Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2015, № 17. — С. 44–52.

Вплив параболоїдального включення на осесиметричне гармонічне поле

М. А. Мартиненко
Національного університету харчових технологій (Україна, Київ)

Анотація. Аналітичним методом розв'язана задача про знаходження гармонічного поля за заданим його потоком на параболоїдальному поверхневому сегменті S. Відмінність поставленої проблеми від задач Діріхле, Неймана в тому, що поверхня S є незамкненою. Задача зведена до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма другого роду і показано, що в околі граничної лінії поверхні S потік має кореневу особливість.

Ключові слова: гармонічна функція, дуальні рівняння, сингулярність потоку.

Abstract. A task of finding of the harmonic field by determined its flow on a paraboloidal surface segment S was by the analytical method. This problem differs from Dirichle and Neuman tasks by surface S unlocking. The problem is reduced to second kind integral-differential equation of Fredholm and has been shown that in the vicinity of the boundary line of surface S has a root flow feature.

Key words: harmonic function, dual equations, singularity flow.

Постановка проблеми. Класична математична фізика розглядає три основні задачі: задачу Діріхле, задачу Неймана і мішану задачу. Об'єднує ці задачі те, що в них розшукується гармонічна функція в області G за відомим її значенням або потоком на замкненій (повній) поверхні S, яка обмежує область G [1]. В даній роботі розглядається задача про знаходження потенціального поля в просторі за відомим його потоком на поверхневому параболоїдальному сегменті. Суттєва її відмінність від класичних задач полягає в тому, що в ній граничні значення гармонічного поля задаються на частині криволінійної поверхні. *Актуальність, практична і теоретична значимість.* Розв'язання запропонованого класу задач відкриває шлях до дослідження фізичних полів в околі дефектів різного походження (тріщини, тонкостінні включення та ін.). Такі проблеми є актуальними і мають теоретично-практичну значимість, наприклад, в задачах гідростатики, електростатики, теплопровідності.

Зв'язок з існуючими напрямками наукових досліджень. Задачу про знаходження гармонічного поля за відомими його значеннями на поверхневому криволінійному сегменті можна розглядати як узагальнення класичних задач математичної фізики.

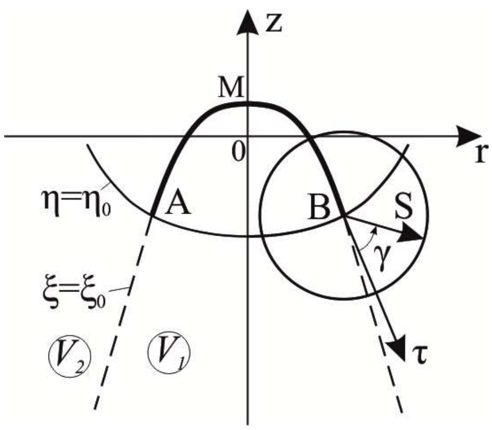

Рис. 1

Дійсно, якщо, наприклад, сферичний сегмент із заданим на ньому потоком продовжити до повної поверхні сфери, то прийдемо до класичної задачі Неймана для кулі і простору з кульовою порожниною.

Публікації з даної тематики. До даного класу задач слід віднести роботу [2], де досліджено температурне гармонічне поле із заданим його потоком на сферичному сегменті.

Методика, запроваджена в даній роботі, може бути розповсюджена на широкий клас задач про знаходження динамічної гармонічної функції в просторі за заданим її значенням, або потоком на сегменті поверхні другого порядку.

Постановка задачі. Нехай трьохвимірне тіло V, яке містить тонке параболоїдальне включення, знаходиться в осесиметричному гармонічному полі (рис.1). Включення будемо моделювати відповідним математичним розрізом по поверхні S. Вважаємо, що потік поля через поверхню S відсутній ("параболоїдальна гребля для потоку").

Задачу будемо розглядати в параболоїдальних кординатах обертання $\varepsilon, \eta, \varphi$, які пов'язані з декартовими координатами співвідношеннями [3]:

$$x = \xi\eta\cos\varphi; y = \xi\eta\sin\varphi; z = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \nu^2\right), \tag{1}$$

$$(0 \le \xi < \infty; 0 \le \eta < \infty; 0 \le \varphi < 2\pi)$$

а з циліндричними координатами формулами:

$$z = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \eta^2\right); \rho = \xi\eta; \varphi = \varphi. \tag{2}$$

Враховуючи масштабні коефіцієнти Ламе [4]:

$$h_\xi = h_\eta = h = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, h_\varphi = \xi\eta \tag{3}$$

осесиметричне рівняння Лапласа $\Delta F = 0$ в параболоїдальних координатах обертання запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial F}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right) = 0. \tag{4}$$

Розіб'ємо наш простір на дві області: внутрішню область $V_1(\xi < \xi_0)$ і зовнішню $V_2(\xi > \xi_0)$ (рис. 1). Тоді математичний розріз буде лежати на поверхні $S(\xi = \xi_0; 0 \leq \eta \leq \eta_0)$. Будемо вважати, що осесиметричне гармонічне поле в просторі без включення нам відоме $F_0(\xi, \eta)$, а через $T(\xi, \eta)$ позначимо збурене параболоїдальним включенням гармонічне поле, яке нам необхідно знайти. Відповідно до принципу суперпозиції сумарне гармонічне поле в тілі запишемо у вигляді:

$$F(\xi, \eta) = F_0(\xi, \eta) + T(\eta, \xi) \tag{5}$$

де $T(\xi, \eta)$ — невідома гармонічна функція збурення, $F_0(\xi, \eta)$ — задана.

Так як потік гармонічного поля через поверхню S дорівнює нулеві, а гармонічне поле і його потік на поверхні параболоїда поза розрізом $(\xi = \xi_0, \eta > \eta_0)$ неперервні, то граничні умови запишуться у вигляді:

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} T_1(\xi, \eta); (\xi < \xi_0, 0 < \eta < \infty), \\ T_2(\xi, \eta); (\xi > \xi_0, 0 < \eta < \infty), \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left[F_0(\xi, \eta) + T(\xi, \eta)\right] = 0, \quad (\xi = \xi_0; 0 \leq \eta \leq \eta_0), \\ &\frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial n} = \frac{\partial T_2(\xi, \eta)}{\partial n} = -\frac{\partial F_0(\xi, \eta)}{\partial n} = \Pi_0(\eta), \quad (\xi = \xi_0, 0 \leq \eta \leq \infty). \end{aligned} \tag{7}$$

Як видно, на поверхні параболоїда для потоку виконується умова:

$$\frac{\partial T_1(\xi, \eta)}{\partial n} = \frac{\partial T_2(\xi, \eta)}{\partial n}, \quad (\xi = \xi_0; 0 \leq \eta \leq \infty), \tag{8}$$

а поза включенням:

$$T_1(\xi, \eta) = T_2(\xi, \eta), \quad (\xi = \xi_0; 0 \leq \eta \leq \infty) \tag{9}$$

Аналіз граничних умов (6) — (9) показує, що ця задача не належить до класичних задач математичної фізики (Діріхле, Неймана, мішаної задачі) [1]. Тут гібридні граничні умови і тому необхідно шукати іншу методику для розв'язання поставленої задачі.

Розв'язок рівняння Лапласа (4) шукаємо за допомогою інтегрального перетворення Ханкеля і формули обертання [5]:

$$\begin{aligned} &\bar{f}(\tau) = \int_0^\infty f(\eta) J_v(\tau\eta)\eta d\eta; \quad (0 \leq \tau < \infty); \\ &\bar{f}(\tau) = \int_0^\infty f(\tau) J_v(\tau\eta)\tau d\tau; \quad \left(v > -\frac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

де $J_v(\tau\eta)$ — функції Бесселя першого роду [5]. Умовою існування інтегрального перетворення Ханкеля для кусково-неперервної функції $f(\eta)$ є збіжність інтегралу:

$$\int\limits_0^\infty f(\eta)\sqrt{\eta}d\eta.$$

Якщо до (4) застосувати перетворення Ханкеля (10) і врахувати поведінку функцій при $\xi > \xi_0$ і $\xi < \xi_0$, то було показано, що осесиметрична гармонічна функція $T(\xi,\eta)$ в областях $V_1(\xi < \xi_0)$ і $V_2(\xi > \xi_0)$ представляється наступними інтегралами Ханкеля [5]:

$$\begin{aligned} T_1(\xi,\eta) &= \int\limits_0^\infty \alpha(\tau)I_0(\tau\xi)J_0(\tau\eta)\tau d\tau; \quad (\xi < \xi_0); \\ T_2(\xi,\eta) &= \int\limits_0^\infty \beta(\tau)K_0(\tau\xi)J_0(\tau\eta)\eta d\tau \quad (\xi > \xi_0), \end{aligned} \tag{11}$$

де $I_n(\tau\xi)$ — модифіковані функції Бесселя першого роду, $K_n(\tau\xi)$ — модифіковані функції Макдональда [5], а $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ — невідомі щільності.

Потік гармонічного поля знаходиться шляхом диференціювання $T_1(\xi,\eta)$ і $T_2(\xi,\eta)$ по нормалі $\bar{n}$ до поверхні $\xi = \xi_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(\xi,\eta)}{\partial n} &= \int\limits_0^\infty \alpha(\tau)I_1(\tau\xi)J_0(\tau\eta)\tau^2 d\tau \quad (\xi < \xi_0); \\ \frac{\partial T_2(\xi,\eta)}{\partial n} &= \int\limits_0^\infty \beta(\tau)K_1(\tau\xi)J_0(\tau\eta)\tau^2 d\tau \quad (\xi > \xi_0). \end{aligned} \tag{12}$$

Невідомі щільності $\alpha(\tau), \beta(\tau)$ необхідно знайти з гібридних граничних умов (6), (7)

Розв'язання задачі. З умови (8) виключимо одну із невідомих, наприклад, $\beta(\tau)$. Маємо:

$$\beta(\tau) = -\frac{\alpha(\tau)I_1(\tau\xi_0)}{K_1(\tau\xi_0)}. \tag{13}$$

Задовольняючи послідовно іншим граничним умовам, приходимо до наступної системи парних інтегральних рівнянь з ядрами у вигляді функцій Бесселя:

$$\begin{cases} \int\limits_0^\infty \alpha(\tau)I_1(\tau\xi_0)J_0(\tau\eta)\tau^2 d\tau = -\dfrac{\partial F_0}{\partial n} = \Pi_0(\eta); \ (\xi = \xi_0; \ 0 < \eta < \eta_0); \\ \int\limits_0^\infty \dfrac{\alpha(\tau)}{K_1(\tau\xi_0)}J_0(\tau\eta)d\tau = 0; \quad (\eta > \eta_0). \end{cases} \tag{14}$$

Безпосереднє застосування методу Фур'є для розв'язку цієї системи не приносить результату, а тому вводимо нову невідому функцію $\varphi(t)$ через інтегральний оператор

I [6]:

$$\frac{\alpha(\tau)}{K_1(\tau\xi_0)} = \int\limits_0^{\eta_0} \varphi(\tau)\sin\tau t dt = I, \tag{15}$$

де $\varphi(t),\ \varphi'(t)$ — неперервні функції на проміжку $[0,\eta_0]$ і $\varphi(0)=0$.

Інтегральний оператор I тотожньо задовольняє другому рівнянню системи (14) на основі наступного значення невласного інтегралу:

$$\int\limits_0^{\infty} \sin\tau t J_0(\tau\eta)d\tau = \frac{H(t-h)}{\sqrt{t^2-\eta^2}};\quad H(t-\eta) = \begin{cases} 1;\ t>\eta, \\ 0;\ t<\eta, \end{cases} \tag{16}$$

де $H(t-\eta)$ — функція Хевісайда [7].

Якщо скористатися інтегральним представленням функції Бесселя $J_0(\tau\eta)$ [7],

$$J_0(\tau\eta) = \frac{2}{\pi}\lim_{0}^{\eta}\frac{\cos\tau x dx}{\sqrt{\eta^2-x^2}} \tag{17}$$

і підставити (15), (17) в перше рівняння системи (14), то після відповідних перетворень отримаємо інтегральне рівняння Абеля [8]

$$\int\limits_0^{\eta}\frac{q(x)dx}{\sqrt{\eta^2-x^2}} = -\frac{\partial F_0}{\partial n} = \Pi_0(\eta);\quad (0\le\eta\le\eta_0), \tag{18}$$

де

$$g(x) = \int\limits_0^{\eta_0}\varphi(t)M(t,x)dt, \tag{19}$$

$$M(t,x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} I_1(\tau\xi_0)K_1(\tau\xi_0)\sin\tau t\cos\tau x\tau^2 d\tau. \tag{20}$$

Розв'язок рівняння (18) має вигляд [8]

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{s\Pi_0(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}}. \tag{21}$$

Асимптотичний аналіз невласного інтегралу (20) показує, що він є розбіжним при $x=t$. Якщо в нижній межі інтеграл (20) особливостей немає, то при $\tau\to\infty$ поведінка (20) визначається наступною асимптотикою добутку функцій Бесселя і Макдональда [7]:

$$I_1(\tau\xi_0)K_1(\tau\xi_0) \approx \frac{1}{2\tau\xi_0} - \frac{3}{16\tau^3\xi_0^3} = \alpha_{11}(\tau);\quad \tau\to 1 \tag{22}$$

Отримане наближення дає можливість суттєво поліпшити збіжність невласного інтегралу (20) шляхом виділення головних складових, тобто:

$$\begin{aligned} I_1(\tau\xi_0)K_1(\tau\xi_0) &= \frac{1}{2\tau\xi_0} - \frac{3}{16\tau^3\xi_0^3} + [I_1(\tau\xi_0)K_1(\tau\xi_0) - \alpha_{11}(\tau\xi_0)] \\ I_1(\tau\xi_0)K_1(\tau\xi_0) &= \alpha_{11}(\tau) \sim 0(\tau^{-5});\ \ \tau\to\infty \end{aligned} \tag{23}$$

Якщо підставити (23) в (20) і провести відповідні перетворення, то було показано, що інтеграли від перших двох доданків знаходяться в явному вигляді в класі узагальнених функцій [9] на підставі відомих і отриманих рівностей:

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \sin\tau t\cos\tau x\tau d\tau = -\frac{\pi}{2}\delta_t'(t-x), \\ &\int\limits_0^\infty \frac{\sin\tau t\cos\tau x}{\tau}d\tau = \frac{\pi}{2}H(t-x), \end{aligned} \tag{24}$$

де $\delta(t-x)$ — дельта–функція Дірака [9].

Враховуючи (24) вираз $M(t,x)$ (20), представляємо у вигляді:

$$M(t,x) = -\frac{1}{2\xi_0}\delta_t'(t-x) - \frac{3}{18\xi_0^3} - H(t-x) + K_{11}(x,t), \tag{25}$$

де

$$K_{11}(x,t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty [I_1(\tau\xi_0)K_{11}(\tau\xi_0) - \alpha_{11}(\tau\xi_0)]\sin\tau t\cos\tau x\tau^2 d\tau. \tag{26}$$

Якщо врахувати рівність (25), а також

$$\int \varphi(t)\delta_t'(t-x)dt = -\varphi'(x), \tag{27}$$

то (21) перетвориться в наступне інтегро–диференціальне рівняння Фредгольна другого роду [10]

$$\frac{1}{2\xi_0}\varphi'(x) - \frac{3}{16\xi_0^2}\int\limits_x^{\eta_0}\varphi(t)dt + \int\limits_0^{\eta_0}\varphi(t)K_{11}(x,t)dt = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{s\Pi_0(s)ds}{\sqrt{x^2-s^2}} = \phi(x).$$

Числові методи розв'язання таких рівнянь сьогодні детально розроблені в літературі [10].

Локальний аналіз гармонічного поля. Так як концентрація фізичних характеристик спостерігається в околі особливих точок, ліній, поверхонь, то в даній задачі необхідно дослідити фізичні поля в околі лінії L, яка є перетином двох поверхонь $S_1(\xi=\xi_0)$ і $S_2(\eta=\eta_0)$. На рис. 1 показано переріз простору площиною $\varphi = const$. В силу осьової симетрії достатньо проаналізувати поля в околі т. $B(\xi_0,\eta_0)$, яка є початком локальної полярної системи координат s,γ.

Як показує аналіз формул (11), (12), поведінка $T(\xi,\eta)$ і $\dfrac{\partial T(\xi,n)}{\partial n}$ залежить від порядку щільності $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ при $\tau \gg 1$. Тому (15) запишемо у вигляді:

$$I = \left[-\varphi(\eta_0)\frac{\cos\tau\eta_0}{\tau} + \int\limits_0^{\tau_0}\varphi'(t)\frac{\cos\tau t}{\tau}dt\right]; \quad \varphi(0)=0. \tag{28}$$

З (28) видно, що в силу неперервності і обмеженості $\varphi'(t)$ другий доданок має порядок $0(\tau^{-2})$, а перший $0(\tau^{-1})$ при $\tau \gg 1$ або $\tau\to\infty$. Тому перший доданок в (28) і асимптотика $K_1(\tau\xi)I_1(\tau\xi)$ при $\tau???1$ визначає порядок концентрації фізичних полів в малому околі лінії L (т. $B(\xi_0, \eta_0)$) .

Позначимо:

$$\alpha(\tau) \approx -\varphi(\eta_0)\frac{\cos\tau\eta_0}{\tau} = \bar{\alpha}(\tau). \tag{29}$$

Знайдемо потік гармонічного поля на поверхні параболоїда поза розрізом ($\xi = \xi_0; \eta > \eta_0$).

Враховуючи інтегральне представлення функції Бесселя $J_0(\tau\eta)$ (17), а також представлення невідомої щільності $\alpha(\tau)$ через інтегральний оператор I (15), потік гармонічного поля (12) запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\eta \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - x^2}}\left\{\int\limits_0^{\eta_0}\varphi(t)\left[\int\limits_0^\infty K_1(\tau\xi_0)I_1(\tau\xi_0)\cos\tau x\sin\tau t\tau^2 s\tau\right]\right\}dx, \quad \eta > \eta_0 \tag{30}$$

Детальний аналіз показує, що точка $\eta = \eta_0$ є особливою. Тому зовнішній інтеграл розіб'ємо на суму трьох інтегралів:

$$\int\limits_0^\eta = \left[\int\limits_0^{\eta_0-\xi} + \int\limits_{\eta_0-\xi}^{\eta_0+\xi} + \int\limits_{\eta_0+\xi}^{\eta}\right]. \tag{31}$$

При знаходженні першого інтегралу враховуємо (18) — (21), останній інтеграл знаходиться за умови $x > t$, і тому $M(t, x) = K_{11}(x, t)$ (26), середній інтеграл від регулярних складових дорівнює нулеві, а в околі особливої точки $\eta = \eta_0$ отримано:

$$\int\limits_{\eta_0-\xi}^{\eta_0+\xi} \approx -\frac{\varphi(\eta_0)}{\xi_0\pi}\int\limits_{\eta_0-\xi}^{\eta_0+\xi}\frac{1}{\sqrt{\eta^2 - x^2}}\left[\int\limits_0^\infty \cos\tau x\cos\tau\eta_0 d\tau\right]dx = -\frac{\varphi(\eta_0)}{2\xi_0}\frac{1}{\sqrt{\eta^2 - \eta_0^2}}; \quad (\eta > \eta_0) \tag{32}$$

З врахуванням (32) і сказаного перед цим, для потоку гармонічного поля на поверхні параболоїда поза включенням була отримана формула:

$$\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial n} = -\frac{\varphi(\eta_0)}{2\xi_0}\frac{1}{\sqrt{\eta^2 - \eta_0^2}} + \int\limits_0^{\eta_0}\frac{\Pi_0(x)dx}{\sqrt{\eta^2 - x^2}} + \int\limits_{\eta_0}^{\eta}\frac{1}{\sqrt[1]{\eta^2 - x^2}}\left[\int\limits_0^\infty \varphi(t)K(t, x)dt\right]dx, \quad (t < x). \tag{33}$$

Як бачимо, при $\eta \to \eta_0$ потік гармонічного поля має кореневу сингулярність. Цей результат адекватний тим загальноприйнятим міжнародним науковим висновкам, які були отримані при дослідженні бігармонічних полів, наприклад, в задачах математичної теорії пружності з подібними гібридними граничними умовам [6]. По аналогії з іншими задачами фізики і механіки соцільних середовищ, введемо коефіцієнт інтенсивності потоку гармонічного поля K_Π за формулою:

$$K_\Pi = \lim_{l_0 \to 0}\frac{\partial F(\xi_0, \eta)}{\partial \eta}\sqrt{2l_0,} \tag{34}$$

де l_0 найкоротша відстань від т. $M(\xi_0, \eta)$ до т. $B_0(\xi_0, \eta_0)$. Користуючись загальною теорією тензорного аналізу [4], можна показати, що:

$$l_0 = \frac{1}{2}\left\{\eta\sqrt{\xi_0^2+\eta^2} - \eta_0\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2} + \xi_0^2\ln\frac{\eta+\sqrt{\xi_0^2+\eta^2}}{\eta_0+\sqrt{\xi_0^2+\eta_0^2}}\right\}. \tag{35}$$

Помноживши (33) на $\sqrt{2l_0}$, а після цього здійснюючи граничний перехід при $\eta \to \eta_0$, отримуємо формулу для розрахунку коефіцієнта інтенсивності потоку гармонійного поля:

$$K_\eta = -\frac{\varphi(\eta_0)}{2\xi_0\sqrt{\eta_0}}\sqrt[4]{\xi_0^2+\eta_0^2}. \tag{36}$$

Тут необхідно зауважити, що при оцінці міцності і надійності елементів конструкцій з дефектами типу включень, тріщин, в критеріях міцності враховуються не поле напружень в тілі, а лише граничні рівності, які базуються на значеннях коефіцієнтів інтенсивності напружень [11].

Здійснимо асимптотичне інтегрування потоку гармонічного поля (12) в околі граничного кола параболоїдального включення. Для цього введемо локальну полярну систему координат s, γ так, як показано на рис. 1. Для достатньо малих значень були отримані наступні наближення:

$$\begin{aligned}&(\xi-\xi_0)\sqrt{\xi^2+\eta_0^2} \approx s\sin\gamma;\quad (\eta-\eta_0)\sqrt{\xi_0^2+\eta^2} \approx s\cos\gamma;\\ &(\xi-\xi_0)+\eta^2-\eta_0^2-2i\eta_0(\xi-\xi_0) \approx 2\eta_0 s(\xi^2+\eta^2)^{-0{,}5}e^{i\gamma}\end{aligned} \tag{37}$$

Якщо врахувати асимптотику функцій $l_n(x)$, $K_n(x)$ при великих значення x:

$$\begin{aligned}I_n(x) &\approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1-\frac{4n^2-1}{8x}+\ldots\right];\\ K_n(x) &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}e^{-x}}\left[1+\frac{4n^2-1}{8x}+\ldots\right],\end{aligned} \tag{38}$$

а також асимптотичне наближення невласного інтегралу [7]:

$$\begin{gathered}\int_0^\infty e^{pt}J_v(qt)dt = \frac{q^v}{\sqrt{p^2+q^2}(p+\sqrt{p^2+q^2})};\\ Rev > -1;\ Re\rho > 0;\ p = \xi - e_0 - i\eta_0;\ q = eta,\end{gathered} \tag{39}$$

то після ряду громіздких аналітичних асимптотичних перетворень для потоку (12) було отримано наступне перше наближення в околі лінії L

$$\frac{\partial T_2}{\partial n} \approx K_n\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{2s}}, \tag{40}$$

де K_n визначається за формулою (36). Максимальне значення локальний потік досягає при γ і дорівнює нулеві при $\gamma = \pi$.

Необхідно звернути увагу на важливість формули (40). ЇЇ практичне значення таке, як і в задачах математичної теорії пружності для тіл ослаблених тріщинами, де локальний аналіз поля напружень складає основу розрахунку елементів на міцність.

Обґрунтування цієї наукової концепції підтверджено практично. В роботах [11, 12] відмічається, що для сталі радіус околу, де мають суттєві розходження між локальними теоретичними та експериментальними даними, має порядок пів міліметра. Тому цю сингулярність, як стверджується в монографії [13], «не слід розглядати як докорінне протиріччя лінійної теорії пружності дослідам. Навпаки, в рамках лінійної теорії пружності і сильно спрощеної схематизованої постановки задачі, ця обставина є хорошим відображенням дійсності». Ця наукова концепція справедлива і при аналізі гармонічних полів.

Висновки.

1. В роботі запропонований аналітичний метод знаходження гармонічної функції в просторі за відомим її потоком на поверхневому параболоїдальному сегменті.
2. Відмічено, що зовнішня і внутрішня задача Неймана для параболоїда є частинним випадком розглянутої задачі.
3. Задача зведена до інтегро-диференціального рівняння Фредгольма другого роду і показано, що всі характеристики потенціального поля знаходяться через його розв'язок.
4. Проаналізовано локальне гармонічне поле в околі граничної лінії поверхневого сегмента і показано, що потік при наближенні до граничної лінії сегмента має кореневу сингулярність.

Література

[1] *Мартиненко М.А., Легеза В.П.* Інженерні задачі математичної фізики. — К.: НУХТ. 2008. — 389 с.

[2] *Мартиненко М.А., Лебедєва І.В.* Розподіл температури в пружному тілі зі сферичним розрізом. Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. — 2009 р., №4.

[3] *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.— Киев: Наук. думка, 1979. — 264 с.

[4] *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ. — М.: Физматгиз, 1963. — 412 с.

[5] *Снеддон И.* Преобразования Фурье. — М.: ИЛ, 1966.— 667 с.

[6] *Мартиненко М.А.* Мішані просторові задачі математичної теорії пружності: монографія / — К.: Освіта України. 2012. — 376 с.

[7] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949. — 798 с.

[8] *Забрейко П.П.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 448 с.

[9] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз. 1968. — 439 с.

[10] *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев: Наук. думка, 1986. — 544 с.

[11] *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Ковчик С.Е.* Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. / Киев: Наук. думка, 1977. — 278 с.

[12] *Нойбер Г.* Концентрация напряжений / Пер. с нем. Под ред. А.И. Лурье.— М.–Л.: Гостехиздат, 1947. — 204 с.

[13] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1973. — Т.2. — 584 с.