Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2015, № 17.— С. 83–106.

УДК 511.72+517.5

Нега–двійкове представлення дійсних чисел і його застосування

Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В., Лисенко І.М.
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Анотація. Для двійкової системи числення з основою (-2), яку іноді називають нега–двійковою, розглядаються питання представлення та зображення дійсних чисел (натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних), їх ідентифікації та порівняння; описується геометрія цього зображення чисел і обгрунтовується висновок, що цей спосіб кодування чисел засобами двосимвольного алфавіту не породжує нової геометрії (нових метричних відношень), а є лише тривіальним перекодуванням класичного двійкового зображення. Запропоновано нову систему кодування з двосимвольним алфавітом і нульовою надлишковістю, що грунтується на розкладах чисел в знакопочережні ряди.

Ключові слова. Двійкова система числення, нега–двійкова система числення; кодування (зображення) дійсних чисел; геометрія зображення чисел; циліндрична множина; основне метричне відношення; інверсор цифр зображення.

Це дослідження частково підтримано програмою FP7-PEOPLE-IRSES, ґрант № PIRSES-GA-2013-612669

Abstract. We study a binary numeral system with base (-2); it is called negabinary numeral system sometimes. We consider questions about expansion and representation of real numbers (positive integer, integer, rational, and irrational numbers) as well as identification and comparison of numbers. Geometry of this representation of numbers is described. We also prove that this encoding of numbers by means of two-symbol alphabet does not generate a new geometry (new metric relations); this is just a trivial conversion of classic binary representation. We propose new encoding system with two-symbol alphabet that based on expansions of numbers in alternating series.

Key words. Binary numeral system, negabinary numeral system; encoding (representation) of real numbers; geometry of representation of numbers; cylindrical set; basic metric relation; inversor of digits of representation.

This research was partially supported by FP7-PEOPLE-IRSES program, grant no. PIRSES-GA-2013-612669

Вступ

Числові системи, які використовуються в математиці та її застосуваннях (система натуральних, цілих, раціональних, дісних, комплексних, гіперкомплексних чисел) обслуговують системи числення. Нагадаємо, що *системою числення* називається сукупність математичних засобів (умов) для

1) представлення=подання (математичного вираження);
2) зображення (кодування, скороченого, формального запису);
3) найменування чисел;
4) їх ідентифікації та порівняння;
5) а також побудови арифметики, зокрема правил арифметичних дій, обгрунтування ознак подільності тощо.

Таким чином, дійсне число у системі числення має свій математичний зміст і форму існування, що забезпечується умовами 1) та 2).

Існує багато принципово різних двосимвольних систем зображення (кодування) дійсних чисел. Найпоширенішою та широковживанішою системою, що обслуговує множину дійсних чисел, є класична двійкова система, в якій алфавіт (набір цифр) містить два елементи 0 та 1 і дійсне число x подається (представляється) у вигляді суми своєї цілої та дробової частин: $x = [x] + \{x\} = \pm u + \{x\}$, де $u \in \mathbb{N}$ і

$$u = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0 \equiv (a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_2, \quad a_j \in \{0; 1\},$$
$$\{x\} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots \equiv \Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}, \quad \alpha_j \in \{0; 1\},$$

або більш компактно:

$$x = \pm \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n 2^n \right), \ a_n \in A.$$

Винайдення цієї системи нумерації натуральних чисел приписують китайському імператору Фо Гі, який жив в 4 ст. до н.е. В 1697 р. Г. Лейбніц розробив правила виконання арифметичних операцій у двійковій системі числення і звернув увагу на надзвичайну їх простоту. Особливої популярності і застосовності в цифровій техніці вона почала набувати з 1946 р., коли видатний американський вчений, фізик і математик Джон фон Нейман у відомому звіті Пристанського інституту досліджень"Попередній розгляд логічних конструкцій електронно-обчислювального пристрою" переконливо обгрунтував принципові переваги двійкової нумерації чисел як універсального (загального) способу кодування інформації в цифровій техніці.

Подальший розвиток цифрової техніки (аналого-цифрового і цифро-аналогового перетворень інформації) виявив кілька слабких сторін (недоліків) класичної двійкової системи числення:

1) зображення (двійкові коди) двох сусідніх натуральних чисел можуть відрізнятись у великій кількості розрядів (наприклад, $63 = (0111111)_2$, $64 = (1000000)_2$. Тому для переходу від числа 63 до числа 64 необхідно одночасно змінити всі цифри числа 63 на протилежні);
2) при додаванні двох чисел часто виникають довгі ланцюжки переносів з молодших розрядів в старші, що принципово обмежує швидкодію сучасних цифрових обчислюваних пристроїв (засобів);

3) у класичній двійковій нумерації кожному натуральному числу відповідає єдиний двійковий код, а дробовій частині числа — не більше двох, тобто на мові теорії кодування це означає, що дана система має нульову надлишковість. "Оскільки в реальних умовах завжди можливі збої і відмови в роботі цифрової апаратури, яка реалізує двійкову нумерацію, то в силу нульової надлишковості коду такі збої і відмови не виявляються, наслідком чого є низька інформаційна надійність цифрової техніки, що використовує класичний двійковий код" [14].

Системою числення — двійником класичної двійкової системи є нега-двійкова система, основою якої є число -2. Саме їй присвячена дана робота.

Нега-двійкова система числення вперше була описана Вітторіо Грюнвальдом в його роботі "Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negative con particolare riguardo al sistema numerico a base negative-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale), Giornale di Matematiche di Battaglini" (1885).

Традиційно, множину $A = \{0; 1\}$ називають *алфавітом* двійкової та нега-двійкової систем числення, а її елементи — *цифрами*. Цифри виконують дві функції: 1) функцію цілого числа, яке можна додавати до інших чисел і на яке можна множити інші числа; 2) функцію символа для формального (скороченого) запису виразів (представлення числа).

1. Представлення і зображення цілих чисел

Лема 1. *Для будь-якого натурального числа a існують єдине натуральне число k і набір чисел $(a_0, a_1, \dots, a_{2k-1})$ такий, що $a_j \in A = \{0; 1\}$ і*

$$a = 1 \cdot 2^{2k} + a_{2k-1}(-2)^{2k-1} + ... + a_2(-2)^2 + a_1(-2)^1 + a_0 = \quad (1)$$

$$= 2^{2k} - a_{2k-1}2^{2k-1} + \dots + a_2 2^2 - a_1 2 + a_0 2^0 \equiv (1a_{2k-1}a_{2k-2}\dots a_2a_1a_0)_{-2}. \quad (2)$$

Доведення. І с н у в а н н я. Скористаємось методом математичної індукції.

1. Для $a = 1$ маємо $a = 1 = 2^0 = (1)_{-2}$, а для $a = 2$ маємо $2 = 2^2 - 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (110)_{-2}$.

2. Припустимо істинність твердження для $a = n$, тобто, що знайшовся набір чисел $(a_1, a_2, \dots, a_{2n-1})$ такий, що

$$n = 2^{2k} - a_{2k-1}2^{2k-1} + \dots + a_2 2^2 - a_1 2 + a_0 2^0 \equiv (1a_{2k-1}a_{2k-2}\dots a_2a_1a_0)_{-2}.$$

3. Розглянемо число $n + 1$. Якщо $n = (1a_{2k-1}a_{2k-2}\dots a_2a_1a_0)_{-2}$ і $a_0 = 0$, тобто число n парне, то очевидно, що

$$n + 1 = (1a_{2k-1}\dots a_2a_1 1)_{-2}.$$

Якщо $a_0 = 1$, тобто n — число непарне, то можливі два випадки:

$$1. \begin{cases} a_1 = 0 = a_3 = \dots = a_{2k-1}, \\ a_2 = 1 = a_4 = \dots = a_{2k-2}; \end{cases} \quad (3)$$

2. Умова (3) не виконується.

У першому випадку

$$n+1 = 2^{2k+2} - 2^{2k+1} + 0\cdot 2^{2k} - 2^{2k-1} + 0\cdot 2^{2k-2} - 2^{2k-3} - \ldots - 2^1 = (110101\ldots10)_{-2},$$

оскільки

$$n+1 = (2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2 + 2^0) + 1 = \frac{1}{3}(2^{2k+2}+2) = 2^{2k+2} - 2^{2k+1} - 2^{2k-1} - \ldots - 2^1.$$

Розглянемо другий випадок. Оскільки умова (3) не виконується, то серед цифр $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}$ існує принаймні одна цифра для якої вона порушується. Нехай m — це порядковий номер цієї цифри. Зрозуміло, що m може бути як парним, так і непарним.

Нехай m – парне число, тобто $m = 2s$, з

$$n = \left(1a_{2k-1}a_{2k-2}\ldots a_{2s+2}a_{2s+1}\underbrace{00101\ldots01}_{2s+1}\right)_{-2},$$

а отже, $n = n_1 + n_0$, де

$$n_1 = 2^{2k} - a_{2k-1}2^{2k-1} + \ldots - a_{2s+1}2^{2s+1},$$

$$n_0 = 2^{2s-2} + 2^{2s-4} + \ldots + 2^2 + 2^0 = \left(\underbrace{1010\ldots101}_{2s-1}\right)_{-2}.$$

Тоді за доведеним у попередньому випадку

$$n_0 + 1 = 2^{2s} - 2^{2s-1} - 2^{2s-3} - \ldots - 2^1 = \left(\underbrace{1101010\ldots10}_{2s+1}\right)_{-2},$$

а тому

$$n = n_1 + (n_0+1) = \left(1a_{2k-1}a_{2k-2}\ldots a_{2s+2}a_{2s+1}\underbrace{110101\ldots10}_{2s+1}\right)_{-2}.$$

Нехай m — число непарне, тобто $m = 2s+1$,

$$n = \left(1a_{2k-1}a_{2k-2}\ldots a_{2s+3}a_{2s+2}\underbrace{1101\ldots0101}_{2s+2}\right)_{-2} = n_1 + n_0,$$

де

$$n_1 = 2^{2k} - a_{2k-1}2^{2k-1} + \ldots - a_{2s+2}2^{2s+2},$$

$$n_0 = -2^{2s+1} + 2^{2s} + 2^{2s-2} + \ldots + 2^0 = \left(\underbrace{1101010\ldots0101}_{2s+2}\right)_{-2}.$$

Тоді

$$n_0 + 1 = \frac{-2^{2s+1}+2}{3} = -2^{2s-1} - 2^{2s-3} - \ldots - 2^1 = \left(\underbrace{10\ldots1010}_{2s}\right)_{-2}.$$

А отже,

$$n+1 = n_1 + (n_0+1) = \left(1a_{2k-1}a_{2k-2}\ldots a_{2s+3}a_{2s+2}\underbrace{0010\ldots1010}_{2s+2}\right)_{-2}.$$

Таким чином, з істинності твердження для $a = 1$ і $a = n$ за принципом математичної індукції випливає істинність твердження для всіх натуральних n.

Є д и н і с т ь. Припустимо супротивне, тобто, що знайдеться натуральне число a, яке має принаймні два зображення:

$$a \equiv (1a_{2k-1}a_{2k-2}\dots a_2a_1a_0)_{-2} = (1a'_{2r-1}a'_{2r-2}\dots a'_2a'_1a'_0)_{-2} \equiv a'.$$

Доведемо, що при $k > r$ має місце $a > a'$. З цією метою розглянемо різницю

$$a-a' = (2^{2k}-a_{2k-1}2^{2k-1}+\dots+a_22^2-a_12^1+a_0)-(2^{2r}-a'_{2r-1}2^{2r-1}+\dots+a'_22^2-a'_12^1+a'_0) \geq$$
$$\geq (2^{2k}-2^{2k-1}-2^{2k-3}-\dots-2a_1)-(2^{2r}+2^{2r-2}+\dots+2^2+2_0) =$$
$$= 2^{2k}+\frac{2}{3}(1-4^k)+\frac{1}{3}(1-4^{r+1}) = 4^k+1-\frac{1}{3}(2\cdot 4^k+4^{r+1}) \geq 4^k+1-4^k = 1.$$

Отже, необхідною умовою рівності $a = a'$ є умова $k = r$. При її виконанні $a - a' = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a_0 = a'_0$, оскільки

$$a - a' = 2\left[(a'_{2k-1}-a_{2k-1})2^{2k-2}+(a_{2k-2}-a'_{2k-2})2^{2k-3}+\dots+\right.$$
$$\left.+(a_2-a'_2)2^1+(a'_1-a_1)2^0\right]+(a_0-a'_0)$$

і перший доданок є парним. Тоді

$$0 = 2\left[(a'_{2k-1}-a_{2k-1})2^{2k-3}+\dots+(a_2-a'_2)2^0\right]+(a'_1-a_1),$$

звідки $a_1 = a'_1$. Аналогічно доводиться, що

$$a_2 = a'_2,\ a_3 = a'_3,\ \dots, a_{2k-1} = a'_{2k-1}. \qquad \square$$

Зауваження 1. *Зображення натурального числа у нега-двійковій системі завжди містить непарну кількість цифр.*

Лема 2. *Для довільного натурального числа b існує єдине натуральне число k і впорядкований набір нулів та одиниць $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2k-3}, b_{2k-2}$, такий, що*

$$-b = 1\cdot(-2)^{2k-1}+b_{2k-2}(-2)^{2k-2}+b_{2k-3}(-2)^{2k-3}+\dots-b_1(-2)^1+b_0(-2)^0 = \tag{4}$$
$$= -2^{2k-1}+b_{2k-2}2^{2k-2}-b_{2k-3}2^{2k-3}+\dots-b_12^1+b_02^0 = (1b_{2k-2}b_{2k-3}\dots b_1b_0)_{-2}. \tag{5}$$

Доведення. І с н у в а н н я проведемо методом математичної індукції. 1. Для $b = 1$ і $b = 2$ твердження очевидно має місце, оскільки

$$-1 = -2^1+2^0 = (11)_{-2}, \qquad -2 = -2^1 = (10)_{-2}.$$

2. Припустимо істинність твердження для $b = n$, а саме: існує набір нулів та одиниць $(b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2k-2})$ такий, що

$$-n = -2^{2k-1}+b_{2k-2}2^{2k-2}-\dots-b_12^1+b_02^0 = (1b_{2k-2}b_{2k-3}\dots b_2b_1b_0)_{-2}.$$

3. Розглянемо число $b = n+1$. Якщо число n є непарним, тобто $b_0 = 1$, то

$$-(n+1) = (1b_{2k-2}\dots b_2b_10)_{-2}.$$

Якщо n — число парне, тобто $b_1 = 0$, тобто можливі два випадки:

$$1.\ \begin{cases} b_1 = 0 = b_3 = \ldots = b_{2k-3} = b_{2k-1}, \\ b_0 = 1 = b_4 = \ldots = b_{2k-4} = b_{2k-2}; \end{cases} \tag{6}$$

2) Умова (6) не виконується.

У першому випадку

$$-(n+1) = \left(\underbrace{1010\ldots1010}_{2k}\right)_{-2} - 1 = -2^{2k-1} - 2^{2k-3} - \ldots - 2^3 - 2^1 - 1 =$$

$$= -\frac{2(2^{2k}-1)}{3} - 1 = \frac{-2^{2k+1}+2}{3} - 1 = \frac{-2^{2k+1}-1}{3}.$$

Тоді

$$-(n+1) = -2^{2k+1} + 2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2 + 2^0 = \left(\underbrace{110101\ldots01}_{2k+2}\right)_{-2},$$

оскільки

$$\left(\underbrace{110101\ldots01}_{2k+2}\right)_{-2} = -2^{2k+1} + (2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2) + 2^0 = -2^{2k+1} + \frac{2^{2k+2}-4}{3} + 1 =$$

$$= \frac{-3\cdot 2^{2k+1} + 2\cdot 2^{2k+1} - 1}{3} = \frac{-2^{2k+1}-1}{3}.$$

Розглянемо другий випадок, для якого умова (6) не виконується, тобто серед цифр $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{2k-2}$ існує принаймні одна цифра для якої вона порушується. Нехай m — це порядковий номер цієї цифри. Зрозуміло, що m може бути як парним, так і непарним.

Нехай m — парне число, тобто $m = 2s$, а саме: $b_{2s} = 0$.

Якщо $b_0 = 0$, то

$$-(n+1) = \left(-2^{2k-1} + 2^k + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2\right) - 1 =$$

$$= \left(-2^{2k-1} + 2^k + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2\right) - 2^1 + 1 = \left(\underbrace{11010\ldots0111}_{2k}\right)_{-2}.$$

Якщо $b_{2s} = 0$, але $b_0 = b_2 = \ldots = b_{2s-2} = 1$, то

$$-(n+1) = (110101\ldots0100\underbrace{01\ldots0101}_{2s})_{-2} - 1 = (110101\ldots0100\underbrace{01\ldots0100}_{2s})_{-2}.$$

Якщо число m непарне, то n — непарне і для нього твердження доведене вище.

Є д и н і с т ь. Припустимо супротивне, а саме: нехай існує натуральне число b, для якого число $-b$ має наступні два зображення

$$-b \equiv (1b_{2k-2}b_{2k-3}\ldots b_2b_1b_0)_{-2} = (1b'_{2r-2}b'_{2r-3}\ldots b'_2b'_1b'_0)_{-2} \equiv -b'.$$

Спочатку доведемо, що при $k > r$ має місце нерівність $b > b'$, тобто $-b < -b'$. Для цього розглянемо різницю:

$$\begin{aligned} b - b' =&(2^{2k-1} - b_{2k-2}2^{2k-2} + \ldots + b_1 2^1 - b_0) - (2^{2r-1} - b'_{2r-2}2^{2r-2} + \ldots + b'_1 2^1 - b'_0) \geq \\ \geq&(2^{2k-1} - 2^{2k-2}) - (2^{2k-3} + 2^{2k-4} + ... + 2^2 + 2^1 + 2^0) = \\ =&2^{2k-2} - (2^{2k-2} - 1) = 1 > 0. \end{aligned}$$

Отримане протиріччя доводить нерівність.

Нехай тепер $k = r$. Маємо

$$0 = b - b' = (b'_{2k-2} - b_{2k-2})2^{2k-2} + (b_{2k-3} - b'_{2k-3})2^{2k-3} + ... + (b'_2 - b_2)2^2 + (b_1 - b'_1)2 + (b'_0 - b_0)2^0.$$

Остання рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $b_i = b'_i$, $i = \overline{1, 2k-2}$, оскільки $2^m - (2^{m-1} + ... + 2^1 + 2^0) \geq 1$ для будь-якого $m \in N$. Єдиність і всю лему доведено. □

Зауваження 2. *Зображення цілого від'ємного числа у нега-двійковій системі числення завжди містить парну кількість цифр.*

Теорема 1. *Для довільного цілого числа c існує єдиний набір нулів та одиниць $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}c_n)$, $c_n \in A$, такий, що*

$$c = c_n(-2)^n + c_{n-1}(-2)^{n-1} + \ldots + c_1(-2)^1 + c_0(-2)^0.$$

Доведення. Для $c = 0$ таким набором є $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Тому зображенням числа 0 вважатимемо $(0)_{-2}$, тобто $0 = (0)_{-2}$.

Для цілих чисел, відмінних від нуля, дане твердження випливає з двох попередніх лем. □

Зауважимо, що числа Мерсена (тобто числа виду $M_n = 2^n - 1$, $n \in N$, а саме такі, що в класичній двійковій системі числення записуються тільки одними одиницями, без нулів) у нега-двійковій системі числення мають зображення:

$$M_{2k} = 2^{2k} - 1 = (\underbrace{10...011}_{2k+1})_{-2}$$

$$M_{2k-1} = 2^{2k-1} - 1 = (\underbrace{110...011}_{2k+1})_{-2}.$$

2. Порівняння натуральних чисел

Теорема 2. *Нехай $a = (1a_{2k-1}\ldots a_1 a_0)_{-2}$, $b = (1b_{2r-1}\ldots b_1 b_0)_{-2}$:*

1) якщо $k > r$, то $a > b$;
2) якщо $k = r$ і $a_j = b_j$, $j = \overline{0, 2k-1}$, то $a = b$;
3) якщо $k = r$ і $a_m \neq b_m$, але $a_j = b_j$ при $j > m$, то

3.1. $a > b$, коли m – парне і $a_m = 1$ або m – непарне і $a_m = 0$;
3.2. $a < b$, коли m – парне і $a_m = 0$ або m – непарне і $a_m = 1$.

Доведення. 1) Справді,

$$\begin{aligned} a-b &\geq (2^{2k}-2^{2k-1}-2^{2k-3}-\ldots-2^1)-(2^{2r}+2^{2r-2}+\ldots+2^2+2^0)= \\ &= 2^{2k}-\frac{2}{4-1}(2^k-1)-\frac{1}{4-1}(2^{r+1}-1)= \\ &= \frac{3\cdot 2^{2k}-2^{k+1}+2-2^{k+1}+1}{3}= \\ &= \frac{2^r(3\cdot 2^{2k-r}-2^{k-r+1}-2)}{3}+1= \\ &= \frac{2^k(2^{k-r}(3\cdot 2^k-1)-2)}{3}+1>0. \end{aligned}$$

2) Друге твердження є очевидним.

3) Доведемо третє твердження. 3.1. Нехай m – число парне, тобто $m=2n$. Розглянемо різницю

$$a-b=2^m(a_m-b_m)-2^{m-1}(a_{m-1}-b_{m-1})+\ldots-2^1(a_1-b_1)+2^0(a_0-b_0).$$

Якщо $a_m=1$ (а отже, $b_m=0$), то

$$a-b\geq 2^{2n}-2^{2n-1}-2^{2n-2}-\ldots-2^1-2^0=2^{2n}-(2^{2n}-1)=1>0.$$

Якщо $a_m=0$ (а отже, $b_m=1$), то

$$a-b\leq -2^{2n}+2^{2n-1}+\ldots+2^1+2^0=-1<0.$$

3.2. Нехай m – число непарне, тобто $m=2n-1$. Тоді

$$a-b=-2^m(a_m-b_m)+2^{m-1}(a_{m-1}-b_{m-1})=\ldots+2^1(a_1-b_1)-2^0(a_0-b_0).$$

Якщо $a_m=0$ (а отже, $b_m=1$), то

$$a-b\geq 2^{2n}-2^{2n-1}-\ldots-2^1-2^0=1, \quad \text{тобто} \quad a>b.$$

Якщо $a_m=1$ (а отже, $b_m=0$), то

$$a-b\leq -2^{2n}+2^{2n-1}+\ldots+2^1+2^0=-1, \quad \text{тобто} \quad a<b.$$

Твердження 3) і всю теорему доведено. □

3. Ознаки подільності

Лема 3. *Число* $a=(1a_{2k-1}a_{2k-2}\ldots a_1a_0)_{-2}$ *задовольняє нерівність*

$$(11010\ldots10)_{-2}=\frac{4^k+2}{3}\leq a\leq\frac{4^{k+1}-1}{3}=(1010\ldots101)_{-2}.$$

Доведення. Справді,

$$a\leq 2^{2k}+2^{2k-2}+\ldots+2^2+2^0=\frac{4^{k+1}-1}{3},$$

$$a\geq 2^{2k}-2^{2k-1}-2^{2k-3}-\ldots-2^1=\frac{4^k+2}{3},$$

що й вимагалось навести. □

Теорема 3. *Число $a = (1a_{2k-1}a_{2k-2}\ldots a_1a_0)_{-2}$ ділиться на 3 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 3, тобто*

$$a \vdots 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sum_{i=0}^{2k-1} a_i \equiv s \vdots 3.$$

Доведення. Оскільки

$$2^{2k} \equiv 1(mod\ 3), \quad \text{тобто} \quad 2^{2k} = 3q + 1,$$

а

$$2^{2k-1} \equiv 2(mod\ 3), \quad \text{тобто} \quad 2^{2k-1} = 3q - 1, \quad q \in N,$$

то

$$\begin{aligned} a &= 1 - a_{2k-1}(3q_1 - 1) + a_{2k-2}(3q_2 + 1) - \ldots - a_1(3q_{2k-1}) + a_0 = \\ &= S - 3(a_{2k-1}q_1 - a_{2k-2}q_2 + \ldots + a_1q_{2k-1}). \end{aligned}$$

Звідси бачимо, що $a \vdots 3$ тоді і тільки тоді, коли $S \vdots 3$. □

Зауваження 3. *Ознаки подільності натурального числа на 3 у десятковій та нега–двійковій системах числення ідентичні.*

4. Додавання натуральних чисел

Розгляд розпочнемо з випадку, коли доданки a і b мають однакову кількість цифр. Нехай $a = (1a_{2k-1}a_{2k-2}\ldots a_1a_0)_{-2}$, $b = (1b_{2k-1}b_{2k-2}\ldots b_1b_0)_{-2}$. Число $c = a + b$ має формальний запис

$$c = (2c_{2k-1}c_{2k-2}...c_1c_0)_{-2} \equiv 2(-2)^{2k} + c_{2k-1}^{2k-1} + c_{2k-2}(-2)^{2k-2} + ... + c_1(-2)^1 + c_0,$$

який не є нега-двійковим зображенням числа c, оскільки містить «цифру» (коефіцієнт) 2 і можливо деякі $c_i = 2$. Потрібно звільнитись від переповнених розрядів. Оскільки

$$1(-2)^{2k} + 1(-2)^{2k} = 2(-2)^{2k} = 1(-2)^{2k+2} + 1(-2)^{2k+1} + 0(-2)^{2k},$$

то

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \cdot 2^{2k} - c_{2k-1} \cdot 2^{2k-1} + c_{2k-2} \cdot 2^{2k-2} - \ldots - c_1 \cdot 2^1 + c_0 \cdot 2^0 = \\ &= 2^{2k+2} - 2^{2k+1} + 0 \cdot 2^{2k} - c_{2k-1} \cdot 2^{2k-1} + c_{2k-2} \cdot 2^{2k-2} - \ldots - c_1 \cdot 2^1 + c_0 \cdot 2^0, \end{aligned}$$

де $c_i = a_i + b_i$. Якщо всі $c_i \in \{0; 1\}$, то $a + b = c \equiv (110c_{2k-1}\ldots c_1c_0)_{-2}$, зокрема,

$$(1\underbrace{0\ldots0}_{2k})_{-2} + (1\underbrace{0\ldots0}_{2k})_{-2} = (11\underbrace{0\ldots0}_{2k+1})_{-2}.$$

Нехай існує $c_m = 2$, причому $c_i \in \{0, 1\}$ при $i < m$. Число m може бути парним і непарним. Якщо m — парне, тобто $m = 2r$, то

$$c_m(-2)^m = 2(-2)^{2r} = 1(-2)^{2r+2} + 1(-2)^{2r+1} = 1(-2)^{m+2} + 1(-2)^{m+1}.$$

Нехай $m = 2r - 1$. Тоді

$$c_m(-2)^m = c_m(-2)^{2r-1} = 2(-2)^{2r-1} = 1(-2)^{2r+1} + 1(-2)^{2r} = 1(-2)^{m+2} + 1(-2)^{m+1}.$$

Отже, на місці цифри переповненого на 1 розряду записується нуль, а цифри двох старших розрядів збільшуються на одиницю. Це відбувається за рахунок того, що число 2 у нега-двійковій системі має наступне зображення $(110)_{-2}$.

За рахунок виконаного кроку отримуємо формальний запис

$$c = (110c_{2k-1}...c'_{m+2}c'_{m+1}0c_{m-1}...c_1c_0)_{-2}, \text{ де } c'_{m+1} = c_{m+1} + 1, c'_{m+2} = c_{m+2} + 1.$$

Якщо $c'_{m+1} \in \{0;1\}$, $c'_{m+2} \in \{0,1\}$, $c_j \in \{0,1\}$ при $j > m+2$, то одержаний формальний запис є нега-двійковим зображенням числа c . В протилежному випадку процес звільнення від невластивих для системи цифр 2 або $3 = (111)_{-2}$ продовжується.

Якщо $c'_{m+1} = 2$, то на місці $(m+1)$-ої нега-двійкової цифри числа c записуємо 0 (останню цифру нега-двійкового зображення $(110)_{-2}$ числа 2), а цифри двох наступних старших розрядів збільшуються на 1.

Якщо $c'_{m+1} = 3$, то на місці $(m+1)$-ої нега-двійкової цифри числа c записуємо 1 (останню цифру нега-двійкового зображення $(111)_{-2}$ числа 3), а цифри двох наступних старших розрядів збільшуються на 1. Результатом цього кроку є формальний запис

$$c = (110c_{2k-1}...c'_{m+3}c''_{m+2}c''_{m+1}0c_{m-1}...c_1c_0), \text{ де } c''_{m+1} \in \{0,1\},$$

$c''_{m+2} = c'_{m+2} + 1 = c_{m+2} + 2, c'_{m+3} = c_{m+3} + 1.$

Число $c''_{m+2} \in \{2,3,4\}$ і тому цифрою нега-двійкового зображення числа c не є.

Якщо $c''_{m+2} \in \{2,3\}$, то діємо за вказаним правилом: $(m+2)$-ою нега-двійковою цифрою числа c є цифра c'''_{m+2}, яка співпадає з цифрою: 0, якщо $c''_{m+2} = 2$, і 1, якщо $c''_{m+2} = 2$. При цьому «цифри» (коефіцієнти) двох наступних старших розрядів збільшуються на 1.

Якщо $c''_{m+2} = 4 = (100)_{-2}$, то $(m+2)$-га цифра нега-двійкового зображення числа c дорівнює 0, а цифра $(m+4)$-го розряду збільшується на 1.

Отримуємо запис

$$c = (110c_{2k-1}...c'_{m+4}c''_{m+3}c'''_{m+2}c''_{m+1}0c_{m-1}...c_1c_0), \text{ де } c''_{m+2}, c''_{m+1} - \text{ правильні, тобто } \in \{0,1\}.$$

Оскільки $c''_{m+3} \in \{2,3,4\}$, а саме $c'''_{m+3} = \begin{cases} c''_{m+3} + 1, \text{ якщо } c''_{m+2} = 2 \text{ або } 3, \\ c''_{m+3}, \text{ якщо } c''_{m+2} = 4, \end{cases}$ то правильну $(m+3)$-ю цифру нега-двійкового зображення числа c встановлюємо аналогічно до того, як це робилось для $m+2$-ої цифри і т.д.

Розглянемо приклад:

$$\begin{aligned}
{}_{+}11 &= (11111)_{-2}\\
11 &= \underline{(11111)_{-2}}\\
22 &= (22222)_{-2} =\\
&= (22330)_{-2} =\\
&= (23410)_{-2} =\\
&= (33010)_{-2} =\\
&= (141010)_{-2} =\\
&= (1101010)_{-2}.
\end{aligned}$$

Вказаний алгоритм можна використати і тоді, коли у нега-двійковому зображенні чисел a і b різна кількість цифр. У цьому випадку діємо наступним чином: при $k > r$

$$c = a + b = (1a_{2k-1}...a_1a_0)_{-2} + (1b_{2r-1...b_1b+0})_{-2} = (1a_{2k-1}...a_{2r+1}c_{2r}c_{2r-1}...c_1c_0)_{-2},$$

де $c_i = a_i + b_i$ при $i = \overline{0, 2r-1}$, $c_{2r} = a_{2r} + 1$.

Зауваження 4. *Переповнення розряду при додаванні натуральних чисел у їх нега-двійковому зображенні за вказаним алгоритмом не перевищує 3.*

5. Зображення дробової частини дійсних чисел

Теорема 4. *Для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність (ω_n), $\omega_n \in A$, така, що*

$$x = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2^2} - \frac{\omega_3}{2^3} + \frac{\omega_4}{2^4} - \ldots =$$
$$= \frac{2}{3} - \left(\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_2}{2^2} + \frac{\omega_3}{2^3} - \frac{\omega_4}{2^4} + \ldots\right). \tag{7}$$

Доведення. Розглянемо класичне двійкове зображення числа x і його четвіркове зображення

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...} \equiv \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots = \Delta^4_{\beta_1\beta_2...\beta_n...} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{4^n},$$

де $\alpha_n \in \{0; 1\} \equiv A_2$, $\beta_n = 2\alpha_{2n-1} + \alpha_{2n} \in \{0, 1, 2, 3\} \equiv A_4$, $n = 1, 2, \ldots$.

Розкладемо кожне з чисел $\beta_n \in A_4$ в суму двох доданків $2(1 - \omega_{2n-1}) + \omega_{2n}$, де $\omega_i \in A_2$. Очевидно, що такий розклад єдиний:

для $\beta_n = 0$ маємо $\omega_{2n-1} = 1$, $\omega_{2n} = 0$;

для $\beta_n = 1$ маємо $\omega_{2n-1} = 1$, $\omega_{2n} = 1$;

для $\beta_n = 2$ маємо $\omega_{2n-1} = 0$, $\omega_{2n} = 0$;

для $\beta_n = 3$ маємо $\omega_{2n-1} = 0$, $\omega_{2n} = 1$.

Тоді

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-2\omega_{2n-1}+\omega_{2n}}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\omega_{2n-1}-\omega_{2n}}{2^n}=$$

$$=\frac{2}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\omega_{2n-1}}{2^{2n}}-\frac{\omega_{2n}}{2^{2n}}\right)=\frac{2}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\omega_{2n-1}}{2^{2n-1}}-\frac{\omega_{2n}}{2^{2n}}\right)=\frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k}{(-2)^k},$$

що й вимагалось довести. □

Означення **1.** Подання числа $x\in[0;1]$ у формі (7) символічно (скорочено) позначатимемо $\Delta^{-2}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n\ldots}$ і називатимемо *нега-двійковим зображенням* або коротко *НД-зображенням.*

6. Зв'язок нега-двійкового зображення чисел з класичним двійковим

Теорема 5. *Для будь–якого числа $x\in[0;1]$ існує послідовність $(\tau_n)\in L_2$ така, що*

$$x=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n}{(-2)^n}\equiv\overline{\Delta}^{2}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}= \tag{8}$$

$$=1-\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2^2}-\frac{\gamma_3}{2^3}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{(-2)^n}, \tag{9}$$

де $\gamma_n\in\{1,2\}$.

Доведення. Добре відомо, що для числа x існує послідовність $(\alpha_n)\in L_2$ така, що

$$x=\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\ldots.$$

Тоді

$$\begin{aligned}x&=1-1+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2+1}{2^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{\alpha_3}{2^3}+\frac{\alpha_4+1}{2^4}-\frac{1}{2^4}+\frac{\alpha_5}{2^5}+\ldots=\\&=1-\frac{2-\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2+1}{2^2}-\frac{2-\alpha_3}{2^3}+\frac{\alpha_4+1}{2^4}-\frac{2-\alpha_5}{2^5}+\ldots=\\&=1-\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2^2}-\frac{\gamma_3}{2^3}+\frac{\gamma_4}{2^4}-\frac{\gamma_5}{2^5}+\ldots=\\&=1+\frac{\gamma_1}{(-2)^1}+\frac{\gamma_2}{(-2)^2}+\frac{\gamma_3}{(-2)^3}+\frac{\gamma_4}{(-2)^4}+\frac{\gamma_5}{(-2)^5}+\ldots,\end{aligned}$$

де $\gamma_n=\begin{cases}2-\alpha_n, & \text{якщо} \quad n-\text{ непарне},\\ \alpha_n+1, & \text{якщо} \quad n-\text{ парне},\end{cases}\qquad \gamma_n\in\{1,2\}.$

Якщо покласти $\tau_n\equiv\gamma_n-1$, то $\tau_n\in\{0,1\}$ і маємо

$$x=1+\frac{\tau_1}{(-2)^1}-\frac{1}{2}+\frac{\tau_2}{(-2)^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{\tau_3}{(-2)^3}-\frac{1}{2^3}+\frac{\tau_4}{(-2)^4}+\frac{1}{2^4}+\ldots.$$

Оскільки $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots=\frac{2}{3}$, то

$$x=\frac{2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau_n}{(-2)^n},\quad \text{де}\quad \tau_n\in A_2,$$

що й вимагалось довести. □

Означення **2.** Розклад числа x у ряд (9) називається його *нега–двійковим представленням*, а його формальний запис $\overline{\Delta}^2_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — нега–двійковим зображенням. При цьому τ_n називається n–ою цифрою даного зображення.

Зауваження 5. *Хід доведення теореми 5 вказує на зв'язок двійкового та нега–двійкового зображень одного і того ж числа, а саме: цифри τ_n нега–двікового зображення $\overline{\Delta}^2_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ числа $x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ обчислюються за формулою*

$$\tau_n = \begin{cases} 1-\alpha_n, & \text{якщо} \quad n- \text{ непарне,} \\ \alpha_n, & \text{якщо} \quad n- \text{ парне.} \end{cases}$$

Якщо ж відоме нега–двійкове зображення числа $x = \overline{\Delta}^2_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$, то цифри його двійкового зображення можна отримати за формулами:

$$\alpha_n = \begin{cases} 1-\tau_n, & \text{якщо} \quad n- \text{ непарне,} \\ \tau_n, & \text{якщо} \quad n- \text{ парне.} \end{cases}$$

Отже, $\Delta^2_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} = \overline{\Delta}^2_{[1-a_1]a_2[1-a_3]a_4[1-a_5]a_6\ldots}$.

Це дає підставу стверджувати, що нега–двійкове зображення по своїй суті є лише перекодуванням двійкового зображення числа x. Для більш повного обґрунтування такого висновку проведемо аналіз його тополого–метричних властивостей.

7. Нега–двійково-раціональні числа (НДР-числа)

Лема 4. *Числа x і x', які мають нега-двійкові зображення*

$$\Delta^{-2}_{c_1\ldots c_m0(01)} \qquad i \qquad \Delta^{-2}_{c_1\ldots c_m1(10)} \tag{10}$$

відповідно, рівні.

Доведення. Розглянемо різницю

$$|x'-x| = \frac{1}{2^m}\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} - \ldots - \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \ldots\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2^m}\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}\right| = \frac{1}{2^m}\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right| = 0.$$

□

Можна легко довести, що не існує чисел, які мають більше двох зображень, лише числа виду (10) мають їх два. Числа, які мають два нега-двійкових зображення, називаються *нега-двійково-раціональними.*

Нега-двійково раціональні числа утворюють всюди щільну в $[0;1]$ підмножину раціональних чисел, але не кожне раціональне число є нега-двійково-раціональним. Наприклад, число $\Delta^{-2}_{c_1\ldots c_m(0)}$ є раціональним, але не є нега-двійково-раціональним.

Множина раціональних чисел, що не є нега-двійково-раціональними, є щільною у відрізку $[0;1]$.

Числа відрізка $[0;1]$, які не є нега-двійково-раціональними, називаються нега-двійково-ірраціональними. Кожне нега-двійково-ірраціональне число є ірраціональним. Кожна цифра зображення нега-двійково-ірраціонального числа є коректно означеною функцією числа, що зображається. Для нега-двійково-раціональних чисел це буде тоді, коли ми домовимося використовувати лише одне з двох існуючих зображень, наприклад, перше тобто зображення з періодом (01).

8. Критерій раціональності числа у нега-двійковому зображенні

Теорема 6. *Для того, щоб число $x \in [0;1]$ було раціональним, необхідно і достатньо, щоб його нега-двійкове зображення було періодичним.*

Доведення. Необхідність. Нехай x — раціональне число, $x \in [0;1]$. Доведемо, що його нега-двійкове зображення є періодичним. Для чисел 0 і 1 це очевидно виконується, оскільки для $x = 0 = \Delta^{-2}_{(10)}$, $x = 1 = \Delta^{-2}_{(01)}$. Нехай $0 < x < 1$. Тоді згідно з відомим критерієм x маємо періодичне двійкове зображення, тобто $x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(c_1c_2\ldots c_p)}$.

Оскільки $(c_2\ldots c_pc_1)$ — теж є періодом, то, не порушуючи загальності, можна вважати, що m — число парне $(m = 2k)$.

Оскільки $(c_1c_2\ldots c_pc_1c_2\ldots c_p)$ — теж є періодом, то, не порушуючи загальності, можна вважати, що p є числом парним $(p = 2l)$. Тоді

$$x = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}(c_1c_2\ldots c_{2l})} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \frac{\alpha_{2k}}{2^{2k}} +$$
$$+\frac{1}{2^{2k}}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \ldots + \frac{c_{2l-1}}{2^{2l-1}} + \frac{c_{2l}}{2^{2l}}\right) + +\frac{1}{2^{2k+2l}}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \ldots + \frac{c_{2l-1}}{2^{2l-1}} + \frac{c_{2l}}{2^{2l}}\right) + \ldots =$$
$$= \frac{\beta_1}{4} + \frac{\beta_2}{4^2} + \ldots + \frac{\beta_k}{4^k} + \frac{1}{4^k}\left(\frac{\gamma_1}{4} + \frac{\gamma_2}{4^2} + \ldots + \frac{\gamma_l}{4^l}\right) + \frac{1}{4^{k+l}}\left(\frac{\gamma_1}{4} + \frac{\gamma_2}{4^2} + \ldots + \frac{\gamma_l}{4^l}\right) + \ldots =$$
$$= \Delta^4_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_l)},$$

де

$$\beta_i = 2\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i}, \quad i = \overline{1,k}, \qquad \gamma_i = 2c_{2j-1} + c_{2j}, \quad j = \overline{1,l}.$$

Звідси

$$x = \frac{2 - 2\alpha_1 + \alpha_2}{4} + \frac{2 - 2\alpha_3 + \alpha_4}{4^2} + \ldots + \frac{2 - 2\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}}{4^k} +$$
$$+\frac{1}{4^k}\left(\frac{2 - 2d_1 + d_2}{4} + \frac{2 - 2d_3 + d_4}{4^2} + \ldots + \frac{2 - 2d_{2l-1} + d_{2l}}{4^l}\right) +$$
$$+\frac{1}{4^{k+l}}\left(\frac{2 - 2d_1 + d_2}{4} + \frac{2 - 2d_3 + d_4}{4^2} + \ldots + \frac{2 - 2d_{2l-1} + d_{2l}}{4^l}\right) + \ldots,$$

де

$$\beta_i = 2 - 2\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i}, \qquad \gamma_i = 2 - 2d_{2i-1} + d_{2i}.$$

Тоді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{4^k} - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} - \frac{\alpha_3}{2^3} + \ldots + \frac{\alpha_{2k}}{2^{2k}} - \left(\frac{d_1}{2^{2k}} - \frac{d_2}{2^{2k+1}} + \ldots + \frac{d_{2l-1}}{2^{2(k+l)-1}} - \frac{d_{2l}}{2^{2(k+l)}}\right) + \ldots =$$
$$= \Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2k}(d_1d_2\ldots d_{2l})},$$

тобто x має нега-двійкове періодичне зображення.

Д о с т а т н і с т ь. Розглянемо періодичне нега-двійкове зображення

$$\Delta^{-2}_{c_1c_2\ldots c_m(a_1a_2\ldots a_p)}$$

деякого числа $x \in [0;1]$. Тоді

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-1}c_i}{2^i} + \frac{(-1)^m A}{2^m} + \frac{(-1)^{m+p-1}A}{2^{m+p}} + \frac{(-1)^{m+2p-1}A}{2^{m+2p}} + \ldots = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-1}c_i}{2^i} + \frac{(-1)^{m-1}A}{2^m}\left(1 + \frac{(-1)^p}{2^p} + \frac{(-1)^{2p}}{2^{2p}} + \ldots\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-1}c_i}{2^i} + \frac{(-1)^{m-1}A}{2^m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(-1)^p}{2^p}}, \end{aligned}$$

де $A = \dfrac{a_1}{2} - \dfrac{a_2}{2^2} + \ldots + \dfrac{(-1)^{p-1}a_p}{2^p}$.

А отже, число x, будучи сумою двох раціональних чисел, є раціональним числом.

Лему доведено. □

9. Інверсор цифр нега-двійкового зображення дробової частини дійсного числа

Домовившись використовувати лише одне з двох існуючих зображень нега-двійкових чисел, означимо функцію $I(x)$ рівністю

$$I(x) = I(\Delta^{-2}_{\omega_1(x)\omega_2(x)\ldots\omega_n(x)\ldots}) = \Delta^{-2}_{[1-\omega_1(x)][1-\omega_2(x)]\ldots[1-\omega_n(x)]\ldots},$$

яку називатимемо інверсором цифр нега-двійкового зображення чисел.

Лема 5. *Інверсор цифр нега-двійкого зображення чисел є лінійною функцією, а саме:* $I(x) = \frac{1}{3} - x$.

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} I(x) =&\Delta^{-2}_{[1-\omega_1][1-\omega_2]\ldots[1-\omega_n]\ldots} = \\ =&\frac{2}{3} - \frac{1-\omega_1}{2} + \frac{1-\omega_2}{2^2} - \ldots + \frac{1-\omega_{2n-1}}{2^{2n-1}} + \frac{1-\omega_{2n}}{2^{2n}} - \ldots \\ =&\frac{2}{3} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^m} + \ldots) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{(-2)^k} = \\ =&\frac{4}{3} - 1 - (\frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{(-2)^k}) = \frac{1}{3} - x. \end{aligned}$$

□

10. Геометрія нега–двійкового зображення

Означення **3.** Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$, що відповідає нега–двійковому зображенні числа $x\in[0;1]$, називається множина

$$\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m}=\{x: x=\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_m a_{m+1}a_{m+2}\dots}, a_{m+k}\in A_2, k\in N\}=\{x:\tau_i(x)=c_i,\ i=\overline{1,m}\}.$$

1. Циліндр є відрізком, причому $\Delta^{-2}_{c_1\dots c_m}=[A-B;A+C]$, $A=\dfrac{2}{3}+\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{c_i}{(-2)^i}$,
$$B=\begin{cases}\dfrac{1}{2^m\cdot 3}, \text{ якщо } m- \text{ непарне},\\ \dfrac{1}{2^{m-1}\cdot 3}, \text{ якщо } m- \text{ парне},\end{cases}\qquad C=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{m-1}\cdot 3}, \text{ якщо } m- \text{ непарне},\\ \dfrac{1}{2^m\cdot 3}, \text{ якщо } m- \text{ парне}.\end{cases}$$
2. $\Delta^{-2}_1=[0;\frac{1}{2}]$, $\Delta^{-2}_0=[\frac{1}{2};1]$;
$\Delta^{-2}_{10}=[0;\frac{1}{2^2}]$, $\Delta^{-2}_{11}=[\frac{1}{2^2};\frac{1}{2}]$, $\Delta^{-2}_{00}=[\frac{1}{2};\frac{3}{2^2}]$, $\Delta^{-2}_{01}=[\frac{3}{2^2};1]$;
$\Delta^{-2}_{101}=[0;\frac{1}{2^3}]$, $\Delta^{-2}_{100}=[\frac{1}{2^3};\frac{1}{2^2}]$, $\Delta^{-2}_{111}=[\frac{1}{2^2};\frac{3}{2^3}]$, $\Delta^{-2}_{110}=[\frac{3}{2^3};\frac{1}{2}]$;
$\Delta^{-2}_{001}=[\frac{1}{2};\frac{5}{2^3}]$, $\Delta^{-2}_{000}=[\frac{5}{2^3};\frac{6}{2^3}]$, $\Delta^{-2}_{011}=[\frac{6}{2^3};\frac{7}{2^3}]$, $\Delta^{-2}_{010}=[\frac{7}{2^3};1]$;
$\max\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_{2k-1}1}=\min\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_{2k-1}0}$; $\max\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_{2k}0}=\min\Delta^{-2}_{c_1c_2\dots c_{2k}1}$.
3. $|\Delta^2_{c_1c_2\dots c_m}|=\dfrac{1}{2^m}=|\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\dots c_m}|$.
4. $\dfrac{|\Delta^2_{c_1c_2\dots c_m i}|}{|\Delta^2_{c_1c_2\dots c_m}|}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{|\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\dots c_m i}|}{|\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\dots c_m}|}$.
5. $x=\Delta^2_{a_1a_2\dots a_m\dots}=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\Delta^2_{a_1a_2\dots a_m\dots}$; $x=\overline{\Delta}^2_{a_1a_2\dots a_m\dots}=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\overline{\Delta}^2_{a_1a_2\dots a_m\dots}$.

Властивість 3 називається *основним метричним відношенням.* Його вираз є свідченням близкості (і навіть "співпадання") відповідних метричних теорій (двійкового та нега–двійкового зображення числа). Більше того, добре відомо [2], що у випадку двійкового зображення для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x\in[0;1]$ існує границя

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi(1-t+x_n)=v,$$

де x_n – дробова частина числа $2^{n-1}x$, тобто $x_n=\{2^{n-1}x\}=2^{n-1}x-[2^{n-1}x]$, $0<v\le 1$,
$$\phi(t)=\begin{cases}1, \text{ якщо } 0\le t\le 1,\\ 0, \text{ якщо } t<0 \text{ або } t>1.\end{cases}$$
Іншими словами, числа послідовності (x_n) майже для всіх x рівномірно розподілені на відрізку $[0;1]$.

Зауваження 6. *Враховуючи зазначене, приходимо до висновку, що розв'язки задач для нега–двійкового зображення, аналогічних задачам для двійкового зображення, можна отримати з відомих результатів для останнього переформулюванням у новій системі кодування з урахуванням вказаних зв'язків.*

11. Оператори зсуву цифр нега-двійкового зображення числа

У просторі (в множині) нега-двійкових зображень чисел відрізка $[0;1]$ (рівносильно у просторі послідовностей елементів алфавіту) розглядається оператор η, означений рівністю

$$\eta(\Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}) = \Delta^{-2}_{\alpha_2...\alpha_n...}, \tag{11}$$

який називається *оператором лівостроннього зсуву цифр* нега-двійкового зображення числа. Після домовленості вживати одне з двох існуючих зображень нега-двійково-раціональних чисел він коректно визначає функцію на $[0;1]$.

Лема 6. *Функція η, означенна рівністю (11), має вираз*

$$\eta(x) = -x + 2 - \alpha_1(x)$$

і є лінійною на кожному з циліндрів першого рангу, а саме:

$$\eta(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{якщо } x \in \Delta^{-2}_0, \\ -x+1, & \text{якщо } x \in \Delta^{-2}_1. \end{cases}$$

В точці $x = \frac{1}{2}$ функція має стрибок δ величини 1.

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} x =& \frac{2}{3} - \frac{\alpha_1(x)}{2} + \frac{\alpha_2(x)}{2^2} - \frac{\alpha_3(x)}{2^3} + \frac{\alpha_4(x)}{2^4} - ... = \\ =& \frac{2}{3} - \frac{\alpha_1(x)}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(\frac{2}{3} - \frac{\alpha_2(x)}{2} + \frac{\alpha_3(x)}{2^2} - \frac{\alpha_4(x)}{2^3} + ...) = \\ =& 1 - \frac{\alpha_1(x)}{2} - \frac{1}{2}\eta(x). \end{aligned}$$

Тому

$$\eta(x) = -x + 2 - \alpha_1(x).$$

Якщо $x \in \Delta^{-2}_0$, то $\alpha_1(x) = 0$ і $\eta(x) = -x + 2$. Якщо $x \in \Delta^{-2}_1$, то $\alpha_1(x) = 1$ і $\eta(x) = -x + 3$.

Оскільки $\frac{1}{2} = \Delta^{-2}_{0(01)} = \Delta^{-2}_{1(10)}$, то

$$\delta(\frac{1}{2}) = \lim_{x\to\frac{1}{2}+0} f(x) - \lim_{x\to\frac{1}{2}-0} f(x) = \eta(\Delta^{-2}_{0(01)}) - \eta(\Delta^{-2}_{1(10)}) = \Delta^{-2}_{(01)} - \Delta^{-2}_{(10)} = 1.$$

□

Теорема 7. *Інваріантною мірою для оператора лівостроннього зсуву цифр нега-двійкового зображення чисел є ймовірнісна міра μ_ξ, що відповідає неперервному розподілу випадкової величини $\xi = \Delta^{-2}_{\xi_1\xi_2,...,\xi_n,...}$ з незалежними однаково розподіленими нега-двійковими цифрами $\xi_n (n = 1, 2, ..)$: $P\{\xi_n = 0\} = p_0$, $P\{\xi_n = 1\} = p_1$, зокрема міра Лебега λ.*

Доведення. Спочатку доведемо, що міра Лебега є інваріантною для оператора η. Оскільки

$$\eta^{-1}(\Delta^{-1}_{c_1\ldots c_m}) = \Delta^{-2}_{0c_1\ldots c_m} \cup \Delta^{-2}_{1c_1\ldots c_m}, \text{ то}$$

$$\lambda[\eta^{-2}(\Delta^{2}_{c_1\ldots c_m})] = |\Delta^{-2}_{0c_1\ldots c_m}| + |\Delta^{-1}_{c_1 c_2\ldots c_m}| = 2 \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}} = |\Delta^{-2}_{c_1\ldots c_m}|,$$

а кожен інтервал як завгодно точно можна наблизити об'єднанням циліндрів, то

$$\lambda(\eta^{-1}([\alpha;\beta])) = \beta - \alpha.$$

Якщо розподіл ξ є неперервним, то $p_0 p_1 \neq 0$. Для міри μ має місце рівність

$$\mu_\xi(\Delta^{-2}_{c_1 c_2\ldots c_m}) = \prod_{j=1}^{m} p_{c_j} = p_0^{N_0} p_1^{N_1},$$

де $N_1 \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_m$, $N_0 \equiv m - N_1$.

Тоді

$$\begin{aligned}\mu_\xi(\eta^{-1}(\Delta^{-2}_{c_1 c_2\ldots c_m})) =& \mu_\xi(\Delta^{-2}_{0c_1 c_2\ldots c_m} \cup \Delta^{-2}_{1c_1 c_2\ldots c_m}) = \\ =& \mu_\xi(\Delta^{-2}_{0c_1 c_2\ldots c_m}) + \mu_\xi(\Delta^{-2}_{1c_1 c_2\ldots c_m}) = \\ =& p_0 \prod_{j=1}^{m} p_{c_j} + p_1 \prod_{j=1}^{m} p_{c_j} = \prod_{j=1}^{m} p_{c_j} = \mu_\xi(\Delta^{-2}_{c_1 c_2\ldots c_m}).\end{aligned}$$

З урахуванням вище зробленого зауваження про те, що кожен інтервал з будь-якою точністю наближається об'єднанням циліндрів, ми отримали доведення інваріантності вказаної міри. □

12. Застосування: сингулярні функції, означені в термінах нега–двійкового та ланцюгового A_2–зображення

Роль і значення ланцюгових дробів у математиці та її застосуваннях загально відома [1, 17]. Відносно недавно була створена теорія двосимвольного кодування дійсних чисел за допомогою нескінченних ланцюгових дробів, елементи яких набувають лише двох значень. Запропонована система кодування чисел має нульову надлишковість, тобто кожне число має не більше двох зображень [4]. Це теорія ланцюгових A_2-дробів. Її метрична і ймовірнісна теорія уже мають нетривіальний розвиток [19, 20, 21]. Ланцюгове A_2-зображення має ту ж (топологію), що і нега-двійкове зображення, тобто вони є топологічно еквівалентними. Це дозволяє ефективно використовувати їх для задання функцій і мір зі складною (неоднорідною, іррегулярною) локальною структурою шляхом проектування цифр одного зображення в інше. Розглянемо один з прикладів.

Нехай $A_2 \equiv \{\frac{1}{2}; 1\}$. Як відомо [4], для будь–якого $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ існує послідовність (a_n) така, що $a_n \in A_2$ і

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = \Delta^{A_2}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}. \tag{12}$$

Ланцюговий дріб (12) називається *ланцюговим A_2–дробом.* Наприклад,

$$\frac{1}{2} = [0; (1, \frac{1}{2})] = \Delta^{A_2}_{(1,\frac{1}{2})}, \quad 1 = [0; (\frac{1}{2}, 1)] = \Delta^{A_2}_{(\frac{1}{2},1)}, \quad \frac{2}{3} = \Delta^{A_2}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{2},1)}. \tag{13}$$

Відомо також, що числа зліченної множини можна представити у вигляді двох формально різних ланцюгових A_2-дробів:

$$x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, 1, (1, \frac{1}{2})],$$

де круглі дужки символізують період.Такі числа називаються *A_2-раціональними.* Решта чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ мають єдиний розклад в ланцюговий A_2-дріб, а отже, і єдине ланцюгове A_2-зображення. Вони називаються *A_2-ірраціональними* числами.

Оскільки мають місце рівності (13), то кожне A_2-раціональне число має розклад в скінченний ланцюговий A_2-дріб, а отже, є числом раціональним. Можна довести, що не кожне раціональне число є A_2-раціональним (прикладом такого є число $\frac{5}{6}$). Цікавим є запитання: чи кожне раціональне число має розклад в скінченний ланцюговий A_2-дріб? Воно тісно пов'язане з проблемою встановлення критерію раціональності числа за його данцюговим A_2-зображенням.

Загальний алгоритм розкладу числа $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ в нескінченний ланцюговий A_2-дріб $\Delta^{A_2}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ полягає в наступному:

$$a_1 = \varphi(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо} \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases} = \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \varepsilon \in \{1, 2\};$$

$$x_1 = \frac{1}{x} - \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\varepsilon_1, \quad a_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_1, \ \ \varepsilon_1 \in \{1, 2\};$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1} - \varphi(x_1) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{2}\varepsilon_2, \ \ a_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - \varphi(x_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{2}\varepsilon_n;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Тоді $a_n = \varphi(x_{n-1}) = \frac{1}{2}\varepsilon_n$, $\varepsilon_n \in \{1, 2\}$, $n \in N$.

Нагадаємо, що *підхідним дробом порядку n* даного ланцюгового дробу $[0; a_1, ..., a_n, ...]$ називається число $\frac{p_n}{q_n}$, що є значенням скінченного ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, ..., a_n]$, тобто n-го відрізка даного ланцюгового дробу. Як відомо [17], має місце наступний закон утворення підхідних дробів даного ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$:

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n = 2, 3, .. \end{cases} \quad \text{де } p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_1 a_0 + 1, q_1 = a_1.$$

Для підхідних дробів справедливими є наступні властивості:

(1) $q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$, $\forall k \in N$;
(2) $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$, $\forall k \in N$;
(3) $q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k$, $\forall k \in N$;
(4) $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, ..., a_1]$, $\forall k \in N$.

Означення **4.** *Циліндром рангу* m з основою $c_1 c_2 ... c_m$ для ланцюгового A_2-зображення чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ називається множина $\Delta'_{c_1...c_m}$ всіх чисел x, які мають ланцюгове A_2-зображення з першими m елементами відповідно рівними c_1, c_2, ..., c_m, тобто

$$\Delta^{A_2}_{c_1...c_m} = \{x : \ x = [c_1, c_2, ..., c_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ...], \ a_{m+i} \in A_2\}.$$

Циліндр $\Delta^{A_2}_{c_1...c_m}$ є відрізком з кінцями

$$b = \min \Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n} = \begin{cases} [0; c_1, c_2, ..., c_{n-1}, c_n + 1] & \text{при непарному } n; \\ [0; c_1, c_2, ..., c_{n-1}, c_n + 0,5] & \text{при парному } n; \end{cases}$$

$$c = \max \Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n} = \begin{cases} [0; c_1, c_2, ..., c_n + 0,5] & \text{при непарному } n; \\ [0; c_1, c_2, ..., c_n + 1] & \text{при парному } n. \end{cases}$$

Для довільного натурального n мають місце властивості циліндрів:

(1) $\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n} = \Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n \frac{1}{2}} \cup \Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n 1}$;
(2) Довжина циліндра $\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n}$ обчислюється за формулою

$$d(\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n}) = \frac{1}{(q_{n-1} + q_n)(q_{n-1} + 2q_n)}. \tag{14}$$

(3) Основне метричне відношення має вигляд

$$\frac{|\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n i}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n}|} = \frac{1 + i\frac{q_{n-1}}{q_n}}{2i^2 + 1 + 2i\frac{q_{n-1}}{q_n}}, i \in A_2.$$

Зокрема,

$$\frac{|\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n \frac{1}{2}}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n}|} = \frac{2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2\frac{q_{n-1}}{q_n}} = \frac{2q_n + q_{n-1}}{3q_n + q_{n-1}};$$

$$\frac{|\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n 1}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n}|} = \frac{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{3 + 2\frac{q_{n-1}}{q_n}} = \frac{q_n + q_{n-1}}{3q_n + q_{n-1}}.$$

Тоді

$$\frac{|\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n \frac{1}{2}}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1 c_2 ... c_n 1}|} = \frac{2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}} = 1 + \frac{q_n}{q_n + q_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}}.$$

(4) Має місце подвійна нерівність

$$\frac{3}{8} < \frac{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\dots c_ni}|}{|\Delta^{A_2}_{c_1c_2\dots c_n}|} < \frac{5}{8}.$$

Представлення числа x рівністю (12) можна закодувати засобами і класичного двосимвольного алфавіту $A = \{0;1\}$, а саме:

$$x = [0; a_1; a_2; \dots; a_n, \dots] = \Delta^{A}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots},$$

де $\alpha_n = 0$, якщо $a_n = \dfrac{1}{2}$, і $\alpha_n = 1$, якщо $a_n = 1$.

Розглядається функція f, означена рівністю

$$f(\Delta^{A_2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}) = \bar{\Delta}^{2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots},$$

де $(\alpha_n) \in L = A \times A \times A \times \dots \times A \times \dots$.

Теорема 8. *Функція f з областю визначення $D_f = [\dfrac{1}{2}; 1]$ і множиною значень $E_f = [0;1]$ є:*

1) коректно означеною;

2) неперервною;

3) строго зростаючою.

Доведення. 1) Некоректність в означенні функції могла виникнути на основі того, що деякі числа мають два різних ланцюгових A_2–зображення. Розглянемо різницю

$$f\left(\Delta^{A_2}_{c_1\dots c_m0(01)}\right) - f\left(\Delta^{A_2}_{c_1\dots c_m1(10)}\right) = \overline{\Delta}^{2}_{c_1\dots c_m0(01)} - \overline{\Delta}^{2}_{c_1\dots c_m1(10)} = 0,$$

яка засвідчує коректність означення функції.

2) Для доведення неперервності функції f в A_2-ірраціональній точці $x_0 = \Delta^{A_2}_{c_1c_2\dots c_n\dots}$ розглянемо довільне число $x = \Delta^{A_2}_{a_1a_2\dots a_n\dots}$ з інтервалу $(\frac{1}{2}; 1)$, відмінне від x_0, і модуль різниці $|f(x_0) - f(x)|$. Оскільки $x \neq x_0$, то існує порядковий номер m цифри у нега-двійковому зображенні числа x такий, що $\alpha_m \neq c_m$, але $\alpha_i = c_i$ при $i < m$. Тоді значення функції $f(x)$ і $f(x_0)$ належать одному і тому ж циліндру $\Delta^{-2}_{c_1\dots c_{m-1}}$ рангу $m-1$ нега-двійкового зображення чисел. Тому різниця відстані між ними більша або рівна довжини цього циліндра. А отже,

$$|f(x_0) - f(x)| \leq |\Delta^{-2}_{c_1\dots c_{m-1}}| = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Оскільки ж $x \to x_0$ рівносильно $m \to \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, тобто f неперервна в точці x_0 згідно з означенням.

Якщо x_0 є числом A_2-раціональним, то досить повторити ці ж міркування, але розглядаючи випадки $x \to x_0 - 0$ і $x \to x_0 + 0$, використовувати при цьому в кожному з випадків одне з двох існуючих зображень числа.

3) Для доведення строгої монотонності функції f на відрізку $[\frac{1}{2}; 1]$ досить показати, що її приріст на кожному з циліндрів є додатним. Справді

$$\mu_f(\Delta^{A_2}_{c_1\dots c_m}) \equiv f(\max \Delta^{A_2}_{c_1\dots c_m}) - f(\min \Delta^{A_2}_{c_1\dots c_m}) = |\Delta^{-2}_{c_1\dots c_m}| = \frac{1}{2^m} > 0.$$

Теорему доведено. □

Лема 7. *Якщо функція $y = f(x)$ в точці x_0 має скінченну похідну $f'(x_0) = c$, то вона може бути обчислена за формулою*

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x'_n \le x_0 \le x''_n \\ x''_n - x'_n \to 0}} \frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n},$$

де (x'_n) – зростаюча, а (x''_n) – спадна послідовності, збіжні до x_0.

Доведення. Оскільки

$$c = f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta},$$

то

$$\frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = f'(x_0) + \alpha(\Delta),$$

де $\alpha(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$. Тоді

$$f(x_0 + \Delta) - f(x_0) = c\Delta + \Delta\alpha(\Delta),$$

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + \Delta c + \Delta\alpha(\Delta). \tag{15}$$

Нехай $x_0 - x'_n = a_n$, $x''_n - x_0 = b_n$. Тоді $x''_n - x'_n = a_n + b_n$. На основі (15) отримуємо

$$f(x''_n) = f(x_0 + b_n) = f(x_0) + b_n c + b_n\alpha(b_n),$$

$$f(x'_n) = f(x_0 + (-a_n)) = f(x_0) - a_n c - a_n\alpha(-a_n).$$

Звідси

$$f(x''_n) - f(x'_n) = (a_n + b_n)c + b_n\alpha(b_n) + a_n\alpha(-a_n).$$

Тому

$$\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n} = c + \frac{b_n\alpha(b_n) + a_n\alpha(-a_n)}{a_n + b_n}.$$

Але

$$\beta_n \equiv \frac{b_n\alpha(b_n) + a_n\alpha(-a_n)}{a_n + b_n} = \frac{[b_n\alpha(b_n) + a_n\alpha(b_n)] + [a_n\alpha(-a_n) - a_n\alpha(b_n)]}{a_n + b_n} =$$

$$= \alpha(b_n) + \frac{a_n\,[\alpha(-a_n) - \alpha(b_n)]}{a_n + b_n} =$$

$$\alpha(b_n) + \frac{\alpha(-a_n) - \alpha(b_n)}{1 + \frac{b_n}{a_n}}.$$

Оскільки $\alpha(-a_n) - \alpha(b_n) \to 0 \ \ (n \to \infty)$, а $0 < 1 + \dfrac{b_n}{a_n} < \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Отже,

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n}.$$

Лему доведено. □

Зауваження 7. *Якщо x'_n і x''_n — кінці циліндра n–го рангу, а саме: $\Delta_n(x_0)$, що містить точку x_0 деякого зображення чисел відрізка $[a;b]$, то у випадку існування скінченної похідної $f'(x_0)$ функція f в точці x_0, її циліндрична похідна*

$$f'_{ц}(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_f(\Delta_n(x_0))}{|\Delta_n(x_0)|}$$

рівна звичайній похідній.

Теорема 9. *Якщо в точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$ функції f, то вона обчислюється за формулою*

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\Delta^{-2}_{\alpha_1(x_0)\dots\alpha_n(x_0)}|}{|\Delta^{A_2}_{a_1(x_0)\dots a_n(x_0)}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(q_{n-1}+q_n)(q_{n-1}+2q_n)}{2^n},$$

де q_n — знаменник підхідного дробу числа x_0.

Доведення. Дане твердження є наслідком попередньої леми і вище наведених рівностей:

$$|\Delta^{A_2}_{a_1\dots a_n}| = \frac{1}{(q_{n-1}+q_n)(q_{n-1}+2q_n)},$$
$$|\Delta^{-2}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}| = 2^{-n}.$$

□

Наслідок 1. [9, 21] *Функція f і їй обернена функція f^{-1} є сингулярною строго зростаючою функцією.*

Література

[1] *Арнольд В.И.* Цепные дроби — М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 40с.

[2] *Гельфонд А.О* Об одном общем свойстве систем счисления. — Изв. АН СССР. Сер. матем. — 23:6. — 1959. — С. 809–814.

[3] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — Москва : Мир, 1985. — 414 с.

[4] *Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В.* Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія // Укр.мат.журнал. – 2009. – Т.61, № 4. – С. 452-463.

[5] *Касаткин В.Н.* Новое о системах счисления. — К. : Вища школа, 1982. — 96 с.

[6] *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. — М.: Изд.-во.: ИЛ, 1963. — 156 с.

[7] *Постников А. Г.* Вероятностна теория чисел. — М.: Знание, 1974. — 63 с.

[8] *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ. Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. — 68 с.

[9] *Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В.* Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2-дробом х незалежними елементами // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2009. – №81. – С. 139-154.

[10] *Працьовитий М.В., Лещинський О.Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення // Теорія ймовіоностей та мат. статистика. — 1997. № 57. — С.134–139.

[11] *Працьовитий М.В.* Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти х ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – Київ: ІМ НАН України — НПУ імені М.П. Драгоманова. – 1998 – №2. — С. 14–35.

[12] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Видавництво НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[13] *Скоробагатько В.Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее приложения в вычеслительной математике. — М.: Наука, 1983. — 312с.

[14] *Стахов А.П.* Алгоритмическая теория измерения. — М. : Знание, 1979. — 64 с.

[15] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

[16] *Фомин С.В.* Системы счисления. — М. : Наука, 1987. — 48 с.

[17] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М.: Наука, — 1978. — 116 с.

[18] *Яглом А.М., Яглом И.М.* Вероятность и информация. — М. : Наука, 1973. —512 с.

[19] *Pratsiovytyi M. and Kyurchev D.* On A_2-continued fraction expansion, Voronoi's Impact on Modern Science. Book 4, Vol.1: Proceedings of the Fourth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Drahomanov National Pedagogical University, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine. – Kyiv, 2008. – P. 181-190.

[20] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random Operators and Stochastic Equations. — 2009. – Vol. 17, no. 1. – Pp. 91 – 101.

[21] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* On A_s-continued fraction expansion // Book of abstracts of the Inernational Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M.Chernikov. – Kyiv, 2012. – P. 119.