Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14.— С. 62–67.

Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку

В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха

Інститут математики НАН України

Анотація. Вказано визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку.

On defining relations for minimal generator systems of three-order semigroups

V. Bondarenko, Ya. Zaciha

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

Abstract. We indicate defining relations for minimal systems of generators of semigroups of third order.

Оскільки повна класифікація тих чи інших алгебраїчних об'єктів, як правило, неможлива, то актуальною стає задача про вивчення об'єктів малих порядків (чи розмірностей). Зокрема, багато робіт присвячено групам малих порядків (див., напр., [**1**]). Зрозуміло, що напівгруп порядку n набагато більше, ніж груп. Якщо число таких напівгруп (з точністю до ізоморфізму та дуальності) позначити через P_n, то відомо (з використанням комп'ютерних програм), що $P_1 = 1$, $P_2 = 4$, $P_3 = 18$, $P_4 = 126$, $P_5 = 1160$, $P_6 = 15973$, $P_7 = 836021$, $P_8 = 1843120128$, $P_9 = 52989400714478$.

Ця стаття є першою із низки статей, в яких автори вивчатимуть напівгрупи малих порядків та їх матричні зображення. Ми описуємо визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку.

Нехай $S = \{\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \dots, \langle n\rangle\}$ — скінченна напівгрупа, яка задана таблицею Келі T. Ми хочемо знайти її мінімальну систему твірних та повну систему відповідних визначальних співвідношень. На першому кроці вибираємо деякий елемент $\langle s\rangle$ такий, що є (згідно таблиці) добутком деяких відмінних від нього елементів $\langle i\rangle$ та $\langle j\rangle$ (тобто $\langle s\rangle \neq \langle i\rangle, \langle j\rangle$, причому $\langle i\rangle$ та $\langle j\rangle$ можуть бути рівними); після цього в усій таблиці Келі (в тому числі в заголовному рядку і заголовному стовпці) замість $\langle s\rangle$

E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua, zaciha@mail.ru

підставляємо $\langle i\rangle\langle j\rangle$. Тоді заголовний рядок та заголовний стовпець нової таблиці T_1 буде складатися із елементів множини $S_1 = S \setminus \{\langle s\rangle\} \cup \{\langle i\rangle\langle j\rangle\}$; елементи основної частини таблиці T_1 також належать цій множині (але, як і для таблиці Келі, не обов'язково кожний елемент із S_1 зустрічається в основній частині таблиці).

На другому кроці серед елементів множини $S^{(1)} = S \setminus \{\langle s\rangle\}$ вибираємо деякий елемент $\langle s^{(1)}\rangle$ такий, що є добутком деяких елементів $i^{(1)}$ та $j^{(1)}$, де $i^{(1)} = \langle i_1\rangle$, $j^{(1)} = \langle j_1\rangle$, або $i^{(1)} = \langle i_1\rangle\langle i_2\rangle$, $j^{(1)} = \langle j_1\rangle$, або $i^{(1)} = \langle i_1\rangle$, $j^{(1)} = \langle j_1\rangle\langle j_2\rangle$, або $i^{(1)} = \langle i_1\rangle\langle i_2\rangle$, $j^{(1)} = \langle j_1\rangle\langle j_2\rangle$, де $\langle s_1\rangle \neq \langle i_1\rangle, \langle i_2\rangle, \langle j_1\rangle\langle j_2\rangle$; після цього в усій таблиці T_1 (в тому числі в заголовному рядку і заголовному стовпці) замість $\langle s_1\rangle$ підставляємо $i^{(1)}j^{(1)}$ (отримуючи таблицю T_2).

На наступному кроці вибираємо уже елемент $s^{(2)}$ множини $S^{(2)} = S \setminus \{\langle s\rangle, \langle s^{(1)}\rangle\}$ і т. д. По завершенні цього процесу, скажімо після t кроків ($t \geq 0$), ми маємо систему твірних $S^{(t)}$ напівгрупи S (при цьому $S^{(0)} = S$) та систему відповідних визначальних співвідношень у вигляді таблиці $T^{(t)}$ (яку треба брати повністю). Ця система твірних буде мінімальною.

Зауважимо, що вказаний процес неоднозначний і тому таким чином можна отримувати різні заключні системи твірних. Якщо розглядається досить широкий клас напівгруп, то можна формалізувати процес вибору елементів на кожному кроці (вказавши деяке правило), але це має сенс лише тоді, коли порядок елементів в заголовних рядках (а значить і стовпцях) всіх напівгруп також визначається по деякому правилу (таке правило, зокрема, існує, якщо список напівгруп у вигляді таблиць Келі визнається за допомогою комп'ютерних програм).

Ми не будемо більш детально говорити про загальний випадок, а розглянемо вказаний процес знаходження мінімальної системи твірних та відповідної системи визначальних співвідношень для напівгруп третього порядку. Зауважимо, що при виборі s, i, j (маючи на увазі вказану вище неоднозначність) ми користуємося "принципом максимуму", а саме на першому кроці: спочатку для s, при рівних s — для $i + j$, при рівних $i + j$ — для $\max(i, j)$, а при рівних $\max(i, j)$ — для j; аналогічно на другому кроці, але замість "більший" по відношенню до i (відповідно j) треба взяти "той, що стоїть нижче" (відповідно "той, що стоїть правіше"), маючи на увазі заголовний стовпець (відповідно заголовний рядок).

Отже, переходимо до 18-и напівгруп третього порядку, таблиці Келі яких вказані в роботі [**2**] (напівгрупи розглядаються з точністю до ізоморфізму та дуальності). Застосуємо вказаний вище алгоритм. В кожному із випадків (як ми побачимо) кількість кроків дорівнює $t \in \{0, 1, 2\}$. Рівність між стрілками (при переході від однієї таблиці до іншої) вказує на заміну в таблиці.

1)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

2)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2 \cdot \langle 2\rangle = \langle 2\rangle^3) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\langle 2\rangle^2$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$
$\langle 2\rangle^2$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^3}$	$\langle 2\rangle^2$

3)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$

4)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

5)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

6)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 1\rangle^2) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

7)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$

8)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

9)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

10)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

11)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

12)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 1\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

13)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

14)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

15)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

16)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

17)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow (\langle 1\rangle = \langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$
$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\boldsymbol{\langle 0\rangle \cdot \langle 2\rangle}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 2\rangle^2) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle$
$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle^3$
$\langle 2\rangle^3$	$\langle 2\rangle^3$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle^3$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 2\rangle^2}$

18)

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow (\langle 2\rangle = \langle 1\rangle^2) \Rightarrow$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^2}$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (\langle 0\rangle = \langle 1\rangle \cdot \langle 1\rangle^2 = \langle 1\rangle^3) \Rightarrow$

	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle^2$
$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle^2$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle^2$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$
$\langle 1\rangle^2$	$\langle 1\rangle^2$	$\boldsymbol{\langle 1\rangle^3}$	$\langle 1\rangle$

Література

[1] Холл М. *Теория групп.* М.: Иност. лит., 1962. — 468 с.

[2] *Forsythe G. E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. — 1955. — 6. — P. 443–447.