \neq \varnothing$*;*
4) а) якщо $\frac{s_1}{s_2} \to 0$*, то* $\lambda_1 \to 0$ *і* $\lambda_2 \to \frac{1}{2}$*;*
якщо $s_2 \to \infty$ *і* $\frac{s_1}{s_2} \to 1$*, то* $\lambda_2 \to 0$ *і* $\lambda_1 \to \frac{1}{2}$*;*
б) якщо $\frac{s_1}{s_2} \to \frac{1}{2} - 0$*, то* $\lambda_1, \lambda_2 \to \frac{1}{3}$*, причому* $\lambda_1 \le \frac{1}{3} \le \lambda_2$*;*
якщо $\frac{s_1}{s_2} \to \frac{1}{2} + 0$*, то* $\lambda_1, \lambda_2 \to \frac{1}{3}$*, причому* $\lambda_2 \le \frac{1}{3} \le \lambda_1$*.*

Зауваження 1. *Далі обмежимось розглядом випадку* $0 < s_1 < \frac{s_2}{2}$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$*. Випадок* $\frac{s_2}{2} < s_1 < s_2$ *шляхом заміни:* $s_1' = s_2 - s_1$*,* $s_2' = s_2$ *будемо зводити до попереднього, оскільки множини* C_λ^S *і* $C_\lambda^{S'}$*, у яких* $S = \{0, s_1, s_2\}$ *і* $S' = \{0, s_1', s_2'\}$*, симетричні. Наприклад,* $\{0,3,4\} \to \{0,1,4\}$*,* $\{0,5,8\} \to \{0,3,8\}$ *і т.д.*

Теорема 2. *Множина* C_λ^S *є*
1) ніде не щільною множиною нульової міри Лебега при $\lambda \in (0, \frac{1}{3})$*;*
2) відрізком $[0, \frac{s_2\lambda}{1-\lambda}]$ *при* $\lambda \in [\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1}, 1)$*.*
При $\lambda \in (0, \frac{s_1}{s_1+s_2}]$ *її розмірність Хаусдорфа–Безиковича обчислюється за формулою*

$$\alpha_0(C_\lambda^S) = -\log_\lambda 3.$$

Доведення. 1) Множина C_λ^S міститься в об'єднанні не більше, ніж 3^n циліндрів рангу n діаметра $s_2 r_n$, тому її міра Лебега

$$\mathcal{L}(C_\lambda^S) \le \lim_{n\to\infty}(s_2 r_n \cdot 3^n) = \frac{s_2\lambda}{1-\lambda}\lim_{n\to\infty}(3t)^n = 0 \ \text{ при } t < \frac{1}{3}.$$

Нуль-мірність C_λ^S можна довести по іншому. Оскільки вона є об'єднанням

$$C_\lambda^S = \lambda C_\lambda^S \cup (s_1 \oplus \lambda C_\lambda^S) \cup (s_2 \oplus \lambda C_\lambda^S),$$

то за властивістю напівадитивності міри

$$\mathcal{L}(C_\lambda^S) \le 3\lambda \cdot \mathcal{L}(C_\lambda^S) \Rightarrow \ \mathcal{L}(C_\lambda^S) = 0 \text{ при } \lambda < \frac{1}{3}.$$

Оскільки C_λ^S є континуальною досконалою множиною нульової міри Лебега, то вона є і ніде не щільною.

При $\lambda \in (0, \frac{s_1}{s_1+s_2}]$ множина C_λ^S є самоподібною з коефіцієнтом λ і є об'єднанням трьох циліндрів першого рангу, які між собою не перетинаються. Її розмірність

Хаусдорфа–Безиковича α_0 співпадає з самоподібною розмірністю і є розв'язком рівняння

$$3\lambda^x = 1,$$

тобто $\alpha_0(C_\lambda^S) = -\log_\lambda 3$.

2) З п. 3 леми 1 слідує, що при $\lambda \in [\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1}, 1)$ перерізи $\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0} \cap \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}s_1}$, $\Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}s_1} \cap \Delta_{c_1c_2\ldots c_{n-1}s_2}$ не є порожніми при всіх $n \in \mathbb{N}$. Кожне число з відрізка $[0, \frac{(s_2\lambda)}{1-\lambda}]$ можна подати у вигляді ряду (1). Отже, множина C_λ^S є відрізком.

□

4. Про один спеціальний випадок

У випадку, коли $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2) = (\frac{s_1}{s_1+s_2}, \frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1})$ множина C_λ^S містить нескінченну кількість суміжних інтервалів, яка може бути як і нуль-множиною, так і множиною додатної міри Лебега.

Зупинимося детально на одному випадку, коли перекриттям циліндричних відрізків $\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0}$ і $\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_1}$ є циліндричний відрізок наступного $n+1$ рангу.

Лема 2. *Умова*

$$\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_1} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0s_2} = \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_10} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

рівносильна рівності

$$\lambda = \frac{s_1}{s_2}. \tag{3}$$

Доведення. Рівність (2) рівносильна рівності діаметрів

$$|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cap \Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_1}| = |\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}0s_2}| = s_2 r_{n+1},$$

яка записується у вигляді

$$\frac{(\lambda(s_1+s_2) - s_1)\lambda^n}{1-\lambda} = \frac{s_2\lambda^{n+2}}{1-\lambda} \Leftrightarrow s_2\lambda^2 - (s_1+s_2)\lambda + s_1 = 0,$$

звідки і слідує рівність (3).

□

Лема 3. *Якщо* $\frac{s_1}{s_2} \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, *то* $\frac{s_1}{s_2} < \frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1}$, $\frac{s_1}{s_1+s_2} \in (0, \frac{5-\sqrt{5}}{10})$, $\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1} \in (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$.

Доведення. Покажемо, що $\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1} > \frac{s_1}{s_2}$ при $\frac{s_1}{s_2} \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$. Запишемо для цього різницю

$$\frac{s_2-s_1}{2s_2-s_1} - \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_2\left((\frac{s_1}{s_2})^2 - 3\frac{s_1}{s_2} + 1\right)}{2s_2-s_1} = \frac{s_2(\frac{s_1}{s_2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2})(\frac{s_1}{s_2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2})}{2s_2-s_1}.$$

□

Перейдемо до дослідження структури множини C^S_λ при $\lambda = \frac{s_1}{s_2}$. Нас цікавить кількість суміжних з C^S_λ інтервалів рангу $n+1$. Дана множина міститься в об'єднанні циліндричних множин рангу n двох типів:

1) $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c} := \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1}$ — об'єднання двох циліндрів, перетином яких є циліндр наступного рангу, тобто

$$\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cap \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1} = \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0s_2} = \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_10};$$

2) $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ — циліндр, геометрично подібний всій множині.

Відрізки виду $\square_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ та $\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ називатимемо *модифікованими циліндричними відрізками рангу* n, а множину всіх таких відрізків рангу n будемо позначати $\mathcal{A}_n$.

Нехай x_n та y_n — кількість множин виду $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ та $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$, а z_n — кількість суміжних з множиною C^S_λ інтервалів рангу n (інтервалів $(\max\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1}, \min\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2})$ таких, що не містять точок даної множини). Множина $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ є об'єднанням *двох* множин виду $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c_nc}$ та *однієї* множини $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}c_ns_2}$:

$$\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c} = (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}00} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0s_1}) \cup (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_10} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1s_1}) \cup (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1s_2}),$$

а множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ є об'єднанням множин $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c_nc}$ та $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}c_ns_2}$:

$$\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2} = (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_20} \cup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2s_1}) \cup (\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2s_2}).$$

Множина $\square'_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ має *два* суміжні інтервали рангу $n+1$ виду

$$(\max\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0s_1}; \min\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}0s_2}) \quad \text{та} \quad (\max\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1s_1}; \min\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_1s_2}),$$

а множина $\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ має *один* суміжний інтервал $(\max\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2s_1}; \min\Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}s_2s_2})$ рангу $n+1$. Тому мають місце наступні рівності:

$$x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} = z_n, \tag{4}$$

$$y_n = x_{n-1} + y_{n-1}. \tag{5}$$

Результати занесемо у таблицю.

Ранг	x_n	y_n	z_n
0	0	1	0
1	$1 = u_2$	$1 = u_1$	1
2	$2u_2 + u_1 = u_3 + u_2 = u_4 = 3$	$u_1 + u_2 = u_3 = 2$	3
3	$2u_4 + u_3 = u_6 = 8$	$u_3 + u_4 = u_5 = 5$	8
...	...	...	...
n	$2x_{n-1} + y_{n-1} = u_{2n}$	$x_{n-1} + y_{n-1} = u_{2n-1}$	$2x_{n-1} + y_{n-1} = u_{2n}$

Послідовність (u_n) є класичною послідовністю Фібоначчі, а кількість суміжних інтервалів рангу n дорівнює u_{2n}. За формулою Біне маємо:

$$u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^{2n} - \psi^{2n} \right), \tag{6}$$

де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Теорема 3. *Якщо $\lambda = \frac{s_1}{s_2} \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, то множина C^S_λ є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої дорівнює $\alpha_0(C^S_\lambda) = \log_{\frac{s_2}{s_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.*

Доведення. Для доведення нуль-мірності та ніде не щільності C^S_λ покажемо, що міра доповнення $\mu(\overline{C^S_\lambda})$ дорівнює діаметру множини:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 u_{2n} = |C^S_\lambda|, \tag{7}$$

де $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2 u_{2n}$ — сума довжин усіх суміжних інтервалів рангу n $(n = 1, 2, 3, ...)$ виду $(\max \Delta'_{c_1 \dots c_{n-1} s_1}, \min \Delta'_{c_1 \dots c_{n-1} s_2})$.

Знайдемо суму збіжного при $\lambda \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi^2 \lambda)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (\psi^2 \lambda)^n \right) = \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \left(\frac{\varphi^2}{1-\lambda\varphi^2} - \frac{\psi^2}{1-\lambda\psi^2} \right) = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}.$$

Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 u_{2n} = \frac{s_2 - s_1 - \lambda(2s_2 - s_1)}{1-\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}.$$

Знаючи, що $|C^S_\lambda| = \frac{s_2 \lambda}{1-\lambda}$, підстановкою значення $\lambda = \frac{s_1}{s_2}$ доводимо рівність (7), тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 u_{2n} = |C^S_\lambda| = \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1}.$$

Обчислимо розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини C^S_λ. Оскільки дана множина належить об'єднанню циліндричних відрізків $\square_{c_1 \dots c_{n-1} c}$ та $\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} s_2}$ рангу $n = 1, 2, 3, ...$, то розглянемо її покриття такими відрізками (відрізки одного рангу між собою не перетинаються). Їх діаметри дорівнюють

$$|\square_{c_1 \dots c_{n-1} c}| = |\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 0} \cup \Delta_{c_1 \dots c_{n-1} 1}| = 2r_n + d_n^1 = \frac{\lambda^n}{1-\lambda}(s_1 + \lambda(s_2 - s_1)),$$

$$|\Delta_{c_1 \dots c_{n-1} s_2}| = s_2 r_n = \frac{s_2 \lambda^{n+1}}{1-\lambda}.$$

З формул (4), (5), (6) та результатів таблиці випливають наступні формули, які виражають кількість відрізків $\square_{c_1\ldots c_{n-1}c}$ та $\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}$ рангу n:

$$x_n = u_{2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n\right), \tag{8}$$

$$y_n = u_{2n-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((\sqrt{5}-1)(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\sqrt{5}+1)(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n\right). \tag{9}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} m^{\alpha}_{|\square_n|,|\Delta_n|}(C^S_\lambda) &\le x_n\cdot|\square_{c_1\ldots c_{n-1}c}|^\alpha + y_n\cdot|\Delta_{c_1\ldots c_{n-1}s_2}|^\alpha = \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(\varphi^2)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(\psi^2)^n\right)(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha\lambda^{\alpha n} + \\ &+\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi^2)^n + (\psi^2)^n\right)(\frac{s_1+\lambda(s_2-s_1)}{1-\lambda})^\alpha\lambda^{\alpha n} = \\ &= (\lambda^\alpha\varphi^2)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s_1+\lambda(s_2-s_1)}{1-\lambda})^\alpha\right) + \\ &+(\lambda^\alpha\psi^2)^n\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s_1+\lambda(s_2-s_1)}{1-\lambda})^\alpha\right) = \\ &= C_1(\lambda^\alpha\varphi^2)^n + C_2(\lambda^\alpha\psi^2)^n = C_1\left(1+\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{2n}\right)\cdot(\lambda^\alpha\varphi^2)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

де $C_1 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s_1+\lambda(s_2-s_1)}{1-\lambda})^\alpha\right)$, $C_2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{s_1+\lambda(s_2-s_1)}{1-\lambda})^\alpha\right)$.

Отже, маємо

$$H^\alpha(C^S_\lambda) \le \varliminf_{n\to\infty} C_1\left(1+\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{2n}\right)(\lambda^\alpha\varphi^2)^n = C_1\varliminf_{n\to\infty}(\lambda^\alpha\varphi^2)^n.$$

Якщо $\lambda^\alpha\varphi^2 < 1$, що рівносильно $\alpha > -\log_\lambda\varphi^2 := \alpha_0$, то $H^\alpha(C^S_\lambda) = 0$. Оскільки $H^\alpha(C^S_\lambda) = 0$ для всіх $\alpha > \alpha_0$, то

$$\alpha_0(C^S_\lambda) \le \alpha_0 = -\log_\lambda\varphi^2 = \log_{\frac{s_2}{s_1}}\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

і $H^\alpha(C^S_\lambda) \le C_1$ при $\alpha = \alpha_0$.

Доведемо тепер, що $H^\alpha(C^S_\lambda) \ge C = const > 0$ при $\alpha = \alpha_0$. Для цього покажемо, що для *довільного скінченного* ε-покриття $\{E_i\}$ множини C^S_λ відрізками $E_i = [a_i, b_i]$ має місце нерівність

$$0 < C \le \sum_{i=1}^{k}|E_i|^{\alpha_0}.$$

Ми розглядаємо лише скінченні покриття, оскільки множина C^S_λ є компактною. Для довільного E_i існує модифікований циліндричний відрізок $\square_{c_1\ldots c_{n_i-1}c}$ (або $\Delta_{c_1\ldots c_{n_i-1}s_2}$)

рангу n_i такий, що $\Box_{c_1...c_{n_i-1}c} \subset E_i$ (або $\Delta_{c_1...c_{n_i-1}s_2} \subset E_i$) і жоден з відрізків $\Box_{c_1...c_{n_i-2}c}$ (або $\Delta_{c_1...c_{n_i-2}s_2}$) не міститься повністю в E_i (для кожного E_i знайдеться циліндричний відрізок найменшого рангу n_i, який міститься в E_i, а інші відрізки рангу $n_i - 1$ не містяться повністю в E_i).

Для кожної множини E_i з даного покриття існує n_i такий, що:

$$\min\{|\Box_{c_1...c_{n_i-1}c}|, |\Delta_{c_1...c_{n_i-1}s_2}|\} = \frac{s_2\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \leq |E_i| \leq |\Box_{c_1...c_{n_i-2}c}|.$$

Піднесемо до степеня $\alpha_0 = \log_\lambda \varphi^{-2}$ і запишемо систему нерівностей для кожного E_i $(i = 1, 2, ..., k)$:

$$\begin{cases} (\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^{\log_\lambda \varphi^{-2}} \cdot (\varphi^2)^{-n_1} \leq |E_1|^{\alpha_0}, \\ (\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^{\log_\lambda \varphi^{-2}} \cdot (\varphi^2)^{-n_2} \leq |E_2|^{\alpha_0}, \\ ... \\ (\frac{s_2\lambda}{1-\lambda})^{\log_\lambda \varphi^{-2}} \cdot (\varphi^2)^{-n_k} \leq |E_k|^{\alpha_0}. \end{cases}$$

Підсумувавши по k, отримаємо

$$\left(\frac{s_2\lambda}{1-\lambda}\right)^{\log_\lambda \varphi^{-2}} \cdot \left((\varphi^2)^{-n_1} + (\varphi^2)^{-n_2} + ... + (\varphi^2)^{-n_k}\right) \leq \sum_{i=1}^{k} |E_i|^{\alpha_0}. \qquad (10)$$

З будови множини C_λ^S слідує, що E_i міститься в об'єднанні не більше, як *п'яти* модифікованих циліндричних відрізків рангу n_i, а точніше, в *трьох* відрізках $\Box_{c_1...c_{n_i-1}c}$ та *двох* відрізках $\Delta_{c_1...c_{n_i-1}s_2}$, які належать $\mathcal{A}_{n_i}$.

Врахувавши результати таблиці та формули (4), (5), (8), (9), встановлюємо, що E_i міститься в об'єднанні не більше, ніж $R_{n_i}(j)$ модифікованих циліндричних відрізків рангу $j = n_i + m$ $(m = 0, 1, 2, ...)$:

$$R_{n_i}(j) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi(\varphi^2)^{m+2} - \psi(\psi)^{m+2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi(\varphi^2)^{j-n_i+2} - \psi(\psi)^{j-n_i+2}). \qquad (11)$$

Використовуючи формули (8) і (9), запишемо кількість всіх відрізків $\Box_{c_1...c_{j-1}c}$ та $\Delta_{c_1...c_{j-1}s_2}$ довільного рангу j:

$$x_j + y_j = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot (\varphi^2)^j - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot (\psi^2)^j.$$

Ця сума не перевищує суми всіх $R_{n_i}(j)$ $(i = 1, 2, ..., k)$, оскільки кожен відрізок E_i покриття $\{E_i\}$ має спільні точки принаймні з одним відрізком покриття $\mathcal{A}_j$. Тому має місце нерівність:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot (\varphi^2)^j - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \cdot (\psi^2)^j \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi(\varphi^2)^{j-n_1+2} - \psi(\psi)^{j-n_1+2}) + ... + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi(\varphi^2)^{j-n_k+2} - \psi(\psi)^{j-n_k+2}),$$

яка рівносильна

$$\varphi - \left((\frac{\psi}{\varphi})^2 \right)^j \cdot \varphi^2 + \psi \left((\frac{\psi}{\varphi})^2 \right)^j \left((\psi)^{-n_1+2} + ... + (\psi)^{-n_k+2} \right) \leq$$

$$\leq \varphi(\varphi^2)^{-n_1+2} + \varphi(\varphi^2)^{-n_2+2} + ... + \varphi(\varphi^2)^{-n_k+2} = \varphi^5 \cdot \left((\varphi^2)^{-n_1} + ... + (\varphi^2)^{-n_k} \right),$$

звідки

$$\frac{1}{\varphi^4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^j \cdot \left(\frac{1}{\varphi^2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^5 \cdot \left((\varphi^2)^{-n_1} + ... + (\varphi^2)^{-n_k} \right) \right) \leq$$

$$\leq (\varphi^2)^{-n_1} + ... + (\varphi^2)^{-n_k}.$$

Перейшовши до границі при $j \to \infty$, отримаємо

$$\frac{1}{\varphi^4} \leq (\varphi^2)^{-n_1} + (\varphi^2)^{-n_2} + ... + (\varphi^2)^{-n_k}.$$

Використовуючи останню нерівність, ми можемо оцінити ліву частину нерівності (10):

$$0 < \frac{1}{\varphi^4} \left(\frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \right)^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \varphi^2} \leq \left(\frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \right)^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \varphi^2} \cdot (\varphi^2)^{-n_1} + ... + (\varphi^2)^{-n_k} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} |E_i|^{\alpha_0} \leq H^{\alpha_0}(C_\lambda^S).$$

Отже,

$$0 < \frac{1}{\varphi^4} \left(\frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1} \right)^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \varphi^2} \leq H^{\alpha_0}(C_\lambda^S) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} (\frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1})^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(2s_2 - s_1)s_1}{s_2 - s_1} \right)^{\log_{\frac{s_2}{s_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right).$$

Тому $\alpha_0(C_\lambda^S) = \log_{\frac{s_2}{s_1}} \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

□

Прикладами множин C_λ^S, які задовольняють умови теореми, є множини з наступними алфавітами: $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 3, 8\}$, $\{0, 4, 11\}$, $\{0, \sqrt{2}, \sqrt{17}\}$.

Література

[1] *Гончаренко Я. В., Микитюк І. О.* Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання // Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004, № 5. — С. 242–254.

[2] *Литвинюк А.* Розподіли сум деякого класу випадкових рядів з незалежними розподіленими коефіцієнтами // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — 1998. — № 2. — С. 122–128.

[3] *Працьовитий М. В., Литвинюк А. А.* Розподіли випадкових величин, представлених s-адичним дробом з надлишковим набором цифр // Наукові записки НПУ ім. Драгоманова. Фіз.–мат. науки. — 1999. — № 1. — С. 136–141.

[4] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[5] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. *Фрактальные множества, функции, распределения.* — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

[6] *Keane M., Smorodinsky M., Solomyak B.* On the morfology of γ–expansions with deleted digits // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — **347**, no. 3. — P. 955–966.

[7] *Lytvynuk A. A.* On types of distributions of sums of one class of random power series with independent identically distributed coefficient // Ukrainian Math. J. — 1999. — **51**, no. 1. — P. 140–145.

[8] *Pollicott M., Simon K.* The Hausdorff dimension of λ–expansions with deleted digits // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — **347**, no. 3. — P. 967–983.

[9] *Solomyak B.* Measure and dimension for some fractal families // Proc. Camb. Phil. Soc.— 1998. — **124**. — P. 531–548.

[10] *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem) // Annals of Mathematics.— 1995. — **142**. — P. 611–625.