Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 86–96.

УДК 511.72 + 517.51

Модифікація класичного трійкового зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом

І. В. Замрій
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Анотація. У роботі пропонується кодування дробової частини дійсного числа з нескінченним алфавітом (набором цифр), який співпадає з множиною всіх натуральних чисел, геометрія якого породжується класичним трійковим представленням числа; вивчаються його тополого-метричні властивості(геометричний зміст символів, властивості циліндрів, метричні співвідношення тощо).

Modification of classical ternary representation of real numbers with infinite alphabet

I. Zamriy
National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. We propose encoding of fractional part of a real number with an infinite alphabet (set of digits) coinciding with the set of positive integers. The geometry of this encoding is generated by the classical ternary representation of a number. We study topological and metric properties of the representation (geometric meaning of symbols, properties of cylinders, metric relations etc.).

Вступ

У 1202 р. в книзі «Liber abacci» Л. Фібоначчі сформулював задачу про гирі, відому ще як задача Баше-Менделєєва, її суть полягає у виборі найкращої, у розумінні «швидкості» зважування на шальках терезів, системи гирь. Було доведено, що, при домовленості класти гирі тільки на одну шальку терезів, найбільш економною є двійкова система числення, а при домовленості класти гирі на обидві шальки терезів, найбільш економічною є трійкова симетрична система числення [1]. В роботі [2] обґрунтовано, що серед систем з цілою основою трійкова система є найбільш економною в іншому сенсі.

Зазначимо, що однією з перших механічних обчислювальних машин була саме трійкова ЕОМ, сконструйована Томасом Фоулером в 1840 р. І починаючи з 40-вих років XX ст. над вдосконаленням і запуском в серійне виробництво комп'ютерів на базі трійкового кодування працювали дві групи вчених під керівництвом Джона фон Неймана у США та Н. П. Брусенцова в СРСР [3]. Було встановлено, що трійкові комп'ютери мають ряд переваг в порівнянні з двійковими, а саме:

1) при трійковому кодуванні швидкодія компютера більша приблизно в 1,5 рази;

2) із цілочисельних систем числення найбільшою щільністю запису інформації володіє трійкова система числення;

3) трійкова логіка повністю включає в себе двійкову логіку.

Як виявилось між системами зображення чисел зі скінченними та нескінченними алфавітами існує тісний зв'язок, наприклад, як для класичної двійкової системи і системи Q_∞ – зображення [4, 5, 6].

У даній роботі ми досліджуємо модифікацію класичного трійкового зображення. Основним її завданням є обґрунтування коректності означення нового зображення, а також вивчення його геометрії.

1. Модифікація класичного трійкового зображення дійсних чисел

Означення **1.** Зображення

$$\overline{\Delta}^{3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \tag{1}$$

дійсного числа

$$x = \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{2\ldots2}_{a_3}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{3n-2}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{3n-1}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{3n}}\ldots}, \quad a_n \in \mathbb{Z}_0,$$

де a_n — це «довжина» серії однакових послідовних трійкових цифр, називатимемо $\overline{3}$ – *зображенням* числа x.

Очевидно, що $\overline{3}$ – зображення є лише модифікоацією класичного трійкового зображення, але на відміну від останнього використовує не трисимвольний алфавіт, а нескінченний алфавіт, який є множиною цілих невід'ємних чисел.

З означення зрозуміло, що у $\overline{3}$ – зображенні дійсного числа не може стояти підряд більше двох нулів, тобто $a_na_{n+1}a_{n+2} \neq 000, \ \ n \in N$. Крім того, навіть домовившись використовувати лише одне з двох зображень трійково-раціональних чисел, а саме з перідом (0) існують проблеми з коректністю даного означення. Вони пов'язані як з переходом від трійкового зображення до $\overline{3}$ – зображення, так і «навпаки». Остання проблема пов'язана з тим, що не кожна послідовність (a_n) цілих невід'ємних чисел визначає $\overline{3}$ – зображення $\overline{\Delta}^{3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$. Наприклад, як трактувати запис $\overline{\Delta}^{3}_{123(400)}$? Інша проблема пов'язана з тим як записувати число, трійкове зображення якого має простий період (i)?

Вирішуються ці проблеми наступними домовленостями.

З метою забезпечення кожного числа єдиним $\overline{3}$ – зображенням, яке не допускає двозначних трактувань (тлумачень) домовимось:

а) число $x = \Delta^3_{\ldots(i)}$ записувати $\overline{\Delta}^{3}_{\ldots1001001001\ldots}$, де $i = \{0,1\}$;

б) два нулі підряд для $\overline{3}$ – зображення числа вживати у виключних випадках, а саме: якщо трійкове зображення числа x починається цифрою 2, тобто $x = \Delta^3_{2\alpha_2\alpha_3\ldots}$, тоді $x = \overline{\Delta}^{3}_{00a_3\ldots}$, де $a_3 > 0$, або число має простий період (i), про яке згадувалось в а).

Після введення цих вимог довільне число $x \in [0, 1)$ має єдине $\overline{3}$ – зображення.

Визначимо перехід від класичного трійкового до $\overline{3}$ – зображення, тобто від послідовності (α_n) до (a_n), де $\alpha_n \in \{0,1,2\}$, $a_n \in \mathbb{Z}_0$. В силу однозначності $\overline{3}$ – зображення $a_k(x)$ – функція числа, яка визначає довжину k-тої серії однакових трійкових символів (включаючи серії нульової довжини). Очевидно, що для всіх $n \in N$ мають місце рівності:

$$a_1 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_1 \neq 0, \\ n, \text{ якщо}\, \alpha_{n+1} \neq 0, \text{ але}\, \alpha_j = 0,\ j \leq n; \end{cases}$$

$$a_2 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{a_1+1} = 2, \\ n, \text{ якщо}\, \alpha_{a_1+1} = ... = \alpha_{a_1+n} = 1, \text{ але}\, \alpha_{a_1+n+1} \neq 1; \end{cases}$$

$$a_3 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{a_1+a_2+1} \neq 2, \text{ але}\, a_2 \neq 0, \\ n, \text{ якщо}\, \alpha_{a_1+a_2+1} = ... = \alpha_{a_1+a_2+n} = 2, \text{ але}\, \alpha_{a_1+a_2+n+1} \neq 2; \end{cases}$$

$$\cdots$$

$$a_{3k-i} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_{t+1} \neq 2-i, \text{ але}\, a_{3k-i-1} \neq 0, \\ n, \text{ якщо}\, \alpha_{t+1} = ... = \alpha_{t+n} = 2-i, \text{ але}\, \alpha_{t+n+1} \neq 2-i, \end{cases}$$

де $\sum\limits_{j=1}^{3k-i-1} a_j = t$, $i = \{0,1,2\}$.

Перехід від $\overline{3}$ – зображення до трійкового (від послідовності символів (a_n) до послідовності символів (α_n)), також є цілком очевидним і визначається наступними рівностями:

$$\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = 0, \ldots \alpha_{a_1} = 0,$$
$$\alpha_{a_1+1} = 1,\ \ \alpha_{a_1+2} = 1, \ldots \alpha_{a_1+a_2} = 1,$$
$$\alpha_{a_1+a_2+1} = 2, \ldots \alpha_{a_1+a_2+a_3} = 2,$$
$$\cdots$$

$$\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k}+1} = 0, \ldots, \alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k}+a_{3k+1}} = 0,$$
$$\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k+1}+1} = 1, \ldots, \alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k+1}+a_{3k+2}} = 1,$$
$$\alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k+2}+1} = 2, \ldots, \alpha_{a_1+a_2+\ldots+a_{3k+2}+a_{3k+3}} = 2, \ldots.$$

2. Геометрія модифікованого класичного трійкового зображення

Відомо, що для фіксованого впорядкованого набору чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ з $\{0,1,2\}$, *трійковим циліндром* рангу k з основою $c_1c_2\ldots c_k$ називається множина $\Delta^3_{c_1c_2\ldots c_k}$ всіх чисел $x \in [0,1]$, які мають перші k трійкові цифри рівні $c_1c_2\ldots c_k$.

Трійковий циліндр є відрізком, причому

$$\Delta^3_{c_1c_2\ldots c_k} = \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{3^i}, \frac{1}{3^k} + \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{3^i}\right].$$

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – фіксований впорядкований набір елементів алфавіту $\mathbb{Z}_0$, для якого виконуються вище вказані умови.

Означення **2.** Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$ у $\overline{3}$ – зображенні чисел називатимемо множину $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m}$ всіх чисел $x\in[0,1)$, які мають наступне $\overline{3}$ – зображення

$$x=\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m a_{m+1}\dots a_{m+k}\dots},\ a_{m+i}\in\mathbb{Z}_0.$$

Внутрішність циліндра $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m}$ позначатимемо $\overline{\nabla}^{3}_{c_1c_2\dots c_m}$.

Лема 1. *Циліндричні множини мають наступні властивості:*

1) якщо $c_m\neq 0$, то

$$\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m}=\Delta^3_{\underbrace{0\dots0}_{c_1}\underbrace{1\dots1}_{c_2}\dots\underbrace{\alpha\dots\alpha}_{c_m}\beta}\bigcup\Delta^3_{\underbrace{0\dots0}_{c_1}\underbrace{1\dots1}_{c_2}\dots\underbrace{\alpha\dots\alpha}_{c_m}\gamma},$$

де $\alpha\equiv m-1(mod\,3)$, $\beta\equiv m(mod\,3)$, $\gamma\equiv m+1(mod\,3)$;

якщо $c_m=0$, то

$$\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_{m-1}0}=\Delta^3_{\underbrace{0\dots0}_{c_1}\underbrace{1\dots1}_{c_2}\dots\underbrace{\alpha\dots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma},$$

де $\alpha\equiv m-2(mod\,3)$, $\gamma\equiv m(mod\,3)$;

2) якщо $c_m\neq 0$, то $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m}=\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m1}\bigcup\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m01}$ і якщо $c_m=0$, то $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_{m-1}0}=\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_{m-1}01}$;

3) $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m}=\overline{\Delta}^{3}_{s_1s_2\dots s_k}$, тоді і тільки тоді, коли всі $c_i=s_i,\ m,k\in\mathbb{N}$;

4) $\overline{\nabla}^{3}_{c_1c_2\dots c_m}\neq\overline{\nabla}^{3}_{s_1s_2\dots s_k}$, якщо хоча б одне з $c_i\neq s_i,\ m,k\in\mathbb{N}$;

5) для міри Лебега має місце рівність

$$\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m})=2^{\psi(c_m)}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m}c_i+1},$$

де $\psi(c_m)=\begin{cases}1, & \textit{якщо } c_m\neq 0,\\ 0, & \textit{якщо } c_m=0;\end{cases}$

6) $\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m})\to 0\ (m\to\infty)$ для $(c_n)\in A^\infty$;

7) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m}\equiv\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m\dots}=x\in[0,1)$;

8) основне метричне відношення має наступний вигляд

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m c})}{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m})}=\frac{2^{\psi^*(c_m,c)}}{3^c},\ \textit{де}\ \psi^*(c_m,c)=\begin{cases}0, & \textit{якщо } c_m\cdot c\neq 0,\\ -1, & \textit{якщо } c=0,\\ 1, & \textit{якщо } c_m=0;\end{cases}$$

9) діаметр циліндра визначається за формулою

$$diam(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\dots c_m})=\begin{cases}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m}c_i}, m\in(3k-2)\ \textit{або}\ m\in(3k),\\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m}c_i}, m\in(3k-1)\end{cases}\quad \textit{при}\ c_m\neq 0,$$

$$diam(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}) = \lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i+1};$$

10) $diam(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}) \geq \lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m})$.

Доведення. Властивість 1) випливає безпосередньо з означення $\overline{3}$ – зображення та умов, що на нього накладаються. А саме, якщо $x \in \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}$, то згідно з означенням $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}}$, де $\alpha \equiv m-1(mod\,3)$. Оскільки у модифікованому зображенні враховується повнота серій однакових цифр, то очевидно, що при $c_m \neq 0$ трійкова цифра на $(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i+1)$ місці відмінна від α, тому $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta}$ і $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma}$, причому $\alpha+1 \equiv \beta(mod\,3)$ і $\alpha+2 \equiv \gamma(mod\,3)$. Якщо $c_m = 0$, тоді отримаємо $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\underbrace{\beta\ldots\beta}_{c_m=0}\gamma} \equiv \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma}$, де $\alpha \neq \gamma \neq \beta$, а $\alpha \equiv m-2(mod\,3)$ і $\gamma \equiv m(mod\,3)$.

Властивість 2) випливає із властивості 1). Бо якщо $x \in \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}$ і $c_m \neq 0$, то $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta} \equiv \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m1}$ і $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma} \equiv \equiv \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m01}$, тобто $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m} = \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m1} \bigcup \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m01}$. Якщо $c_m = 0$, то $x \in \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma} \equiv \overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m01}$ і $\alpha+2 \equiv \gamma(mod\,3)$.

Властивості 3) і 4) випливають із єдиності $\overline{3}$ – зображення довільного дійсного числа x з $[0,1)$.

Із властивості 1) видно, що циліндр в $\overline{3}$ – зображенні є об'єднанням двох трійкових циліндрів при $c_m \neq 0$, тобто міра Лебега $\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m})$ визначається як сума довжин циліндрів $\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta}$ і $\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma}$, а саме

$$\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \lambda(\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\beta}) + \lambda(\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_m}\gamma}) =$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i+1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i+1}.$$

Якщо $c_m = 0$, то

$$\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}0}) = \lambda(\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1}\underbrace{1\ldots1}_{c_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{c_{m-1}}\gamma}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i+1}.$$

Властивість 6) випливає з 5) при $m \to \infty$.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ є послідовність вкладених компактів, а їх перетин визначає єдину точку $x \in [0,1)$ (властивість 7)). Основне метричне відношення отримаємо підставивши значення міри Лебега при фіксованому значенні

m та враховуючи, яких значень набувають цифри c_m і c у $\overline{3}$ – зображенні числа. Властивість 9) випливає з 1) і 5), а 10) випливає з 5) і 9). □

3. Основи метричної теорії

Метрична теорія трійкових розкладів чисел пов'язана із задачами на визначення мір Жордана, Лебега та інших, множин тих дійсних чисел, які мають властивості пов'язані із специфікою його зображення.

Найпростішими, але суттєво важливими задачами метричної теорії модифікованого $\overline{3}$ – зображення чисел є задачі про міру множин чисел з фіксованими $\overline{3}$ – цифрами на певних місцях, а також множин чисел, де забороняється вживання якоїсь з $\overline{3}$ – цифр.

3.1. **Напівциліндри.** Нехай $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ – множина всіх чисел, які на k_1 – ому місці $\overline{3}$ – зображення мають фіксовану цифру c_1, тобто $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1} \equiv \{x : a_{k_1}(x) = c_1\}$.

Якщо $k_1 = 1$, то множина $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ є циліндром $\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{c_1}$.

Якщо $k_1 = 2$, то множина $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1} = \overline{\Delta}^{2}_{c_1} = \bigcup\limits_{a_1 \in \mathbb{Z}_0} \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1 c_1}$, а її міра Лебега

$$\lambda(\overline{\Delta}^{2}_{c_1}) = \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{0c_1}) + \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{1c_1}) + \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{2c_1}) + \ldots + \lambda(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{tc_1}) + \ldots =$$
$$= \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+1}} + \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+2}} + \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+3}} + \ldots + \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+t+1}} + \ldots = \frac{2^{\psi(c_1)}}{3^{c_1+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2^{\psi(c_1)}}{2 \cdot 3^{c_1}},$$

де $\psi(c_1) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c_1 \neq 0, \\ 0, \text{ якщо } c_1 = 0. \end{cases}$

Очевидно, що множина $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ чисел з $[0,1)$, для яких k_1 – ша цифра має конкретне значення c_1, є об'єднанням циліндричних множин:

$$\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1} = \bigcup_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} \overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}c_1}.$$

Тому міра Лебега визначається як сума довжин цих циліндрів, тобто

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = \sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1}) \\ a_i \in \mathbb{Z}_0}} \lambda\left(\overline{\Delta}^{\overline{3}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}c_1}\right).$$

Зауважимо, що у випадку, коли $c_1 = 0$, то при $k_1 \geq 3$ відповідно до умов, які накладаються на «нулі» в модифікованому зображенні, цифра $a_{k_1-1} \neq 0$ і підряд не може бути двох і більше нулів, за виключенням цифр a_1 і a_2.

Оскільки не всі цифри у $\overline{3}$ – зображенні є незалежними однаково розподіленими, через накладені на них умови а) і б), то при $k_1 > 3$ розв'язання задачі знаходження міри Лебега напівциліндра значно ускладнюється.

Лема 2. *Множина $\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}$ має міру Лебега, яка визначається з рівності:*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{k_1 i} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+c_1+i+1}},$$

де $\psi(c_1) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c_1 \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } c_1 = 0, \end{cases}$ *число* $t_{k_1} = \min\left\{\sum\limits_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} a_i\right\}$, $s_{k_1 i}$ *— кількість всеможливих наборів* $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}$ *таких, що сума всіх цифр в наборі дорівнює* $t_{k_1} + i$, $i \in \mathbb{Z}_0$.

Доведення. Через умови накладені на $\overline{3}$ – зображення, виникають проблеми вживання цифри «0» для набору $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}$ при $k_1 > 3$. Тому введемо параметр t_{k_1} такий, що відповідає набору $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}$, в якому міститься максимальна кількість нулів, а на відмінних від нуля місцях стоять одиниці і виконуються умови накладені на $\overline{3}$ – зображення, тобто $t_{k_1} = \min\left\{\sum\limits_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} a_i\right\}$. Очевидно, що такиий набір не єдиний, тому кількість циліндрів для різних наборів $a_1, a_2, \ldots, a_{k_1-1}$, де сума цифр в наборі дорівнює t_{k_1} позначимо $s_{k_1 0}$. Тоді міра Лебега множини таких циліндрів згідно властивості 5) леми 1 дорівнює $\dfrac{s_{k_1 0} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+c_1+1}}$.

Очевидно, що далі необхідно розглянути всеможливі набори a_1, $a_2, \ldots$, a_{k_1-1}, які відповідатимуть числу $t_{k_1}+1$ і їх кількість позначимо $s_{k_1 1}$. Тоді, міра Лебега множини циліндрів з основою $a_1 a_2 \ldots a_{k_1-1} c_1$ таких, що має місце $\sum\limits_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} a_i = t_{k_1}+1$, дорівнює відповідно $\dfrac{s_{k_1 1} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+1+c_1+1}}$.

Продовживши цей процес далі, очевидно, що для $t_{k_1} + i$ та $s_{k_1 i}$ міра Лебега об'єднання всеможливих $\overline{3}$ – циліндрів дорівнює $\dfrac{s_{k_1 i} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+i+c_1+1}}$.

Легко бачити, що $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1})$ є сумою довжин всеможливих трійкових циліндрів $\Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\ldots\underbrace{\alpha\ldots\alpha}_{a_{k_1}-1}\underbrace{\beta\ldots\beta}_{c_1}\gamma}$, де $\gamma \neq \beta$ і набуває двох значень при $c_1 \neq 0$ або єдиного при $c_1 = 0$, рангу $t_{k_1} + c_1 + 1$, $t_{k_1} + c_1 + 2$, ..., $t_{k_1} + c_1 + i + 1$,..., тобто

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1}_{c_1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{k_1 i} \cdot 2^{\psi(c_1)}}{3^{t_{k_1}+c_1+i+1}}.$$

□

Узагальнимо наші міркування.

Означення **3.** Множина $\overline{\Delta}^{k_1 k_2 \ldots k_m}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \{x : a_{k_i}(x) = c_i, i = \overline{1,m}\}$ називається напівциліндром з основою $\begin{pmatrix} k_1 k_2 \ldots k_m \\ c_1 c_2 \ldots c_m \end{pmatrix}$.

Для довільного набору $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $c_i \in \mathbb{Z}_0$ із означення напівциліндра випливає

$$\overline{\Delta}^{k_1 k_2 \ldots k_m}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \bigcup_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1},\ldots,a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1},\ldots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} \overline{\Delta}^3_{a_1\ldots a_{k_1-1} c_1 a_{k_1+1}\ldots a_{k_{i+1}-1} c_{i+1} a_{k_{i+1}+1}\ldots a_{k_m-1} c_m}$$

та має місце рівність

$$\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m} = \overline{\Delta}^{k_1}_{c_1} \cap \overline{\Delta}^{k_2}_{c_2} \cap \ldots \cap \overline{\Delta}^{k_m}_{c_m}.$$

Теорема 1. *Міра Лебега напівциліндра* $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *обчислюється за формулою:*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{k_mi}\cdot 2^{\psi(c_m)}}{3^{t_{k_m}+c_1+c_2+\ldots+c_m+i+1}},$$

$$t_{k_m}=\min\left\{\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1},\ldots,a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1},\ldots,a_{k_{m-1}+1},\ldots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} a_i\right\},\ \psi(c_m)=\begin{cases}1 \text{ при } c_m\neq 0,\\ 0 \text{ при } c_m=0,\end{cases}$$

s_{k_mi} — *кількість всеможливих різних наборів* $a_1,\ldots,a_{k_1-1}$, $a_{k_1+1},\ldots,a_{k_2-1}$, ..., $a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1}$, ..., $a_{k_{m-1}+1},\ldots,a_{k_m-1}$ *при умові, що сума всіх цифр в наборі дорівнює* $t_{k_m}+i$, $i\in\mathbb{Z}_0$.

Доведення. Використаємо міркування, що й при доведенні леми 2. Введемо параметр t_{k_m}, який дорівнює сумі цифр в наборі $a_1,\ldots,a_{k_1-1}$, $a_{k_1+1},\ldots,a_{k_2-1}$, ..., $a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1}$, ..., $a_{k_{m-1}+1},\ldots,a_{k_m-1}$, де з урахуванням всіх умов накладених на $\overline{3}$ – зображення міститься максимальна кількість нулів, а на відмінних від нуля місцях стоять одиниці. Тобто

$$t_{k_m}=\min\left\{\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1},\ldots,a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1},\ldots,a_{k_{m-1}+1},\ldots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} a_i\right\}.$$

Оскільки існує не єдиний такий набір, то кількість різних циліндрів $\Delta^{\overline{3}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}c_1a_{k_1+1}\ldots a_{k_{i+1}-1}c_{i+1}a_{k_{i+1}+1}\ldots a_{k_m-1}c_m}$, таких що сума цифр на місцях відмінних від $k_1,k_2,...,k_m$ дорівнює t_{k_m}, позначимо s_{k_m0}. Міра Лебега множини таких циліндрів згідно властивості 5) леми 1 дорівнює $\dfrac{s_{k_m0}\cdot 2^{\psi(c_m)}}{3^{t_{k_m}+c_1+c_2+\ldots c_m+1}}$.

Міра Лебега множини циліндрів, що відповідають значенням $t_{k_m}+i$ та s_{k_mi}, дорівнює $\dfrac{s_{k_mi}\cdot 2^{\psi(c_m)}}{3^{t_{k_m}+c_1+c_2+\ldots c_m+i+1}}$.

Легко бачити, що

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m})=\sum_{\substack{(a_1,\ldots,a_{k_1-1},\ldots,a_{k_i+1},\ldots,a_{k_{i+1}-1},\ldots,a_{k_m-1})\\ a_i\in\mathbb{Z}_0}} \lambda(\Delta^{\overline{3}}_{a_1\ldots a_{k_1-1}c_1a_{k_1+1}\ldots a_{k_{i+1}-1}c_{i+1}a_{k_{i+1}+1}\ldots a_{k_m-1}c_m}),$$

тому

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_{k_mi}\cdot 2^{\psi(c_m)}}{3^{t_{k_m}+c_1+c_2+\ldots+c_m+i+1}}.$$

Що і треба було довести. □

3.2. **Множини чисел з послідовністю фіксованих $\overline{3}$ – символів.**

Означення **4.** Нехай (c_m) – задана послідовність цілих невідємних чисел. Множиною чисел з послідовністю фіксованих $\overline{3}$ – символів називають множину виду:

$$\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = \{x : x = \overline{\Delta}^{3}_{a_1a_2\ldots a_m\ldots}, a_{k_m}(x) = c_m, m \in \mathbb{N}\}.$$

Із властивостей напівциліндрів випливає $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = \bigcap\ldots{}_{m=1}^{\infty} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Теорема 2. *Міра Лебега множини $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{3}$ – символів рівна нулю, тобто*

$$\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) = 0.$$

Доведення. Нехай $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = K$ і $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_i}_{c_1c_2\ldots c_i} = K_m$. Тоді очевидно, що

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots \supset K_m \supset \ldots \supset K,$$

то $K \subset K_m$ і $\lambda(K) \leq \lambda(K_m)$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Тоді $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) \leq \lambda(\bigcap\limits_{i=1}^{m} \overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_i}_{c_1c_2\ldots c_i}) \to 0.$

Отже, $\lambda(\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}) = 0$. Що і треба було довести. $\square$

Теорема 3. *Множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ чисел з послідовністю фіксованих $\overline{3}$ – символів є:*
1) точкою $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$, якщо $k_m - k_{m-1} = 1,\ m \in \mathbb{N}$ для всіх m і $k_1 = 1$;
2) ніде не щільною множиною при $k_m - k_{m-1} > 1,\ m \in \mathbb{N}$.

Доведення. 1) Якщо $k_1 = 1$ і $k_m - k_{m-1} = 1$ для довільного $m \in \mathbb{N}$, то напівциліндр $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є циліндром $\overline{\Delta}_{c_1c_2\ldots c_m}$ $\overline{3}$ – зображення при всіх $m \in \mathbb{N}$. Тому множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є точкою.

2) Якщо $k_m - k_{m-1} = 1$ починаючи з деякого номера $p > 1$, то множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є зліченною. У випадку $k_m - k_{m-1} > 1$ для нескінченної множини номерів m, множина із послідовністю фіксованих $\overline{3}$ – символів є континуальною. Тобто при $k_m - k_{m-1} > 1$, $m \in \mathbb{N}$ довільну кількість разів, множина $\overline{\Delta}^{k_1k_2\ldots k_m\ldots}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є ніде не щільною. $\square$

3.3. **Множини чисел з обмеженнями на вживання $\overline{3}$ – символів.** Тепер дослідимо множини чисел із забороною вживання заданої комбінації $\overline{3}$ – цифр.

Розглянемо деяку множину H, яка має вигляд:

$$H = H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}] = \{x : x = \overline{\Delta}^{3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \text{ де } a_k \neq s\ \forall\ k \in N\}.$$

Якщо скористатись переходом від $\overline{3}$ – зображення до класичного трійкового, то множину H можна подати у вигляді:

$$H[3, \underbrace{\overline{i\ldots i}}_{s}] = \{x : x = \Delta^{3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ де } \alpha_k\ldots\alpha_{k+s} \neq \underbrace{i\ldots i}_{s}, \alpha_{k-1} \neq i \neq \alpha_{k+s+1}\ \forall\, k \in N\}.$$

Теорема 4. *Множина $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ є ніде не щільною нуль-множиною Лебега.*

Доведення. Доведемо, що $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ є ніде не щільною.

Нехай (a,b) – довільний інтервал, що належить $[0,1)$. Легко вказати циліндр, який міститься в ньому $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_n} \subset (a,b)$. Тоді інтервал $int\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_ns}$ не містить жодної точки множини $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$. Таким чином, $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ – ніде не щільна.

Покажемо, що міра Лебега множини $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ рівна нулю.

Нехай $U_0 = (0,1)$, U_n – об'єднання циліндрів рангу n, які містять точки множини $H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$,

$$\overline{U}_{n+1} = U_n \setminus U_{n+1}. \tag{2}$$

З властивостей циліндрів випливає $U_n \supset U_{n+1} \supset H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]$ для всіх $n \in N$,

$$H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} U_n.$$

Тоді згідно з неперервністю міри Лебега зверху маємо:

$$\lambda(H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]) = \lim_{n\to\infty} \lambda(U_n).$$

Отже,

$$\lambda(H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\lambda(U_n)}{\lambda(U_{n-1})}\cdot\frac{\lambda(U_{n-1})}{\lambda(U_{n-2})}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda(U_1)}{\lambda(U_0)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda(U_k)}{\lambda(U_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(U_k)}{\lambda(U_{k-1})}. \tag{3}$$

З (2) випливає

$$\lambda(H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{U}_{k+1})}{\lambda(U_k)}\right). \tag{4}$$

Останній нескінченний добуток збігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(\overline{U}_{k+1})\lambda(U_k) = \infty.$$

Нехай $\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_k}$ – циліндр з U_k, тоді можливо, що або $c_k = s$

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_{k-1}s})}{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_{k-1}})} = \frac{2^{\psi(c_{k-1})}}{3^s},\ \text{де}\ \psi(c_{k-1}) = \begin{cases} 0, & \text{якщо}\ c_{k-1} \neq 0,\\ 1, & \text{якщо}\ c_{k-1} = 0,\end{cases}$$

або $c_k \neq s$ і

$$\frac{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_{k-1}c_k})}{\lambda(\overline{\Delta}^{3}_{c_1c_2...c_{k-1}})} = \frac{2^{\psi^*(c_{k-1},c_k)}}{3^{c_k}},\ \text{де}\ \psi^*(c_{k-1},c_k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо}\ c_{k-1}\cdot c_k \neq 0,\\ 1, & \text{якщо}\ c_{k-1} = 0,\\ -1, & c_k = 0.\end{cases}$$

Якщо $c_k < s$, то $\frac{2^{\psi^*(c_{k-1},c_k)}}{3^{c_k}} > \frac{2^{\psi(c_{k-1})}}{3^s}$; якщо $c_k > s$, то $\frac{2^{\psi^*(c_{k-1},c_k)}}{3^{c_k}} < \frac{2^{\psi(c_{k-1})}}{3^s}$.

Враховуючи це, маємо

$$\frac{\lambda(\overline{U}_{k+1})}{\lambda(U_k)} \leq \frac{2}{3^s}.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda(\overline{U}_{k+1})\lambda(U_k)$ розбігається і $\lambda(H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s\}]) = 0$. □

Наслідок 1. *Множина чисел*

$$H[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{s_1, s_2, ..., s_n\}] = \{x : x = \overline{\Delta}^{3}_{a_1a_2...a_n...},\ \text{де}\ a_k \neq s_i,\ \forall\ k \in N, i = \overline{1,n}\}$$

є ніде не щільною множиною.

Означення **5.** Множину чисел з обмеженнями на вживання $\overline{3}$ – символів називають множину виду:

$$C[\overline{3}, V] = \{x : x = \overline{\Delta}^{3}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots},\ a_n \in V \subseteq \mathbb{Z}_0\}.$$

Теорема 5. *Множина чисел $C[\overline{3}, V]$ з обмеженнями на вживання $\overline{3}$ – символів є:*
1) піввідрізком $[0, 1)$, якщо $V = \mathbb{Z}_0$;
2) ніде не щільною, якщо $V \neq \mathbb{Z}_0$ і n — нескінченна множина значень.

Доведення. 1) Якщо $V = \mathbb{Z}_0$, то множина $C[\overline{3}, V] = \bigcup\limits_{a_n \in V} \overline{\Delta}^{3}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = [0, 1)$.

2) Для доведення цього факту достатньо показати, що $C[\overline{3}, \mathbb{Z}_0 \setminus \{c\}]$ є ніде не щільною. Доведення аналогічне до теореми 4.

□

Теорема 6. *Міра Лебега множини $C[\overline{3}, V]$ обчислюється за однією із формул*

$$\lambda(C[\overline{3}, V]) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{U}_k)}{\lambda(U_{k-1})}\right)$$

$$\text{або } \lambda(C[\overline{3}, V]) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(U_k)}{\lambda(U_{k-1})},$$

де $U_0 = [0, 1]$, U_k — об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\overline{U}_k = U_{k-1} \backslash U_k$.

Доведення. У доведенні теореми 4 ці формули були вже виведені та позначені відповідно (3) і (4). □

Література

[1] *Стахов А. П.* Алгоритмическая теория измерения., М., «Знание», 1979.

[2] *Фомин С. В.* Системы счисления., М., «Наука», 1975.

[3] *Stakhov A. P.*Brousentsov's Ternary Principle, Bergman's Number System and Ternary Mirror-symmetrical Arithmetic. - The Computer Journal (British Computer Society), Vol. 45, No 2.

[4] *Лисенко І. М., Працьовитий М. В.* Модифікація класичного двійкового зображення // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету: Збірник наукових праць звітно-наукової конференції викладачів університету за 2011 рік, 9-10 лютого 2012 року. Частина 2./ Укл. Г.І.Волинка, О.В.Уваркіна, О.П.Симоненко, О.П.Ємельянова.— К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – 10-13 с.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[6] *Турбин А. Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992. –208 с.