Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 217–226.

УДК 511.72+517

Тополого-метричні і фрактальні властивості множини дійсних чисел з заданим середнім значенням цифр четвіркового зображення, коли їх частоти існують

М. В. Працьовитий, С. О. Климчук

НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України

Анотація. У роботі описано властивості функції

$$y = r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x), \text{ де } x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) 4^{-k},$$

середнього значення четвіркових цифр дробової частини дійсного числа x, зокрема властивості множини її рівнів $S_\theta = \{x : r(x) = \theta,\ \theta = const,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 3\}$, при умові існування частот усіх четвіркових цифр.

Вказано алгоритм побудови точки множини S_θ, доведено її континуальність, всюди щільність. Знайдено умови нуль-мірності та повноти міри Лебега, отримано оцінки розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Topological, metric and fractal properties of sets of real numbers with pre assigned mean of digits of 4-adic representation when their frequencies exists

M. Pratsiovytyi, S. Klymchuk

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

Abstract. We describe some properties of function

$$y = r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x), \text{ where } x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x) 4^{-k}$$

of 4-adic digits asymptotic mean of fractional part of real number x, particularly properties of it's level sets $S_\theta = \{x : r(x) = \theta,\ \theta = const,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 3\}$, upon condition of existence of all 4-adic digits frequencies.

We specified an algorithm of constructing point from the set S_θ, and proved continuality and every where density of the set. We found conditions of zero and full Lebesgue measure and estimates of Hausdorff–Besicovitch dimension.

E-mail: svetaklymchuk@gmail.com

Вступ

Мова йтиме про дробову частину дійсного числа, тому будемо розглядати лише числа з відрізка $[0;1]$. Нехай $2 \leqslant s$ — фіксоване натуральне число, а $\mathcal{A}_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення. Добре відомо, що для будь-якого $x \in [0;1]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_n \in \mathcal{A}_s$, така, що

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \cdots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{1}$$

Подання числа x рядом (1) називається його s-ковим представленням. Останній символічний запис $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ ряду (1) і його суми x називається їх s-ковим зображенням.

Всі ірраціональні числа і частина раціональних чисел мають єдине s-кове зображення і називаються *s-ково-ірраціональними.* Решта чисел (їх зліченна множина) мають рівно два s-кових зображення, а саме:

$$\Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}c_k(0)} = \Delta^s_{c_1\ldots c_{k-1}[c_k-1](s-1)},$$

де (i) — період у зображенні числа. Вони називаються *s-ково-раціональними.* Для коректності означення n-ної цифри $\alpha_n(x)$ числа x як його функції, домовимось використовувати лише перше s-кове зображення, а саме: те, що має період (0).

У термінах s-кового зображення чисел було означено і досліджено багато різних математичних об'єктів зі складною локальною структурою і фрактальними властивостями. Це — множини, функції, розподіли випадкових величин, динамічні системи, перетворення простору тощо. В цих же цілях може бути використане наступне поняття.

Середнім значенням цифр числа $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ називається значення $r(x)$ границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) \equiv r(x),$$

якщо вона існує.

Вперше поняття середнього значення цифр і його використання для вивчення тополого-метричних і фрактальних властивостей множин дійсних чисел було запропоновано в роботі [**10**].

Ми цікавимося тополого-метричними властивостями множин чисел з наперед заданим *середнім значенням цифр*, тобто множинами виду

$$S_\theta \equiv \left\{ x : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \theta \geqslant 0 \right\},$$

де константа θ — наперед заданий параметр.

Поняття середнього значення цифр числа тісно пов'язане з поняттям частоти цифри. А для двійкової системи числення ці поняття співпадають. Нагадаємо його.

Нехай $N_i(x,n)$ — кількість цифр $i \in \mathcal{A}_s$ у s-ковому зображенні $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ числа $x \in [0;1]$ до n-го місця включно, тобто

$$N_i(x,n) = \#\{j : \alpha_j(x) = i,\ j \leqslant n\}.$$

Частотою цифри i у s-ковому зображенні числа $x \in [0;1]$ називається границя (якщо вона існує)

$$\nu_i(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n}.$$

Функція частоти $\nu_i(x)$ цифри i у s-ковому зображенні числа $x \in [0;1]$ є коректно визначеною для s-ково-ірраціональних чисел, а для s-ково-раціональних — після домовленості використовувати лише зображення з періодом (0).

Число $r_n(x) \equiv \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x)$ називається *відносним середнім значенням цифр* числа x. Оскільки

$$r_n(x) = \frac{N_1(x,n)}{n} + \frac{2N_2(x,n)}{n} + \ldots + \frac{(s-1)N_{s-1}(x,n)}{n},$$

то $0 \leqslant r_n(x) \leqslant s-1$. Тоді очевидно, що коли існують частоти всіх цифр, то існує середнє значення цифр.

Число x називається *нормальним за основою s (слабо нормальним)*, якщо для кожного $i \in \mathcal{A}_s$ частота існує і рівна $\nu_i(x) = s^{-1}$.

Множина нормальних чисел відрізка $[0;1]$ є множиною повної міри Лебега [**4**].

Множиною Безиковича–Егглстона $E[\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_{s-1}]$ називається множина виду

$$E[\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_{s-1}] = \{x : \nu_i(x) = \tau_i,\ i = \overline{0, s-1}\}.$$

Фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(\cdot)$ множини $E[\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_{s-1}]$ обчислюється [**7**] за формулою

$$\alpha_0(E[\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_{s-1}]) = -\frac{\ln \tau_0^{\tau_0}\tau_1^{\tau_1}\ldots\tau_{s-1}^{\tau_{s-1}}}{\ln(s-1)}.$$

Зосередимо свою увагу на випадку $s=4$, оскільки випадок $s=3$ детально проаналізований у нашій статті поданій до друку. Саме у випадку $s>3$ множина S_θ володіє більш багатшими властивостями.

Розглядається множина чисел з наперед заданим *середнім значенням цифр*, зображених у четвірковій системі числення, тобто множинами виду

$$S_\theta \equiv \{x : r(x) = \theta\},$$

де θ — наперед заданий параметр з відрізка $[0;3]$.

Множина S_θ є об'єднанням трьох неперетинних множин Θ_1, Θ_2 і Θ_3 таких, що

$$\begin{aligned}\Theta_1 &\equiv \{x : \nu_i(x) - \text{існує}, \forall i \in \{0,1,2,3\}\}, \\ \Theta_2 &\equiv \{x : \text{частоти цифр можуть існувати і не існувати}\}, \\ \Theta_3 &\equiv \{x : \nu_i(x) - \text{не існує}, \forall i \in \{0,1,2,3\}\}.\end{aligned}$$

Проведемо аналіз властивостей підмножини Θ_1 множини S_θ.

1. Множина Θ_1 і множини Безиковича–Егглстона

Теорема 1. *Якщо $\theta = 0$ або $\theta = 3$, то Θ_1 є аномально фрактальною, всюди щільною множиною.*

Доведення. Нехай $v_j^{(n)} = n^{-1}N_j(x,n)$ — відносна частота цифри j у четвірковому зображенні числа x, $r_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j(x)$ — відносне середнє значення цифр числа x. Тоді має місце система

$$\begin{cases} v_0^{(n)} + v_1^{(n)} + v_2^{(n)} + v_3^{(n)} = 1, \\ v_1^{(n)} + 2v_2^{(n)} + 3v_3^{(n)} = r_n. \end{cases} \tag{$*$}$$

Нехай $\theta = 0$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, то для кожного $i \in \{1,2,3\}$ виконується умова $0 \leqslant v_n^{(i)}(x) \leqslant v_n^{(1)}(x) + 2v_n^{(2)}(x) + 3v_n^{(3)}(x) = r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, тому $\nu_i(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n^{(i)}(x) = 0$, і відповідно $\nu_0(x) = 1$. Тому $S_\theta = \Theta_1 = E[1,0,0,0]$. Остання множина, як відомо, є всюди щільною, розмірність Хаусдорфа–Безиковича її дорівнює

$$\alpha_0(E[1,0,0,0]) = \frac{\ln 1^1 0^0 0^0 0^0}{-\ln 4} = 0.$$

Нехай тепер $\theta = 3$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 3$, то коли першу рівність системи $(*)$ помножити на 3 і відняти другу рівність цієї системи, отримаємо: $3v_n^{(0)} + 2v_n^{(1)} + v_n^{(2)} = 3 - r_n$. Тому $0 \leqslant v_n^{(i)}(x) \leqslant 3v_n^{(0)}(x) + 2v_n^{(1)}(x) + v_n^{(2)}(x) = 3 - r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, $\nu_i(x) = 0$ для всіх $i \in \{0,1,2\}$, звідки $\nu_3(x) = 1$. Отже, $\Theta_2 = \Theta_3 = \varnothing$ і $S_\theta = \Theta_1 = E[0,0,0,1]$. Остання множина є всюди щільною множиною, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої дорівнює 0. $\square$

Очевидно, що коли четвіркове зображення числа x має частоти всіх цифр $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, то воно має асимптотичне середнє значення цифр $r(x)$, причому

$$r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x) + 3\nu_3(x).$$

Отже, множина Θ_1 є об'єднанням множин Безиковича–Егглстона $E[\tau_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3]$ за всеможливими ймовірнісними векторами $(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3)$, для яких $\tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 = \theta$, тобто

$$\Theta_1 = \bigcup E[\tau_0,\tau_1,\tau_2,\tau_3].$$

Нехай $\varphi(x) \equiv x \ln x$ і $\varphi(0) \equiv 0$, $x \in [0; 1]$, $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$,

$$C_1 \equiv \left\{ \tau : \tau_i \geqslant 0, i \in \{0,1,2,3\}, \sum_{i=0}^{3} \tau_i = 1, \tau_1 + 2\tau_2 + 3\tau_3 = \theta \right\},$$

де $\theta \in (0;3)$, $f(\tau) \equiv \sum\limits_{i=0}^{3} \tau_i \ln \tau_i$. Функція $f(\tau)$, згідно з теоремою Вейерштрасса [**16**, с. 134], набуває на компакті C_1 мінімального значення, яке позначимо через $m(\theta)$.

Теорема 2. *Множина Θ_1 є континуальною, всюди щільною, замкненою множиною нульової міри Лебега при $\theta \neq \frac{3}{2}$ і повної міри Лебега при $\theta = \frac{3}{2}$, причому її фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(\Theta_1)$ задовольняє нерівність*

$$\alpha_0(\Theta_1) \geqslant -\frac{m(\theta)}{\ln 4}.$$

Доведення. Оскільки множина $E[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3]$ є континуальною і всюди щільною, то такою є і множина Θ_1. Множина Θ_1 замкнена, оскільки всі її точки є точками дотикання. Дійсно, для довільного $\Theta_1 \ni x_0 = \Delta^4_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ існує послідовність $x_n = \Delta^4_{a_1(x_0) a_2(x_0) \ldots a_n(x_0)}$, така що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Якщо $\theta \neq \dfrac{3}{2}$, то Θ_1 не містить жодного нормального числа. Оскільки майже всі числа (в розумінні міри Лебега) є нормальними, то $\lambda(\Theta_1) = 0$. З іншого боку, при $\theta = \dfrac{3}{2}$ має місце включення $\Theta_1 \supset E\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$, де $\lambda(E) = 1$. Тому $\lambda(\Theta_1) = 1$.

Нехай для вектора $\tau = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $f(\tau) = m(\theta)$, тоді за формулою Безиковича–Егглстона

$$\alpha_0(E[p_0, p_1, p_2, p_3]) = -\frac{\ln p_0^{p_0} p_1^{p_1} p_2^{p_2} p_3^{p_3}}{\ln 4} = -\frac{f(\tau)}{\ln 4} = -\frac{m(\theta)}{\ln 4}.$$

Оскільки $E[p_0, p_1, p_2, p_3] \subset \Theta_1$, то $\alpha_0(\Theta_1) \geqslant \alpha_0(E[p_0, p_1, p_2, p_3]) = -\dfrac{m(\theta)}{\ln 4}$. $\square$

2. Приклад числа з множини Θ_1

Наведемо алгоритм побудови числа $x \in E[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3]$.

Розглянемо послідовності $\tau_{in} = [\tau_i \cdot n]$, $\tau'_{in} = \tau_{i(n+1)} - \tau_{in}$. Зрозуміло, що

$$[\tau_{i(n+1)}] - [\tau_{in}] = [[\tau_{in}] + \{\tau_{in}\} + \tau_i] - [\tau_{in}] = [\tau_{in}] + [\{\tau_{in}\} + \tau_i] - [\tau_{in}] = [\{\tau_{in}\} + \tau_i] \in \{0, 1\}.$$

Очевидно, що

$$\frac{\tau_{in}}{n} = \frac{[\tau_i \cdot n]}{n} = \frac{\tau_i \cdot n - \{\tau_i \cdot n\}}{n} = \tau_i - \frac{\{\tau_i \cdot n\}}{n} \to \tau_i, \ n \to \infty.$$

Побудуємо число x наступним чином. На першому кроці послідовно запишемо τ'_{01} нулів, τ'_{11} одиниць, τ'_{21} двійок та τ'_{31} трійок. Після k-го кроку, на $(k+1)$-му кроці допишемо до вже записаної сукупності знаків послідовно τ'_{0k} нулів, τ'_{1k} одиниць, τ'_{2k}

двійок та τ'_{3k} трійок. В результаті серед перших $\sum\limits_{i=0}^{3}\tau_{in}$ символів четвіркового запису x буде рівно τ_{in} цифр i. Нехай n — достатньо велике натуральне число. Оскільки $x-1<[x]\leqslant x$, для довільного $x\in R$, то

$$n=\sum_{i=0}^{3}\tau_i\cdot n\geqslant\sum_{i=0}^{3}[\tau_i\cdot n]=\sum_{i=0}^{3}\tau_{in},\qquad \sum_{i=0}^{3}\tau_{i(n+4)}=\sum_{i=0}^{3}[\tau_{i(n+4)}]\geqslant\sum_{i=0}^{3}\tau_i\cdot(n+4)-4=n.$$

Тоді $v_i^{(n)}\geqslant\dfrac{\tau_{in}}{n}\to\tau_i$, $v_i^{(n)}\leqslant\dfrac{\tau_{i(n+3)}}{n}=\dfrac{\tau_{i(n+3)}}{n+3}\cdot\dfrac{n+3}{n}\to\tau_i$ при $n\to\infty$. Отже, $\nu_i(x)=\tau_i$, для всіх $i\in\{0,1,2,3\}$.

Нехай (s_k) — послідовність додатних чисел, для якої

$$\lim_{k\to\infty}s_k=\infty,\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{s_{k+1}}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}=0,\qquad \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}=0.$$

Нехай $\|\tau_{in}\|$ — матриця розмірності $(4\times\infty)$, елементами якої є вище побудовані числа. Розглянемо наступну форму зображення дійсного числа $x\in[0;1]$:

$$\hat{x}=\Delta^4_{\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{[\tau_{01}s_1]}\underbrace{1\ldots1}_{[\tau_{11}s_1]}\underbrace{2\ldots2}_{[\tau_{21}s_1]}\underbrace{3\ldots3}_{[\tau_{31}s_1]}}_{\text{1-ша серія}}\ldots\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{[\tau_{0k}s_k]}\underbrace{1\ldots1}_{[\tau_{1k}s_k]}\underbrace{2\ldots2}_{[\tau_{2k}s_k]}\underbrace{3\ldots3}_{[\tau_{3k}s_k]}}_{\text{k-та серія}}\ldots}.\tag{1}$$

Теорема 3. *Якщо* $\|\tau_{in}\|$ *— матриця розмірності* $(4\times\infty)$*, така що для довільного натурального* $n\in N$ *виконуються умови* $\tau_{0n}+\tau_{1n}+\tau_{2n}+\tau_{3n}=1$, $\tau_{1n}+2\tau_{2n}+3\tau_{3n}=\theta$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}r_n(\hat{x})=\theta.$$

Доведення. Оскільки $[\tau_{0k}s_k]+[\tau_{1k}s_k]+[\tau_{2k}s_k]+[\tau_{3k}s_k]>\tau_{0k}s_{k-1}+\tau_{1k}s_{k-1}+\tau_{2k}s_{k-1}+\tau_{3k}s_{k-1}=s_{k-4}\to\infty$ при $k\to\infty$, то число $\hat{x}$ побудовано коректно.

Нехай n — достатньо велике натуральне число. Нехай n-на цифра числа $\hat{x}$ потрапляє в k-ту серію. Введемо позначення:

$$A_k\equiv\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{1i}s_i]+2[\tau_{2i}s_i]+3[\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i},\ B_k\equiv\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i]+[\tau_{1i}s_i]+[\tau_{2i}s_i]+[\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}.$$

Тоді при $k\to\infty$, маємо:

$$A_k\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\tau_{1i}s_i+2\tau_{2i}s_i+3\tau_{3i}s_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\theta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}=\theta,$$

$$A_k > \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}((\tau_{1i}s_i - 1) + 2(\tau_{2i}s_i - 1) + 3(\tau_{3i}s_i - 1))}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} = \theta - \frac{6k}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i}.$$

Отже, $A_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{1i}s_i] + 2[\tau_{2i}s_i] + 3[\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} = \theta.$

З іншого боку,

$$B_k \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\tau_{0i}s_i + \tau_{1i}s_i + \tau_{2i}s_i + \tau_{3i}s_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} = 1,$$

$$B_k > \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\tau_{0i}s_i + \tau_{1i}s_i + \tau_{2i}s_i + \tau_{3i}s_i - 4)}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} = 1 - \frac{4k}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i}.$$

Отже, $B_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i] + [\tau_{1i}s_i] + [\tau_{2i}s_i] + [\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} = 1.$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}([\tau_{0i}s_i] + [\tau_{1i}s_i] + [\tau_{2i}s_i] + [\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i] + [\tau_{1i}s_i] + [\tau_{2i}s_i] + [\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} +$$

$$+ \frac{s_{k+1} - (\{\tau_{0(k+1)}s_{k+1}\} + \{\tau_{1(k+1)}s_{k+1}\} + \{\tau_{2(k+1)}s_{k+1}\} + \{\tau_{3(k+1)}s_{k+1}\})}{\sum\limits_{i=1}^{k} s_i} \to 1.$$

Маємо

$$r_n(\hat{x}) \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{1i}s_i] + 2[\tau_{2i}s_i] + 3[\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i] + [\tau_{1i}s_i] + [\tau_{2i}s_i] + [\tau_{3i}s_i])} = \frac{A_k}{B_k} \to \frac{\theta}{1} = \theta.$$

Нехай $B'_k \equiv \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i] + [\tau_{1i}s_i] + [\tau_{2i}s_i] + [\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k+1} s_i}$. Тоді

$$B'_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}([\tau_{0i}s_i] + [\tau_{1i}s_i] + [\tau_{2i}s_i] + [\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k+1} s_i} -$$

$$-\frac{s_{k+1}-(\{\tau_{0(k+1)}s_{k+1}\}+\{\tau_{1(k+1)}s_{k+1}\}+\{\tau_{2(k+1)}s_{k+1}\}+\{\tau_{3(k+1)}s_{k+1}\})}{\sum\limits_{i=1}^{k+1}s_i}\to 1.$$

Маємо

$$r_n(\hat{x})\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}([\tau_{1i}s_i]+2[\tau_{2i}s_i]+3[\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i]+[\tau_{1i}s_i]+[\tau_{2i}s_i]+[\tau_{3i}s_i])}=\frac{A_k}{B'_k}\to\frac{\theta}{1}=\theta.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(\hat{x})=\theta$. □

Теорема 4. *Якщо* $\|\tau_{in}\|$ *— стохастична матриця розмірності* $(4\times\infty)$, *причому для фіксованого* $j\in\{0,1,2,3\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_{jn}=\lambda_j$, *то*

$$\nu_j(\hat{x})=\lambda_j,$$

де число $\hat{x}$ *має вигляд* (1).

Доведення. Позначимо $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_{ij}s_i$, $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}s_i$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tau_{j(n+1)}s_{n+1}}{s_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\tau_{j(n+1)}=\lambda_j.$$

Тому за теоремою Штольца [**15**, с. 67]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_{ji}s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}s_i}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lambda_j.$$

З доведення попередньої теореми випливає, що число $\hat{x}$ коректно побудоване і

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}([\tau_{0i}s_i]+[\tau_{1i}s_i]+[\tau_{2i}s_i]+[\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}=1=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}([\tau_{0i}s_i]+[\tau_{1i}s_i]+[\tau_{2i}s_i]+[\tau_{3i}s_i])}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}.$$

Нехай n — достатньо велике натуральне число і n-на цифра числа $\hat{x}$ потрапляє в k-ту серію. Тоді

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}[\tau_{ji}s_i]}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}\leqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\tau_{ji}s_i}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}\to\lambda_j\quad\text{і}\quad\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}[\tau_{ji}s_i]}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}>\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(\tau_{ji}s_i-1)}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}=\frac{x_k}{y_k}-\frac{k}{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}\to\lambda_j,\ (k\to\infty).$$

Отже, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}[\tau_{ji}s_i]}{\sum\limits_{i=1}^{n}s_i}=\lambda_j$.

$$N_j(\hat{x}, n) \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}[\tau_{ji}s_i]}{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i]+[\tau_{1i}s_i]+[\tau_{2i}s_i]+[\tau_{3i}s_i])} = \frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}[\tau_{ji}s_i]}{y_k}}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i]+\ldots+[\tau_{3i}s_i])}{y_k}} \to \frac{\lambda_j}{1} = \lambda_j,\ k \to \infty,$$

$$N_j(\hat{x}, n) \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}[\tau_{ji}s_i]}{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i]+[\tau_{1i}s_i]+[\tau_{2i}s_i]+[\tau_{3i}s_i])} = \frac{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k+1}[\tau_{ji}s_i]}{y_{k+1}}}{\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}([\tau_{0i}s_i]+\ldots+[\tau_{3i}s_i])}{y_{k+1}}} \to \frac{\lambda_j}{1} = \lambda_j,\ k \to \infty.$$

Отже, $\nu_j(\hat{x}) = \lambda_j$. □

Теорема 5. *Нехай* $(s_k^{(r)})$, *де* $r \in \{1, 2\}$ *послідовності додатних чисел, для яких* $\lim\limits_{k\to\infty} s_k^{(r)} = \infty$. *Нехай* $\|p^{(1)}\| = \|p_{in}^{(1)}\|$, $\|p^{(2)}\| = \|p_{in}^{(2)}\|$ *— стохастичні матриці розмірності* $(4 \times \infty)$. *Нехай*

$$x(\|p^{(r)}\|; \|s_k^{(j)}\|) = \Delta^4_{\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{[p_{01}^{(r)}s_1^{(j)}]}\underbrace{1\ldots1}_{[p_{11}^{(r)}s_1^{(j)}]}\underbrace{2\ldots2}_{[p_{21}^{(r)}s_1^{(j)}]}\underbrace{3\ldots3}_{[p_{31}^{(r)}s_1^{(j)}]}}_{\text{1-ша серія}}\ldots\underbrace{\underbrace{0\ldots0}_{[p_{0k}^{(r)}s_k^{(j)}]}\underbrace{1\ldots1}_{[p_{1k}^{(r)}s_k^{(j)}]}\underbrace{2\ldots2}_{[p_{2k}^{(r)}s_k^{(j)}]}\underbrace{3\ldots3}_{[p_{3k}^{(r)}s_k^{(j)}]}}_{k\text{-та серія}}\ldots}.$$

Якщо $\lim\limits_{k\to\infty} |s_k^{(1)} - s_k^{(2)}| = \infty$, *то* $x(\|p^{(1)}\|; \|s_k^{(1)}\|) \neq x(\|p^{(2)}\|; \|s_k^{(2)}\|)$.

Якщо $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=0}^{3} |p_{in}^{(1)} - p_{in}^{(2)}| > 0$, *то* $x(\|p^{(1)}\|; \|s_k^{(1)}\|) \neq x(\|p^{(2)}\|; \|s_k^{(2)}\|)$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty} |s_k^{(1)} - s_k^{(2)}| = \infty$ і $x(\|p^{(1)}\|; \|s_k^{(1)}\|) = x(\|p^{(2)}\|; \|s_k^{(2)}\|)$. Тоді всі n-серії чисел $x(\|p^{(1)}\|; \|s_k^{(1)}\|)$ і $x(\|p^{(2)}\|; \|s_k^{(2)}\|)$ рівні, тобто $[p_{in}^{(1)}s_n^{(1)}] = [p_{in}^{(2)}s_n^{(2)}]$, $n \in N$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Звідки $p_{in}^{(1)}|s_n^{(1)} - s_n^{(2)}| < 1$ для всіх $n \in N$ і $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, що можливо лише коли $p_{in}^{(1)} = 0$ для будь-якого $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ та достатньо великого $n \in N$, маємо суперечність з $\sum\limits_{i=0}^{3} p_{in}^{(1)} = 1$.

Нехай тепер $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sum\limits_{i=0}^{3} |p_{in}^{(1)} - p_{in}^{(2)}| > 0$ і $x(\|p^{(1)}\|; \|s_k^{(1)}\|) = x(\|p^{(2)}\|; \|s_k^{(2)}\|)$. Тоді всі n-серії чисел $x(\|p^{(1)}\|; \|s_k^{(1)}\|)$ і $x(\|p^{(2)}\|; \|s_k^{(2)}\|)$ рівні, тобто $[p_{in}^{(1)}s_n^{(1)}] = [p_{in}^{(2)}s_n^{(2)}]$, $n \in N$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Звідси $|p_{in}^{(1)} - p_{in}^{(2)}|s_n^{(1)} < 1$ для всіх $n \in N$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, що можливо лише коли $\lim\limits_{n\to\infty} |p_{in}^{(1)} - p_{in}^{(2)}| = 0$. Отримали суперечність. □

Література

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Ukrainian Math. J. — 2005. — 57, № 9. — P. 1361–1370.

[2] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal // Bull. Sci. Math. — 2005. — 129, №8. — P. 615–630.

[3] *Besicovitch A. S.* Sets of fractional dimension. 2: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system // Math. Ann. — 1934. — 110, № 3. — p. 321–330.

[4] *Borel É.* Les probabilites denombrables et leurs applications arithmetiques // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1909. — 27. — P. 247–271.

[5] *Eggleston H. G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. — 1949. — Oxford Ser. 20. — p. 31–36.

[6] *Olsen L.* Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures // J. London Math. Soc. — 2003. — 2(67), №1. — P. 103–122.

[7] Биллингслей П. *Эргодическая теория и информация.* — М.: Мир, 1969. — 239 с.

[8] Працьовитий М. В. *Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел.* — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012. — 68 с.

[9] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[10] *Працьовитий М. В., Климчук С. О.* Середнє значення символів Q-зображення дробової частини числа і пов'язані з ним задачі фрактальної геометрії та фрактального аналізу // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова, 2011. — №12.

[11] *Працьовитий М. В., Климчук С. О.* Лінійні фрактали типу Безиковича–Егглстона // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова, 2012. — Т.2, №13.

[12] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. — 1995. — 47, № 7. — С. 971–975.

[13] *Торбін Г. М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системх числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України – НПУ ім. М.П.Драгоманова. — 1998, №1. — С.53–55.

[14] Турбин А. Ф., Працевитий Н. В. *Фрактальные множества, функции, распределения.* — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.

[15] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.1.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 616 с.

[16] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа, Т.1.* — М.: Наука, 1968. — 440 с.