Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 134–145.

УДК 512.6

Локальні майже-кільця з обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів

І. Ю. Раєвська, М. Ю. Раєвська

Інститут математики НАН України

Анотація. В статті описано скінченні локальні майже-кільця, підгрупи необоротних елементів яких є циклічними. Також визначено всі локальні майже-кільця, що містяться в бібліотеці майже-кілець пакету SONATA системи комп'ютерної алгебри GAP.

Local nearrings with restrictions on the multiplicative groups and the subgroups of non-invertible elements

I. Raevska, M. Raevska

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

Abstract. Finite local nearrings with cyclic subgroups of non-invertible elements are described in this paper. All local nearrings from package Sonata of the computer system GAP 4.6.4 are determined.

Вступ

На сучасному етапі розвитку алгебри зростає інтерес до питань, пов'язаних із теорією майже-кілець.

Зазначимо, що кожне асоціативне кільце є майже-кільцем. Також кожну групу можна перетворити на майже-кільце. Наприклад, якщо визначити на будь-якій групі G операцію "$*$" як $a*b = a$ для всіх $a, b \in G$, то отримаємо майже-кільце $(G, +, *)$, яке називається константним майже-кільцем на G. Зокрема, кожна група є адитивною групою деякого майже-кільця, але не майже-кільця з одиницею.

Вивчення локальних майже-кілець було започатковано Мексоном у 1968 році, який встановив, зокрема, що адитивна група скінченного локального майже-кільця

E-mail: raemarina@rambler.ru

повинна бути p-групою. Пізніше Мексоном було показано, що кожна нециклічна скінченна абелева p-група порядку, більшого за 4, може бути адитивною групою нуль-симетричного локального майже-кільця, яке не є кільцем.

Як інструмент опису та побудови майже-кілець малих порядків застосовували електронно-обчислювальні машини. Клей в 1970 році описує методи для класифікації майже-кілець малих порядків за допомогою комп'ютерних програм та застосовує їх для побудови прикладів майже-кілець порядку 8 з неабелевою адитивною групою.

У кінці 90-х рр. XX ст. Айчингер, Біндер, Еккер, Майер і Нибауер розробили пакет SONATA ("Systems of nearrings and their applications") для побудови та вивчення майже-кілець. До складу цього пакету входить бібліотека всіх майже-кілець до порядку 15 включно та майже-кілець з одиницею до порядку 31 включно. Природно виникає проблема розширення бібліотеки майже-кілець, що сприятиме їх більш детальному вивченню.

1. Попередні результати

Означення 1. Непорожня множина R з двома бінарними операціями "$+$" та "$\cdot$" називається майже-кільцем, якщо:

1) $(R,+)$ — група з нейтральним елементом 0,
2) $(R,\cdot)$ — напівгрупа,
3) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ для всіх x, y, $z\in R$.

Таке майже-кільце називається лівим майже-кільцем. Якщо ж аксіому 3) замінити аксіомою $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ для всіх x, y, $z\in R$, то отримаємо праве майже-кільце.

Група $(R,+)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кільця R. З аксіоми 3 випливає, що

$$r\cdot 0=r\cdot(0+0)=r\cdot 0+r\cdot 0,$$

звідки отримуємо $r\cdot 0=0$. З цієї ж аксіоми витікає, що $r\cdot(-s)=-(r\cdot s)$. Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0\cdot x=0$, та *майже-кільцем з одиницею* i, якщо напівгрупа $(R,\cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i. Група всіх оборотних елементів моноїда $(R,\cdot)$ називається *мультиплікативною групою* в R та позначається через R^*.

Як звичайно, для елементів r та s з майже-кільця R запис rs означає $r\cdot s$. Крім того, якщо n — додатне ціле число, тоді rn означає

$$\underbrace{r+\ldots+r}_{n}.$$

Нехай R — майже-кільце, S і T — підмножини в R. Позначимо через ST множину $\{st|s\in S,t\in T\}$.

Означення 2. Підгрупа M адитивної групи R^+ в майже-кільці R називається правою R-підгрупою, якщо $MR \subseteq M$, лівою R-підгрупою, якщо $RM \subseteq M$, та (R,R)-підгрупою, якщо M одночасно є правою та лівою R-підгрупою в майже-кільці R.

Як і для кілець, гомоморфізми майже-кілець — це гомоморфізми їх адитивних груп та мультиплікативних напівгруп одночасно. Зокрема, якщо α — гомоморфізм майже-кільця R, то його ядро $\operatorname{Ker}\alpha$ — нормальна підгрупа в R^+, яка називається *ідеалом* майже-кільця R.

Наступна лема встановлює взаємозв'язок між групою автоморфізмів адитивної групи майже-кільця з одиницею та його мультиплікативною групою.

Лема 1. *Нехай R — майже-кільце з одиницею i. Тоді в групі автоморфізмів $\operatorname{Aut} R^+$ існує підгрупа A, яка ізоморфна мультиплікативній групі R^* та задовольняє умові*

$$i^A = \{i^a \mid a \in A\} = R^*.$$

Доведення. Згідно з означенням майже-кільця, в R виконується лівий дистрибутивний закон, а отже, для кожного $s \in R^*$ відображення $\hat{s} : r \mapsto s^{-1}r$ з $r \in R$ є автоморфізмом групи R^+. Крім того, відповідність $s \mapsto \hat{s}$ визначає мономорфізм групи R^* в групу $\operatorname{Aut} R^+$, оскільки для довільних $s,\, t \in R^*$ маємо

$$r^{\widehat{st}} = (st)^{-1}r = t^{-1}(s^{-1}r) = t^{-1}(r^{\hat{s}}) = (r^{\hat{s}})^{\hat{t}}$$

та з рівності $i^{\hat{s}} = i$ випливає $s = i$. Таким чином, якщо A — образ групи R^* відносно відображення $\hat{}$, то

$$i^A = \{i^{\hat{s}} = s^{-1} \mid s \in R^*\} = R^*,$$

як вимагалося. Лема доведена. □

Підгрупу A групи $\operatorname{Aut} R^+$, визначену в лемі 1, будемо називати надалі *підгрупою із* $\operatorname{Aut} R^+$*, асоційованою з групою* R^*. Очевидно, що підгрупа M із R^+ тоді і тільки тоді є A-інваріантною, коли вона є R^*-інваріантною в тому сенсі, що $rM \leq M$ для кожного $r \in R^*$. Крім того, M називається (R,R)-підгрупою, якщо $rMs \leq M$ для всіх $r, s \in R$.

Означення 3. Майже-кільце R з одиницею називається *локальним*, якщо множина L всіх необоротних елементів із $(R, \cdot)$ утворює адитивну підгрупу в групі R^+.

Очевидно, що кожне локальне кільце R є нуль-симетричним локальним майже-кільцем, підгрупа L якого співпадає з радикалом Джекобсона кільця R.

Приклад локального майже-кільця найменшого порядку, що не є кільцем, міститься в наступному твердженні. Нагадаємо, що якщо G — адитивна група, то множина всіх відображень групи G в себе відносно операцій додавання відображень та їх композиції утворює майже-кільце $M(G)$, нулем якого є відображення $o : G \to \{0\}$, а одиницею — тотожне відображення ι на групі G.

Пропозиція 1. *Майже-кільце $M(G)$ тоді і тільки тоді є локальним, коли G — група порядку 2. В цьому випадку $M(G)$ — локальне майже-кільце порядку 4, яке не є нуль-симетричним, а отже, не є локальним кільцем.*

Доведення. Дійсно, якщо $|G| \geq 3$, то в групі G існують три попарно різні елементи g, h та $g+h$. Тоді для кожного $x \in G$ відображення α, β та γ, задані як

$$x^{\alpha} = \begin{cases} g, & \text{якщо } x = 0, \\ x, & \text{якщо } x \neq 0; \end{cases}$$

$$x^{\beta} = \begin{cases} h, & \text{якщо } x = 0, \\ 0, & \text{якщо } x \neq 0; \end{cases}$$

та

$$x^{\gamma} = \begin{cases} g+h, & \text{якщо } x = 0, \\ 0, & \text{якщо } x \neq 0 \end{cases}$$

є необоротними в $M(G)$, в той час як їх сума $\alpha+\beta+\gamma = \iota$ є тотожнім відображенням, оскільки $x^{\alpha+\beta+\gamma} = x$ для кожного $x \in G$. Отже, множина всіх необоротних елементів майже-кільця $M(G)$ не утворює адитивної підгрупи в його адитивній групі $M(G)^+$, а тому при $|G| \geq 3$ майже-кільце $M(G)$ не є локальним.

Нехай тепер $|G| = 2$. Для визначеності, покладемо $G = \mathbb{Z}_2$. Тоді $M(G)$ складається з відображень o, ι, α та β, де

$$0^{\alpha} = 1, \quad 1^{\alpha} = 0,$$
$$0^{\beta} = 1, \quad 1^{\beta} = 1.$$

Оскільки додавання “ + ” в $M(G)$ поелементне, а множення “ · ” є композицією відображень, то отримуємо наступні таблиці додавання та множення:

$+$	o	ι	α	β
o	o	ι	α	β
ι	ι	o	β	α
α	α	β	o	ι
β	β	α	ι	o

$\cdot$	o	ι	α	β
o	o	o	β	β
ι	o	ι	α	β
α	o	α	ι	β
β	o	β	o	β

Як видно з цих таблиць, множина $L = \{o, \beta\}$ складається з усіх необоротних елементів майже-кільця $M(G)$ та є підгрупою в $M(G)^+$, а елементи ι та α утворюють мультиплікативну групу $M(G)^*$. Отже, $M(G)$ — локальне майже-кільце.

Оскільки $o \cdot \beta = \beta$, то майже-кільце $M(G)$ не є нуль-симетричним, а отже, не є локальним кільцем. Твердження доведено. $\square$

Очевидно, що майже-поле — це локальне майже-кільце з $L = \{0\}$. Як відомо [**10**], адитивна група скінченного майже-поля елементарна абелева. Очевидно також, що якщо підгрупа L є ідеалом локального майже-кільця R, то R/L є майже-полем.

Застосовуючи до означення 3 лему 1, отримуємо наступне твердження.

Пропозиція 2. *Нехай R — майже-кільце з одиницею i та A — підгрупа із $\operatorname{Aut} R^+$, що асоційована з мультиплікативною групою R^*. Майже-кільце R тоді і тільки тоді є локальним, коли в його адитивній групі R^+ існує така підгрупа L, що $R = i^A \cup L$ та $i^A \cap L = \emptyset$. В останньому випадку L є A-інваріантною підгрупою групи R^+, що містить кожну власну A-інваріантну і, зокрема, кожну характеристичну підгрупу із R^+.*

Доведення. Дійсно, якщо R — локальне майже-кільце та L — його підгрупа необоротних елементів, то $R = R^* \cup L$ за означенням 3 та $R^* = s^A$ за лемою 1, звідки $R = i^A \cup L$ та $i^A \cap L = \emptyset$. Навпаки, якщо в R^+ існує така підгрупа L, що має місце останнє, то $L = R \setminus i^A = R \setminus R^*$, а отже, R є локальним майже-кільцем та L є A-інваріантною підгрупою в R^+. Якщо тепер M — деяка власна A-інваріантна підгрупа в R^+, то $i^A \nsubseteq M$, оскільки в противному разі $R = M \cup L$, що неможливо. Отже, $i^A \cap M = \emptyset$, звідки $M \subseteq R \setminus i^A = L$. Пропозиція доведена. $\square$

Наступна лема, яка випливає з [**1**] (леми 3.2, 3.5, 3.9 та наслідок 3.8), характеризує основні властивості скінченних локальних майже-кілець.

Лема 2. *Нехай R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — підгрупа в R^+ всіх необоротних елементів із R. Тоді R^+ — p-група для деякого простого p, експонента якої збігається з порядком елемента i в R^+, та виконуються наступні твердження:*

(1) L — ідеал в R та (R, R)-підгрупа в R^+;

(2) кожна власна R^*-інваріантна підгрупа із R^+ міститься в L;

(3) множина $i + L$ утворює нормальну силовську p-підгрупу мультиплікативної групи R^*;

(4) фактор-група R^+/L є елементарною абелевою p-групою;

(5) фактор-група $R^*/i + L$ ізоморфна мультиплікативній групі майже-поля R/L.

Для кожної непорожньої підмножини X в R покладемо

$$Ann_R(X) = \{r \in R | xr = 0 \text{ для всіх } x \in X\}.$$

Множина $Ann_R(X)$ називається (правим) *анулятором* множини X в R.

Доведення наступного твердження здійснюється прямою перевіркою (див. також [**3**], теорема 2.31).

Лема 3. *Нехай R майже-кільце та X непорожня підмножина в R. Тоді її анулятор $Ann_R(X)$ є правим ідеалом в R. Більш того, якщо $Ann_R(X)$ є лівим ідеалом майже-кільця R або $XR \subseteq X$, то $Ann_R(X)$ є ідеалом в R.*

Наступна лема описує будову мультиплікативної групи скінченного локального майже-кільця.

Лема 4. *Нехай R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — його підгрупа необоротних елементів. Тоді*

$$R^* = (i + L) \rtimes K$$

для деякої підгрупи K групи R^*, що ізоморфна мультиплікативній групі майже-поля R/L.

Доведення. Оскільки за лемою 2 адитивна група R^+ є p-групою для деякого простого p, то $|L| = p^m$ для деякого $m < n$, звідки

$$|R^*| = |R| - |L| = p^n - p^m = p^m(p^{n-m} - 1).$$

За твердженням 3) леми 2, $i + L$ є нормальною силовською p-підгрупою групи R^*, а отже, в останній за теоремою Шура (див., наприклад, [**4**], теорема 15.2.2) існує така підгрупа K, що R^* розкладається у напівпрямий добуток $R^* = (i + L) \rtimes K$. Більш того, за лемою 2 підгрупа K ізоморфна мультиплікативній групі майже-поля R/L. Лема доведена. □

2. Локальні майже-кільця з циклічною підгрупою необоротних елементів

Як доведено в [**5**], кожне майже-кільце з одиницею, адитивна група якого циклічна, є насправді комутативним кільцем, а отже, ізоморфним кільцю лишків $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ для деякого цілого числа n. В зв'язку з цим природно виникає питання про будову локальних майже-кілець з циклічними підгрупами необоротних елементів. Очевидно, що кожне майже-поле має цю властивість.

Лема 5. *Нехай R — локальне майже-кільце, підгрупа L необоротних елементів якого циклічна та нетривіальна. Тоді майже-кільце R є скінченним, а фактор-група R^+/L є циклічною.*

Доведення. Як показано в роботі [**1**], лема 3.9, підгрупа L не може бути нескінченною циклічною. Крім того, згідно з лемою 3.11 цієї ж роботи, кожне локальне майже-кільце, підгрупа необоротних елементів якого є скінченною та нетривіальною, є само скінченним. Отже, майже-кільце R є скінченним.

Нехай x — твірний елемент підгрупи L. Як випливає з лівого дистрибутивного закону, відображення $r \mapsto xr$ з $r \in R$ визначає ендоморфізм адитивної групи R^+ з ядром, що співпадає з анулятором $Ann_R(x)$, та фактор-групою $R^+/Ann_R(x)$, ізоморфною підгрупі xR. Згідно з твердженням 1) леми 2 xR є підгрупою в L, а отже, xR — циклічна і, таким чином, фактор-група $R^+/Ann_R(x)$ є циклічною. З іншого боку, оскільки одиниця майже кільця R не міститься вануляторі $Ann_R(x)$, він є власним правим ідеалом в R за лемою 3, а тому з твердженням 2) леми 2 $Ann_R(x)$ також лежить в L. Отже, фактор-група R^+/L як гомоморфний образ циклічної фактор-групи $R^+/Ann_R(x)$ є також циклічною. Лема доведена. □

Теорема 1. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку p^n з $n > 1$, підгрупа L необоротних елементів якого циклічна та нетривіальна. Тоді його адитивна група R^+ або сама циклічна, або є елементарною абелевою групою порядку p^2. В першому випадку R є комутативним локальним кільцем, ізоморфним кільцю лишків $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ з $n \geq 2$, а в другому — існує p попарно неізоморфних таких майже-кілець R з $|L| = p$, із яких $p-1$ є нуль-симетричними, та мультиплікативні групи R^* яких ізоморфні напівпрямому добутку двох циклічних підгруп порядків p та $p-1$.*

Доведення. За лемою 2 підгрупа L є ідеалом в R та фактор-майже-кільце R/L є майже-полем. Як зазначалося вище, адитивна група скінченного майже-поля є елементарною абелевою. Оскільки за лемою 5 фактор-група R^+/L є циклічною, звідси випливає, що L є підгрупою індексу p в R^+. За теоремою 12.5.1 [**4**] існують сім типів p-груп з циклічною підгрупою індексу p, які описані своїми твірними та співвідношеннями, а саме:

абелеві, $n \geq 1$, циклічні:
1) $a^{p^n} = 1$;
$n \geq 2$:
2) $a^{p^{n-1}} = 1$, $b^p = 1$, $ba = ab$;
неабелеві, p непарне, $n \geq 3$:
3) $a^{p^{n-1}} = 1$, $b^p = 1$, $ba = a^{1+p^{n-2}}b$;
$p = 2$, $n \geq 3$:
4) узагальнена група кватерніонів:
$a^{2^{n-1}} = 1$, $b^2 = a^{2^{n-2}}$, $ba = a^{-1}b$;
$p = 2$, $n \geq 3$:
5) група діедра:
$a^{2^{n-1}} = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^{-1}b$;
$p = 2$, $n \geq 4$:

6) $a^{2^{n-1}} = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^{1+2^{n-2}}b$;

$p = 2$, $n \geq 4$:

7) $a^{2^{n-1}} = 1$, $b^2 = 1$, $ba = a^{-1+2^{n-2}}b$.

У всіх цих груп, крім циклічної та узагальненої групи кватерніонів, існує елемент порядку p, що не міститься в циклічній підгрупі індексу p, а отже, множина $R^+ \setminus L$ містить елементи порядку p. З іншого боку, за пропозицією 2 та лемою 2 у локальному майже-кільці R порядок кожного елемента цієї множини дорівнює експоненті адитивної групи R^+. Як встановлено в [**7**], узагальнені групи кватерніонів не можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею і, зокрема, локальних майже-кілець. Отже, група R^+ є або циклічною, або елементарною абелевою групою порядку p^2.

В першому випадку з роботи [**5**], теорема 1, випливає, що R є комутативним локальним кільцем, ізоморфним кільцю лишків $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ з $n \geq 2$. В другому випадку, згідно з результатом роботи [**6**], існує p попарно неізоморфних майже-кілець R з $|L| = p$, із яких $p-1$ є нуль-симетричними. За лемою 4 мультиплікативна група R^* кожного з цих майже-кілець ізоморфна напівпрямому добутку $R^* = (i+L) \rtimes K$ нормальної циклічної підгрупи $i+L$ порядку p та циклічної підгрупи K порядку $p-1$. Теорема доведена. □

3. Локальні майже-кільця, отримані з бібліотеки пакету SONATA

Пакет SONATA [**8**] системи комп'ютерної алгебри GAP [**9**] містить бібліотеку всіх майже-кілець з одиницею порядку не вище 31. В цій бібліотеці майже-кільця впорядковані за їх адитивними групами, а команда $R := LibraryNearRingWithOne(G,t)$ визначає майже-кільце R з одиницею на адитивній групі G з номером t.

Щоб визначити, чи буде вибране майже-кільце N локальним, за допомогою команди $u := Size(NearRingUnits(R))$ знаходимо порядок u мультиплікативної групи R^* цього майже-кільця. Далі, за допомогою команди $Id := NearRingIdeals(R)$ визначаємо список всіх ідеалів майже-кільця R, а командою $Ord := List(Id, Size)$ — відповідний список їх порядків. Найбільший з цих порядків — це порядок t майже-кільця R. Якщо число $t-u$ міститься в списку Ord, то майже-кільце R є локальним, в противному разі — ні.

Нагадаємо, що абелева група є групою типу $(p^k, p^l, ..., p^m)$, якщо вона ізоморфна прямій сумі циклічних p-груп порядків p^k, p^l,…, p^m, відповідно, де p — просте та $k, l, \ldots, m$ — натуральні числа.

Позначимо через C_n циклічну групу порядку n.

Як зазначено вище, кожне майже-кільце з одиницею, адитивна група якого циклічна, є насправді комутативним кільцем, а отже, ізоморфним кільцю лишків $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

для деякого цілого числа n. Тому надалі не будемо розглядати локальні майже-кільця з циклічними адитивними групами.

Наступні пропозиції — результат обчислень, виконаних з використанням системи комп'ютерної алгебри GAP.

Пропозиція 3. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку не вище 31, яке не є майже-полем. Тоді мультиплікативна група R^* ізоморфна одній з наступних груп:*

1) C_2;
2) C_4;
3) $(2,2)$;
4) C_6;
5) $(4,2)$;
6) $(2,2,2)$;
7) $(6,2)$;
8) $(6,3)$;
9) C_{20};
10) симетричній групі S_3;
11) $C_3 \times S_3$;
12) групі кватерніонів Q_8;
13) групі діедра D_8;
14) знакозмінній групі A_4;
15) групі Міллера-Морено $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$;
16) групі Міллера-Морено $C_5 \rtimes C_4$;
17) групі $C_5 \rtimes C_4$ *з тривіальним центром.*

Пропозиція 4. *Нехай $n(G)$ — число всіх попарно неізоморфних локальних майже-кілець з мультиплікативною групою G з пропозиції 3, $R^+(G)$ — адитивна група відповідного майже-кільця та $L(G)$ — підгрупа його необоротних елементів. Мають місце наступні твердження.*

(1) Якщо G ізоморфна групі C_2, то $n(G) = 2$ та $R^+(G)$ є групою типу $(2,2)$ з підгрупою $L(G)$ порядку 2.

(2) Якщо G ізоморфна групі C_4, то $n(G) = 4$, а саме:

- *2 майже-кільця на групі $R^+(G)$ типу $(4,2)$ з підгрупою $L(G)$ типу $(2,2)$ та*
- *2 — на групі $R^+(G)$ типу $(2,2,2)$ з підгрупою $L(G)$ типу $(2,2)$.*

(3) Якщо G ізоморфна групі $(2,2)$, то $n(G) = 7$, а саме:

- *3 майже-кільця на групі $R^+(G)$ типу $(4,2)$ з підгрупою $L(G)$ типу $(2,2)$ та*

- 4 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(2,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2)$.

(4) Якщо G *ізоморфна групі* C_6, *то* $n(G)=1$ *та* $R^+(G)$ *є групою типу* $(3,3)$ *з підгрупою* $L(G)$ *порядку* 3.

(5) Якщо G *ізоморфна групі* $(4,2)$, *то* $n(G)=227$, *а саме:*

- 8 *майже-кільця на групі* $R^+(G)$ *типу* $(8,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$ *та*
- 10 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,4)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$;
- 97 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$;
- 83 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(2,2,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$;
- 14 — *на групі* $R^+(G)\cong(C_4\times C_2)\rtimes C_2$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$;
- 7 — *на групі* $R^+(G)\cong C_4\rtimes C_4$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$;
- 8 — *на групі* $R^+(G)\cong C_8\rtimes C_2$ *типу* $(4,4)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$.

(6) Якщо G *ізоморфна групі* $(2,2,2)$, *то* $n(G)=114$, *а саме:*

- 9 *майже-кільця на групі* $R^+(G)$ *типу* $(8,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$ *та*
- 6 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,4)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$;
- 41 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$;
- 37 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(2,2,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$;
- 6 — *на групі* $R^+(G)\cong(C_4\times C_2)\rtimes C_2$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$;
- 7 — *на групі* $R^+(G)\cong C_4\rtimes C_4$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$;
- 8 — *на групі* $R^+(G)\cong C_8\rtimes C_2$ *типу* $(4,4)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$.

(7) Якщо G *ізоморфна групі* $(6,2)$, *то* $n(G)=4$, *а саме:*

- 2 *майже-кільця на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,4)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2)$ *та*
- 2 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(2,2,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2)$.

(8) Якщо G *ізоморфна групі* $(6,3)$, *то* $n(G)=14$, *а саме:*

- 9 *майже-кільця на групі* $R^+(G)$ *типу* $(9,3)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(3,3)$ *та*
- 5 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(3,3,3)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(3,3)$.

(9) Якщо G *ізоморфна групі* C_{20}, *то* $n(G)=1$ *та* $R^+(G)$ *є групою типу* $(5,5)$ *з підгрупою* $L(G)$ *порядку* 5.

(10) Якщо G *ізоморфна симетричній групі* S_3, *то* $n(G)=2$ *та обидві* $R^+(G)$ *є групами типу* $(3,3)$ *з підгрупою* $L(G)$ *порядку* 3.

(11) Якщо G *ізоморфна групі* $C_3\times S_3$, *то* $n(G)=15$, *а саме:*

- 4 *майже-кільця на групі* $R^+(G)$ *типу* $(9,3)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(3,3)$ *та*
- 3 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(3,3,3)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(3,3)$;

- 4 — *на групі* $R^+(G) \cong (C_3 \times C_3) \rtimes C_2$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(3,3)$;
- 4 — *на групі* $R^+(G) \cong C_9 \rtimes C_3$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(3,3)$.

(12) Якщо G *ізоморфна групі кватерніонів* Q_8, *то* $n(G) = 48$, *а саме:*

- 24 *майже-кільця на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$ *та*
- 24 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(2,2,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$.

(13) Якщо G *ізоморфна групі діедра* D_8, *то* $n(G) = 236$, *а саме:*

- 16 *майже-кілець на групі* $R^+(G)$ *типу* $(8,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$,
- 9 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,4)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$,
- 90 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$,
- 77 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(2,2,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$,
- 17 — *на групі* $R^+(G) \cong (C_4 \times C_2) \rtimes C_2$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2,2)$,
- 10 — *на групі* $R^+(G) \cong C_4 \rtimes C_4$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$ *та*
- 17 — *на групі* $R^+(G) \cong C_8 \rtimes C_2$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(4,2)$.

(14) Якщо G *ізоморфна знакозмінній групі* A_4, *то* $n(G) = 9$, *а саме:*

- 2 *майже-кільця на групі* $R^+(G)$ *типу* $(4,4)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2)$,
- 2 — *на групі* $R^+(G) \cong C_2 \times Q_8$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2)$ *та*
- 5 — *на групі* $R^+(G)$ *типу* $(2,2,2,2)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(2,2)$.

(15) Якщо G *ізоморфна групі Міллера–Морено* $(C_3 \times C_3) \rtimes C_2$, *то* $n(G) = 4$ *та всі* $R^+(G)$ *є групами типу* $(3,3,3)$ *з підгрупою* $L(G)$ *типу* $(3,3)$.

(16) Якщо G *ізоморфна групі Міллера–Морено* $C_5 \rtimes C_4$, *то* $n(G) = 1$ *та* $R^+(G)$ *є групою типу* $(5,5)$ *з підгрупою* $L(G)$ *порядку* 5.

(17) Якщо G *ізоморфна групі* $C_5 \rtimes C_4$ *з тривіальним центром, то* $n(G) = 3$ *та* $R^+(G)$ *є групою типу* $(5,5)$ *з підгрупою* $L(G)$ *порядку* 5.

Література

[1] *Amberg B.* Local near-rings with dihedral multiplicative group // Journal of Algebra. — 2004. — 273. — P. 700–717.

[2] *Maxon C. J.* On local near-rings // Math. Z. — 1968. — 106. — P. 197–205.

[3] Meldrum J. D. P. *Near-rings and their links with groups.* — London: Pitman Publishing Limited, 1985 — 273 p.

[4] Холл М. *Теория групп.* — М.: Издательство иностранной литературы, 1962. — 468 с.

[5] *Clay J. R.* The near-rings with identities on certain finite groups // Math. Scand. — 1966. — 19. — P. 146–150.

[6] *Maxson C. J.* Local near-rings of cardinality p^2 // Canad. Math. Bull. — 1968. — 11, no. 4. — P. 555–561.

[7] *Clay J. R.* The near-rings with identities on generalized quaternion groups // Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. — 1970. — 104. — P. 525–530.

[8] *Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P., Noebauer C.* SONATA — System of Nearrings and their Applications, Version 2.6, Johannes Kepler Universitaet Linz, 2012 (http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Sonata/).

[9] The GAP Group, Aechen, St Andrews. GAP — Groups, Algorithms and Programming, Version 4.6.4, 2013 (http://www.gap.dcs.st-and.ac.uk/ gap).

[10] *Zassenhaus H.* Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg. — 1935/36. — 11. — P. 187–220.