Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 79–85.

Про комбінаторні властивості операцій тріоїдів

А. В. Жучок

Луганський національний університет імені Тараса Шевченка

Анотація. У роботі вивчаються комбінаторні властивості операцій тріоїда. Описано дімоноїди, всі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями. Наведено приклади тріоїдів з нулем.

On combinatorial properties of operations on trioids

A. V. Zhuchok

Luhansk Taras Shevchenko National University

Abstract. We study combinatorial properties of operations on a trioid and describe dimonoids for which all equivalence relations are congruences. We also give examples of trioids with zero.

Вступ

Непорожня множина T з трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$, які задовольняють такі аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \tag{T1}$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \tag{T2}$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{T3}$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \tag{T4}$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \tag{T5}$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \tag{T6}$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \tag{T7}$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \tag{T8}$$

для всіх $x, y, z \in T$, називається тріоїдом. Це поняття вперше з'явилося у роботі Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [1] під час побудови операд, асоційованих з ланцюговими модулями симпліксів, та вивчалося в [2 – 4].

E-mail: zhuchok_a@mail.ru

У цій роботі вивчаються комбінаторні властивості операцій тріоїда. Описано дімоноїди, всі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями. Також розглянуто приклади тріоїдів з нулем.

1. Тріоїди з нулем

У наш час існує небагато прикладів тріоїдів (див. [1 – 4]). Природньою тому є задача побудови нових тріоїдів та теоретико-тріоїдних конструкцій.

Наведемо приклад тріоїда з нулем.

Елемент 0 тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ назвемо нулем, якщо

$$x * 0 = 0 * x = 0 * 0 = 0$$

для всіх $x \in T$ та $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$.

Як зазвичай через N будемо позначати множину всіх натуральних чисел.

Нехай P^* — вільна напівгрупа на двохелементній множині $X = \{x, \bar{x}\}$, $n \in N$, $P_n \subset P^*$ — множина, яка містить слова довжини не більше ніж n, у запис яких елемент $\bar{x}$ входить принаймні один раз. Нехай далі w — довільне слово з P_n. Через $\tilde{w}$ позначимо слово, отримане з w заміною всіх літер $\bar{x}$ на x. Довжину слова w будемо позначати через l_w.

На множині $P_n \bigcup \{0\}$ визначимо операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ за правилами:

$$w \dashv u = \begin{cases} w\tilde{u}, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \vdash u = \begin{cases} \tilde{w}u, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \perp u = \begin{cases} wu, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w * 0 = 0 * w = 0 * 0 = 0$$

для всіх $w, u \in P_n$ та $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Алгебру $(P_n \bigcup \{0\}, \dashv, \vdash, \perp)$ позначимо через P_n^0.

Твердження 1. *P_n^0 є тріоїдом з нулем.*

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що P_n^0 є тріоїдом з нулем 0. □

Введемо одну теоретико-тріоїдну конструкцію, яка поширює конструкцію ортогональної суми напівгруп [5].

Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ з нулем 0 назвемо ортогональною сумою тріоїдів T_i, $i \in Y$, якщо $T_i \neq \{0\}$ для будь-якого $i \in Y$, $T = \bigcup_{i \in Y} T_i$ та $T_i \bigcap T_j = T_i * T_j = \{0\}$ для всіх $i, j \in Y$, $i \neq j$, $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Ортогональну суму тріоїдів T_i, $i \in Y$, позначимо через $O[T_i]_{i \in Y}$.

Підмножина $T^{'}$ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається підтріоїдом, якщо для будь-яких $a, b \in T$ з $a,\ b \in T^{'}$ випливає $a \dashv b,\ a \vdash\ b,\ a \perp b \in T^{'}$.

Зараз ми опишемо всі підтріоїди ортогональної суми довільних тріоїдів.

Нехай $O[S_i]_{i \in I}$ — ортогональна сума довільних тріоїдів $S_i,\ \ i \in I,\ T_i$ — довільний підтріоїд тріоїда $S_i,\ \ i \in I$. Для кожного $I^{'} \subseteq I,\ \ |I^{'}| > 1$ покладемо $T_{I^{'}} = \bigcup_{i \in I^{'}} T_i,\ \ T^0_{I^{'}} = T_{I^{'}} \bigcup \{0\}$.

Легко доводиться таке твердження.

Лема 1. *Повний список підтріоїдів ортогональної суми довільних тріоїдів $S_i,\ i \in I$, такий:*

1) підтріоїди всіх тріоїдів $S_i,\ i \in I$;

2) підтріоїди $T^0_{I^{'}},\ I^{'} \subseteq I,\ |I^{'}| > 1$.

2. Комбінаторні властивості операцій

У цьому пункті вивчаються комбінаторні властивості операцій тріоїда.

Нехай $(T, \perp)$ — довільна напівгрупа. Визначимо на T операції $\dashv$ та $\vdash$ за правилами:

$$x \dashv y = x,\ \ x \vdash y = y$$

для всіх $x, y \in T$.

Твердження 2 ([4], твердження 10)**.** $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *є тріоїдом.*

Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ будемо позначати через $T^{\perp}_{lr}$.

Через $\Im(X)$ будемо позначати множину всіх перетворень множини $X = \{1, 2, 3\}$. Для зручності кожний елемент $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \Im(X)$ будемо позначати через (xyz), а тотожне перетворення множини X через ε.

Для кожного $\sigma = (xyz) \in \Im(X)$ покладемо $T_\sigma = (T, *_x, *_y, *_z)$ — упорядкована четвірка, де T — непорожня множина, а $*_x,\ *_y,\ *_z$ — бінарні операції на T. Нехай

$$\Lambda = \{(111), (222), (333), (121), (122)\} \subset \Im(X).$$

Наступна теорема описує комбінаторні властивості операцій тріоїда.

Теорема 1. *Для будь-якого тріоїда T_ε алгебра $T_\sigma,\ \sigma \in \Im(X),\ \sigma \neq \varepsilon$, є тріоїдом, якщо $\sigma \in \Lambda$. Існує деякий тріоїд T_ε, для якого алгебра $T_\sigma,\ \sigma \in \Im(X) \backslash \{\Lambda \bigcup \{\varepsilon\}\}$, не є тріоїдом.*

Доведення. Нехай T_ε — тріоїд. Очевидно, що алгебри $T_{(111)}, T_{(222)}, T_{(333)}$ є тріоїдами. Покажемо, що T_σ є тріоїдом, коли σ дорівнює (121) або (122).

Нехай $\sigma = (121)$. Для всіх $w,\ u,\ v \in T_\sigma$ маємо

$$(w *_1 u) *_1 v = w *_1 (u *_2 v)\,, \tag{1}$$

$$(w *_2 u) *_1 v = w *_2 (u *_1 v)\,, \tag{2}$$

$$(w *_1 u) *_2 v = w *_2 (u *_2 v)\,, \tag{3}$$

$$(w *_1 u) *_1 v = w *_1 (u *_1 v)\,. \tag{4}$$

З (1) – (4) випливає, що аксіоми $(T1)$ – $(T8)$ тріоїда виконуються, тобто $T_{(121)}$ — тріоїд.

Нехай $\sigma = (122)$. Для всіх w, u, $v \in T_\sigma$ виконуються рівності (1) – (3) та

$$(w *_2 u) *_2 v = w *_2 (u *_2 v)\,. \tag{5}$$

З (1) – (3), (5) випливає, що аксіоми $(T1)$ – $(T8)$ тріоїда виконуються та $T_{(122)}$ — тріоїд.

Доведемо другу частину теореми.

Нехай $F[A]$ — вільна напівгрупа на множині A та $F[A]^{\perp}_{lr}$ — тріоїд (див. твердження 2), у якого $\perp$ позначає операцію конкатенації напівгрупи $F[A]$. Покладемо $T_\varepsilon = F[A]^{\perp}_{lr}$ та покажемо, що при будь-якому $\sigma \in \Im(X)\backslash\{\Lambda \bigcup \{\varepsilon\}\}$ алгебра T_σ не є тріоїдом.

Для довільних w, u, $v \in T_\sigma$ розглянемо наступні випадки.

Нехай $\sigma = (112)$ та $v \neq u$. Для T_σ перевіримо у цьому випадку аксіому $(T6)$:

$$(w *_1 u) *_2 v = w *_2 v = v \neq u = w *_2 u = w *_2 (u *_1 v).$$

Оскільки аксіома $(T6)$ не виконується, то T_σ не є тріоїдом.

Нехай $\sigma = (113)$. Перевіримо для T_σ аксіому $(T8)$:

$$(w *_3 u) *_1 v = wu *_1 v = wu \neq w = w *_1 (u *_1 v).$$

Отже, T_σ не є тріоїдом.

Візьмемо $\sigma = (223)$. Оскільки

$$(w *_3 u) *_2 v = wu *_2 v = v \neq wv = w *_3 (u *_2 v),$$

то в T_σ аксіома $(T5)$ не виконується.

Нехай $\sigma = (132)$. Перевіримо у цьому випадку аксіому $(T8)$:

$$(w *_2 u) *_3 v = u *_3 v = uv \neq wuv = w *_3 (u *_3 v).$$

Таким чином, T_σ не є тріоїдом.

Нехай $\sigma = (133)$. Для T_σ перевіримо аксіому $(T6)$:

$$(w *_1 u) *_3 v = w *_3 v = wv \neq wuv = w *_3 (u *_3 v).$$

Звідси випливає, що T_σ — не тріоїд.

Нехай $\sigma \in \{(211),(212),(213)\}$ та $v \neq u$. У цьому випадку в T_σ аксіома $(T1)$ не виконується, тому що

$$(w *_2 u) *_2 v = u *_2 v = v \neq u = w *_2 (u *_1 v).$$

Припустимо, що $\sigma \in \{(221),(231)\}$ та $v \neq u$. Для T_σ перевіримо аксіому $(T4)$:

$$(w *_2 u) *_2 v = u *_2 v = v \neq u = w *_2 (u *_1 v).$$

Алгебра T_σ не є тріоїдом, оскільки аксіома $(T4)$ не виконується.

Якщо $\sigma \in \{(311),(312),(313)\}$, то операції алгебри T_σ не задовольняють аксіому $(T2)$, оскільки

$$(w *_1 u) *_3 v = w *_3 v = wv \neq w = w *_1 (u *_3 v).$$

Далі безпосередньо перевіряється, що в алгебрах $T_{(232)}$, $T_{(321)}$, $T_{(331)}$, $T_{(332)}$ не виконується аксіома $(T6)$, в алгебрах $T_{(233)}$, $T_{(322)}$ — аксіома $(T4)$, в алгебрі $T_{(131)}$ — аксіома $(T8)$ та в алгебрі $T_{(323)}$ — аксіома $(T1)$, тобто щойно розглянуті алгебри не є тріоїдами.

□

При доведенні теореми 1 ми використовували тріоїд $F[A]_{lr}^{\perp}$. Природньо охарактеризувати властивості тріоїда $T_{lr}^{\perp}$.

Безпосередньо доводяться наступні три леми.

Лема 2. *Перетворення τ тріоїда $T_{lr}^{\perp}$ є його ендоморфізмом (автоморфізмом) тоді й лише тоді, коли τ є ендоморфізмом (автоморфізмом) напівгрупи $(T,\perp)$.*

Наслідок 1. $End\, T_{lr}^{\perp} = End\,(T,\perp)\,, \ \ Aut\, T_{lr}^{\perp} = Aut\,(T,\perp)\,.$

Лема 3. *Бінарне відношення ρ на тріоїді $T_{lr}^{\perp}$ є його конгруенцією тоді й лише тоді, коли ρ є конгруенцією на напівгрупі $(T,\perp)$.*

Лема 4. $T_{lr}^{\perp_1} \cong K_{lr}^{\perp_2} \Leftrightarrow (T,\perp_1) \cong (K,\perp_2)$.

3. Дімоноїди, в яких всі відношення еквівалентності є конгруенціями

Нагадаємо, що непорожня множина T з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)$ – $(T3)$, називається дімоноїдом [6], [7]. Визначення тріоїда можна сформулювати, використовуючи поняття дімоноїда, а саме: дімоноїд $(T,\dashv,\vdash)$ з бінарною асоціативною операцією $\perp$, яка задовольняє аксіоми $(T4)$ – $(T8)$, називається тріоїдом. Теорема 1 встановлює зв'язки тріоїдів з дімоноїдами, показуючи, що будь-який дімоноїд можна вважати тріоїдом.

У цьому пункті ми розглянемо дімоноїди, всі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями.

Теорема 2 ([8], теорема 5.10). *Нехай S — напівгрупа та $|S|>1$. Усі відношення еквівалентності на S є її конгруенціями в тому й лише в тому випадку, якщо виконується одна з наступних умов:*

1) S — група з двох елементів;

2) S — напівгрупа з нульовим множенням;

3) S — напівгрупа правих нулів;

4) S — напівгрупа лівих нулів;

5) S — напіврешітка з двох елементів.

Лема 5 ([7], лема 3 (i)). *Операції дімоноїда $(D, \dashv, \vdash)$ збігаються, якщо $(D, \dashv)$ — напіврешітка.*

Аналогічно можна показати, що операції дімоноїда $(D, \dashv, \vdash)$ збігаються, якщо $(D, \vdash)$ — напіврешітка.

Лема 6 ([9], лема 1). *Операції дімоноїда $(D, \dashv, \vdash)$ збігаються, якщо $(D, \dashv)$ ($(D, \vdash)$) — моноїд.*

Наступна теорема описує дімоноїди, всі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями.

Теорема 3. *Нехай $(D, \dashv, \vdash)$ — дімоноїд та $\dashv \neq \vdash$. Усі відношення еквівалентності на $(D, \dashv, \vdash)$ є його конгруенціями в тому й лише в тому випадку, якщо виконується одна з наступних умов:*

1) $(D, \dashv)$ — напівгрупа лівих нулів, $(D, \vdash)$ — напівгрупа правих нулів;

2) $(D, \dashv)$ — напівгрупа лівих нулів, $(D, \vdash)$ — напівгрупа з нульовим множенням;

3) $(D, \dashv)$ — напівгрупа з нульовим множенням, $(D, \vdash)$ — напівгрупа правих нулів.

Доведення. Відмітимо, по-перше, що згідно з [10] алгебра $(D, \dashv, \vdash)$, яка задовольняє умову 1) або 2), є $(lz; rs)$-дімоноїдом, а умову 3) — $(rs; rz)$-дімоноїдом.

Нехай $(D, *_1)$ — напівгрупа лівих нулів, $(D, *_2)$ — напівгрупа правих нулів, $(D, *_3)$ — напівгрупа з нульовим множенням. Неважко перевірити, що алгебри $(D, *_2, *_1)$, $(D, *_3, *_1)$, $(D, *_2, *_3)$ не є дімоноїдами. Використовуючи цей факт, теорему 2, лему 5, двоїсте твердження до леми 5 та лему 6, отримуємо, що якщо всі відношення еквівалентності на $(D, \dashv, \vdash)$ є його конгруенціями, то $(D, \dashv, \vdash)$ збігається або з $(D, *_1, *_2)$, або з $(D, *_1, *_3)$, або з $(D, *_3, *_2)$.

Навпаки, з теореми 2 отримуємо, що всі відношення еквівалентності на дімоноїдах, що задовольняють одну з умов 1) – 3), є конгруенціями. □

Література

[1] *Loday J.-L., Ronco M. O.* Trialgebras and families of polytopes // Contemp. Math. — 2004. — 346. — P. 369–398.

[2] *Жучок А. В.* Вільні тріоїди // Вісник Київ. нац. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2010. — Вип. 4. — С. 23–26.

[3] *Zhuchok A. V.* Tribands of subtrioids // Proc. Inst. Applied Math. and Mech. — 2010. — V. 21. — P. 98–106.

[4] *Жучок А. В.* Некоторые конгруэнции на триоидах // Фундаментальная и прикладная математика. — 2011/2012. — Т. 17, № 3. — С. 39–49.

[5] *Bogdanovic S., Ciric M.* Orthogonal sums of semigroups // Israel Journal of Mathematics. — 1995. — 90. — P. 423–428.

[6] *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. – Springer-Verlag, Berlin. — 2001. — 1763. — P. 7–66.

[7] *Жучок А. В.* Димоноиды // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 4. — С. 471–496.

[8] *Кожухов И. Б., Решетников А. В.* Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // Фундаментальная и прикладная математика. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 161–192.

[9] *Zhuchok A. V.* Some least congruences on dimonoids // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. — 2011. — V. 4. — P. 7–10.

[10] *Жучок А. В.* Дімоноїди з ідемпотентною операцією // Труды Ин-та прикладной математики и механики. — 2011. — Т. 22. — С. 99–107.