Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2015, № 17. — С. 36–43.

Q_∞^*-зображення дійсних чисел, визначені двічі стохастичними матрицями і множини з ними пов'язані

В. П. Маркітан, М. В. Працьовитий
(Інститут математики НАН України)

Анотація. В статті вивчається Q_∞^*-зображення дробової частини дійсного числа, що є кодуванням дійсних чисел з нескінченним алфавітом за умови визначення його двічі стохастичною матрицею, породженою одним параметром. Досліджуються тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з обмеженнями на використання символів у Q_∞^*-зображенні числа.

Ключові слова: дробова частина дійсного числа, Q_∞^*-зображення, нескінченні двічі стохастичні матриці, циліндричні множини, міра Лебега.

Abstract. Considered in the article is the Q_∞^*-representation of the fractional part of a real number, which is a number coding with infinite alphabet under condition that it is deterimed by doubly-stochastic matrix depending on one parameter. Topological, metric properties of real number sets with restriction on using symbols in the Q_∞^*-representation are investigated.

Keywords: the fractional part of a real number, Q_∞^*-representation, infinite doubly-stochastic matrices, cylinder sets, Lebesgue measure.

1. Вступ

Значний клас математичних об'єктів зі складною локальною будовою (множин, функцій, розподілів ймовірностей, перетворень простору, динамічних систем тощо) відносно просто можна описати і вивчити завдяки використанню різних систем числення (зображення) дійсних чисел: зі скінченним та нескінченним алфавітом, суттєво надлишкових та з нульовою надлишковістю, з самоподібною геометрією та несамоподібною і т.д.

Q_∞^*-зображення дійсного числа з піввідрізка $[0;1)$, будучи узагальненням Q_∞-зображення, як система числення з нескінченним алфавітом та нульовою надлишковістю (кожне число має єдине зображення) було введене Працьовитим М.В. Нагадаємо його суть.

Нехай $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – алфавіт системи числення, $L = A \times A \times \ldots$ – простір послідовностей; $Q_\infty^* = ||q_{ik}||$ – задана матриця, яка володіє властивостями:

1. містить нескінченну кількість рядків і стовців;
2. $q_{ik} > 0 \ \ \forall i \in A, \ \ \forall k \in N$;
3. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_{ik} = 1$;
4. для довільної послідовності чисел $(\alpha_n) \in L$: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_{\alpha_n n} = 0$.

В даній роботі ми уточнюємо результати здобуті Працьовитим М.В. [1], для випадку, коли матриця є двічі стохастичною і визначається одним параметром; з'ясовуємо геометрію циліндричного зображення; досліджуємо топологічні властивості множин дійсних чисел з обмеженням на використання одного із символів у Q_∞^*-зображенні.

Означення **1.** Розклад числа $x \in [0;1)$ в ряд

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}\right] \equiv \Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}, \ \text{ де } \ \beta_{0k} \equiv 0, \beta_{ik} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} q_{jk}, \ \ i \in N, k \in N \quad (1)$$

називається Q_∞^*-*представленням*, а скорочений його запис $\Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ – Q_∞^*-*зображенням числа* x, визначеного матрицею Q_∞^*. При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою *цифрою (символом)* цього зображення. Цифра є символом у зображенні числа і не відіграє ролі числа у виразі ряду (1). Варто зазначити, якщо всі стовпці матриці Q_∞^* є однаковими, то Q_∞^*-зображення є Q_∞-зображенням.

2. Задача, що призводить до Q_∞^*-зображення

Розглянемо двійкове зображення довільного дійсного числа $x \in (0;1]$ і здійснимо перекодування його символів за наступним правилом:

$$x = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{a_k}1\ldots} = \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}, \qquad (2)$$

де $\Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}$ – формальний запис розкладу числа x в ряд:

$$x = \Delta^{2^\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k+k}},$$

Запис (2) встановлює відповідність між класичним двійковим зображенням дійсного числа $x \in (0;1]$ з двосимвольним алфавітом $A_2 = \{0,1\}$ і кодуванням його засобами нескінченно символьного алфавіту $A = \{0,1,2,3,...\}$.

Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \Delta^{2^\infty}_{\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_k \ldots}$$

у якої символи η_k – незалежні випадкові величини, які набувають значень $0,1,2,\ldots,i,\ldots$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, ...p_{ik}, ...$ відповідно ($p_{0k} + p_{1k} + p_{2k} + \ldots + p_{ik} + \ldots = 1$, $k \in \mathbb{N}$).

Теорема 1. *Функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ подається у вигляді*

$$F_\xi\left(x\right)=\beta_{a_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{a_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}\right],\quad \text{де}\quad \beta_{a_k(x)k}\equiv\sum_{j=a_k+1}^{\infty}p_{jk},\quad k\in N$$

Доведення. За означенням функції розподілу $F_\xi(x)=P\left\{\xi<x\right\}$. Враховуючи, що $x_1<x_2\Leftrightarrow\exists\, m:\ a_m(x_1)>a_m(x_2)$ і $a_i(x_1)=a_i(x_2)$, при $i<m$ то подію $\{\xi<x\}$ можна подати у вигляді об'єднання несумісних подій:

$$\{\xi<x\}=$$
$$=\{\eta_1>a_1(x)\}\cup\{\eta_1=a_1(x)\wedge\eta_2>a_2(x)\}\cup\ldots\cup\big\{\eta_j=a_j(x),j=\overline{1,k+1}\wedge\eta_k>a_k(x)\big\}\ldots.$$

Тому:

$$F_\xi(x)=P\left\{\xi<x\right\}=P\big\{\{\eta_1>a_1(x)\}\cup\{\eta_1=a_1(x)\wedge\eta_2>a_2(x)\}\cup$$
$$\ldots\cup\big\{\eta_j=a_j(x),j=\overline{1,k-1}\wedge\eta_k>a_k(x)\big\}\ldots\big\}=P\left\{\eta_1>a_1(x)\right\}+$$
$$+P\left\{\eta_1=a_1(x)\wedge\eta_2>a_2(x)\right\}+\ldots+P\big\{\eta_j=a_j(x),j=\overline{1,k-1}\wedge\eta_k>a_k(x)\big\}+\ldots$$

Врахувавши незалежність подій η_k, отримаємо:

$$F_\xi(x)=P\left\{\eta_1>a_1(x)\right\}+P\left\{\eta_1=a_1(x)\right\}\cdot P\left\{\eta_2>a_2(x)\right\}+\ldots+P\left\{\eta_1=a_1(x)\right\}\cdot$$
$$\cdot P\left\{\eta_2=a_2(x)\right\}\cdot\ldots\cdot P\left\{\eta_{k-1}=a_{k-1}(x)\right\}\cdot P\left\{\eta_k>a_k(x)\right\}+\ldots=\sum_{k=a_1+1}^{\infty}p_{k1}+p_{a_1(x)1}\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=a_2+1}^{\infty}p_{k2}+\ldots+\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}\cdot\sum_{k=a_k+1}^{\infty}p_{kk}+\ldots=\beta_{a_1(x)1}+\beta_{a_2(x)2}\cdot p_{a_1(x)1}+\ldots+\beta_{a_k(x)k}\cdot$$
$$\cdot\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}+\ldots=\beta_{a_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{a_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{a_j(x)j}\right],$$

що потрібно було довести. □

3. Нескінченні двічі стохастичні матриці

Означення **2.** *Нескінченною двічі стохастичною* матрицею називають матрицю $||q_{ik}||$, елементи якої є невід'ємними, а сума елементів кожного рядка і кожного стовпця дорівнює 1, тобто одночасно виконуються умови

1. $q_{ik}\geqslant 0$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}q_{ik}=1=\sum\limits_{i=0}^{\infty}q_{ik}$.

Очевидно, що перестановка будь-яких двох рядків або стовпців двічі стохастичної матриці залишає її двічі стохастичною.

Задачу про існування та кількість нескінченних двічі стохастичних матриць розв'язує наступне твердження.

Лема 1. *Якщо (a_n) – будь-яка послідовність невід'ємних чисел така, що*

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=1;$$

$$S_n\equiv a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad n\in N,$$

то матриця $\|q_{ij}\|$ *така, що*

$$q_{ij} = \begin{cases} a_{i+j-1}, & \text{якщо} \quad i \neq j; \\ a_{2i-1} + S_{i-1}, & \text{якщо} \quad i = j; \end{cases}$$

є нескінченною двічі стохастичною симетричною матрицею.

Доведення. Справді, симетричність матриці $\|q_{ij}\|$ є очевидною, разом з цим,

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_{ij} = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{2i-2} + (a_{2i-1} + S_{i-1}) + a_{2i} + a_{2i+1} + \ldots = 1.$$

□

4. Нескінченні двічі стохастичні матриці, залежні від одного параметру

Побудуємо нескінченну матрицю за наступним правилом: елементи матриці утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію зі знаменником $q \in (0;1)$ та першим членом $b = 1 - q$, тобто

$$Q_\infty^* = \begin{pmatrix} b & bq & bq^2 & \cdots & bq^{n-1} & \cdots \\ bq & bq^2 & bq^3 & \cdots & bq^n & \cdots \\ bq^2 & bq^3 & bq^4 & \cdots & bq^{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ bq^{n-1} & bq^n & bq^{n+1} & \cdots & bq^{2(n-1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{3}$$

Позначимо через S_k суму елементів k-го рядка матриці (8). Зрозуміло, що сума елементів k-го стовпця теж буде ріною S_k, оскільки матриця Q_∞^* симетрична. Обчислимо значення S_k:

$S_1 = \frac{b}{1-q} = \frac{b}{b} = 1;$

$S_2 = \frac{bq}{1-q} = \frac{bq}{b} = q;$

$S_3 = \frac{bq^2}{1-q} = \frac{bq^2}{b} = q^2;$

$\ldots$

$S_n = \frac{bq^{n-1}}{1-q} = \frac{bq^{n-1}}{b} = q^{n-1};$

$\ldots.$

Для виконання умови двічі стохастичності матриці Q_∞^* покладемо:

$q_{01} := b;$

$q_{12} := bq^2 + 1 - S_2 = bq^2 + 1 - q;$

$q_{23} := bq^4 + 1 - S_3 = bq^4 + 1 - q^2;$

$\ldots$

$q_{(n-1)n} := bq^{2(n-1)} + 1 - S_n = bq^{2(n-1)} + 1 - q^{n-1}$

$\ldots.$

Таким чином отримаємо матрицю вигляду :

$$Q^*_\infty = \begin{pmatrix} b & bq & bq^2 & \cdots & bq^{n-1} & \cdots \\ bq & bq^2+1-q & bq^3 & \cdots & bq^n & \cdots \\ bq^2 & bq^3 & bq^4+1-q^4 & \cdots & bq^{n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ bq^{n-1} & bq^n & bq^{n+1} & \cdots & bq^{2(n-1)}+1-q^{n-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{4}$$

Отже, доведено:

Лема 2. *Якщо для матриці Q^*_∞ виконуються умови:*

1. $q_{01} = b \in (0;1)$;

2. $b + q = 1$;

3. $q_{ik} = bq^{i+k-1}$ для всіх $i \neq k-1$, $k \in N$;

4. $q_{ik} = bq^{2(k-1)} + 1 - q^{k-1}$ для всіх $i = k-1$, $k \in N$,

то вона є двічі стохастичною.

5. Q^*_∞-зображення, визначене двічі стохастичною матрицею

З'ясуємо яких значень набуватимуть $\beta_{\alpha_k k}$ та $q_{\alpha_k k}$ для Q^*_∞-преставлення числа у (1), визначеного нескінченною двічі стохастичною матрицею (9). Оскільки $q_{\alpha_k k}$ – це елементи матриці (9), то

$$\begin{cases} q_{\alpha_k k} = bq^{\alpha_k+(k-1)} & \text{для всіх } \ \alpha_k \neq k-1, k \in \mathbb{N}, \\ q_{\alpha_k k} = bq^{2\alpha_k} + 1 - q^{\alpha_k} & \text{для всіх } \ \alpha_k = k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для $\beta_{\alpha_k k}$ справедливо:

1) при $\alpha_k < k$

$\beta_{\alpha_k k} = \sum\limits_{j=0}^{\alpha_k-1} q_{jk} = q_{0k} + q_{1k} + q_{2k} + \ldots + q_{\alpha_k k} = bq^{k-1} + bq^k + bq^{k+1} + \ldots + bq^{\alpha_k-1+k-1} =$
$= bq^{k-1} + bq^k + bq^{k+1} + \ldots + bq^{\alpha_k+k-2} = \frac{bq^{k-1}(1-q^{\alpha_k})}{1-q} = q^{k-1}(1-q^{\alpha_k})$;

2) при $\alpha_k \geqslant k$

$\beta_{\alpha_k k} = \sum\limits_{j=0}^{\alpha_k-1} q_{jk} = q_{0k} + q_{1k} + q_{2k} + \ldots + q_{(k-2)k} + q_{(k-1)k} + q_{kk} + \ldots + q_{\alpha_k k} =$
$= bq^{k-1} + bq^k + bq^{k+1} + \ldots + bq^{2k-3} + bq^{2k-2} + 1 - q^{k-1} + \ldots + bq^{\alpha_k+k-2} = \frac{bq^{k-1}(1-q^{\alpha_k})}{1-q} +$
$1 - q^{k-1} = q^{k-1}(1-q^{\alpha_k}) + 1 - q^{k-1} = +1 - q^{\alpha_k+k-1}$. Тобто

$$\begin{cases} \beta_{0k} = 0, \\ \beta_{\alpha_k k} = q^{k-1}(1-q^{\alpha_k}) & \text{для всіх } \ \alpha_k < k \in \mathbb{N}, \\ \beta_{\alpha_k k} = 1 - q^{\alpha_k+k-1} & \text{для всіх } \ \alpha_k \geq k \in \mathbb{N}; \end{cases} \tag{5}$$

Варто зазначити, якщо у зображенні $\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ визначеному матрицею (9) для $\alpha_k(x)$ справджується $\alpha_k \neq k-1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то

$$x = 1 - q^{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{\alpha_k k}(1-q)^{k-1} q^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha_i + \frac{(k-1)(k-2)}{2}},$$

де $\beta_{\alpha_k k}$ визначаються за формулами (5).

6. Геометрія циліндричного Q^*_∞-зображення, визначеного двічі стохастичною матрицею

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – впорядкований набір цілих невід'ємних чисел.

Означення **3.** Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ називається множина $\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ чисел $x \in [0;1)$, перші m цифр Q^*_∞- зображення яких є $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \left\{ x : \quad x = \Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots}, \quad a_{m+i} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

Для Q^*_∞-зображення, визначеного двічі стохастичною матрицею (9) справедливими є наступні властивості циліндрів:

1. $\bigcup\limits_{c_1=0}^{\infty} \bigcup\limits_{c_2=0}^{\infty} \ldots \bigcup\limits_{c_m=0}^{\infty} \Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = [0;1)$;
2. $\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m i}$;
3. $\min \Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m (i+1)} = \sup \Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m i}$, $i = 1, 2, \ldots$;
4. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають (рівні), причому

$$\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \Delta^{Q^*_\infty}_{c'_1 c'_2 \ldots c'_m} \Leftrightarrow c_i = c'_i \quad i = 1, 2, \ldots m;$$

5. Для довільної послідовності $(c_m) \in L$ переріз $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = x = \Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m \ldots}$ є точка півінтервала $[0;1)$;
6. $\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 \ldots c_m} = \left[\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m (0)}; \Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 \ldots c_{m-1} c_m + 1 (0)} \right)$.
7. Довжина циліндра обчислюється за формулою:

$$|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 \ldots c_m}| = b^m \prod_{i=1}^{m} q^{c_i + i - 1} \text{ при } c_i \neq i - 1;$$

Дійсно, $|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m}| = q_{\alpha_1 1} \cdot q_{\alpha_2 2} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_m m} = b q^{\alpha_1} \cdot b q^{\alpha_1 + 1} \cdot \ldots \cdot b q^{\alpha_m + (m-1)} = b^m \prod\limits_{i=1}^{m} q^{c_i + i - 1}$.

Якщо ж серед c_i міститься t символів для яких виконується рівність $c_i = i - 1$, то довжина циліндра обчислюється за формулою:

$$|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1 \ldots c_m}| = b^{m-t} \prod_{\substack{k=1 \\ c_k \neq k-1}}^{m} q^{c_k + k - 1} \prod_{\substack{k=1 \\ c_k = k-1}}^{m} (b q^{2 c_k} + q^{c_k} + 1).$$

8. Має місце рівність (основне метричне відношення):

$$\frac{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m}|} = \begin{cases} bq^{i+m}, & \text{якщо} \quad i \neq m, \\ bq^{2m} - q^m + 1, & \text{якщо} \quad i = m. \end{cases}$$

Справді, враховуючи властивість 7, маємо:

1) при $i \neq m$

$$\frac{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m i}| \cdot q_{i(m+1)}}{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m}|} = q_{i(m+1)} = bq^{i+m};$$

2) при $i = m$

$$\frac{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m}|}{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m m}| \cdot q_{m(m+1)}}{|\Delta^{Q^*_\infty}_{c_1\ldots c_m}|} = bq^{2m} - q^m + 1.$$

7. Множина чисел з обмеженням на вживання символа у Q^*_∞-зображенні числа, визначеного двічі стохастичною матрицею

Зафіксуємо ціле невід'ємне число c і розглянемо множину чисел, Q^*_∞ - зображення яких визначене матрицею (9) не містить символа c, тобто

$$D_c \equiv [Q^*_\infty; \bar{c}] = \left\{ x : x = \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \quad \text{де} \quad \alpha_k \neq c \in \{0,1,2,3,\ldots\} \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Теорема 2. *Множина D_c є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.*

Доведення. Доведемо, що D_c є ніде не щільною множиною за означенням, тобто покажемо, що в будь-якому інтервалі $(a;b) \subset [0;1)$ існує підінтервал, що не містить точок множини D_c. Враховуючи властивість (6) циліндричних множин нам достатньо вказати циліндр, що повністю лежить в $(a;b)$, але не має з $(a;b)$ спільних точок.

Нехай $a = \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ та $b = \Delta^{Q^*_\infty}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$. Оскільки $a < b \Rightarrow \exists k : \alpha_k < \beta_k$ та $\alpha_j = \beta_j$ при $j < k$. Тому $\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k[\alpha_{k+1}+1]} \subset (a;b)$ і $\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k[\alpha_{k+1}+1]c} \subset \Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k[\alpha_{k+1}+1]} \subset (a;b)$, а $\Delta^{Q^*_\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k[\alpha_{k+1}+1]c} \cap D_c = \varnothing$.

Отже, множина D_c є ніде не щільною множиною за означенням.

Покажемо, що $\lambda(D_c) > 0$:

1) якщо c=0, то $\lambda([0;1) \setminus (D_0)) = q_{01} + q_{02}(1-q_{01}) + q_{03}(1-q_{01})(1-q_{02}) + q_{04}(1 - - q_{01})(1-q_{02})(1-q_{03}) + \ldots = b + bq(1-b) + bq^2(1-b)(1-bq) + bq^3(1-b)(1-bq^2)(1 - - bq^3) + \ldots < b(1 + q(1-b) + q^2(1-b) + q^3(1-b) + \ldots) = b(1 + \dfrac{q(1-b)}{1-q}) = 1 - q + q^2$, звідки $\lambda(D_0) > q - q^2 > 0$.

2) якщо $c \in \mathbb{N}$, то

$\lambda([0;1) \setminus (D_c)) = q_{c1} + q_{c2}(1-q_{c1}) + q_{c3}(1-q_{c1})(1-q_{c2}) + q_{c4}(1-q_{c1})(1-q_{c2})(1-q_{c3}) + + \ldots + q_{cc}(1-q_{c1})(1-q_{c2})(1-q_{c3}) \cdot \ \ldots \cdot (1-q_{c(c-1)}) + q_{c(c+1)}(1-q_{c1})(1-q_{c2})(1-q_{c3}) \cdot \cdot \ldots \cdot (1-q_{c(c-1)})(1-q_{cc}) + q_{c(c+2)}(1-q_{c1})(1-q_{c2})(1-q_{c3}) \cdot \ \ldots \cdot (1-q_{c(c-1)}) \cdot (1-q_{cc}) \cdot \cdot (1-q_{c(c+1)}) + \ldots = bq^c + bq^{c+1}(1-bq^c) + bq^{c+2}(1-bq^c)(1-bq^{c+1}) + bq^{c+3}(1-bq^c) \cdot \cdot (1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2}) + \ldots + bq^{2c-1}(1-bq^c)(1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2}) \cdot \ \ldots \cdot (1-bq^{2c-2}) + + (bq^{2c} + 1 - q^c)(1-bq^c)(1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2}) \cdot \ \ldots \cdot (1-bq^{2c-2})(1-bq^{2c-1}) + bq^{2c+1} \cdot \cdot (1-bq^c)(1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2}) \cdot \ \ldots \cdot (1-bq^{2c-2})(1-bq^{2c-1})q^c(1-bq^c) + bq^{2c+2} \cdot$

$\cdot(1-bq^c)(1-bq^{c+1})(1-bq^{c+2})\cdot\ldots\cdot(1-bq^{2c-2})(1-bq^{2c-1})q^c(1-bq^c)(1-bq^{2c+1})+\ldots=S<$
$<bq^c+bq^{c+1}+bq^{c+2}+bq^{c+3}+\ldots+bq^{2c-1}+bq^{2c}+1-q^c+bq^{3c+1}(1-bq^c)^2+bq^{3c+2}(1-$
$-bq^c)^2+\ldots=bq^c\cdot\dfrac{1\cdot(1-q^{c+1})}{1-q}+1-q^c+\dfrac{(1-bq^c)^2bq^{3c+1}}{1-q}=1-q^{2c+1}+(1-q^c+q^{c+1})^2q^{3c+1}$, звідки маємо

$$\lambda(D_c)>q^{2c+1}-(1-q^c+q^{c+1})^2q^{3c+1}>q^{2c+1}-q^{3c+1}=q^{2c+1}(1-q^c)>0. \qquad \square$$

Оцінимо міру $\lambda(D_c)$ зверху.

$\lambda([0;1)\setminus(D_c))=S>bq^c+bq^{c+1}(1-bq^c)+bq^{c+2}(1-bq^c)^2+bq^{c+3}(1-bq^c)^3+\ldots+$
$+bq^{2c-1}(1-bq^c)^{c-1}+bq^{2c}(1-bq^c)^c+bq^{3c+1}(1-b)^{c+1}(1+(1-bq^{2c+1})q+(1-bq^{2c+1})^2q^2+\ldots)=$
$=bq^c+bq^{c+1}(1-b)+bq^{c+2}(1-b)^2+bq^{c+3}(1-b)^3+\ldots+bq^{2c-1}(1-b)^{c-1}+bq^{2c}(1-$
$-b)^c+bq^{3c+1}(1-b)^{c+1}\dfrac{1}{b(1+q^{2(c+1)})}>\dfrac{bq^c(1-q^{2(c+1)})}{1-q^2}+\dfrac{q^{4(c+1)-2}}{1+q^c}=\dfrac{q^c-q^{3c+2}}{1+q}+$
$+\dfrac{q^{4(c+1)-2}}{1+q^c}$.

Тому, $\lambda(D_c)<1+\dfrac{q^{3c+2}-q^c}{1+q}-\dfrac{q^{4(c+1)-2}}{1+q^c}$.

Наслідок 1. *Для міри Лебега множини D_c $(c\neq 0)$ справедливо*

$$q^{2c+1}-(1-q^c+q^{c+1})^2q^{3c+1}<\lambda(D_c)<1+\frac{q^{3c+2}-q^c}{1+q}-\frac{q^{4(c+1)-2}}{1+q^c}.$$

Література

[1] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[2] Працьовитий М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — 68 с.

[3] Працьовитий М.В. Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — № 14.— С. 189–216.

[4] Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.