Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 176–188.

Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями

М. В. Працьовитий, Н. А. Василенко

НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України

Анотація. У роботі в термінах Q^*-зображення дробової частини дійсного числа, яке є узагальненням s-кового розкладу, означується континуальна сім'я ніде не монотонних неперервних на $[0,1]$ функцій. Описано властивості їх рівнів, самоафінні властивості графіків, вивчаються диференціальні та інтегральні властивості.

The family of nowhere monotonic continuous functions

M. Pratsiovytyi, N. Vasylenko

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

Abstract. In the paper, continuum family of nowhere monotonic continuous on $[0,1]$ functions is defined in terms of Q^*-expansion of fractional part of real number. Q^*-representation is a generalization of s-adic expansion. We describe properties of level sets of these functions, self-affine properties of their graphs and study differential and integral properties.

Вступ

Більшість (в топологічному розумінні) неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій мають неоднорідні локальні властивості і навіть всюди щільну множину особливостей (до таких, зокрема, відносяться ніде не монотонні, звивисті та ніде не диференційовні функції). Свідченням цього є відома теорема Банаха–Мазуркевич [**30**], яка стверджує, що в просторі $C_{[0,1]}$ сім'я неперервних недиференційовних функцій є множиною другої категорії Бера. Клас описаних і детально вивчених недиференційовних функцій поки що не дуже великий, хоча в останні десятиліття ведуться інтенсивні дослідження відомих і нових ніде не монотонних та недиференційовних функцій [**9**]. Одним з простих прикладів є недиференційовна функція, яка вивчалася в роботі [**13**]: аргумент функції подається у вигляді трійкового зображення

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \ldots \equiv \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\ \alpha_k \in \{0,1,2\},$$

E-mail: nata_va@inbox.ru

а значення функції має форму двійкового зображення

$$f(x)=\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2^2}+\ldots+\frac{\beta_k}{2^k}+\ldots\equiv\Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots},\ \text{де } \beta_k\in\{0,1\},$$

$$\beta_1=\begin{cases}0, & \text{якщо } \alpha_1=0,\\ 1, & \text{якщо } \alpha_1\neq 0;\end{cases}\quad \beta_k=\begin{cases}\beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k=\alpha_{k-1},\\ 1-\beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k\neq\alpha_{k-1},\end{cases}$$

і яка, як виявилось нещодавно, вперше розглядалась у роботі [**5**]. «Майже» така ж функція, за умов коли $\beta_1=1$, досліджувалася в роботі [**4**]. Ці функції фігурували і в інших роботах, в яких вивчалися фрактальні властивості спеціальним чином визначених дійсних функцій [**10**], фрактальні властивості множини рівнів функції [**13**], фрактальні та диференціальні властивості класу неперервних недиференційовних функцій, побудованого з використанням Q-зображення аргументу [**14**], досліджувалися самоафінні властивості графіків та інтегральні властивості функції [**6**], інваріантні точки відображення [**8**].

У даній роботі ми будуємо сім'ю функцій шляхом узагальнень двійкового та трійкового зображень чисел до Q-зображення та Q^*-зображення. В результаті отримується континуальна сім'я функцій, залежних від скінченної та нескінченної кількості параметрів відповідно. Стосовно них ставляться як традиційні, так і нові задачі.

1. Q^*-представлення та Q^*-зображення дійсних чисел

Нехай $1<s$ — фіксоване натуральне число, $A_s=\{0,1,\ldots,s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $Q^*=||q_{ij}||$ — нескінченна матриця з властивостями:

$$\begin{gathered}q_{ij}>0,\ \ q_{0j}+q_{1j}+\ldots+q_{[s-1]j}=1,\\ \prod_{j=1}^{\infty}\max\{q_{0j},\ldots,q_{[s-1]j}\}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Теорема 1. [**12**] *Для довільного $x\in[0,1]$ існує послідовність (α_k) така, що:*

$$x=\beta_{\alpha_1 1}+\sum_{k=2}^{\infty}(\beta_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j j})\equiv\Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},\ \ \alpha_k\in A_s,\tag{2}$$

де $\beta_{0j}=0,\ \ \beta_{ij}=\sum\limits_{k=0}^{i-1}q_{kj},\ i\in A_s,\ j\in\mathbb{N}$.

Подання числа x у вигляді (1) називають його Q^*-*представленням*, а його символічний запис $\Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ називають Q^*-*зображенням.* При цьому α_j називається j-им Q^*-*символом (знаком)* зображення (1) даного числа x. Якщо Q^*-зображення є періодичним, то його період будемо записувати у круглих дужках.

Взагалі кажучи, поняття j-го Q^*-символом числа x не є коректно означеним, оскільки деякі числа мають два Q^*-зображення. Це числа виду

$$\Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)}.$$

Їх називають Q^**-раціональними*. Всі інші числа, що не містять період (0) або $(s-1)$, мають єдине Q^*-зображення і їх називають Q^**-ірраціональними*. Нагадаємо означення важливого для подальшого поняття циліндра.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — фіксований набір символів з алфавіту A_s. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$* називають множину чисел $x \in [0,1]$, які мають Q^*-зображення $\Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots}$ таке, що $\alpha_j(x) = c_j$, $j = \overline{1,m}$.

Циліндри мають наступні властивості:

1) Циліндр $\Delta^{Q^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями

$$a = \Delta^{Q^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = \beta_{c_11} + \sum_{k=2}^{m}(\beta_{c_kk}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jj}),\ \ b = \Delta^{Q^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)} = a + \prod_{i=1}^{m} q_{c_ii};$$

2) $\Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m\, i}$;

3) $|\Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_ii}$;

4) $\max \Delta^{Q^*}_{c_1c_2\ldots c_mi} = \min \Delta^{Q^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$, $i = \overline{0, s-2}$;

5) для довільної послідовності (c_m), $c_m \in A_3$ переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m} = x \equiv \Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m\ldots} \text{є точкою відрізка } [0,1].$$

Якщо для всіх $i \in A_s$ і $j \in \mathbb{N}$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $||q_{ij}||$ однакові, то Q^*-зображення називається Q*-зображенням*, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{s}$, для всіх $i \in A_s$, то Q-зображення є звичайним s*-ковим* зображенням.

Q^*-зображення дійсних чисел допомагають формально просто задавати широкі класи множин, функцій, ймовірнісних мір зі складними локальними властивостями. Вони є зручним апаратом для задання та дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями.

2. Об'єкт дослідження

Нехай Q_3^* та Q_2^* — задані стохастичні матриці, які задовольняють умовам (1). Матрицю, яка визначає останнє зображення позначимо через $G_2^* = ||g_{ij}||$.

Розглядається функція $y = f(x)$, аргумент якої має Q_3^*-зображення

$$x = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots} \equiv \varphi_{\alpha_11} + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\varphi_{\alpha_ii}\prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_jj}\right),\ \alpha_k \in A_3,$$

де $\varphi_{0j} = 0$, $\varphi_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} q_{kj}$, $i \in A_3$, а значення функції має G_2^*-зображення

$$f(x) = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots} \equiv \psi_{\beta_1 1} + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\psi_{\beta_i i}\prod_{j=1}^{i-1} g_{\beta_j j}\right), \ \ \beta_k \in A_2,$$

де $\psi_{0j} = 0$, $\psi_{1j} = g_{0j}$, причому

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0; \end{cases} \beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k = \alpha_{k-1}, \\ 1-\beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k \neq \alpha_{k-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Формули (3) можна записати в іншому (еквівалентному) вигляді

$$\beta_k = \begin{cases} 0, \ \text{якщо} & \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \ \text{ і } \ N(x,k) = 2m, \ \ m \in \mathbb{N}, \\ \alpha_1 \neq 0 \ \text{ і } \ N(x,k) = 2m-1; \end{array}\right. \\ 1, \ \text{якщо} & \left[\begin{array}{l} \alpha_1 \neq 0 \ \text{ і } \ N(x,k) = 2m, \\ \alpha_1 = 0 \ \text{ і } \ N(x,k) = 2m-1; \end{array}\right. \end{cases} \tag{4}$$

де $N(x,k) = \#\{\alpha_k \neq \alpha_{k-1}\}$ – кількість пар послідовних цифр в зображенні x до k-го місця включно для яких виконується $\alpha_k \neq \alpha_{k-1}$.

3. Коректність означення функції та її неперервність

Покажемо, що функція f визначена коректно в Q_3^*-раціональних точках, тобто що для різних Q_3^*-зображень одного й того ж Q_3^*-раціонального значення аргумента $x = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\,(0)} \equiv \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](2)} = x'$, значення $y \equiv f(x)$ і $y' \equiv f(x')$ співпадають.

Оскільки $\alpha_k \neq 0$, то $[\alpha_k - 1] \in \{0,1\}$, при цьому з означення функції f випливає, що

$$\begin{cases} \beta_i(y) = \beta_i(y'), \ \ i = \overline{1, k-1}, \\ \beta_{k+j}(y) = 1 - \beta_k(y), \ \ j \in \mathbb{N}, \\ \beta_{k+j}(y') = 1 - \beta_k(y'), \ \ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді, можливі випадки

$$\begin{cases} \alpha_{k-1} = \alpha_k, \\ \alpha_{k-1} \neq \alpha_k - 1; \end{cases} \begin{cases} \alpha_{k-1} \neq \alpha_k, \\ \alpha_{k-1} = \alpha_k - 1; \end{cases} \begin{cases} \alpha_{k-1} \neq \alpha_k, \\ \alpha_{k-1} \neq \alpha_k - 1. \end{cases}$$

Розглянемо кожний з них окремо.

У випадку 1, маємо

$$\begin{cases} \beta_k(y) = \beta_{k-1}(y), \ \Rightarrow \ \ \beta_{k+j}(y) = \beta_{k-1}(y), \ \ j \in \mathbb{N}, \\ \beta_k(y') = 1 - \beta_{k-1}(y), \ \Rightarrow \ \ \beta_{k+j}(y') = 1 - \beta_{k-1}(y), \ \ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

тобто $y = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_{k-1}(1-\beta_{k-1})}$, $\ y' = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}[1-\beta_{k-1}](\beta_{k-1})}$.

Отже, y та y' є різними G_2^*-зображеннями одного і того ж G_2^*-раціонального числа.

У випадку 2, маємо

$$\begin{cases} \beta_k(y) = 1 - \beta_{k-1}(y), \ \Rightarrow \ \beta_{k+j}(y) = \beta_{k-1}(y), \ \ j \in \mathbb{N}, \\ \beta_k(y') = \beta_{k-1}(y), \ \Rightarrow \ \beta_{k+j}(y') = 1 - \beta_{k-1}(y), \ \ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

тобто $y = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}[1-\beta_{k-1}](\beta_{k-1})}$, $y' = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_{k-1}(1-\beta_{k-1})}$.

Отже, y та y' є різними G_2^*-зображеннями одного і того ж G_2^*-раціонального числа.

У випадку 3, маємо

$$\begin{cases} \beta_k(y) = 1 - \beta_{k-1}(y), \ \Rightarrow \ \beta_{k+j}(y) = \beta_{k-1}(y), \ \ j \in \mathbb{N}, \\ \beta_k(y') = 1 - \beta_{k-1}(y), \ \Rightarrow \ \beta_{k+j}(y') = \beta_{k-1}(y), \ \ j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

тобто $y = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}[1-\beta_{k-1}](\beta_{k-1})}$, $y' = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}[1-\beta_{k-1}](\beta_{k-1})}$.

Звідки, очевидно, що $y = y'$. Тобто, в цьому випадку, функція f в G_2^*-раціональній точці визначена коректно.

Теорема 2. *Функція f є неперервною в кожній точці інтервала $(0,1)$, неперервною в точці 0 справа і в точці 1 зліва.*

Доведення. Для доведення неперервності функції f в довільній точці $x_0 \in (0,1)$ покажемо, що

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 є Q_3^*-ірраціональною точкою. Для довільного $x \in [0,1]$ існує $m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x_0) = \alpha_i(x), \ \ i = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x_0) \neq \alpha_m(x), \end{cases}$$

причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Отже,

$$\lim_{m \to \infty} |f(x) - f(x_0)| = \left| \sum_{i=m}^{\infty} \left(\psi_{\beta_i(y)i} \prod_{j=1}^{m-1} g_{\beta_j(y)j} \right) - \sum_{i=m}^{\infty} \left(\psi_{\beta_i(y_0)i} \prod_{j=1}^{m-1} g_{\beta_j(y_0)j} \right) \right| =$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} g_{\beta_i(y)i} \left[\sum_{j=m}^{\infty} \left(\psi_{\beta_j(y)j} \prod_{l=m}^{j-1} g_{\beta_l(y)l} - \psi_{\beta_j(y_0)j} \prod_{l=m}^{j-1} g_{\beta_l(y_0)l} \right) \right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} g_{\beta_i(y)i} |y' - y'_0| \leq \prod_{j=1}^{m-1} g_{\beta_j(y)j} \leq \prod_{j=1}^{m-1} \max\{g_{\beta_j(y)j}, 1 - g_{\beta_j(y)j}\} \to 0 \ \text{при}\ m \to \infty,$$

де $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, $y' = \Delta^{G_2^*}_{\beta_m(y)\beta_{m+1}(y)\ldots\beta_{m+k}(y)\ldots}$, $y'_0 = \Delta^{G_2^*}_{\beta_m(y_0)\beta_{m+1}(y_0)\ldots\beta_{m+k}(y_0)\ldots}$.

Отже, функція f є неперервною в Q_3^*-ірраціональних точках.

Нехай тепер x_0 є Q_3^*-раціональною точкою, тобто $x_0 = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}$. Для доведення неперервності зліва функції f в цій точці, досить використати для неї Q_3^*-зображення

$\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](2)}$, а для неперервності справа – Q_3^*-зображення $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)}$ і повторити попередні міркування (як для Q_3^*-ірраціональної точки). Це ж стосується і точок 0 та 1. □

4. Ніде не монотонність функції та властивості множини її рівнів

Позначимо кінці циліндра $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ рангу n через

$$x' = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}, \quad x'' = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(2)}.$$

Нагадаємо, що приростом функції f на циліндрі $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ називається різниця

$$f(x'') - f(x') \equiv \mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}).$$

Означення 1. Неперервна функція називається *ніде не монотонною*, якщо вона не має жодного, як завгодно малого, проміжка монотонності.

Лема 1. *Функція f є ніде не монотонною на відрізку* $[0, 1]$.

Доведення. Для доведення ніде не монотонності функції f достатньо показати, що для довільного циліндра $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ рангу n знайдеться циліндр $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n j}$ рангу $(n+1)$ такий, що прирости $\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})$ і $\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n j})$ набувають різних знаків.

Для x' і x'', маємо

$$f(x') = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(\beta_{n+1})}, \quad f(x'') = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(\beta'_{n+1})}.$$

Скористаємося формулами (4) і розглянемо можливі випадки для значень μ_f:

1) якщо $\alpha_1 = 0$ і $2m = N(x', n+1) \neq N(x'', n+1) = 2m-1$, то

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(1)} - \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)} = \prod_{i=1}^{n} g_{\beta_i i};$$

якщо ж $\alpha_1 = 0$ і $2m-1 = N(x', n+1) \neq N(x'', n+1) = 2m$, то

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)} - \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(1)} = -\prod_{i=1}^{n} g_{\beta_i i};$$

2) якщо $\alpha_1 \neq 0$ і $2m = N(x', n+1) \neq N(x'', n+1) = 2m-1$, то

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)} - \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(1)} = -\prod_{i=1}^{n} g_{\beta_i i};$$

якщо ж $\alpha_1 \neq 0$ і $2m-1 = N(x', n+1) \neq N(x'', n+1) = 2m$, то

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(1)} - \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n(0)} = \prod_{i=1}^{n} g_{\beta_i i};$$

3) якщо для довільного α_1 виконується $N(x', n+1) = N(x'', n+1)$, то $\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}) = 0$.

При цьому, очевидно, що для кожного з розглянутих вище випадків, завжди можна вказати циліндр рангу $(n+1)$ для якого $N(x', n+2) \neq N(x', n+1)$ і $N(x'', n+2) \neq N(x'', n+1)$, що буде призводить до зміни знаку приросту в кожному з випадків. Отже, функція f є ніде не монотонною за означенням. $\square$

Означення 2. Множиною рівня y_0 функції f називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

Лема 2. *Якщо в G_2^*-зображенні точки y_0*
(1) всі цифри рівні 0, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з однієї точки;
(2) всі цифри рівні 1, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з двох точок;
(3) міститься рівно k цифр рівних 1, то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з $2^{N(x,k)}$ точок.

Доведення. Дійсно, використовуючи формули (4), твердження (1) і (2) є очевидними. Для доведення твердження (3) слід скористатися формулами (4) і тим фактом, що кожна одна зміна двійкових цифр в зображенні точки y_0 призводить до двох різних точок в множині $f^{-1}(y_0)$. Тому, відповідно k змін двійкових цифр призводить до $2^{N(x,k)}$ точок в множині $f^{-1}(y_0)$. $\square$

Наслідок 1. *Якщо G_2^*-зображення точки y_0 містить простий період (τ), то множина $f^{-1}(y_0)$ є скінченною.*

Лема 3. *Якщо G_2^*-зображення точки y_0 містить складений період $(i_1 i_2 \ldots i_m)$, тобто $y_0 = \Delta^{G_2^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k(i_1 i_2\ldots i_m)}$, то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною.*

Доведення. Оскільки G_2^*-зображення точки y_0 містить складений період, то серед цифр $i_1, i_2, \ldots, i_m$ знайдеться такий номер $j = \overline{1, m-1}$, для якого $i_j \neq i_{j+1}$. Тоді, починаючи з номера $k + nj$ $(n \in \mathbb{N})$ отримаємо на нескінченній кількості місць зміну двійкових цифр, яка враховуючи попередню лему призводить до континуальної кількості точок в G_2^*-зображенні точки y_0. $\square$

Наслідок 2. *Якщо y_0 є ірраціональним числом, то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною.*

5. Диференціальні властивості

Лема 4. *Нехай x_0 – Q_3^*-раціональна точка і k – кількість цифр до періоду. Якщо для всіх елементів матриць Q_3^* і G_2^*, починаючи з номера $(k+j)$, $j \in \mathbb{N}$ виконується*

$$g_{1[k+j]} \geq \max_{k+j}\{q_{0[k+j]}, q_{[s-1][k+j]}\} \;\; і \;\; g_{0[k+j]} \geq \max_{k+j}\{q_{0[k+j]}, q_{[s-1][k+j]}\},$$

то функція f є недиференційовною в точці x_0.

Доведення. Нехай x_0 – Q^*_s-раціональна точка, тобто точка виду

$$x'_0 = \Delta^{Q^*_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} \equiv \Delta^{Q^*_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)} = x''_0.$$

Розглянемо послідовності (x'_m) і (x''_m) такі, що

$$x'_m = \Delta^{Q^*_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\underbrace{0\ldots0}_{m}(s-1)}, \;\; x''_m = \Delta^{Q^*_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1]\underbrace{[s-1]\ldots[s-1]}_{m}(0)}.$$

При цьому очевидно, що $x'_m \to x'_0$, $x''_m \to x''_0$ при $m \to \infty$.

Тоді, якщо похідна функції f в точці x_0 існує, то

$$\lim_{x'_m \to x_0+0} \frac{f(x'_0) - f(x'_m)}{x'_0 - x'_m} = \lim_{x''_m \to x_0-0} \frac{f(x''_0) - f(x''_m)}{x''_0 - x_m''},$$

де

$$x'_0 - x'_m = -q_{\alpha_k k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i} \prod_{j=k+1}^{k+m} q_{0j}, \;\; x''_0 - x''_m = q_{[\alpha_k-1]k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i} \prod_{j=k+1}^{k+m} q_{[s-1]j}.$$

$$f(x'_0) - f(x'_m) = -\mu_f(\Delta^{Q^*_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\underbrace{0\ldots0}_{m}}),$$

$$f(x''_0) - f(x''_m) = \mu_f(\Delta^{Q^*_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1]\underbrace{[s-1]\ldots[s-1]}_{m}}).$$

Оскільки $\alpha_k \neq 0$ і $[\alpha_k - 1] \neq [s-1]$, то

$$f(x'_0) = \Delta^{G^*_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_k(1-\beta_k)}, \;\; f(x''_0) = \Delta^{G^*_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta'_k(1-\beta'_k)},$$

$$f(x'_m) = \Delta^{G^*_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_k\underbrace{[1-\beta_k]\ldots[1-\beta_k]}_{m}(\beta_k)},$$

$$f(x''_m) = \Delta^{G^*_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta'_k\underbrace{[1-\beta'_k]\ldots[1-\beta'_k]}_{m}(\beta'_k)},$$

де

$$\beta'_k = \begin{cases} \beta_k, \text{ якщо } \;\alpha_k \neq \alpha_{k-1} \text{ і } [\alpha_k - 1] \neq \alpha_{k-1}, \\ 1-\beta_k, \text{ якщо } \;\alpha_k = \alpha_{k-1} \text{ або } [\alpha_k - 1] = \alpha_{k-1}. \end{cases}$$

Таким чином

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(x'_0) - f(x'_m)}{x'_0 - x'_m} = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \dfrac{g_{0k}}{q_{\alpha_k k}} \cdot \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{j=k+1}^{k+m} \dfrac{g_{1j}}{q_{0j}}, \text{ якщо } \beta_k = 0, \\ -\prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \dfrac{g_{1k}}{q_{\alpha_k k}} \cdot \lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{j=k+1}^{k+m} \dfrac{g_{0j}}{q_{0j}}, \text{ якщо } \beta_k = 1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x''_0)-f(x''_m)}{x''_0-x''_m}=\begin{cases}-\prod\limits_{i=1}^{k-1}\dfrac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}}\cdot\dfrac{g_{0k}}{q_{[\alpha_k-1]k}}\cdot\lim\limits_{m\to\infty}\prod\limits_{j=k+1}^{k+m}\dfrac{g_{1j}}{q_{[s-1]j}}, & \text{якщо } \beta'_k=0,\\ \prod\limits_{i=1}^{k-1}\dfrac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}}\cdot\dfrac{g_{1k}}{q_{[\alpha_k-1]k}}\cdot\lim\limits_{m\to\infty}\prod\limits_{j=k+1}^{k+m}\dfrac{g_{0j}}{q_{[s-1]j}}, & \text{якщо } \beta'_k=1.\end{cases}\qquad(6)$$

З останнього слідує, що коли для всіх елементів матриць Q_3^* і G_2^* починаючи з номера $(k+j)$, виконується $g_{1[k+j]}\geq\max\limits_{k+j}\{q_{0[k+j]},q_{[s-1][k+j]}\}$ і $g_{0[k+j]}\geq\max_{k+j}\{q_{0[k+j]},q_{[s-1][k+j]}\}$, границі (5) і (6) набувають різних знаків, і тому функція f є недиференційовною в Q_3^*-раціональній точці. □

Лема 5. *Якщо для елементів матриць Q_3^* і G_2^* виконується $\min\limits_k\{g_{ik}\}\geq\max\limits_k\{q_{jk}\}$ (де $k\in\mathbb{N}$, $i\in A_2$, $j\in A_3$), то функція f є недиференційовною в кожній Q_3^*-ірраціональній точці.*

Доведення. Нехай x_0 — довільна Q_3^*-ірраціональна точка. Тоді існує нескінченна кількість місць m_k точки x_0 така, що $\alpha_{m_k}\neq\alpha_{m_k-1}$. Розглянемо послідовність x_k таку, що $\alpha_i x_k=\alpha_i(x_0)$ для $i\neq m_k$, а для $i=m_k$ виберемо $\alpha_{m_k}(x_k)$ так, що

$$\alpha_{m_k}(x_k)=\begin{cases}\alpha_{m_k-1}(x_0), & \text{якщо } \alpha_{m_k}(x_0)\neq\alpha_{m_k-1}(x_0),\\ |1-\alpha_{m_k-1}(x_0)|, & \text{якщо } \alpha_{m_k}(x_0)=\alpha_{m_k-1}(x_0).\end{cases}$$

Тоді, для $i\neq m_k$, виконується $\beta_i(f(x_k))=\beta_i(f(x_0))$, при цьому $\beta_{m_k}(f(x_k))=1-\beta_{m_k}(f(x_0))$ для всіх $k\in\mathbb{N}$. Тому

$$\lim\left|\frac{f(x_0)-f(x_k)}{x_0-x_k}\right|\leq\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{m_k}\frac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}}.$$

З останнього слідує, що якщо матриці Q_3^* і G_2^* такі, що $\min\limits_k\{g_{ik}\}\geq\max\limits_k\{q_{jk}\}$, для всіх $k\in\mathbb{N}$, $i\in A_2$, $j\in A_3$, то остання границя не є скінченною, тобто функція f в заданій Q_3^*-ірраціональній точці похідної не має. □

6. Симетрії графіка функції

Лема 6. *Якщо $q_0=q_2$, то для довільного $x\in[0,1]$ має місце рівність*

$$1-\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}=\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1(x)][2-\alpha_2(x)]\ldots[2-\alpha_k(x)]\ldots}.$$

Доведення. Введемо перепозначення циліндрів. Нехай для $m\in\mathbb{N}$ і набору $(c_1,c_2,\ldots,c_m)$, де $c_i\in A_3$, виконується

$$\Delta'_{c_1c_2\ldots c_m}=\Delta^{Q_3}_{[2-c_1][2-c_2]\ldots[2-c_m]},$$

а отже, $\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m}=\Delta'_{[2-c_1][2-c_2]\ldots[2-c_k]}$.

Оскільки точки x і $x' = 1 - x$ симетричні відносно середини відрізка $[0,1]$, тобто відносно точки $x = \frac{1}{2}$, то з $x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ випливає, що $x' = \Delta'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k]\ldots}$, тобто $1 - x = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k]\ldots}$ або ж

$$1 - \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_n]\ldots},$$

що і вимагалося довести. $\square$

Лема 7. *Якщо $q_0 = q_2$, то має місце рівність*

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\ldots}) = f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}2[2-\alpha_{k+2}][2-\alpha_{k+3}]\ldots})$$

Доведення. Справді, згідно з формулами (3) означення функції f, маємо

$$f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_{k+2}\alpha_{k+3}\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\beta_{k+2}\beta_{k+3}\ldots}, \text{ де}$$

$$\beta_{k+2} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{k+2} = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_{k+2} \neq 0, \end{cases} \qquad \beta_{k+j+1} = \begin{cases} \beta_{k+j}, \text{ якщо } \alpha_{k+j+1} = \alpha_{k+j}, \\ 1 - \beta_{k+j}, \text{ якщо } \alpha_{k+j+1} \neq \alpha_{k+j}. \end{cases}$$

Тому дане твердження є наслідком наступних умов

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = 0 \Longleftrightarrow 2 - \alpha_{k+1} = 2, \\ \alpha_{k+j+1} = \alpha_{k+j} \Longleftrightarrow 2 - \alpha_{k+j+1} = 2 - \alpha_{k+j}. \end{cases}$$ $\square$

Наслідок 3. *Частини* $\Gamma_{10} = \Big\{M(x,y) : \Delta^{Q_3}_{1(0)} \leq x \leq \Delta^{Q_3}_{(1)},\ y = f(x)\Big\}$,

$$\Gamma_{12} = \Big\{M(x,y) : \Delta^{Q_3}_{(1)} \leq x \leq \Delta^{Q_3}_{2(0)},\ y = f(x)\Big\}$$

графіка Γ функції f є симетричними відносно прямої $x = \frac{1}{2}$, тобто для $x = \Delta^{Q_3}_{1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ виконується $f(1-x) = f(x)$.

Лема 8. *Частина* $\Gamma_{1k0} = \{M(x', f(x')) : x' = \Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0c_1c_2\ldots c_m\ldots}\}$ *графіка Γ функції f є афінно-еквівалентною всьому графіку, причому $\Gamma_{1k0} = \phi_k(\Gamma)$, де*

$$\phi_k : \begin{cases} x' = q_1^k q_0 x + \dfrac{1 - q_1^{k-1}}{2}, \\ y' = \dfrac{1}{2^{k+1}} y + 1 - \dfrac{1}{2^{k-1}}. \end{cases}$$

Доведення. Справді, нехай точка $M(x,y)\in\Gamma$, де $x=\Delta^{Q_3}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$, $y=f(x)=\Delta^2_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m\ldots}$. Тоді $\phi_k(M)=M'(x',y')$, де

$$x'=q_1^k q_0 x+\frac{1-q_1^{k-1}}{2}=\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0c_1c_2\ldots c_m\ldots},$$

$$y'=\frac{1}{2^{k+1}}y+1-\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Покажемо, що $M'\in\Gamma$, тобто $y'=f(x')$. Справді, за означенням функції f

$$f(x')=\Delta^2_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\beta_1\beta_2\ldots\beta_m\ldots}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}y=y',$$

що і вимагалося довести. □

Аналогічно доводиться наступне твердження, яке власне є частковим випадком попереднього: частина $\Gamma_0=\{M(x',f(x')) : x'=\Delta^{Q_3}_{0c_1c_2\ldots c_m\ldots}\}$ графіка Γ функції f є афінно-еквівалентною всьому графіку, причому $\Gamma_0=\phi_0(\Gamma)$, де

$$\phi_0:\begin{cases} x'=q_0x,\\ y'=\dfrac{1}{2}y.\end{cases}$$

Лема 9. *Частини Γ_0 і $\Gamma_2=\{M(x',f(x')) : x'=\Delta^{Q_3}_{2\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots}\}$ графіка Γ функції f конгруентні, причому рух, який переводить одну частину графіка в іншу, задається формулами*

$$\begin{cases} x'=-x+1=\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k]\ldots},\\ y'=-y+1=\Delta^2_{[1-\beta_1][1-\beta_2]\ldots[1-\beta_k]\ldots}.\end{cases}$$

Доведення. Справді, нехай точка $M(x,y)\in\Gamma_0$, тобто $x=\Delta^{Q_3}_{0\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots}$. Переконаємося, що тоді точка $M'(x',y')$ належить Γ.

Оскільки $x'=\Delta^{Q_3}_{2[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots[2-\alpha_k]\ldots}$, $y'=\Delta^2_{1[1-\beta_2][1-\beta_3]\ldots[1-\beta_k]\ldots}$, то $y'=f(x')$. □

Теорема 3. *Графік Γ функції f є N-самоафінною множиною, при цьому мають місце рівності:*

1) $f(\Delta^{Q_3}_{0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})=\dfrac{1}{2}f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})$,

2) $f(\Delta^{Q_3}_{2\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}f(\Delta^{Q_3}_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k]\ldots})$,

3) $f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots})=f(\Delta^{Q_3}_{\underbrace{1\ldots1}_{k}2[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\ldots[2-\alpha_k]\ldots})$.

Це твердження є наслідком трьох попередніх лем.

Теорема 4. *Якщо* $q_2 = q_0$, *то для інтеграла Лебега від функції* f *має місце рівність:*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{2q_0^2 - q_0 + 1}{2q_0^2 + q_0 + 1}. \tag{7}$$

Доведення. З адитивної властивості інтеграла Лебега та самоафінних властивостей графіка функції f, маємо

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^{q_0} f(x)dx + \int\limits_{q_0}^{q_0+q_1} f(x)dx + \int\limits_{q_0+q_1}^{1} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{q_0} f(x)dx + \int\limits_{q_0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{q_0+q_1} f(x)dx + \int\limits_{q_0+q_1}^{1} f(x)dx.$$

З леми 9 і теореми 3 слідує, що $\int\limits_{q_0+q_1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}q_0 + \int\limits_0^{q_0} f(x)dx$, тому

$$\int\limits_0^{q_0} f(x)dx + \int\limits_{q_0+q_1}^{1} f(x)dx = 2\int\limits_0^{q_0} f(x)dx + \frac{1}{2}q_0 = \frac{1}{2}q_0 + \frac{1}{2}q_0.$$

З леми 7 слідує, що $\int\limits_{q_0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{q_0} f(x)dx$, тому

$$\int\limits_{q_0}^{q_0+q_1} f(x)dx = \int\limits_{q_0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{q_0} f(x)dx = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{q_0+q_0\sum\limits_{j=2}^{i-1} q_1^{j-1}}^{q_0+q_0\sum\limits_{j=2}^{i} q_1^{j-1}} f(x)dx + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}q_1^i =$$

$$= 2\left(q_0q_1\frac{1}{2^2} + q_0q_1^2\frac{1}{2^3} + \ldots\right)\int\limits_0^1 f(x)dx + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}q_1^i = \frac{q_1}{2-q_1} + \frac{q_0q_1}{2-q_1}\int_0^1 f(x)dx.$$

Отже,

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = q_0 + \frac{q_1}{1+2q_0} + \frac{q_0q_1}{1+2q_0}\int_0^1 f(x)dx,$$

$$\left(1 - \frac{q_0(1-2q_0)}{1+2q_0}\right)\int\limits_0^1 f(x)dx = q_0 + \frac{1-2q_0}{1+2q_0},$$

звідки, після спрощень, маємо рівність (7). □

Література

[1] *Banach S.* Über die Baireśche Kategorie gewisser Functionenmengen // Stud. Math. — 1931. — 3. — P. 174-179.

[2] *Mazurkiewicz S.* Sur les fonctions non dérivables //Stud Math. — 1931. — 3. — P. 92-94.

[3] *Thim Y.* Continuous nowhere differentiable functions// Master thesis. Department of Mathematics. — 2003, 94.

[4] *Bush K. A.* Continuous functions without derivatives // Amer. Math. Monthly. — 1952. — 59, no. 4. — P. 222-225.

[5] *Wunderlich W.* Eine überall stetige und nirgends differenziebare Funktion // Elem. Math. — 1952. — Vol. 7. — P. 73-79.

[6] *Коваль В. В.* Самоафінні графіки функцій // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. 2004 . — № 5. — С. 292-299.

[7] *Козырев С. Б.* О топологической густоте извивающихся функций // Мат. заметки.— 1983. — 33, №1.— С. 71-76.

[8] *Котова О. В.* Інваріантні точки одного неперервного, недиференційованого відображення // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. — № 9. — С. 151–160.

[9] *Працьовитий М. В, Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображеннями чисел // УМЖ. — 2013, т.65, №3. — С. 381-393.

[10] *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. — С. 95–105.

[11] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції// Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. 2002. — № 3, — С. 351-362.

[12] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[13] *Працьовитий М. В., Панасенко О. Б.* Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична.— 2009. — Т. 70.— С. 128-139.

[14] *Панасенко О. Б.* Фрактальна властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2006. — № 7. — С. 160–167.

[15] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. *Фрактальные множества, функции, распределения.* — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.