Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 120–126.

О представлениях малых размерностей четверной группы Клейна, имеющих постоянный ранг

И. В. Литвинчук

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка

Аннотация. В 2008 году Д. Ф. Карлсон, Е. М. Фридлендер і Ю. Певцова ввели, для конечных групп и полей положительной характеристики, понятие модуля постоянного ранга, постоянного жорданового типа и т.п., которые можно естественным образом переформулировать на языке матричных представлений. Случай элементарных абелевых групп является одним из основных в этой новой теории. В настоящей статье изучаются матричные представления малых порядков четверной группы Клейна, которые имеют постоянный ранг или постоянный жордановый тип (для элементарных абелевых 2-групп эти два понятия совпадают).

On representations of small dimensions of the Klein four-group having constant rank

I. Lytvynchuk

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Abstract. In 2008 J. F. Carlson, E. M. Friedlander and J. Pevtsova introduced, for finite groups and fields of positive characteristic, the concept of the modules of constant rank, constant Jordan type, etc., which can be naturally reformulated in term of matrix representations. The case of elementary abelian groups is one of the main in this new theory. In this article we study matrix representation of small orders of the Klein four-group that have constant Jordan type or constant rank (for elementary abelian groups these two conditions are equivalent).

Введение

Мы будем пользоваться определениями и результатами работы [**1**], написанной под влиянием работы [**2**], в которой для конечной группы G и поля k характеристики $p > 0$ вводятся и изучаются модули постоянного жорданового типа. В [**1**] (в отличии от [**2**]) рассматриваются не только группы, но и алгебры, и уже нет ограничения на характеристику поля. Однако в этой статье мы ограничимся (стандартным в смысле

E-mail: iryna.l@ukr.net

работы [**2**]) случаем, когда имеется элементарная абелева группа

$$G_s = (2, 2, \dots, 2) \ (s \text{ прямых множителей})$$

и k — алгебраически замкнутое поле характеристики 2. При этом вместо модулей рассматриваются матричные представления.

Пусть $g_1, g_2, \dots, g_s$ — стандартные образующие группы G_s. Матричное представление этой группы будем отождествлять с набором матриц

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_s),$$

соответствующих элементам $g_1, g_2, \dots, g_s$; тогда $A_1^2 = A_2^2 = \dots = A_s^2 = E$ и $A_i A_j = A_j A_i$ для любых $i, j = 1, 2, \dots, s$, где E обозначает единичную матрицу. Матричное представление A называется представлением постоянного ранга, если ранг матрицы

$$\alpha_1(E + A_1) + \alpha_2(E + A_2) + \dots + \alpha_s(E + A_s)$$

не зависит от выбора элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ поля k, среди которых есть хотя бы один ненулевой. Очевидно, что матричные представления группы G_s постоянного ранга являются представлениями постоянного жорданового типа (и наоборот) в том смысле, что жорданова форма матрицы

$$\alpha_1(E + A_1) + \alpha_2(E + A_2) + \dots + \alpha_s(E + A_s)$$

не зависит от выбора элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Матричные представления размерности $m < 4$ группы G_2 над полем k (характеристики 2), имеющие постоянный ранг, исчерпываются, с точностью до эквивалентности, следующими представлениями $A = (A_1, A_2)$:*

1) *$m = 1, 2, 3$ и $A_1 = E_m$, $A_2 = E_m$, где E_m — единичная матрица размера $m \times m$;*

2) *$m = 3$ и*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) *$m = 3$ и*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом неразложимыми являются представления вида 1) *при $m = 1$ и вида* 2), 3).

1. Предварительные сведения

Из основного результата работы [**3**] (описания ручных и диких элементарных абелевых групп относительно представлений постоянной жордановой формы) следует, что задача об описании представлений постоянного ранга группы G_n (над полем k характеристики 2) является ручной тогда и только тогда, когда $n < 3$. Случай $n = 1$ тривиальный, а в случае $n = 2$ неразложимые представления описываются следующей теоремой (см. теорему 5 [**1**]).

Теорема 2. *Представления группы G_2 (над полем k характеристики 2) вида*

$a)$ $\quad a \to (1), \quad b \to (1),$

$$b) \quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c) \quad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \;\; \overline{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \overline{0} \;\; E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right),$$

$$d) \quad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

где $s \geq 1$, образуют полную систему неразложимых попарно неэквивалентных представлений постоянного ранга.

Здесь E_r обозначает единичную матрицу размера $r \times r$, а $\overline{0}$ и $\widetilde{0}$ — соответственно нулевой столбец и нулевую строку.

Нетрудно видеть, что теорема 1 следует из теоремы 2. В следующем параграфе предлагается прямое доказательство теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

причем C — нильпотентна матрица ранга 1 и $BC = CB$. Тогда

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где (c_{12}, c_{13}, c_{23}) — ненулевой вектор и $c_{12}c_{23} = 0$.

Доказательство. Обозначим через $(i.j)$ скалярное равенство $(BC)_{ij} = (CB)_{ij}$ (т. е. равенство, которое получается из матричного равенства $BC = CB$ приравниванием элементов матриц BC и CB, стоящих на пересечении i-ой строки и j-го столбца).

Эти равенства имеют следующий вид:

$$c_{31} = 0\,(1.1);\ c_{32} = 0\,(1.2);\ c_{33} = c_{11}\,(1.3);$$

$$0 = 0\,(2.1);\ 0 = 0\,(2.2);\ 0 = c_{21}\,(2.3);\ 0 = 0\,(3.1);\ 0 = 0\,(3.2);\ 0 = c_{31}\,(3.3).$$

Следовательно

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{11} \end{pmatrix},$$

а поскольку C — нильпотентная матрица ранга 1, то, во-первых, $c_{11} = c_{22} = 0$, а, во-вторых, либо $c_{12} \neq 0, c_{23} = 0$, либо $c_{12} = 0, c_{23} \neq 0$, либо $c_{12} = c_{23} = 0, c_{13} \neq 0$,. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 1.

Легко видеть, что все указанные в теореме 1 матричные представления группы G_2 имеют постоянный ранг. Покажем, что другим таких представлений нет (с точностью до эквивалентности).

Пусть $T = (T_1, T_2)$ — матричное представление постоянного ранга размерности $m < 4$ группы G_2. Положим $B = E_m + T_1$, $C = E_m + T_2$. Тогда $B^2 = 0, C^2 = 0, BC = CB$, причем ранг матрицы $\beta B + \gamma C$ не зависит от элементов β, γ поля k $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$.

Случай $m = 1$ очевиден. Рассмотрим случаи $m = 2, 3$.

Пусть сначала $m = 2$. Если $B = 0$, то $C = 0$ и имеем случай 1) (см. формулировку теоремы 1). Если же $B \neq 0$, то пара матриц (B, C) подобна паре матриц (B', C'), где

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} \\ c'_{21} & c'_{22} \end{pmatrix}.$$

Из равенства $B'C' = C'B'$ имеем, что $c'_{21} = 0, c'_{11} = c'_{22}$, а тогда из равенства $(C')^2 = 0$ следует, что $c'_{11} = 0$. Значит

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 0 & c'_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а тогда $c'_{12}B' + C' = 0$, откуда $c'_{12}B + C = 0$ и мы пришли к противоречию.

Пусть теперь $m = 3$. Если $B = 0$, то $C = 0$ и имеем случай 1) (см. формулировку теоремы 1). Если же $B \neq 0$, то пара матриц (B, C) подобна паре матриц (B', C'), где

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} \\ c'_{21} & c'_{22} & c'_{23} \\ c'_{31} & c'_{32} & c'_{33} \end{pmatrix}.$$

При этом матрица C' имеет ранг 1 и в силу леммы 1

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & c'_{12} & c'_{13} \\ 0 & 0 & c'_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c'_{12}c'_{23} = 0$. Таким образом, возможны три случая:

а)

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & c'_{12} & c'_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c'_{12} \neq 0$;

б)

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c'_{13} \\ 0 & 0 & c'_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c'_{23} \neq 0$;

в)

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c'_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c'_{13} \neq 0$.

Рассмотрим сначала случай а). Положим

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (c'_{12})^{-1} & c'_{13}(c'_{12})^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$X^{-1}B'X = B', \quad X^{-1}C'X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то пара матриц (B', C'), а значит и пара матриц (B, C), задает представление группы G_2 вида 2) (см. формулировку теоремы 1).

Рассмотрим теперь случай б). Положим

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & c'_{13}(c'_{23})^{-1} & 0 \\ 0 & (c'_{23})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$YB'X^{-1} = B', \quad YC'Y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то пара матриц (B', C'), а значит и пара матриц (B, C), задает представление группы G_2 вида 3) (см. формулировку теоремы 1).

Рассмотрим, наконец, случай в). В этом случае $c'_{13}B' + C' = 0$, а значит $c'_{13}B + C = 0$, и следовательно представление группы G_2, которое задается парой (B, C), не является представлением постоянного ранга.

Первая часть теоремы 1 доказана.

Очевидно, что представление вида 1) (см. снова формулировку теоремы 1) является неразложимым только при $m = 1$.

Нам осталось показать, что представления $A = (A_1, A_2)$ вида 2) и 3) неразложимы. Для этого нужно доказать, что алгебра матриц Z таких, что $A_1Z = ZA_1$, $A_2Z = ZA_2$, является локальной. Вместо этих равенств будем рассматривать эквивалентные им равенства $BZ = ZB$, $CZ = ZC$, где $B = E_3 + A_1$, $C = E_3 + A_2$.

Рассмотрим сначала представление вида 2). Множество матриц Z таких, что $BZ = ZB$, имеют следующий вид (см. доказательство леммы 1):

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ 0 & z_{22} & z_{23} \\ 0 & 0 & z_{11} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь матричное равенство $CZ = ZC$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ 0 & z_{22} & z_{23} \\ 0 & 0 & z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ 0 & z_{22} & z_{23} \\ 0 & 0 & z_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это матричное равенство эквивалентно скалярным равенствам $z_{22} = z_{11}\,(1.2)$; $z_{23} = 0\,(1.3)$. см. обозначения в доказательстве леммы 1). Итак, матрица Z имеет вид

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ 0 & z_{11} & 0 \\ 0 & 0 & z_{11} \end{pmatrix}$$

и легко видеть, что множество всех матриц такого вида образуют локальную алгебру.

Аналогично доказывается неразложимость представления 3). В этом случае матрица Z имеет вид

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & 0 & z_{13} \\ 0 & z_{11} & z_{23} \\ 0 & 0 & z_{11} \end{pmatrix}$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. М. Бондаренку за внимание к работе и ценные советы.

Список литературы

[1] *Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.* О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія: математика і інформатика. — 2012, 23, №1. — С. 19-27.

[2] *Carlson J. F., J. F. Friedlander J. F., Pevtsova J.* Modules of constant Jordan type // J. Reine Angew. Math. — 2008. — 614. — pp. 191-234.

[3] *Bondarenko V. M., Litvinchuk I. V.* The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type // Algebra Discrete Math. — 2012. — 14, №1. — pp. 29–36.