КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

Кафедра математического анализа и геометрии

Н. И. ШКИЛЬ

К вопросу об асимптотическом представлении решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр

Автореферат

диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель—доктор физико-математических наук, профессор Фещенко С. Ф.

КИЕВ—1958

Реферируемая работа относится к вопросам асимптотического представления решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, описывающих колебательные процессы.

Одним из эффективных методов исследования колебаний являются методы асимптотических разложений по степеням малого параметра. При помощи асимптотических разложений во многих практических случаях удается получить сравнительно простые расчетные схемы и детально выяснить характер протекания колебательного процесса.

Идея метода асимптотических разложений зародилась еще в работах Лиувилля и Штурма. Дальнейшее развитие этого метода находим в работах Пуанкаре, Горна, Шлезингера, Стеклова, Фаулера, Локка, Биркгоффа, Тамаркина, Крылова и Боголюбова, Тржцинского, Пугачева, Штокало, Градштейна, Тихонова, Митропольского, Фещенко, Рапопорта, Территина и др.

Отметим, что асимптотическое представление решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений тесно связано с поведением корней некоторого алгебраического уравнения, подобного характеристическому уравнению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Это уравнение мы также будем называть характеристическим.

В математической литературе освещен вопрос об асимптотическом представлении решений дифференциальных уравнений, содержащих параметр, в том случае, если корни характеристического уравнения простые или сохраняют свою кратность на всем промежутке изменения независимой переменной [2], [3].

Наиболее интересный случай, когда кратность корней характеристического уравнения наступает в отдельных точках промежутка изменения аргумента, до работ С. .Ф. Фещенко оставался неисследованным.

В 1948—1949 гг. появились работы С. Ф. Фещенко [5а, б], где рассматривается вопрос об асимптотическом представлении решений неоднородных дифференциальных уравнений со свободным членом вида

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{N} B_j(\tau, \varepsilon) e^{i\Theta_j}, \tag{1}$$

где

$$\frac{d\Theta_j}{dt} = k_j(\tau), \quad \tau = \varepsilon t,$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant L; \tag{2}$$

ε — малый действительный параметр.

В упомянутых работах [5а, б] рассматривается случай, когда одна из функций $ik_j(\tau)$ $(i=\sqrt{-1})$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ может стать равной одному из простых корней характеристического уравнения.

Отметим, что функции $ik_j(\tau)$ $(j=1,2,\ldots,N)$ в некотором смысле можно трактовать как корни характеристического уравнения.

Таким образом, вопрос об асимптотическом представлении решений дифференциальных уравнений специального вида в случае, когда кратность корней характеристического уравнения наступает в отдельных точках, впервые рассмотрен С. Ф. Фещенко.

Этот случай автор назвал «резонансным».

Случай, когда одна или несколько функций $ik_j(\tau)$ $(j=1,2,\ldots,N)$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ могут стать равными кратному корню характеристического уравнения, до сих пор остается неисследованным.

Работа состоит из двух частей.

В первой части рассматривается система вида

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)\, x + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} B_j(\tau, \varepsilon) e^{i\Theta_j}, \tag{3}$$

где x, $B_j(\tau, \varepsilon)$ $(j=1,2,\ldots, N)$ — n — мерные векторы, $A(\tau, \varepsilon)$ — действительная квадратная матрица n порядка. Предполагается, что $A(\tau, \varepsilon)$ и $B_j(\tau, \varepsilon)$ $(j=1, 2, \ldots, N)$ неограниченно дифференцируемые по τ $(\tau=\varepsilon t)$ на сегменте $0 \leqslant \tau \leqslant L$ и допускают представление

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau)$$

$$B_j(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{js}(\tau), \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ N \tag{4}$$

ε — малый действительный параметр, изменяющийся в интервале

$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Обозначим корни характеристического уравнения

$$det \mid A_0(\tau) - \lambda E \mid = 0, \tag{5}$$

где E — единичная матрица, через $\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)$.

Будем допускать, что среди корней $\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)$ имеются корни тождественной кратности, а именно, допустим, что корень $\lambda_1(\tau)$ второй кратности и чисто мнимый:

$$\lambda_1(\tau) \equiv \lambda_2(\tau) = i\alpha(\tau), \tag{6}$$

причем предполагаем, что $\alpha(\tau) > 0$.

Отметим, что из соотношения (6) следует, что корень $\lambda_3(\tau)$, сопряженный с $\lambda_1(\tau)$, также двукратный.

Относительно остальных корней $\lambda_5(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)$ предполагаем, что они простые на сегменте $[0, L)$ и не имеют положительных вещественных частей.

Как уже упоминалось раньше, мы рассматриваем случай, когда одна или несколько функций $ik_r(\tau)(1 \leqslant r \leqslant N)$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ могут одновременно стать равными кратному корню, например $\lambda_1(\tau)$. Этот случай будем называть «резонансным».

Как известно, кратным корням $\lambda_1(\tau)$ и $\lambda_3(\tau)$ могут соответствовать, как кратные, так и простые элементарные делители. Поэтому, каждый из случаев мы рассматриваем отдельно.

В первой главе рассматриваем случай простых элементарных делителей. Для этого случая доказывается ряд теорем.

Теорема (1). *Если матрицы $A_s(\tau)$, векторы $B_{js}(\tau)$ и функции $k_j(\tau)(s=0, 1, \ldots; j=1, 2, \ldots, N)$ неограниченно дифференцируемые по τ на сегменте $[0, L]$, то асимптотическое решение системы дифференциальных уравнений (3) в «резонансном» случае может быть представлено в виде*:

$$x = \sum_{j_1=1}^{r} [U_1(\tau, \varepsilon)\zeta_{j_1} + P_{j_1}(\tau, \varepsilon)] e^{i\Theta_{j_1}} +$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{3} U_\nu(\tau, \varepsilon)\eta_\nu + \sum_{j_2=r+1}^{N} H_{j_2}(\tau, \varepsilon) e^{i\Theta_{j_2}}, \tag{7}$$

где $U_k(\tau, \varepsilon)(k = 1, 2, 3)$ — *прямоугольные матрицы соответствующего порядка*, $P_{j_1}(\tau, \varepsilon)$ $H_{j_2}(\tau, \varepsilon)(j_1 = 1, 2, \ldots, r; j_2 = r+1, \ldots, N)$ *n-мер-*

ные векторы, а двумерные векторы ζ_{j_1}, η_2 *и n-4 мерный вектор* η_3 *определяются системами дифференциальных уравнений вида:*

$$\frac{d\zeta_{j_1}}{dt} = [\Omega_1(\tau, \varepsilon) - ik_{j_1}(\tau)\,\mathrm{E}]\,\zeta_{j_1} + z_{j_1}(\tau, \varepsilon), \quad j_1 = 1, 2, \ldots, r \,^{*}$$

$$\frac{d\eta_\nu}{dt} = \Omega_\nu(\tau, \varepsilon)\,\eta_\nu, \quad \nu = 2, 3 \tag{8}$$

в которых $\Omega_k(\tau, \varepsilon)$ $(k = 1, 2, 3)$ — *квадратные матрицы* $z_{j_1}(\tau, \varepsilon)$ $(j_1 = 1, 2, \ldots, r)$ — *двумерные векторы; причем, матрицы* $U_k(\tau, \varepsilon)$, $\Omega_k(\tau, \varepsilon)$ *и векторы* $P_{j_1}(\tau, \varepsilon)$, $H_{j_2}(\tau, \varepsilon)$, $z_{j_1}(\tau, \varepsilon)$ $(k = 1, 2, 3;\ j_1 = 1, 2, \ldots, r;\ j_2 = r+1, \ldots, N)$ *соответственно имеют вид:*

$$U_k(\tau, \varepsilon) \cong \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_{ks}(\tau), \qquad ^{**}$$

$$\Omega_k(\tau, \varepsilon) \cong \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Omega_{ks}(\tau), \quad k = 1, 2, 3$$

$$P_{j_1}(\tau, \varepsilon) \cong \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s P_{j_1 s}(\tau),$$

$$z_{j_1}(\tau, \varepsilon) \cong \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s z_{j_1 s}(\tau), \quad j_1 = 1, 2, \ldots, r$$

$$H_{j_2}(\tau, \varepsilon) \cong \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H_{j_2 s}(\tau),$$

$$j_2 = r + 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Наряду с «резонансным» случаем мы рассматриваем без подробного исследования так называемый «нерезонансный» случай, когда функции $i\,k_j(\tau)$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ при любом $\tau \in [0, L]$ не совпадают с корнями (5).

Для этого случая справедлива теорема.

---

* В автореферате готическое a заменено Ω.

** Использованный здесь символ ≅ указывает на формальный характер рядов (9), которые в большинстве случаев являются расходящимися.

Теорема 2. *Если выполнимы условия теоремы 1, то асимптотическое решение системы (3) в «нерезонансном» случае может быть представлено в виде*

$$x = \sum_{k=1}^{3} \widetilde{U}_k(\tau, \varepsilon)\widetilde{\eta}_k + \sum_{j=1}^{N} \widetilde{N}_j(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta_j}, \tag{10}$$

где

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \widetilde{\Omega}_k(\tau, \varepsilon)\,\widetilde{\eta}_k,\ k = 1, 2, 3 \tag{11}$$

причем матрицы $\widetilde{U}_k(\tau, \varepsilon)$, $\widetilde{\Omega}_k(\tau, \varepsilon)$ $(k = 1, 2, 3)$ *и векторы* $\widetilde{H}_j(\varepsilon, \varepsilon)$ $(j=1, 2, \ldots, N)$ *допускают формальное разложение подобное разложению (9).*

Отметим, нашей задачей является построение асимптотического решения x_m, решения удовлетворяющего соотношению

$$| x - x_m | \leqslant \varepsilon^{\gamma} C, \tag{12}$$

где x — некоторое точное решение, x_m — решение, получаемое из разложений (9), ограничившись в них лишь m частными суммами;

C — постоянная, независящая от ε, γ — натуральное число, зависящее от m.

Соотношение (12) для «резонансного» случая доказывает теорема.

Теорема 3. *Если имеют место условия теоремы 1 и при* $t=0$ *удовлетворяется соотношение*

$$x^0 - x_m^0 = 0, \tag{13}$$

где x^0, x_m^0 *— значение векторов* x, x_m *при* $t=0$, *то для любых* $L>0$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *можно указать постоянную* C, *независящую от* ε, *что для любого* $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ *будет удовлетворяться неравенство.*

$$| x - x_m | \leqslant \varepsilon^m C. \tag{14}$$

Подобную теорему можно доказать и для «нерезонансного» случая.

Во второй главе мы переходим к рассмотрению случая кратных элементарных делителей.

Оказывается, что в этом случае асимптотическое решение в существенной мере предопределяется поведением элемента, стоящего в первом столбце и во второй строке матрицы $T_1^{-1}(\tau)\left[A_1(\tau)T_1(\tau)-\frac{dT_1(\tau)}{d\tau}\right]$, где $T_1(\tau)$ матрица преобразования.

Обозначим этот элемент через $\left\{T_1^{-1}(\tau)\left[A_1(\tau)T_1(\tau)-\frac{dT_1(\tau)}{d\tau}\right]\right\}_{21}$.

Относительно этого элемента мы рассматриваем два случая:

1) Случай (A), когда

$$A)\qquad \left\{T_1^{-1}(\tau)\left[A_1(\tau)T_1(\tau)-\frac{dT_1(\tau)}{d\tau}\right]\right\}_{21}\neq 0$$

(при любом $\tau\in[0,L]$;

2) Случай (B), когда

$$(B)\qquad \left\{T_1^{-1}(\tau)\left[A_1(\tau)T_1(\tau)-\frac{dT_1(\tau)}{d\tau}\right]\right\}_{21}\equiv 0$$

на сегменте $[0, L]$.

Для случая (A) имеет место теорема.

Теорема 4. *Если матрицы $A_s(\tau)$, векторы $B_{js}(\tau)$, функции $k_j(\tau)$, $(s=0,1,\ldots;\ j=1,2,\ldots,N)$ неограниченно дифференцируемые по τ на сегменте $[0, L]$, то формальное решение системы (3) в «резонансном» случае может быть представлено в виде:*

$$x=\sum_{j_1=1}^{r}\left[U_1(\tau,\mu)\zeta_{j_1}+P_{j_1}(\tau,\mu)\right]e^{i\theta_{j_1}}+ \\ +\sum_{\nu=2}^{3}U_\nu(\tau,\mu)\eta_\nu+\sum_{j_2=r+1}^{N}H_{j_2}(\tau,\mu)e^{i\theta_{j_2}},\tag{15}$$

где двумерные векторы ζ_{j_1}, η_2 и $n-4$ мерный вектор η_3 определяются системами дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d\zeta_{j_1}}{dt}=[\Omega_1(\tau,\mu)-ik_{j_1}(\tau)E]\zeta_{j_1}+z_{j_1}(\tau,\mu),$$

$$j_1=1,2,\ldots,r$$

$$\frac{d\eta_\nu}{dt}=\Omega_\nu(\tau,\mu)\eta_\nu;\ \nu=2,\ 3\tag{16}$$

для матриц $U_k(\tau,\mu)$, $\Omega_k(\tau,\mu)$ $(k=1,2,3)$ и векторов $P_{j_1}(\tau,\mu)$

$z_{j_1}(\tau,\mu)$, $H_{j_2}(\tau,\mu)$ $(j_1=1,2,\ldots,r;\ j_2=r+1,\ldots,N)$ *могут быть построены формальные разложения вида:*

$$U_k(\tau,\mu)\cong\sum_{s=0}^{\infty}\mu^s U_{ks}(\tau),$$

$$\Omega_k(\tau,\mu)\cong\sum_{s=0}^{\infty}\mu^s\Omega_{ks}(\tau),\quad k=1,2,3$$

$$P_{j_1}(\tau,\mu)\cong\sum_{s=2}^{\infty}\mu^s P_{j_1s}(\tau),$$

$$z_{j_1}(\tau,\mu)\cong\sum_{s=2}^{\infty}\mu^s z_{j_1s}(\tau),\quad j_1=1,2,\ldots,r$$

$$H_{j_2}(\tau,\mu)\cong\sum_{s=2}^{\infty}\mu^s H_{j_2s}(\tau),\quad j_2=r+1,\ldots,N,\tag{17}$$

где параметр μ связан с параметром ε соотношением $\mu=\sqrt{\varepsilon}$.

Здесь же для случая (A) рассматривается и «нерезонансный» случай. Устанавливается теорема.

Теорема 5. *Если выполнимы условия теоремы 4, то формальное решение системы (3) в «нерезонансном» случае может быть представлено в виде:*

$$x=\sum_{k=1}^{3}\tilde U_k(\tau,\mu)\tilde\eta_k+\sum_{j=1}^{N}\tilde H_j(\tau,\mu)e^{i\theta_j},\tag{18}$$

где

$$\frac{d\tilde\eta_k}{dt}=\tilde\Omega_k(\tau,\mu)\tilde\eta_k,\quad k=1,2,3\tag{19}$$

причем, для матриц $\tilde U_k(\tau,\mu)$, $\tilde\Omega_k(\tau,\mu)$ и векторов $\tilde H_j(\tau,\mu)$ $(k=1,2,3;\ j=1,2,\ldots,N)$ имеют место формальные ряды, подобные рядам (17).

Асимптотический характер решения в случае (A) при наличии «резонанса» доказывает теорема.

Теорема 6. *Если выполняются условия теоремы 4 и условия*

$$Re\left(\left\{T_1^{-1}(\tau)\left[A_1(\tau)T_1(\tau)-\frac{dT_1(\tau)}{d\tau}\right]\right\}_{21}\right)<0,$$

$$I\left(\left\{T_1^{-1}(\tau)\left[A_1(\tau)T_1(\tau)-\frac{dT_1(\tau)}{d\tau}\right]\right\}_{21}\right)=0 \qquad (20)$$

при любом $\tau\in[0,L]$, *то для любых* $L>0$ и $0<\mu\leqslant\mu_0$ *можно указать такую постоянную* C, *независящую от* μ, *что*

$$|x-x_m|\leqslant\mu^{m-5}C \qquad (21)$$

Подобную же теорему можно доказать в случае (A) и при отсутствии «резонанса».

Далее мы переходим к рассмотрению случая (B).

Для этого случая при наличии «резонанса» может быть доказана теорема подобная теореме 1, а именно.

Теорема 7. *Если матрицы* $A_s(\tau)$, *векторы* $B_{js}(\tau)$ *и функции* $k_j(\tau)$ $(s=0,1,\ldots;\ j=1,2,\ldots,N)$ *неограниченно дифференцируемые по* τ *на сегменте* $[0,L]$, *то формальное решение системы (1) вслучае (B) при наличии «резонанса» может быть представлено в виде:*

$$x=\sum_{j_1=1}^{r}[U_1(\tau,\varepsilon)\zeta_{j_1}+P_{j_1}(\tau,\varepsilon)]e^{i\theta_{j_1}}+\sum_{\nu=2}^{3}U_\nu(\tau,\varepsilon)\eta_\nu+$$

$$+\sum_{j_2=r+1}^{N}H_{j_2}(\tau,\varepsilon)\,e^{i\theta_{j_2}}, \qquad (22)$$

где

$$\frac{d\zeta_{j_1}}{dt}=[\Omega_1(\tau,\varepsilon)-ik_{j_1}(\tau)E]\zeta_{j_1}+z_{j_1}(\tau,\varepsilon),\quad j_1=1,2,\ldots,r$$

$$\frac{d\eta_\nu}{dt}=\Omega_\nu(\tau,\varepsilon)\eta_\nu,\quad \nu=2,3 \qquad (23)$$

Матрицы и векторы, фигурирующие в соотношениях (22), (23), допускают формальное представление вида (9).

Асимптотический характер решения для случая (B) доказывается теоремой.

Теорема (8). *Если выполнимы условия теоремы 7, то для любых $L > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ можно указать постоянную C, независящую от ε, что*

$$| x - x_m | \leqslant \varepsilon^{m-2} C \tag{24}$$

В конце второй главы части I мы рассматриваем два примера.

В качестве первого примера взято одно уравнение четвертого порядка вида:

$$\frac{d^4 y}{d t^4} + \varepsilon P_1(\tau,\varepsilon) \frac{d^3 y}{d t^3} + 2 P_2(\tau,\varepsilon) \frac{d^2 y}{d t^2} + \varepsilon P_3(\tau,\varepsilon) \frac{d y}{d t} + P_4(\tau,\varepsilon)\, y =$$

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^{N} b_j(\tau, \varepsilon) e^{i\theta_j} \tag{25}$$

Для этого уравнения в случае (A) нами найдены коэффициенты, входящие в вектор x_m до второго порядка включительно (для $m = 2$)

В качестве второго примера мы рассматриваем систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, в которой малый параметр ε стоит множителем лишь при $n - 2$ производных. К таким системам приводятся дифференциальные уравнения, в которых малый параметр ε стоит множителем лишь при старших производных.

Мы указываем подстановку, при помощи которой данная система приводится к системе (3), причем характеристическое уравнение (5) для полученной системы имеет число нуль корнем второй кратности.

Вторая часть настоящей работы посвящена нахождению усилий в упруго-вязкой нити (канате) переменной длины с грузом Q на конце.

Эта задача, как показано в работе [6], сводится к интегрированию системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. В работе [6] дан только вывод этой системы, но решение отсутствует.

Мы же используя асимптотический метод, даем асимптотическое решение указанной системы на трех участках подъема груза Q.

Для этого в главе I рассматривается вопрос об асимптотическом представлении решений системы более общего вида с медленно меняющимися коэффициентами (функция переменного t называется медленно меняющейся, если производная от нее по t пропорциональна малому параметру ε).

Во второй главе указываются подстановки, при помощи которых система уравнений, предложенная в [6], приводится к системе с медленно меняющимися коэффициентами и дается асимптотическое решение данной системы на трех участках подъема груза Q.

При помощи полученного решения нами проведены вычисления усилий, возникающих в верхнем конце нити на первом и втором * участках подъема груза Q.

Результаты вычислений усилий на первом участке помещены на стр. 174—175 настоящей работы.

Вычисления показали, что максимальное значение усилий, отличается от максимального значения усилий, полученных Г. Н. Савиным [7] другим путем, на 0,36%.

Основные результаты диссертации опубликованы в переодических изданиях: «Доповіді АН УРСР», 1958, № 2, 5; «Прикладна механіка», изд. АН УССР, том IV, вып. 3, 1958; «Наукові записки» Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького, том XXX, 1958.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н.— О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН УССР, 1945.

2. Тамаркин Я. Д.— О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917, стр. 43—93.

3. Пугачев В. С.— Об асимптотических представлениях интегралов систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Матем. сборник Новая серия, т. X, (57): 1, 1944.

4. Митропольский Ю. А.— Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Из-во АН УССР, 1955, стр. 239—246.

5. Фещенко С. Ф.— а) Питання теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з повільно-змінними коефіцієнтами та деякі застосування. Наукові записки КДПІ ім. О. М. Горького, том VI, фізико-матем. серія. № 3, 1948.

б) Малі коливання системи із скінченним числом ступенів вільності. Наукові записки КДПІ ім О. М. Горького, том IX, фіз.-мат. серія, № 4, 1949.

6. Соколов Ю. Д.— Про визначення динамічних зусиль в шахтних підіймальних канатах. Прикладна механіка, т. I, в. I, 1955.

7. Савін Г. М.— Динамічні зусилля в підіймальному канаті при знятті вантажу з нерухомої основи. ДАН УРСР, № 2, 1954, стр. 140—147.

---

* На втором взято интервал изменения лишь (0; 3,5).

Объем 0,75 печ. листа.

БФ 23315. 3.XII-1958 г. Тип. КГПИ, Франко, 44. Зак. 3—150