Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2015, № 17.— С. 29–36.

УДК 519.41/47

Локально ступінчасті p-групи із скінченною NSC-підгрупою

О. О. Требенко
(Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна)

Анотація. Стаття присвячена вивченню груп G, в яких кожна підгрупа, що містить деяку фіксовану підгрупу (NSC-підгрупу), має нормальне доповнення в G. Встановлено структуру локально-ступінчастих p-груп із власною скінченною NSC-підгрупою.

Ключові слова: локально ступінчасті групи, групи із NSC-підгрупою, цілком факторизовані групи

Abstract. One of the main directions of investigations in abstract group theory is a study of groups in which some subgroups or systems of subgroups satisfy particular restricting requirements, e.g. are complemented.

It was natural to consider groups G in which every subgroup containing some fixed subgroup X is complemented. Such subgroup X has been called supercomplemented in G.

It turned out that the class of groups with a finite supercomplemented subgroup is extremely wide. Therefore it was decided to apply certain restrictions which allowed rather detailed description of subclasses obtained.

This paper is devoted to the study of groups G in which every subgroup containing some fixed subgroup A has a normal complement in G. Such subgroup is called an NSC-subgroup.

A structure of locally graded p-groups with a proper finite NSC-subgroup is established (Theorem 1). At the same time it is shown that the requirement for a group G to be locally graded is essential (Theorem 2).

Keywords: locally graded groups, groups with an NSC-subgroup, completely factorizable groups

AMS Subject Classifications (2010): 20F50, 20F18, 20E26

Вступ

В сучасній теорії груп одним із основних напрямків досліджень є вивчення груп із певними системами доповнюваних підгруп. Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається доповнюваною в G, якщо в G існує така підгрупа D, що $G = HD$ і $H \cap D = 1$. (Говорять також, що H доповнюється в G, а підгрупу D називають доповненням до H в G). Скінченні групи, в яких всі підгрупи – доповнювані, було вперше розглянуто в 1937 р. Ф.Холлом. Пізніше Н.В.Чернікова отримала повний конструктивний опис довільних (як скінченних, так і нескінченних) груп з такою властивістю (1953).

Одним із найбільш природних узагальнень умови доповнюваності всіх підгруп групи G є умова доповнюваності всіх підгруп, що містять деяку конкретну фіксовану підгрупу A. Дану підгрупу A в роботі [1] було названо наддоповнюваною.

Групи із наддоповнюваною циклічною підгрупою A розглядались в роботах [1]-[4]. Пізніше деякі результати вказаних досліджень вдалось узагальнити на випадок спочатку довільної скінченної нільпотентної [5], а потім довільної скінченної [6] підгрупи A, а саме: встановлено локальну скінченність, розв'язність і фінітну апроксимовність RN-груп із скінченною наддоповнюваною підгрупою.

Як виявилось, клас груп із скінченною наддоповнюваною підгрупою – достатньо широкий. Вже у найпростішому випадку скінченної p-групи із наддоповнюваною циклічною підгрупою від простого числа p залежить ступінь розв'язності (див. [1] і [2]), а нескінченні p-групи із циклічною наддоповнюваною підгрупою можуть взагалі бути нерозв'язними (див. [4], Теорема 2). Тому, щоб отримати уявлення про будову груп даного класу, природно виділити в ньому, накладаючи певні обмеження, такі підкласи, які б допускали достатньо детальний опис.

В даній роботі розглядаються групи G, в яких кожна підгрупа, що містить деяку фіксовану підгрупу A, має хоча б одне нормальне в G доповнення. Підгрупу A з такою умовою назвемо NSC-підгрупою.

Зрозуміло, що в кожній групі сама група буде NSC-підгрупою. Тому інтерес становлять саме групи із власною NSC-підгрупою. Повний конструктивний опис груп, в яких NSC-підгрупою є одинична підгрупа (тобто груп G, в яких кожна підгрупа має нормальне в G доповнення) дає твердження 1. Найпростішим прикладом неабелевої групи із неодиничною NSC-підгрупою є симетрична група підстановок 3-го степеня S_3, в якій кожна підгрупа 2-го порядку A є NSC-підгрупою. (Дійсно, A доповнюється нормальною в S_3 підгрупою 3-го порядку, а інших власних підгруп, що містять A, в S_3 немає).

Кожна NSC-підгрупа групи G є, зрозуміло, і наддоповнюваною в G. В абелевих групах кожна наддоповнювана підгрупа буде, очевидно, NSC-підгрупою. Водночас, існують групи з власною наддоповнюваною підгрупою, в яких немає жодної власної NSC-підгрупи (див. Приклад 1). Таким чином, дослідження будови і властивостей груп із NSC-підгрупою є доцільним.

Приклад 1. Розглянемо групу діедра 8-го порядку: $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $a^4 = b^2 = 1$, $b^{-1}ab = a^3$. В G наддоповнюваною є, наприклад, підгрупа $\langle a\rangle$. Покажемо, що в G немає жодної власної NSC-підгрупи. Дійсно, нехай A – деяка власна NSC-підгрупа групи G, тоді $G = A \rightthreetimes N$. Зрозуміло, що $A \neq 1$ (бо тоді в G підгрупа $\langle a^2\rangle$ повинна була б доповнюватись в $\langle a\rangle$, що не так), тому $|A| = 2$ або $|A| = 4$. Значить, $G/N \cong A$

– абелева, а тому N містить комутант G' групи G: $G' = \langle a^2 \rangle = Z(G)$. За умовою для підгрупи $A \times \langle a^2 \rangle \neq G$ в G має існувати нормальне доповнення S, але і $A \times \langle a^2 \rangle \trianglelefteq G$, тому $G = (A \times \langle a^2 \rangle) \times S$, звідки G – абелева, що не так.

Основним результатом даної роботи є повний опис будови локально ступінчастих p-груп із власною скінченною NSC-підгрупою (теорема 1). Водночас, показано, що вимога належності групи G із формулювання теореми 1 бути локально ступінчастою є істотною (теорема 2).

Нагадаємо, що група називається локально ступінчастою, якщо кожна її неодинична скінченнопороджена підгрупа містить підгрупу скінченного, відмінного від 1, індексу (С.М.Черніков, 1970). Даний клас груп – надзвичайно широкий. Локально ступінчастими є всі локально скінченні, фінітно апроксимовні, розв'язні і локально розв'язні групи, радикальні (в розумінні Б.І.Плоткіна) і локально радикальні групи, RN-групи (а значить, і групи всіх класів груп Куроша-Чернікова).

В роботі використовуються наступні позначення. Для довільної групи G запис $H \leq G$ ($H \trianglelefteq G$) означає, що H є (нормальною) підгрупою групи G. Символ $\times$ використовується для позначення прямого добутку; $B \rtimes A$ або $A \ltimes B$ означає півпрямий добуток підгрупи A і нормальної підгрупи B. Далі, $Z(G)$ – центр, G' – комутант групи G. Крім того, p – просте число. Інші позначення стандартні.

Попередні результати

Лема 1. *Якщо підгрупа A є NSC-підгрупою групи G, то A є NSC-підгрупою і кожної підгрупи K групи G, що містить A.*

Доведення. Нехай H – деяка підгрупа групи K, що містить A. Покажемо, що H має нормальне в K доповнення. Дійсно, оскільки A – NSC-підгрупа групи G і $H \supseteq A$, то H доповнюється в G, причому деяке доповнення D до підгрупи H є нормальним в G: $G = H \ltimes D$. В силу леми С.М.Чернікова ([7], лема 3.7), $K = H(D \cap K)$, причому $H \cap (D \cap K) = 1$. Оскільки $D \trianglelefteq G$, то $D \cap K \trianglelefteq K$, тому $K = H \ltimes (D \cap K)$. В силу довільності вибору підгрупи H в K, підгрупа A є NSC-підгрупою групи K.

□

Лема 2. *Нехай φ – деякий гомоморфізм групи G. Тоді якщо A – NSC-підгрупа групи G, то A^φ є NSC-підгрупою групи G^φ.*

Доведення. Нехай H – довільна підгрупа групи G^φ, що містить A^φ, і нехай S – повний прообраз підгрупи H в групі G. Зрозуміло, що $S \supseteq A$, тому S доповнюється в G, причому деяке доповнення T до S в G є нормальним в G: $G = S \ltimes T$. Тоді

$$G^\varphi = S^\varphi \ltimes T^\varphi = H \ltimes T^\varphi.$$

В силу довільності вибору підгрупи H в G^φ, отримуємо, що A^φ є NSC-підгрупою групи G^φ. □

Окремий інтерес становить випадок, коли NSC-підгрупою є одинична підгрупа. Наступне твердження дає повний конструктивний опис таких груп.

Твердження 1. *В неодиничній групі G кожна підгрупа має нормальне доповнення тоді і лише тоді, коли G є прямим добутком циклічних груп простих порядків.*

Доведення. Необхідність. Розглянемо комутант G' групи G. Нехай $G' \neq 1$ і $a \in G'$, $a \neq 1$. За умовою підгрупа $\langle a \rangle$ має нормальне в G доповнення:

$$G = \langle a \rangle \leftthreetimes K. \tag{1}$$

Оскільки $G/K \cong \langle a \rangle$ – абелева, то $G' \subseteq K$, але тоді $\langle a \rangle \cap K = \langle a \rangle$, що суперечить (1). Отже, $G' = 1$ і G – абелева.

Група G, очевидно, є періодичною і не містить елементів, порядок яких ділиться на квадрат простого числа, а тому G є прямим добутком циклічних груп простих порядків.

Достатність очевидна. □

Лема 3. *Нехай $G = G_1 \times G_2$, причому $G_2 \neq 1$. Підгрупа $A \leq G_1$ є NSC-підгрупою групи G тоді і лише тоді, коли A є NSC-підгрупою групи G_1 і G_2 є прямим добутком циклічних груп простих порядків.*

Доведення. Необхідність. Якщо підгрупа A є NSC-підгрупою групи G, то за лемою 1 A є NSC-підгрупою групи G_1. Далі, за лемою 2 у фактор-групі G/G_1 NSC-підгрупою є одинична підгрупа, тобто в G/G_1 кожна підгрупа має нормальне доповнення. Із урахуванням твердження 1 отримуємо, що підгрупа $G_2 \cong G/G_1$ є прямим добутком циклічних груп простих порядків.

Достатність. Нехай H – довільна підгрупа групи G, що містить A. Нехай $H \cap G_1 = H_1$, $H \cap G_2 = H_2$, тоді $H = H_1 \times H_2$ і $H_1 \supseteq A_1$. За умовою A є NSC-підгрупою групи G_1, тому $G_1 = A \leftthreetimes N$ для деякої підгрупи $N \subseteq G_1$. Оскільки підгрупа G_2 є прямим добутком циклічних груп простих порядків, то, очевидно, що в G_2 знайдеться така підгрупа M, що $G_2 = H_2 \times M$. Тоді підгрупа $N \times M$ буде нормальним доповненням до H в G. В силу довільності вибору H, підгрупа A є NSC-підгрупою групи G. □

Зауваження 1. *Вимагати в умові леми 3, щоб лише одна із підгруп G_1 або G_2 була нормальною в G, недостатньо. Дійсно, розглянемо групу діедра G із Прикладу 1. Запишемо її у вигляді $G = (\langle a^2 \rangle \times \langle ab \rangle) \rightthreetimes \langle b \rangle$. Підгрупи $G_1 = \langle a^2 \rangle \times \langle ab \rangle$ і $G_2 = \langle b \rangle$ задовольняють умови леми 3: в G_1 одинична підгрупа є NSC-підгрупою, G_2 має простий порядок, але в $G = G_1 \rightthreetimes G_2$ одинична підгрупа не є NSC-підгрупою; більше того, в G немає жодної власної NSC-підгрупи. Аналогічно, для одиничної NSC-підгрупи групи G_2.*

Основні результати

Теорема 1. *В локально ступінчастій p-групі G скінченна підгрупа $A \neq G$ є NSC-підгрупою тоді і лише тоді, коли в G знайдеться така елементарна абелева p-підгрупа B, що $G = A \times B$.*

Доведення. Необхідність. Нехай A є NSC-підгрупою групи G. Розглянемо окремо випадки, коли G – скінченна і нескінченна.

Випадок 1. Нехай група G – скінченна. За умовою в G існує нормальна підгрупа N, що доповнює A в G: $G = A \leftthreetimes N$. Оскільки $A \neq G$, то $N \neq 1$. В скінченній p-групі G кожна неодинична нормальна підгрупа має неодиничний перетин із центром $Z(G)$, тому $N \cap Z(G) \neq 1$. Нехай $\langle b_1 \rangle$ – підгрупа простого порядку із $N \cap Z(G)$. Тоді $\langle b_1 \rangle \trianglelefteq G$. Розглянемо підгрупу $A \times \langle b_1 \rangle$. За умовою дана підгрупа має нормальне в G доповнення N_1:

$$G = (A \times \langle b_1 \rangle) \leftthreetimes N_1.$$

Якщо $N_1 = 1$, то твердження доведено.

Нехай $N_1 \neq 1$. Тоді аналогічно $N_1 \cap Z(G) \neq 1$. Нехай $\langle b_2 \rangle$ – підгрупа простого порядку із $N_1 \cap Z(G)$, тоді $\langle b_2 \rangle \trianglelefteq G$. Розглянемо підгрупу $A \times \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$, яка також має в G нормальне доповнення N_2:

$$G = (A \times \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle) \leftthreetimes N_2.$$

Якщо $N_2 = 1$, то твердження доведено.

Якщо $N_2 \neq 1$, то $N_2 \cap Z(G) \neq 1$ і т.д.

Оскільки G – скінченна, то для деякого $k \in \mathbb{N}$ матимемо $N_k = 1$, тоді

$$G = A \times (\langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times ... \times \langle b_k \rangle)$$

і твердження доведено: $G = A \times B$, де $B = \langle b_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle \times ... \times \langle b_k \rangle$ – елементарна абелева p-група.

Випадок 2. Нехай тепер G – нескінченна і нехай G_ι, $\iota \in I$, – всі скінченнопороджені підгрупи групи G, що містять A, причому $G_\iota \neq A$.

Розглянемо довільну, але фіксовану, підгрупу G_ι і деякий її скінченний гомоморфний образ G_ι^φ. Група G_ι^φ є скінченною p-групою, тому розв'язна. Покажемо, що її ступінь розв'язності не перевищує ступеня розв'язності n підгрупи A. Дійсно, в силу леми 2, A є NSC-підгрупою групи G_ι, тому за лемою 3 підгрупа A^φ є NSC-підгрупою групи G_ι^φ. Тоді або $G_\iota^\varphi = A^\varphi$, або якщо $A^\varphi \neq G_\iota^\varphi$, то, як було показано вище (випадок 1), $G_\iota^\varphi = A^\varphi \times D$ для деякої елементарної абелевої підгрупи D групи G_ι^φ. Отже, в будь-якому випадку ступінь розв'язності групи G_ι^φ збігається із ступенем розв'язності підгрупи A^φ, а значить, не перевищує числа n.

Таким чином, кожний скінченний гомоморфний образ G_ι^φ групи G_ι є розв'язною групою ступеня розв'язності не більше n. Тоді якщо $J(G_\iota)$ – перетин всіх підгруп скінченного індексу в G_ι (а, в силу теореми Пуанкаре, $J(G_\iota)$ збігається із перетином всіх нормальних підгруп скінченного індексу в G_ι), то фактор-група $G_\iota/J(G_\iota)$ є розв'язною і ступінь її розв'язності не перевищує n. Але $J(G_\iota) = 1$, значить, підгрупа G_ι – розв'язна і ступінь її розв'язності не перевищує n. Оскільки підгрупа G_ι є скінченнопородженою, то, в силу теореми С.М.Чернікова ([7], Твердження 1.1), G_ι – скінченна.

Тоді, як було показано вище (див. випадок 1), в групі G_ι існує елементарна абелева підгрупа B_ι така, що $G_\iota = A \times B_\iota$.

Нехай M_ι – множина всіх таких підгруп із G_ι. Покладемо $M_\alpha \le M_\iota$ тоді і лише тоді, коли $G_\alpha \subseteq G_\iota$. У випадку $M_\alpha \le M_\iota$ задамо проекцію $\pi_{\iota\alpha}$ із M_ι в M_α наступним чином: для довільної $B \subseteq M_\iota$,

$$B^{\pi_{\iota\alpha}} = B \cap G_\alpha. \tag{2}$$

В силу (2), очевидно, виконуються умови:

1) для кожної пари множин M_α і M_β існує така третя множина M_γ, що $M_\alpha, M_\beta \le M_\gamma$;
2) якщо $M_\alpha \le M_\beta$, $M_\beta \le M_\gamma$, то $\pi_{\gamma\alpha} = \pi_{\gamma\beta}\pi_{\beta\alpha}$;
3) $\pi_{\iota\iota}$ – тотожне відображення M_ι на себе.

Тому, в силу теореми про існування проекційної множини ([8], С. 351-353), в кожній із множин M_ι, $\iota \in I$, можна вибрати елементарну абелеву підгрупу B_ι так, що

$$B_\alpha = B_\iota \cap G_\alpha, \tag{3}$$

як тільки $G_\alpha \subseteq G_\iota$. Із (3), очевидно,

$$B = \bigcup_{\iota \in I} B_\iota$$

– елементарна абелева підгрупа групи G, причому $A \cap B = 1$.

Візьмемо довільні елементи $g \in G$ і $b \in B$. Тоді в I знайдеться такий індекс α, що

$$g \in G_\alpha \quad \text{і} \quad b \in B_\alpha. \tag{4}$$

Оскільки $B_\alpha \trianglelefteq G_\alpha$, то $b^g \in B_\alpha \subseteq B$, тому $B \trianglelefteq G$. Аналогічно, $A \trianglelefteq G$.

Покажемо, що $G = AB$. Нехай $g \in G$. Тоді знайдеться такий індекс $\alpha \in I$, що $g \in G_\alpha$ і $g = ay$, де $a \in A$, $y \in B_\alpha \subseteq B$, а отже, $g \in AB$. Навпаки, очевидно, $AB \subseteq G$, а отже, $G = AB$.

Таким чином, із урахуванням того, що $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $A \cap B = 1$, отримуємо: $G = A \times B$, де B – елементарна абелева підгрупа.

Достатність випливає безпосередньо із леми 3.

Теорему доведено.

□

Таким чином, в силу теореми 1, локально ступінчасті p-групи із власною скінченною NSC-підгрупою вичерпуються прямими добутками деякої скінченної p-групи (яка і є NSC-підгрупою) і елементарної абелевої p-групи.

Наслідок 1. *Локально ступінчаста p-група G із скінченною NSC-підгрупою є локально скінченною і розв'язною.*

Зауваження 2. *З огляду на наступну теорему, вимога для групи G із формулювань теореми 1 і наслідку 1 з неї бути локально ступінчастою є істотною.*

Теорема 2. *Для довільного достатньо великого простого числа p існує не локально ступінчаста p-група $G = A \leftthreetimes N$ із NSC-підгрупою A порядку p, в якій доповнення N до підгрупи A є нескінченною простою групою, кожна власна підгрупа якої має порядок p.*

Доведення. В силу теореми Образцова [9], для достатньо великого простого p існує нескінченна проста 2-породжена p-група N, всі власні підгрупи якої мають порядок p і яка має автоморфізм φ порядку p такий, що $C_N(\varphi) = 1$. Тому існує p-група $G = A \leftthreetimes N$, де підгрупа A має порядок p і $C_G(N) = N$. Група N, а значить, і група G, очевидно, не є локально ступінчастими.

В [3] було показано, що в G лише дві підгрупи (A і G) містять A. Отже, кожна підгрупа групи G, що містить A, має нормальне в G доповнення, тобто A є NSC-підгрупою групи G. $\square$

Висновки і перспективи подальших досліджень

Проблема вивчення властивостей і структури груп із NSC-підгрупою потребує дослідження. В даній роботі встановлено структуру локально-ступінчастих p-груп із власною скінченною NSC-підгрупою. З огляду на те, що існують не локально ступінчасті групи із власною скінченною NSC-підгрупою достатньо складної структури, природно обмежити коло подальших пошуків саме класом локально-ступінчастих груп.

Література

[1] *Крекнин В.А.* Локально ступенчатые 2-группы со сверхдополняемой циклической подгруппой // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — 3, №4. — С.137-209.

[2] *Chernikov N.S., Kreknin V.A., Trebenko O.O.* A generalization of completely factorizable groups// Matematychni Studii. — 2005. — **23**, №2. — P. 129-135.

[3] *Chernikov N.S., Trebenko O.O. RN* -groups with a supercomplemented cyclic p -subgroup // Bull. Univ. Kiev. — Ser. Phys. Math. — 2007. — №1. — P. 46-49.

[4] *Trebenko O.O.* On groups with a supercomlemented cyclic p -subgroup // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, №4. — С.153-164.

[5] *Trebenko D.Ya., Trebenko O.O.* On solvability of groups with a finite nilpotent supercomplemented subgroup // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. – Vol. 169, Issue 5. — P. 713-716. DOI:10.1007/s10958-010-0072-1.

[6] *Требенко О.О. RN*-групи із скінченною наддоповнюваною підгрупою // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки: Зб. наукових праць. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. — №11. — С.84-89.

[7] *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — Москва: Наука, 1980. — 384 с.

[8] *Курош А.Г.* Теория групп. 3-е изд. — Москва: Наука, 1967. — 648 с.

[9] *Obraztsov V.N.* A new embedding scheme for groups and some applications // J. Austral. Math. Soc. Ser.A. — 1996. — 61, №2. — P. 267-288.