Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 127–133.

Скінченно-станова спряженість сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева

Д.І. Морозов

Національний університет "Києво-Могилянська академія"

Анотація. У статті досліджується питання скінченно-станової спряженості 0-повних сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева. Наведено рекурсивний критерій скінченно-станової спряженості сферично-транзитивних автоморфізмів.

Finite-state conjugation of the 0-complete spherically-transitive automorphisms of the binary rooted tree

D. Morozov

National University "Kyiv-Mohila Academy"

Abstract. This article answers the question of finite-state conjugation of the 0-complete spherically-transitive automorphisms of the binary rooted tree.

Дослідження групових автоматів шляхом їх представлення автоморфізмами кореневого однорідного дерева надає зручну техніку для вирішення низки проблем, пов'язаних з групою обертовних автоматів Мілі (див. [**1**]).

Вивчення властивостей скінченно-станової підгрупи групи автоморфізмів кореневого однорідного дерева є надзвичайно актуальним. Ця тема висвітлюється у роботах Р. І. Григорчука, В. І. Сущанського, С. Сідки, Ч. К. Гупти та інших дослідників.

У даній роботі розглядається частинний випадок проблеми скінченно-станової спряженості, яка є досі не розв'язаною.

Розглянемо проблему скінченно-станової спряженості для сферично-транзитивних автоморфізмів кореневого бінарного дерева.

Теорема 1 надає рекурсивний критерій скінченно-станової спряженості сферично-транзитивних ізометрій бінарного кореневого дерева. Теорема 4 дозволяє при перевірці скінченно-станової спряженості 0-повних сферично-транзитивних ізометрій обмежитися перевіркою 0-розв'язку рівняння спряженості.

E-mail: denis.morozov178@gmail.com

Означення 1. Групу автоморфізмів регулярного кореневого бінарного дерева T_2 позначимо $AutT_2$.

Означення 2. При дії автоморфізма a на дерево T_2 цей автоморфізм індукує дію на піддеревах. Ці дії також є автоморфізмами дерева T_2, оскільки T_2 є самоподібним. Назвемо ці автоморфізми станами автоморфізму a (див. [1]).

Означення 3. Автоморфізм дерева T_2, що має лише скінченну кількість різних станів, назвемо скінченно-становим. Групу всіх скінченно-станових автоморфізмів регулярного кореневого бінарного дерева T_2 позначимо $FAutT_2$.

Означення 4. Нехай x, y — кінці дерева T_2 (нескінченні прості шляхи з початком у корені). Те, що ізометрія $a \in AutT_2$ переводить $x \in T_2$ в $y \in T_2$, позначимо як

$$x * a = y.$$

Суперпозицію ізометрій a, $b \in AutT_2$ позначимо, як

$$a \circ b.$$

Означення 5. Назвемо автоморфізм кореневого бінарного дерева сферично-транзитивним, якщо підстановка вершин кожного рівня складається точно з одного циклу.

Множину сферично-транзитивних автоморфізмів позначимо як $STAutT_2$.

Означення 6. Означимо функцію $\varphi : AutT_2 \to AutT_2$ для автоморфізмів вигляду $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ наступним чином $\varphi(x) = x_1 \circ x_2$ (запис $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ означає, що автоморфізм x діє на лівому піддереві дерева T_2 за допомогою автоморфізму x_1, на правому піддереві дерева T_2 за допомогою автоморфізму x_2 та міняє місцями вершини першого рівня.) Для автоморфізмів вигляду $x = (x_1, x_2)$ будемо вважати φ не визначеною.

Згідно з означенням, довільний сферично-транзитивний автоморфізм $x \in AutT_2$ переставляє вершини 1-го рівня, і тому має вигляд $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$. Отже, φ визначена для всіх $x \in STAutT_2$.

Лема 1. *Якщо $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ є сферично-транзитивним автоморфізмом дерева T_2, то і $\varphi(x) = x_1 \circ x_2$ є сферично-транзитивним автоморфізмом дерева T_2.*

Доведення. Розглянемо послідовність вершин n-го рівня дерева T_2, отриману наступним чином:

$(a_n)_0$ — вершина n-го рівня, що належить піддереву дерева T_2 з коренем в лівій вершині 1-го рівня. Назвемо таке дерево лівим піддеревом, з коренем в правій вершині — правим піддеревом. Далі

$$(a_n)_{k+1} = (a_n)_k * x.$$

Оскільки автоморфізм x міняє праве та ліве піддерева місцями, то елементи $(a_n)_{2k}$ належать лівому піддереву, а $(a_n)_{2k+1}$ — правому. Далі, оскільки x — сферично-транзитивний, то усі елементи $\{(a_n)_k|0 \leq k \leq 2^n - 1\}$ є попарно різними та $(a_n)_{2^n} = (a_n)_0$. (1)

Розглянемо квадрат автоморфізму x

$$x^2 = x \circ x = (x_1, x_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) \circ \sigma = (x_1 \circ x_2, x_2 \circ x_1).$$

Підстановка вершин n-го рівня($n \neq 0$) автоморфізму x^2 складається з двох циклів довжини 2^{n-1} — $\{(a_n)_{2k}|0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1\}$ та $\{(a_n)_{2k+1}|0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1\}$. Згідно з зауваженням (1) підстановка вершин довільного рівня лівого піддерева автоморфізмом $x_1 \circ x_2$ складається з одного циклу, тому він є шарово-транзитивним. □

Згідно з лемою 1 для шарово-транзитивного автоморфізму x $\varphi^n(x)$ визначене коректно для довільного натурального n.

Означення 7. Означимо функцію $\pi_L : AutT_2 \to AutT_2$ наступним чином $\pi_L(x) = x_1$, де x_1 визначається співвідношенням $x = (x_1, x_2)$ або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$.

Означення 8. Означимо функцію $\pi_R : AutT_2 \to AutT_2$ наступним чином $\pi_R(x) = x_2$, де x_2 визначається співвідношенням $x = (x_1, x_2)$ або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$.

Очевидно, що для сферично-транзитивного автоморфізма a має місце рівність $a = (\pi_L(a), \pi_R(a)) \circ \sigma$ і значення $\pi_L(a), \pi_R(a)$ та $\varphi(a)$ зв'язані наступним співвідношенням

$$\varphi(a) = \pi_L(a) \circ \pi_R(a).$$

Крім того, для автоморфізмів $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення

$$\pi_L(a^{-1}) = (\pi_L(a))^{-1},\ \pi_R(a^{-1}) = (\pi_R(a))^{-1},$$
$$\pi_L(b^{-1}) = (\pi_R(b))^{-1},\ \pi_R(b^{-1}) = (\pi_L(b))^{-1},$$
$$\pi_L(a \circ b) = \pi_L(a) \circ \pi_L(b),\ \pi_R(a \circ b) = \pi_R(a) \circ \pi_R(b),$$
$$\pi_L(b \circ a) = \pi_L(b) \circ \pi_R(a),\ \pi_R(b \circ a) = \pi_R(b) \circ \pi_L(a).$$

Лема 2. *Скінченно-станові сферично-транзитивні автоморфізми a і b спряжені в $FAutT_2$ тоді і лише тоді, коли $\varphi(a)$ і $\varphi(b)$ спряжені в $FAutT_2$.*

Доведення. Нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma$.

$\Rightarrow$

Припустимо, що існує автоморфізм $x \in FAutT_2$, такий, що $a^x = b$.

Якщо $x = (x_1, x_2)$, то має місце наступне співвідношення

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) =$$

$$= (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_1 \circ x_1) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma.$$

Отже, $b_1 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$ і $b_2 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$, тому

$$\varphi(b) = b_1 \circ b_2 = (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2) \circ (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) = x_1^{-1} \circ a_1 \circ a_2 \circ x_1 = \varphi(a)^{x_1}$$

і $\varphi(a)$ спряжений з $\varphi(b)$ скінченно-становим автоморфізмом x_1.

Якщо $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$, то має місце наступне співвідношення

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) \circ =$$

$$= (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1, x_1^{-1} \circ a_2 \circ x_2) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma.$$

Отже, $b_1 = x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1$ і $b_2 = x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2$, тому

$$\varphi(b) = b_1 \circ b_2 = (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2) =$$

$$= x_2^{-1} \circ a_2 \circ a_1 \circ x_2 = x_2^{-1} \circ a_1^{-1} \circ (a_1 \circ a_2) \circ a_1 \circ x_2 = \varphi(a)^{a_1 \circ x_1}$$

і $\varphi(a)$ спряжений з $\varphi(b)$ скінченно-становим автоморфізмом $a_1 \circ x_2$.

$\Leftarrow$

Припустимо, що існує автоморфізм $x \in FAutT_2$, такий, що $\varphi(a)^x = \varphi(b)$.

Покажемо, що $\hat{x} = (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1})$ є скінченно-становим розв'язком рівняння спряженості $a^{\chi} = b$. Далі

$$(a_1 \circ a_2)^x = b_1 \circ b_2$$

і тому

$$a^{\hat{x}} = (x^{-1}, b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1}) =$$

$$= (x^{-1} \circ a_1 \circ (a_2 \circ x \circ b_2^{-1}), (b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ a_2 \circ x) \circ \sigma =$$

$$= ((x^{-1} \circ (a_1 \circ a_2) \circ x) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma = ((b_1, b_2) \circ b_2^{-1}, b_2) \circ \sigma =$$

$$= (b_1, b_2) \circ \sigma = b.$$

Оскільки автоморфізми x, a_2, b_2 — скінченно-станові, то і $a_2 \circ x \circ b_2^{-1}$ є скінченно-становим. Отже, $\hat{x} \in FAutT_2$. $\square$

Застосувавши лему 2 n разів отримаємо рекурсивний критерій спряженості сферично-транзитивних скінченно-станових ізометрій дерева T_2:

Теорема 1. *Нехай a, b — сферично-транзитивні скінченно-станові ізометрії дерева T_2. Ізометрії a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi^n(a)$ та $\varphi^n(b)$ спряжені в $FAutT_2$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Зауважимо, що при перевірці спряженості в певному класі автоморфізмів цей критерій є не результативним. Наприклад, для дослідження спряженості транзитивно-стабільних автоморфізмів (для яких $a = \varphi(a)$) потрібна інша техніка (див. [**2**]). Технічно спростити дослідження питання спряженості у таких випадках дозволяють твердження, що розглядаються нижче.

Означення 9. Назвемо 0-розв'язком рівняння спряженості $a^{\chi} = b$ автоморфізм χ_0 такий, що

$$0 * \chi_0 = 0, \quad a^{\chi_0} = b.$$

Теорема 2. *Нехай a, b — сферично-транзитивні ізометрії дерева T_2, а χ_0 — 0-розв'язок рівняння спряженості $a^{\chi_0} = b$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\varphi^n(a)^{\pi_L^n(\chi_0)} = \varphi^n(b).$$

Доведення. Дійсно, оскільки $a^{\chi_0} = b$, то $\varphi^n(a^{\chi_0}) = \varphi^n(b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Далі,

$$\pi_L(a^{\chi_0}) = \pi_L(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_L(\chi_0^{-1}) \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0) = (\pi_L(\chi_0))^{-1} \circ \pi_L(a) \circ \pi_R(\chi_0),$$

$$\pi_R(a^{\chi_0}) = \pi_R(\chi_0^{-1} \circ a \circ \chi_0) = \pi_R(\chi_0^{-1}) \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0) = (\pi_R(\chi_0))^{-1} \circ \pi_R(a) \circ \pi_L(\chi_0).$$

Скористаємося методом математичної індукції:

1) Для $n = 0$ маємо рівність $a^{\chi_0} = b$ і твердження виконується. 2) Нехай для $n = k$ твердження теореми виконується, тобто $\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)} = \varphi^k(b)$. Покажемо, що воно також має місце для $n = k + 1$.

Оскільки $\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(b))$, то, згідно з індуктивним припущенням,

$$\varphi^{k+1}(b) = \varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) = \pi_L(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) \circ \pi_R(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)})$$

і

$$\varphi(\varphi^k(a)^{\pi_L^k(\chi_0)}) =$$
$$= ((\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\pi_L^k(\chi_0))) \circ ((\pi_R(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \pi_R(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0))) =$$
$$= (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ (\pi_L(\varphi^k(a)) \circ \pi_R(\varphi^k(a))) \circ \pi_L(\chi_0) =$$
$$= (\pi_L(\pi_L^k(\chi_0)))^{-1} \circ \varphi(\varphi^k(a)) \circ \pi_L(\pi_L^k(\chi_0)) = \varphi(\varphi^k(a))^{\pi_L(\pi_L^k(\chi_0))} = \varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)},$$

тому має місце рівність $\varphi^{k+1}(a)^{\pi_L^{k+1}(\chi_0)} = \varphi^{k+1}(b)$ і, згідно з методом математичної індукції, маємо твердження теореми. □

Теорема 3. *Нехай a, b — сферично-транзитивні скінченно-станові ізометрії дерева T_2. Тоді χ_0 — 0-розв'язок рівняння спряженості $a^{\chi_0} = b$ є скінченно-становим тоді і тільки тоді, коли $\pi_L^n(\chi_0)$ є скінченно-становим для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma, b = (b_1, b_2) \circ \sigma$.

0-розв'язок χ_0 має вигляд

$$\chi_0 = (\pi_L(\chi_0), \pi_R(\chi_0)).$$

Очевидно, має місце рівність:

$$a^{\chi_0} = (\pi_L(\chi_0)^{-1} \circ a_1 \circ \pi_R(\chi_0), \pi_R(\chi_0)^{-1} \circ a_2 \circ \pi_L(\chi_0)) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma.$$

Звідси маємо

$$(\pi_L(\chi_0)^{-1} \circ a_1 \circ \pi_R(\chi_0) = b_1 \Rightarrow \pi_R(\chi_0) = a_1^{-1} \circ \pi_L(\chi_0) \circ b_1.$$

Оскільки a_1, b_1 — скінченно-станові, то з того, що $\pi_L(\chi_0)$ — скінченно-станова ізометрія, випливає, що $\pi_R(\chi_0)$ — скінченно-станова, а тому і χ_0 є скінченно-становою ізометрією.

Отже, 0-розв'язок рівняння спряженості $a^{\chi_0} = b$ є скінченно-становим тоді і тільки тоді, коли $\pi_L(\chi_0)$ є скінченно-становим. (1)

За теоремою 2 $\pi_L(\chi_0)$ є 0-розв'язком рівняння спряженості

$$(a_1 \circ a_2)^{\chi} = b_1 \circ b_2.$$

Застосувавши твердження 1 n разів, отримаємо твердження теореми. □

Означення 10. Назвемо скінченно-станову ізометрію f 0-повною, якщо образ 0 при дії на нього централізатором цього елементу співпадає з множиною квазіперіодичних елементів дерева T_2

$$0 * C_{FAutT_2}(f) = T_2 \cap \mathbb{Q}.$$

Лема 3. *Скінченно-станова ізометрія a є 0-повною тоді і лише тоді, коли $\varphi^n(a)$ є 0-повною для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Для ізометрії $a = (b, c) \circ \sigma$ мають місце наступні співвідношення

$$0 * a^{2t} = 2(0 * \varphi(a)^t),$$
$$0 * a^{2t+1} = 2(0 * \varphi(a)^t b) + 1.$$

Отже, ізометрія a є 0-повною тоді і лише тоді, коли $\varphi(a)$ є 0-повною. Застосувавши отримане твердження n разів отримаємо аналогічне твердження для $\varphi^n(a)$. □

Теорема 4. *Нехай a, $b \in FAutT_2$, причому b — 0-повна сферично-транзитивна ізометрія. Ізометрії a та b спряжені в $FAutT_2$ тоді і лише тоді, коли існує скінченно-становий 0-розв'язок рівняння спряженості $a^{\chi} = b$.*

Доведення. Нехай скінченно-станові ізометрії a та b спряжені в $FAutT_2$ скінченно-становою ізометрією χ ($a^{\chi} = b$). Оскільки χ — скінченно-станова, то в рівності $0 * \chi = p$ p — квазіперіодичний елемент дерева T_2.

Далі, b є 0-повною, отже існує скінченно-станова ізометрія c, що задовольняє умовам:

$$c^{-1} \circ b \circ c = b, \quad 0 * c = p.$$

Очевидно, має місце наступне співвідношення

$$a^{\chi} = b^c.$$

Тому

$$a^{\chi \circ c^{-1}} = b.$$

Крім того, має місце рівність:

$$0 * (\chi \circ c^{-1}) = 0.$$

Отже, якщо χ — скінченно-станова ізометрія, то $\chi \circ c^{-1}$ є 0-розв'язком, звідки маємо твердження теореми. $\square$

Література

[1] *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Динамические системы, автоматы и бесконечные группы, Сборник статей, Тр. МИАН, 231. — М.: Наука, 2000. — С. 134—214.

[2] *Морозов Д. І.* Спряженність транзитивно-стабільних автоморфізмів $FAutT_2$ // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. — 2012. — Т. 126. — С. 7–9.