Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 68–78.

Приводимость некоторых мономиальных матриц над коммутативными локальными кольцами

М. Ю. Бортош, О. А. Тилищак

Ужгородский национальный университет

Аннотация. Найден критерий приводимости произведения подстановочной матрицы циклу длины $n < 5$ и диагональной матрицы $\mathrm{diag}[t^{s_1}, \ldots, t^{s_n}]$ порядку n над коммутативным локальным кольцом голавных идеалов, радикал Джекобсона которого порожденный елементом t $(s_1, \ldots, s_n \geq 0)$. Показано, что отысканный критерий несправедлив при $n = 5$.

Reducibility of some monomial matrices over commutative local rings

M. Bortos, A.Tylyshchak

Uzhgorod National University

Abstract. There has been found a criterion of the reducibility of the product of the permutation matrix of a cycle of length $n < 5$ and a diagonal matrix $\mathrm{diag}[t^{s_1}, \ldots, t^{s_n}]$ of order n over a commutative local principle ideal ring, the Jacobson radical of which is generated by the element t $(s_1, \ldots, s_n \geq 0)$. It has been shown that the founded criterion is not hold if $n = 5$.

Задача о подобии матриц над кольцами в отличие от полей слабо исследована и решена над некоторыми кольцами лишь для матриц малых порядков (напр. [**1**]-[**4**]). Задача исследования неприводимых матриц с точностью до подобия также далека от решения. Рассматривается задача о приводимости мономиальных матриц вида

$$M(t,\ s_1, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

E-mail: alxtlk@bigmir.net

произвольного порядка n над коммутативным кольцом K с единицей, где $t \in K$, s_i — целые числа, $s_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Задача приводимости матрицы $M(t, 0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ рассматривалась в [**5**].

Лемма 1. *Пусть n — натуральное число, s_i — целые числа, $s_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, n$). Если $(n, \sum_{i=1}^n s_i) > 1$, тогда для произвольного общего делителя $d > 1$ чисел n и $\sum_{i=1}^n s_i$ матрица $M(\lambda, s_1, \ldots, s_n)$ подобна матрице вида $N = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ над кольцом $\mathbb{Z}[\lambda]$, где A — квадратная матрица порядка $n' = \frac{n}{d}$.*

Доказательство. Пусть $k = \sum_{i=1}^n s_i = dk'$ и φ — линейный оператор определен матрицей $M(\lambda, s_1, \ldots, s_n)$ в базисе a_1, a_2, $\ldots$, a_n некоторого линейного пространства L над полем отношений F кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$. Тогда $\varphi(a_1) = \lambda^{s_1} a_2$, $\varphi(a_2) = \lambda^{s_2} a_3$, $\ldots$, $\varphi(a_{n-1}) = \lambda^{s_{n-1}} a_n$, $\varphi(a_n) = \lambda^{s_n} a_1$. Или

$$\varphi(a_i) = \begin{cases} \lambda^{s_i} a_{i+1}, & i < n, \\ \lambda^{s_i} a_1, & i = n. \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, $\varphi^n(a_1) = \lambda^{\sum_{i=1}^n s_i} a_1 = \lambda^k a_1$. Пусть

$$b'_1 = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{(i-1)n'}(a_1). \tag{3}$$

Отсюда

$$\varphi^{n'}(b'_1) = \varphi^{n'}\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{(i-1)n'}(a_1)\right) = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{in'}(a_1) = \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{in'}(a_1) +$$

$$+\varphi^{dn'}(a_1) = \varphi^{dn'}(a_1) + \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{in'}(a_1) = \varphi^{n}(a_1) + \sum_{i=2}^{d} \lambda^{(d-i+1)k'} \varphi^{(i-1)n'}(a_1) =$$

$$= \lambda^k a_1 + \sum_{i=2}^{d} \lambda^{(d-i+1)k'} \varphi^{(i-1)n'}(a_1) = \lambda^{dk'} a_1 + \sum_{i=2}^{d} \lambda^{(d-i+1)k'} \varphi^{(i-1)n'}(a_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \lambda^{(d-i+1)k'} \varphi^{(i-1)n'}(a_1) = \lambda^{k'} \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda^{(d-i)k'} \varphi^{(i-1)n'}(a_1)\right) = \lambda^{k'} b'_1.$$

Определим b'_j ($j = 2, \ldots, n'$) рекуррентном

$$b'_j = \varphi(b'_{j-1}), \ (j = 2, \ldots, n'). \tag{4}$$

Тогда $\varphi(b'_{n'}) = \varphi^{n'}(b'_1) = \lambda^{k'} b'_1$. Учитывая формулы (2), (3) и (1), получаем

$$b'_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{\alpha_{ij}} a_{(i-1)n'+j} \ (j = 1, \ldots, n').$$

для некоторых $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, \dots, d,\ j = 1, \dots, n')$. Кроме того,

$$b'_j = \varphi(b'_{j-1}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{\alpha_{ij-1}} \varphi(a_{(i-1)n'+j-1}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{\alpha_{ij-1}+s_{(i-1)n'+j-1}} a_{(i-1)n'+j}\ (j = 2, \dots, n').$$

Отсюда $\alpha_{ij} = \alpha_{ij-1} + s_{(i-1)n'+j-1}$ $(j = 2, \dots, n')$. Поэтому $\alpha_{ij} \geq \alpha_{i\,j-1}$ $(i = 1, \dots, d,$ $j = 2, \dots, n')$. Пусть $m_j = \min\limits_i\{\alpha_{ij}\}$ (j=1,...,n'). Тогда $m_j \geq m_{j-1}$ $(j = 2, \dots, n')$. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda^{\alpha_{i1}+k'} a_{(i-1)n'+1} = \lambda^{k'} b'_1 = \varphi(b'_{n'}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{\alpha_{i\,n'}} \varphi(a_{(i-1)n'+n'}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \lambda^{\alpha_{i\,n'}} \varphi(a_{in'}) = \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{\alpha_{i\,n'}} \varphi(a_{in'}) + \lambda^{\alpha_{d\,n'}} \varphi(a_{dn'}) = \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{\alpha_{i\,n'}+s_{in'}} (a_{in'+1}) + \lambda^{\alpha_{d\,n'}+s_n} a_1 =$$

$$= \lambda^{\alpha_{d\,n'}+s_n} a_1 + \sum_{i=1}^{d-1} \lambda^{\alpha_{i\,n'}+s_{in'}} (a_{in'+1}) = \lambda^{\alpha_{d\,n'}+s_n} a_1 + \sum_{i=2}^{d} \lambda^{\alpha_{i-1\,n'}+s_{(i-1)n'}} (a_{(i-1)n'+1}),$$

то $\alpha_{i1} + k' \geq \alpha_{i-1\,n'}$ $(i = 2, \dots, d)$. Кроме того, $\alpha_{11} + k' \geq \alpha_{d\,n'}$. Следовательно, $m_1 + k' \geq$ $\geq m_{n'}$.

Пусть $\beta_{ij} = \alpha_{ij} - m_j$ $(i = 1, \dots, d,\ j = 1, \dots, n')$. Тогда $\beta_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, \dots, d,\ j =$ $= 1, \dots, n')$. Очевидно, для некоторого $1 \leqslant \mu_j \leqslant d$ $\beta_{\mu_j\,j} = 0$ $(j = 1, \dots, n')$. Пусть

$$b_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{\alpha_{ij}-m_j} a_{(i-1)n'+j}\ (j = 1, \dots, n').$$

Тогда $\lambda^{m_j} b_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{\alpha_{ij}} a_{(i-1)n'+j} = b'_j$. Из формул (1) $\varphi(b_{j-1}) = \lambda^{m_j - m_{j-1}} b_j$ $(j =$ $= 2, \dots, n')$. Поскольку $\varphi(b'_{n'}) = \lambda^{k'} b'_1$, тогда $\varphi(b_{n'}) = \lambda^{k'+m_1-m_{n'}} b_1$. Пусть $\beta(j-1) =$ $= m_j - m_{j-1}$ $(j = 2, \dots, d)$ $\beta(n') = k' + m_1 - m_{n'}$. Ясно, что $\beta(j) \geq 0$ $(j = 1, \dots, n')$. Кроме того, $\varphi(b_{j-1}) = \lambda^{\beta(j-1)} b_j$ $(j = 2, \dots, n')$, $\varphi(b_{n'}) = \lambda^{\beta(n')} b_1$.

Индексы векторов $a_{(\mu_1-1)n'+1}$, $a_{(\mu_2-1)n'+2}$, $\dots$, $a_{(\mu_{n'}-1)n'+n'}$ различные, потому, что не конгруэнтные по модулю n' и их можно дополнить некоторыми векторами $a_{i'_{n'+1}}$, $\dots$, $a_{i'_n}$ к базису a_1, $\dots$, a_n записанному в некотором порядке. Поскольку $\beta_{\mu_j\,j} = 0$ $(j = 1, \dots, n')$ и $b_j = \sum_{i=1}^{d} \lambda^{\beta_{ij}} a_{(i-1)n'+j}$, тогда b_1, $\dots$, $b_{n'}$, $a_{i'_{n'+1}}$, $\dots$, $a_{i'_n}$ есть базисом пространства L. А матрица перехода от базиса $a_{(\mu_1-1)n'+1}$, $a_{(\mu_2-1)n'+2}$, $\dots$, $a_{(\mu_{n'}-1)n'+n'}$,

$a_{i'_{n'+1}}, \ldots, a_{i'_n}$ к которому состоит из элементов из $\mathbb{Z}[\lambda]$ и имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda^{\delta_{n'+1\,1}} & \ldots & \lambda^{\delta_{n'+1\,n'}} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{\delta_{n1}} & \ldots & \lambda^{\delta_{nn'}} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Для некоторых $\delta_{ij} \geqslant 0$ $(i = n'+1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n')$. Поскольку $\det C = 1$, тогда $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}[\lambda])$. Матрица перехода P от базиса $a_1, a_2, \ldots, a_n$ к базису $a_{(\mu_1-1)n'+1}$, $a_{(\mu_2-1)n'+2}, \ldots, a_{(\mu_{n'}-1)n'+n'}, a_{i'_{n'+1}}, \ldots, a_{i'_n}$ есть подстановочной и $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Поскольку $S = PC$ — матрица перехода от базиса $a_1, a_2, \ldots, a_n$ к базису $b_1, \ldots b_{n'}$, $a_{i'_{n'+1}}, \ldots, a_{i'_n}$, тогда $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}[\lambda])$. Так как $\varphi(b_{j-1}) = \lambda^{\beta(j-1)} b_j$ $(j = 2, \ldots, n')$, $\varphi(b_{n'}) = \lambda^{\beta(n')} b_1$, тогда $S^{-1}MS = \left(\begin{smallmatrix} A & D \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, где $A = M(\lambda,\ \beta(1),\ \ldots,\ \beta(n'))$ и B — квадратная матрица порядка $n - n'$. $\square$

Теорема 1. *Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, $t \in K$, n — натуральное число, s_i — целые числа, $s_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если $(n, \sum_{i=1}^n s_i) > 1$, тогда матрица*

$$M(t, s_1, \ldots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

порядка n приводимая над кольцом K.

Доказательство. Доказательство вытекает из леммы 1 и существование гомоморфизма $f:\ \mathbb{Z}[\lambda] \to K$ такого, что $f(1) = 1$, $f(\lambda) = t$. $\square$

Обозначим через $\overline{M}$ матрицу, полученную из матрицы M над локальным кольцом K редукцией по модулю радикала $\mathrm{Rad}\, K$ Джекобсона кольца K.

Лемма 2. *Пусть n — натуральное число, s_i — целые числа, $s_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, среди которых есть разные, $m = \max\{s_i | i = 1, \ldots, n\}$. K — коммутативное локальное кольцо, $\mathrm{Rad}\, K = tK$, $t^m \neq 0$. Матрица $M(t, s_1, \ldots, s_n)$ не подобна над кольцом K ни одной из матриц вида $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} t^m A & D \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} A & D \\ 0 & t^m B \end{smallmatrix}\right)$, где A и B — квадратные матрицы соответственно порядков r и $n - r$ над кольцом K $(0 < r < n)$.*

Доказательство. Допустим существования такой матрицы $C \in GL(n, K)$, что $C^{-1}M(t, s_1, \ldots, s_n)C = M_1$. То есть

$$M(t, s_1, \ldots, s_n)C = C \begin{pmatrix} t^m A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Обозначим: $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in K)$, $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ir})$ $(i = 1, \ldots, n)$. Из (5) получаем, что $t^{s_n}c_n = t^m c_1 A$, $t^{s_1}c_1 = t^m c_2 A$, $\ldots$ $t^{s_{n-1}}c_{n-1} = t^m c_n A$. Поскольку $t^m \neq 0$, тогда $\overline{c}_n = 0$ или $\overline{c}_n = \overline{c}_1\overline{A}$ и $\overline{c}_i = 0$ или $\overline{c}_i = \overline{c}_{i+1}\overline{A}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Ясно, что хотя бы для одного l $(1 \leq l \leq n)$ $s_l < m$ и $\overline{c}_l = 0$. Отсюда $\overline{c}_1 = \ldots \overline{c}_{l-1} = 0$. Тогда $\overline{c}_n = 0$ и $\overline{c}_{l+1} = \ldots \overline{c}_{n-1} = 0$. Из-за этого $\det \overline{C} = 0$, что невозможно.

Аналогично рассматривается случай $C^{-1}MC = M_2$ или $C^{-1}M = M_2C^{-1}$. □

Лемма 3. *Пусть n — натуральное число, s_i — целые числа, $s_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, среди которых есть разные. K — коммутативное локальное кольцо,* $\operatorname{Rad} K = tK$. *Матрица $M(t, s_1, \ldots, s_n)$ не подобна над кольцом K матрице вида $M = \left(\begin{smallmatrix} A & D \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, где A и B — квадратные матрицы соответственно порядков r и $n - r$ над кольцом K $(0 < r < n)$, A или B обратимая.*

Доказательство. Действительно матрица $\overline{M(t, k, n)}$ нильпотентная, поэтому матрицы $\overline{A}$ и $\overline{B}$ нильпотентные. А, следовательно, матрицы $\overline{A}$ и $\overline{B}$, как и матрицы A и B, не могут быть обратимыми. □

Лемма 4. *Пусть n — натуральное число, $n \leq 4$, s_i — целые числа, $0 \leq s_i \leq 2$, где $i = 1, \ldots, n$, $(n, \sum_{i=1}^{n} s_i) \neq n$. K — коммутативное локальное кольцо,* $\operatorname{Rad} K = tK$, *$t^2 \neq 0$. Матрица $M(t, s_1, \ldots, s_n)$ не подобна над кольцом K ни одной из матриц вида $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} tA' & D \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} A & D \\ 0 & tB' \end{smallmatrix}\right)$, где A, A' B, B' — квадратные матрицы соответственно порядков r, r, $n - r$, $n - r$ над кольцом K $(0 < r < n)$, A', B' обратимые.*

Доказательство. Допустимо, что существует матрица $C \in GL(n, K)$, что $C^{-1}M(t, s_1, \ldots, s_n)C = M_1$. То есть

$$M(t, s_1, \ldots, s_n)C = C \begin{pmatrix} tA' & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Обозначим: $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in K)$, $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ir})$ $(i = 1, \ldots, n)$. Из (6) получаем, что $t^{s_n}c_n = tc_1A'$, $t^{s_1}c_1 = tc_2A'$, $\ldots$, $t^{s_{n-1}}c_{n-1} = tc_nA'$. Пусть $m_i = \min\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} | c_i = t^k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r),\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K\}$. Тогда для $1 \leq i \leq n$ $c_i = t^{m_i}c'_i$, $c'_i = (c'_{i1}, \ldots, c'_{ir})$, где хотя бы один из элементов $c'_{i1}, \ldots, c'_{ir} \in K$ обратим. Отсюда $t^{s_n+m_n}c'_n = t^{1+m_1}c'_1A'$, $t^{s_1+m_1}c'_1 = t^{1+m_2}c'_2A'$, $\ldots$, $t^{s_{n-1}+m_{n-1}}c'_{n-1} = t^{1+m_n}c'_nA'$. Если $s_i+m_i \leq 2$ или $1+m_{i+1} \leq 2$, тогда $s_i+m_i = 1+m_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Кроме этого, если $s_n+m_n \leq 2$ или $1+m_1 \leq 2$, тогда $s_n + m_n = 1 + m_1$. Пусть $\phi(i, n) \in \{1, \ldots, n\}$ и $\phi(i, n) \equiv i \pmod n$, i — целое число. Тогда для произвольного целого i если $s_{\phi(i,n)}+m_{\phi(i,n)} \leq 2$ или $1+m_{\phi(i+1,n)} \leq 2$, тогда

$$s_{\phi(i,n)} + m_{\phi(i,n)} = 1 + m_{\phi(i+1,n)}. \tag{7}$$

Поскольку матрица C — обратимая, тогда существует j $(1 \leq j \leq n)$, что строка c_j содержит обратимый элемент и $m_j = 0$. Тогда $0 \leq s_j + m_j \leq 2$ и $1 + m_j = 1$. Следовательно,

$$s_j = s_j + m_j = 1 + m_{\phi(j+1,n)},\ s_{\phi(j-1,n)} + m_{\phi(j-1,n)} = 1 + m_j = 1. \tag{8}$$

Отсюда $1 \leq 1 + m_{\phi(j+1,n)} \leq 2$, $0 \leq 1 - m_{\phi(j-1,n)} \leq 1$. Тогда $1 + m_{\phi(j-1,n)} \leq 2$ и

$$s_{\phi(j-2,n)} + m_{\phi(j-2,n)} = 1 + m_{\phi(j-1,n)}. \tag{9}$$

При $n \leq 3$ (8) и (9) значат, что (7) выполняется при всех целых i. При $n = 4$

$$1 + m_{\phi(j-2,n)} = 2 - s_{\phi(j-2,n)} + m_{\phi(j-1,n)} = 3 - s_{\phi(j-2,n)} - s_{\phi(j-1,n)},$$

$$s_{\phi(j+1,n)} + m_{\phi(j+1,n)} = s_{\phi(j+1,n)} + s_j - 1 = s_{\phi(j+1,n)} + s_{\phi(j,n)} - 1.$$

Одно из чисел $1+m_{\phi(j-2,n)}$ или $s_{\phi(j+1,n)}+m_{\phi(j+1,n)}$ на превышает 2, потому что иначе $s_{\phi(j-2,n)} = s_{\phi(j-1,n)} = 0$, $s_{\phi(j+1,n)} = s_{\phi(j,n)} = 2$ и $(4, \sum_{i=1}^{4} s_i) = (4, 0+0+2+2) = 4$, что невозможно. Следовательно, $1 + m_{\phi(j-2,n)} = 1 + m_{\phi(j+2,n)} = s_{\phi(j+1,n)} + m_{\phi(j+1,n)}$ и (7) выполняется при всех целых i. Сложым все равенства (7)

$$\sum_{i=1}^{n} s_{\phi(i,n)} + \sum_{i=1}^{n} m_{\phi(i,n)} = n + \sum_{i=1}^{n} m_{\phi(i+1,n)}.$$

Откуда $(n, \sum_{i=1}^{n} s_i) = (n, n) = n$, что невозможно.

Аналогично рассматривается случай $C^{-1}MC = M_2$ или $C^{-1}M = M_2C^{-1}$. □

Лемма 5. *Пусть K — коммутативное локальное кольцо,* $\operatorname{Rad} K = tK$, $t^2 \neq 0$. *Матрицы $M(t,0,2,2)$ и $M(t,0,0,2)$ неприводимы над кольцом K.*

Доказательство. Допустимо, что матрица $M(t,0,i_1,2)$ приводимая $i_1 \in \{0,2\}$. Тогда существует такая матрица $C \in GL(3,K)$, что

$$M(t,0,i_1,2)C = C \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{10}$$

где A и B — квадратные матрицы над кольцом K соответственно порядков r и $3-r$ $(0 < r < 3)$. Если $r = 1$, тогда $A \in K$. Поскольку $A \in t^2K$, $A = t\varepsilon$ $(\varepsilon \in K^*)$ или $A \in$ $\in K^*$, тогда получаем противоречие с леммами 2, 4 или 3. Аналогичные рассуждения при $r = 2$, когда $B \in K$. □

Лемма 6. *Пусть K — коммутативное локальное кольцо,* $\operatorname{Rad} K = tK$, $t^2 \neq 0$. *Матрицы $M(t,0,0,1,2)$, $M(t,0,0,2,1)$, $M(t,0,1,0,2)$, $M(t,0,2,0,1)$, $M(t,0,1,2,2)$, $M(t,0,2,1,2)$ и $M(t,0,2,2,1)$ неприводимы над кольцом K.*

Доказательство. Допустим, что матрица $M(t,0,0,i_1,i_2)$, $M(t,0,i_1,0,i_2)$ или $M(t,0,j_1,\,j_2,j_3)$ приводимая, где $\{i_1,i_2\}=\{1,2\}$, (j_1,j_2,j_3) является некоторой перестановкой элементов: 1, 2, 2. Ясно, что $i_1+i_2=3$, $j_1+j_2+j_3=5$. Тогда существует такая матрица $C\in GL(4,K)$, что

$$M(t,0,0,i_1,i_2)C=C\begin{pmatrix} A & D\\ 0 & B\end{pmatrix}\ \text{или}\ M(t,0,i_1,0,i_2)C=C\begin{pmatrix} A & D\\ 0 & B\end{pmatrix} \tag{11}$$

или

$$M(t,0,j_1,j_2,j_3)C=C\begin{pmatrix} A & D\\ 0 & B\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где A и B — квадратные матрицы над кольцом K соответственно порядков r и $4-r$ $(0<r<4)$. Поскольку матрица $M(t,0,0,1,2)$ подобная к транспонированной к $M(t,0,0,2,1)$ и наоборот, матрица $M(t,0,1,0,2)$ подобная к транспонированной к $M(t,0,2,0,1)$ и наоборот, матрица $M(t,0,1,2,2)$ подобная к транспонированной к $M(t,0,2,2,1)$ и наоборот а $M(t,0,2,1,2)$ подобная к транспонированной к себе, тогда в виде (11) и (12) матрицы A и B можно менять ролями. Поэтому не уменьшая общности можно считать, что $r\le 4-r$. То есть $r=1,2$.

Рассмотрим случай, когда $r=1$. Тогда $A\in K$. Поскольку $A\in t^2K$, $A=t\varepsilon$ $(\varepsilon\in K^*)$ или $A\in K^*$, тогда получаем противоречие с леммами 2, 4 или 3. Остается рассматривать случай $r=2$. Не уменьшая общности можно считать, что A — неприводимая матрица. Обозначим: $C_i=(c_{i1},c_{i2})$ $(i=1,\dots,4)$. Тогда из равенства (11) и (12) получаем

$$\left\{\begin{aligned} t^{i_2}c_4&=c_1A,\\ c_1&=c_2A,\\ c_2&=c_3A,\\ t^{i_1}c_3&=c_4A\end{aligned}\right.\quad\text{или}\quad\left\{\begin{aligned} t^{i_2}c_4&=c_1A,\\ c_1&=c_2A,\\ t^{i_1}c_2&=c_3A,\\ c_3&=c_4A\end{aligned}\right.\quad\text{или}\quad\left\{\begin{aligned} t^{j_3}c_4&=c_1A,\\ c_1&=c_2A,\\ t^{j_1}c_2&=c_3A,\\ t^{j_2}c_3&=c_4A.\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Из-за лемм 2, 3 или 4 $\operatorname{rank}\overline{A}=1$ или $A=tF$, где F — квадратная матрица над кольцом K порядка 2, $\operatorname{rank}\overline{F}=1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\operatorname{rank}\overline{A}=1$. Поскольку матрица $\overline{M(t,0,0,i_1,i_2)}$, $\overline{M(t,0,i_1,0,i_2)}$, а также матрица $\overline{M(t,0,j_1,j_2,j_3)}$ — нильпотентная, тогда матрица $\overline{A}$ также нильпотентная и можно считать, что $A=\left(\begin{smallmatrix} t\alpha & 1+t\beta\\ t\gamma & t\delta\end{smallmatrix}\right)$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in K)$. Поскольку

$$S=\begin{pmatrix} 1+t\beta & 0\\ t\delta & 1\end{pmatrix}\in GL(2,K),\ S^{-1}=\begin{pmatrix} (1+t\beta)^{-1} & 0\\ -t\delta(1+t\beta)^{-1} & 1\end{pmatrix},$$

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix} t\varepsilon & 1\\ t\zeta & 0\end{pmatrix}\ (\varepsilon,\ \zeta\in K), \tag{14}$$

тогда можно считать, что A имеет вид (14). Подставив A в равенства (13) имеем:

$$\begin{cases} (t^{i_2}c_{41}, t^{i_2}c_{42}) = (c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta, c_{11}), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\varepsilon + t\zeta c_{22}, c_{21}), \\ (c_{21}, c_{22}) = (c_{31}t\varepsilon + t\zeta c_{32}, c_{31}), \\ (t^{i_1}c_{31}, t^{i_1}c_{32}) = (c_{41}t\varepsilon + c_{42}t\zeta, c_{41}) \end{cases} \text{или} \begin{cases} (t^{i_2}c_{41}, t^{i_2}c_{42}) = (c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta, c_{11}), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\varepsilon + c_{22}t\zeta, c_{21}), \\ (t^{i_1}c_{21}, t^{i_1}c_{22}) = (c_{31}t\varepsilon + c_{32}t\zeta, c_{31}), \\ (c_{31}, c_{32}) = (c_{41}t\varepsilon + c_{42}t\zeta, c_{41}) \end{cases} \tag{15}$$

или

$$\begin{cases} (t^{j_3}c_{41}, t^{j_3}c_{42}) = (c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta, c_{11}), \\ (c_{11}, c_{12}) = (c_{21}t\varepsilon + c_{22}t\zeta, c_{21}), \\ (t^{j_1}c_{21}, t^{j_1}c_{22}) = (c_{31}t\varepsilon + c_{32}t\zeta, c_{31}), \\ (t^{j_2}c_{31}, t^{j_2}c_{32}) = (c_{41}t\varepsilon + c_{42}t\zeta, c_{41}). \end{cases} \tag{16}$$

Из первой системы формулы (15) получаем: $\overline{c}_{11} = \overline{c}_{21} = \overline{c}_{41} = 0$. Кроме того,

$$c_{31}t^2 = c_{41}t^{2-i_1+1}\varepsilon + c_{42}t^{2-i_1+1}\zeta = c_{41}t^{i_2}\varepsilon + c_{42}t^{i_2}\zeta = c_{11}t\varepsilon^2 + c_{12}t\varepsilon\zeta + c_{11}\zeta =$$
$$= c_{11}(t\varepsilon^2 + \zeta) + c_{12}t\varepsilon\zeta = c_{21}t\varepsilon(t\varepsilon^2 + \zeta) + c_{22}t\zeta(t\varepsilon^2 + \zeta) + c_{21}t\varepsilon\zeta =$$
$$= c_{21}(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + c_{22}(t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) = c_{31}t\varepsilon(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + c_{32}t\zeta(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta) + c_{31}(t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) =$$
$$= c_{31}(t^3\varepsilon^4 + 3t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2) + c_{32}(t^3\varepsilon^3\zeta + 2t^2\varepsilon\zeta^2)$$

поэтому $c_{31} \in tK$ или $\zeta \in tK$. В втором случае $c_{31}t^2 \in t^3K$. Следовательно, $\overline{c}_{31} = 0$. Отсюда $\det \overline{C} = 0$. Противоречие.

Из второй системы (15) получаем: $\overline{c}_{11} = \overline{c}_{31} = 0$. Кроме того,

$$c_{41}t^2 = c_{11}t^{2-i_2+1}\varepsilon + c_{12}t^{2-i_2+1}\zeta = c_{11}t^{i_1}\varepsilon + c_{12}t^{i_1}\zeta = c_{21}t^{i_1+1}\varepsilon^2 + c_{22}t^{i_1+1}\varepsilon\zeta + c_{21}t^{i_1}\zeta =$$
$$= c_{21}t^{i_1}\left(t\varepsilon^2 + \zeta\right) + c_{22}t^{i_1+1}\varepsilon\zeta = c_{31}t\varepsilon\left(t\varepsilon^2 + \zeta\right) + c_{32}t\zeta\left(t\varepsilon^2 + \zeta\right) + c_{31}t\varepsilon\zeta =$$
$$= c_{31}\left(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta\right) + c_{32}\left(t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2\right) = c_{41}t\varepsilon\left(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta\right) + c_{42}t\zeta\left(t^2\varepsilon^3 + 2t\varepsilon\zeta\right) +$$
$$+ c_{41}\left(t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2\right) = c_{41}\left(t^3\varepsilon^4 + 3t^2\varepsilon^2\zeta + t\zeta^2\right) + c_{42}\left(t^3\varepsilon^3\zeta + 2t^2\varepsilon\zeta^2\right),$$

поэтому $\overline{c}_{41} = 0$. Аналогично $\overline{c}_{21} = 0$. Следовательно, $\det \overline{C} = 0$. Противоречие.

Из равенств (16) получаем: $\overline{c}_{11} = \overline{c}_{31} = \overline{c}_{41} = 0$. Кроме того, $c_{41}t^{j_3} = c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta = c_{11}t\varepsilon + c_{21}t\zeta$. Если $\overline{\zeta} \neq 0$, тогда отсюда и условий $\overline{c}_{11} = \overline{c}_{41} = 0$, $j_3 \geqslant 1$ получаем $\overline{c}_{21} = 0$. Следовательно, $\det \overline{C} = 0$. Противоречие. Поэтому $\overline{\zeta} = 0$, $\zeta = t\eta$ ($\eta \in K$).

Рассмотрим сначала случай, когда $j_3 = 1$. Тогда $j_1 = j_2 = 2$, Допустимо $\overline{c}_{12} = \overline{c}_{21} \neq 0$. Тогда из равенств (16) получаем: $c_{21}t^2 = c_{21}t^{j_1} = c_{31}t\varepsilon + c_{32}t\zeta = c_{22}t^3\varepsilon + c_{32}t^2\eta \notin t^3K$. Тогда $\overline{c}_{32}$, $\overline{\eta} \neq 0$. Кроме того, $c_{22}t^4 = c_{22}t^{j_1}t^2 = c_{31}t^2 = c_{31}t^{j_2} = c_{41}t\varepsilon + c_{42}t\zeta = c_{32}t^3\varepsilon + c_{42}t^2\eta$ и $c_{42}t^2 = t^4c_{22}\eta^{-1} - t^3c_{32}\varepsilon\eta^{-1}$. Тогда $c_{32}t^3 = c_{32}t^{j_2}t = c_{41}t = c_{41}t^{j_3} = c_{11}t\varepsilon + c_{12}t\zeta = c_{42}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\eta = c_{22}t^4\varepsilon\eta^{-1} - c_{32}t^3\varepsilon^2\eta^{-1} + c_{12}t^2\eta$. Поэтому $\overline{c}_{12} = 0$ или $\overline{\eta} = 0$, что невозможно. Следовательно, $\overline{c}_{21} = 0$, что также невозможно.

Рассмотрим случай, когда $j_3 = 2$ $(j_1 + j_2 = 3)$. Тогда $c_{42}t^2 = c_{42}t^{j_3} = c_{11} = c_{21}t\varepsilon + c_{22}t\zeta = c_{21}t\varepsilon + c_{22}t^2\eta$. Отсюда $c_{21}t\varepsilon \in t^2K$ и если $\overline{\varepsilon} \neq 0$, тогда $\overline{c}_{21} = 0$, что невозможно. Следовательно, $\overline{\varepsilon} = 0$, $\varepsilon = t\delta$ $(\delta \in K)$. Из равенств (16) получаем:

$$c_{21}t^2 = c_{31}t^{2-j_1+1}\varepsilon + c_{32}^{2-j_1+1}\zeta = c_{31}t^{4-j_1}\delta + c_{32}t^{4-j_1}\eta = \tag{17}$$
$$= c_{41}t^{6-j_1-j_2}\delta^2 + c_{42}t^{6-j_1-j_2}\eta\delta + c_{41}t^{4-j_1-j_2}\eta = c_{41}t^3\delta^2 + c_{42}t^3\eta\delta + tc_{41}\eta.$$

если $\overline{\eta} \neq 0$, тогда $\overline{c}_{41} = 0$ и из равенства $c_{41}t^2 = c_{41}t^{j_3} = c_{11}t^2\delta + c_{12}t^2\eta$, имеем $0 = \overline{c}_{41} = \overline{c_{11}\delta} + \overline{c_{12}\eta} = \overline{c_{12}\eta} = \overline{c}_{21}\overline{\eta}$. Тогда $\overline{c}_{21} = 0$, что невозможно. Следовательно, $\overline{\eta} = 0$, $\eta = t\beta$, $\zeta = t^2\beta$ $(\beta \in K)$. Тогда с (17) и (16) получаем: $c_{21}t^2 = c_{41}t^3\delta^2 + c_{42}t^3\eta\delta + t^2c_{41}\beta = c_{41}t^3\delta^2 + c_{42}t^3\eta\delta + c_{11}t^2\delta\beta + c_{12}t^3\beta^2 \in t^3K$. Поэтому $\overline{c}_{21} = 0$, что невозможно.

Рассмотрим теперь случай когда $A = tF$, $\operatorname{rank}\overline{F} = 1$. Пусть $\overline{F}$ нильпотентная, тогда можно считать $A = \begin{pmatrix} t^2\varepsilon & t \\ t^2\zeta & 0 \end{pmatrix}$ $(\varepsilon,\ \zeta \in K)$. Подставив A в равенств (13), имеем:

$$\left\{\begin{array}{lcl} (t^{i_2}c_{41}, t^{i_2}c_{42}) &=& (c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta, c_{11}t), \\ (c_{11}, c_{12}) &=& (c_{21}t^2\varepsilon + c_{22}t^2\zeta, c_{21}t), \\ (c_{21}, c_{22}) &=& (c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta, c_{31}t), \\ (t^{i_1}c_{31}, t^{i_1}c_{32}) &=& (c_{41}t^2\varepsilon + c_{42}t^2\zeta, c_{41}t) \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{lcl} (t^{i_2}c_{41}, t^{i_2}c_{42}) &=& (c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta, c_{11}t), \\ (c_{11}, c_{12}) &=& (c_{21}t^2\varepsilon + c_{22}t^2\zeta, c_{21}t), \\ (t^{i_1}c_{21}, t^{i_1}c_{22}) &=& (c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta, c_{31}t), \\ (c_{31}, c_{32}) &=& (c_{41}t^2\varepsilon + c_{42}t^2\zeta, c_{41}t) \end{array}\right. \tag{18}$$

или

$$\left\{\begin{array}{lcl} (t^{j_3}c_{41}, t^{j_3}c_{42}) &=& (c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta, c_{11}t), \\ (c_{11}, c_{12}) &=& (c_{21}t^2\varepsilon + c_{22}t^2\zeta, c_{21}t), \\ (t^{j_1}c_{21}, t^{j_1}c_{22}) &=& (c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta, c_{31}t), \\ (t^{j_2}c_{31}, t^{j_2}c_{32}) &=& (c_{41}t^2\varepsilon + c_{42}t^2\zeta, c_{41}t). \end{array}\right. \tag{19}$$

Из первой системы (18) получаем: $\overline{c}_{11} = \overline{c}_{21} = \overline{c}_{12} = \overline{c}_{22} = 0$ и $c_{41}t^{i_2} = c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta \in t^3K$. Отсюда $\overline{c}_{41} = 0$. Из первой системы (18): $c_{31}t^2 = c_{41}t^{2-i_1+2}\varepsilon + c_{42}t^{2-i_1+2}\zeta = c_{41}t^{i_2+1}\varepsilon + c_{42}t^{i_2+1}\zeta = c_{11}t^3\varepsilon^2 + c_{12}t^3\zeta\varepsilon + c_{11}t^2\zeta \in t^3K$. Поэтому $\overline{c}_{31} = 0$.

Из второй системы (18): $\overline{c}_{11} = \overline{c}_{31} = \overline{c}_{12} = \overline{c}_{32} = 0$ и $c_{41}t^{i_2} = c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta \in t^3K$. Отсюда $\overline{c}_{41} = 0$. Из второй системы (18): $c_{21}t^{j_1} = c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta \in t^3K$. Поэтому $\overline{c}_{21} = 0$.

Из равенств (19) получаем: $\overline{c}_{11} = \overline{c}_{12} = 0$. $t^{j_3}c_{41} = c_{11}t^2\varepsilon + c_{12}t^2\zeta \in t^3K$, поэтому $\overline{c}_{41} = 0$.

Пусть $j_3 = 1$. Тогда $j_1 = j_2 = 2$. Из равенств (19) получаем: $\overline{c}_{31} = 0$. $c_{21}t^2 = c_{31}t^2\varepsilon + c_{32}t^2\zeta = c_{31}t^2\varepsilon + c_{41}t\zeta = c_{31}t^2\varepsilon + c_{11}t^2\varepsilon\zeta + c_{12}t^2\zeta^2 \in t^3K$, поэтому $\overline{c}_{21} = 0$.

Пусть $j_3 = 2$. Тогда $j_1 + j_2 = 3$ и $c_{21}t^2 = c_{31}t^{2-j_1+2}\varepsilon + c_{32}t^{2-j_1+2}\zeta = c_{31}t^{j_2+1}\varepsilon + c_{32}t^{j_2+1}\zeta = c_{41}t^3\varepsilon^2 + c_{42}t^3\varepsilon\zeta + c_{41}t^2\zeta \in t^3K$, поэтому $\overline{c}_{21} = 0$. $c_{31}t^{j_2} = c_{41}t^2\varepsilon + c_{42}t^2\zeta = c_{11}t^2\varepsilon^2 + c_{12}t^2\varepsilon\zeta + c_{11}t\zeta = c_{11}t^2\varepsilon^2 + c_{12}t^2\varepsilon\zeta + c_{21}t^3\varepsilon\zeta + c_{22}t^3\zeta^2 \in t^3K$, поэтому $\overline{c}_{31} = 0$. Следовательно, $\det\overline{C} = 0$. Противоречие.

Пусть теперь $\overline{F}$ ненильпотентная, тогда можно считать $A = \begin{pmatrix} t^2\varepsilon & 0 \\ t^2\zeta & t\eta \end{pmatrix}$, где $(\varepsilon,\ \zeta \in K,\ \eta \in K^*)$. Но тогда матрица A приводимая, что невозможно. $\square$

Теорема 2. *Пусть K — комутативное кольцо с единицей, $t \in K$, $t^2 \neq 0$, n — натуральное число, $n \leq 4$, s_i — целые числа, $s_i \geq 0$ $(i = 1,\ \ldots,\ n)$. Матрица $M(t, s_1, \ldots, s_n)$ порядка n неприводимая над кольцом K тогда и только тогда, когда $(n, \sum_{i=1}^n s_i) = 1$.*

Доказательство. Доказательства необходимости следует с теоремы 1. Пусть $(n,\ \sum_{i=1}^n s_i) = 1$. Тогда $M(t, s_1, \ldots, s_n)$ одна из матриц

$$M(t,0,1),\ M(t,1,2), \tag{20}$$

$$M(t,0,0,1),\ M(t,0,1,1),\ M(t,1,1,2),\ M(t,1,2,2), \tag{21}$$

$$M(t,0,0,2),\ M(t,0,2,2) \tag{22}$$

$$M(t,0,0,0,1),\ M(t,0,1,1,1),\ M(t,1,1,1,2),\ M(t,1,2,2,2), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} M(t,0,0,1,2),\ M(t,0,0,2,1),\ M(t,0,1,0,2),\ M(t,0,2,0,1), \\ M(t,0,1,2,2),\ M(t,0,2,1,2),\ M(t,0,2,2,1). \end{gathered} \tag{24}$$

Мы исключили из списка матрицы подобные уже отмеченным с той же совокупностью диагональных елементов учитывая повторения. Неприводимость матриц (20), (21), (23) следует из [**5**]. Матрицы (22) неприводимы по лемме 5. Матрицы (24) неприводимы по лемме 6. $\square$

Контрпример. *Пусть K — комутативное локальное кольцо, $RadK = tK$, $t^2 \neq 0$, $t^3 = 0$. Матрица $M(t,0,0,2,2,2)$ порядка 5 приводимая над кольцом K.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(5,K).\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^{-1}MC = C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 \end{array}\right).$$

$\square$

Список литературы

[1] *Pizarro A.* Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – Vol. 54. – P. 29–51.

[2] *Шевченко В. Н. Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.

[3] *Сидоров С. В.* О подобии матриц третьего порядка над кольцом целых чисел, имеющих приводимый характеристический многочлен // Вест. Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер. Мате мат. моделирование. Опт. управление. – 2009. – № 1. – С. 119–127.

[4] *Prasad A., Singla P., and Spallone S.* Similarity of matrices over local rings of length two// `http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf`.

[5] *Динис Р. Ф., Тилищак О. А.* Про звiднiсть матриць деякого вигляду над локальними областями головних iдеалiв // Наук. вiсник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. i iнформ. – 2012. – Вип. 23 №1. – С. 57–62.