517
В19

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ им. ГОРЬКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Т. Г. ВАСЬКОВСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ НОВЫХ СЛУЧАЕВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель доктор технических наук профессор И. М. Рапопорт

НБ НПУ

100196806

Киев — 1956

517
В2с

Исследованию асимптотического поведения решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами посвящена обширная литература (библиография по этому вопросу приведена, например, в книге И. М. Рапопорта [1]). В этой же книге И. М. Рапопорта подробно рассматривается метод исследования асимптотического поведения решений линейных дифференциальных уравнений, основанный на преобразовании заданного дифференциального уравнения либо заданной системы дифференциальных уравнений к системе специального вида, названного автором L — диагональным. В диссертации мы указываем прием преобразования заданной системы дифференциальных уравнений к L — диагональному виду, позволяющий, кроме случаев приведения, уже рассмотренных ранее Н. Левинсоном[2] и И. М. Рапопортом[1], охватить также и ряд новых случаев. Пользуясь этим приемом, мы детально исследуем в диссертации асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядка, устанавливая для этих уравнений ряд новых асимптотических формул.

Применяемые нами в диссертации преобразования дифференциальных уравнений тесно связаны с преобразованиями, на которых основан асимптотический метод интегрирования дифференциальных уравнений, разработанный Н. Биркхофом[3] и Я. Д. Тамаркиным[4]. В связи с этим мы начинаем диссертацию с изложения указанного выше метода Биркхофа и Тамаркина.

В первой главе рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \lambda A(t)x, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — заданная функциональная матрица, λ — большой числовой параметр. Осуществляя в системе (1) линейную подстановку вида

$$x = B(t)\left[I + \sum_{k=1}^{m} \frac{S_k(t)}{\lambda^k}\right] y,$$

можно получить систему

$$\frac{dy}{dt}=\left[W(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda^m}C(t,\lambda)\right]y,\ t\geqslant t_0, \tag{2}$$

диагональную с точностью до малых порядка $\frac{1}{\lambda^m}$ ($W(t,\lambda)$ — диагональная матрица, $C(t,\lambda)$ — матрица, равномерно ограниченная относительно λ).

Пренебрегая в системе (2) малыми порядками $\frac{1}{\lambda^m}$ и заменяя, таким образом, уравнения (2) приближенными уравнениями

$$\frac{dy}{dt}=W(t,\lambda)\,y,$$

элементарно интегрирующимися, можно получить так называемое „m-ое" асимптотическое приближение для решения системы уравнений (1).

Во второй главе мы указываем следующий прием преобразования заданных дифференциальных уравнений к L—диагональному виду. Полагая $\lambda=1$, прийдем к такому выводу, что подстановка

$$x=B(t)\left[I+\sum_{h=1}^{m}S_k(t)\right]y$$

преобразует систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\quad t\geqslant t_0$$

к виду

$$\frac{dy}{dt}=W(t)\,y+C(t)\,y,\quad t\geqslant t_0, \tag{3}$$

где

$$W(t)=W(t,1),\quad C(t)=C(t,1).$$

Система дифференциальных уравнений (3) будет L-диагональна, если элементы матрицы $C(t)$ будут абсолютно интегрируемы в интервале (t_0,∞).

Исходя из некоторых достаточных условий абсолютной интегрируемости элементов матрицы $C(t)$, можно установить следующую теорему.

Теорема 1.

Пусть $A(t)$ — матрица, элементы которой непрерывны вместе со всеми своими производными вплоть до „m — й" включительно в интервале (t_0, t_1) при любом конечном $t_1 > t_0$, и при любом $t \geqslant t_0$ матрица $A(t)$ не имеет кратных собственных чисел. Пусть далее $B(t)$ — матрица, составленная из собственных векторов матрицы $A(t)$, $W_0(t)$ — диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы $A(t)$, $(A(t)B(t) = B(t)W_0(t))$ и $S_k(t)$, $k = 1,2, \ldots, m$ — матрицы, удовлетворяющие уравнениям

$$W_0(t)S_k(t) - S_k(t)W_0(t) = G_k(t) + W_k(t), \; k = 1,2, \ldots, m,$$

где

$$G_1(t) = B^{-1}(t)B'(t),$$

$$G_k(t) = S_{k-1}(t)W_1(t) + \ldots + S_1(t)W_{k-1}(t) + G_1(t)S_{k-1}(t) + + S'_{k-1}(t), \; k = 2,3, \ldots, m.$$

Тогда, если элементы матриц $S_j(t)W_k(t)$, $j = m+1-k, \ldots m$, $k = 1,2, \ldots, m$, $G_1(t)S_m(t)$, $S'_m(t)$ суммируемы в интервале $(t_0 \infty)$и $\lim\limits_{t\to\infty} S_k(t) = 0$, $k = 1,2, \ldots, m$, то система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \; t \geqslant t_0$$

при достаточно большом t_0 приводится линейной подстановкой

$$x = B(t)\left[I + \sum_{k=1}^{m} S_k(t)\right]y$$

к L — диагональному виду

$$\frac{dy}{dt} = [W(t) + C(t)]y, \; t \geqslant t_0,$$

где $W(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} W_k(t)$, а $C(t)$ — матрица, элементы которой абсолютно интегрируемы в интервале (t_0, ∞) (матрицы $W_1(t)$, $W_2(t), \ldots, W_m(t)$ однозначно определяются из условной разрешимости уравнений, определяющих матрицы $S_1(t), S_2(t), \ldots, S_m(t)$).

При $m=1$ мы приходим к случаю, рассмотренному И. М. Рапопортом[1], при $m \geqslant 2$ можно получить таким путем новые случаи приведения системы к L — диагональному виду.

В третьей главе мы приводим вывод асимптотических формул для решений L — диагональной системы дифференциальных уравнений, придерживаясь изложения вопроса, указанного И. М. Рапопортом в работе[1].

Как показали Н. Левинсон[2] и И. М. Рапопорт[1] L — диагональная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = W(t)y + C(t)y, \quad t \geqslant t_0$$

обладает фундаментальной системой частных решений

$$y_k = y_{ke}(t), \quad k, \; e = 1,2 \ldots , n,$$

для которых имеют место асимптотические формулы

$$y_{ke}(t) = [\delta_{ke} + o(1)]\, e^{\int_{t_0}^{t} w_e(t)\,dt} \quad \left(\delta_{ke} \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq e \\ 1 \text{ при } k = e \end{cases}\right),$$

если функции $w_1(t)$, $w_2(t)$, ..., $w_n(t)$ непрерывны в интервале (t_0, t_1) при любом конечном t_1 и могут быть перенумерованы так, чтобы имели место неравенства

$$Rew_1(t) \leqslant Rew_2(t) \leqslant \ldots \leqslant Rew_n(t) \text{ при } t \geqslant t_0$$

для достаточно большого t_0.

Четвертая глава посвящена исследованию асимптотического поведения решений линейного дифференциального уравнения второго поряка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty, \qquad (4)$$

для которого, при различных предположениях относительно функции $p(t)$, мы устанавливаем следующие теоремы.

Теорема 2.

Если функция $p(t)$ при достаточно большом t_0 удовлетворяет условиям

$$p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2 \in L(t_0, \infty), \quad p^{-\frac{3}{2}}(t)\,p''(t) \in L(t_0, \infty), \quad p^{-1}(t)\,p'(t)$$

не [redacted] в интервале (t_0, ∞),

суммируема

$$0 < p(t) < \infty \text{ при } t_0 \leqslant t < \infty,$$

то дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0$$

имеет два линейно-независимых решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, для которых справедливы асимптотические формулы:

$$x_1(t) = p^{-\frac{1}{4}}(t)\,[\cos\int_{t_0}^{t}\sqrt{p(t)}\,dt + o(1)].$$

$$x_1'(t) = p^{\frac{1}{4}}(t)\,[-\sin\int_{t_0}^{t}\sqrt{p(t)}\,dt + o(1)],$$

и

$$x_2(t) = p^{-\frac{1}{4}}(t)\,[\sin\int_{t_0}^{t}\sqrt{p(t)}\,dt + o(1)],$$

$$x_2'(t) = p^{\frac{1}{4}}(t)\,[\cos\int_{t_0}^{t}\sqrt{p(t)}\,dt + o(1)].$$

Теорема 3.

Если функция $p(t)$ при достаточно большом t_0 удовлетворяет условиям

$$p^{-4}(t)\,[p'(t)]^3 \in L(t_0, \infty),\quad p^{-3}(t)\,p'(t)\,p''(t) \in L(t_0, \infty),$$

$$p^{-2}(t)\,p'''(t) \in L(t_0, \infty),\quad p^{-1}(t)\,p'(t)$$

не [redacted] суммируема в интервале (t_0, ∞),

$$0 < p(t) < \infty \quad \text{при } t_0 \leqslant t < \infty,$$

то дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0$$

имеет два линейно-независимых решения, для которых справедливы асимптотические формулы:

$$x_1(t) = p^{-\frac{1}{4}}(t)\,\{\cos\int_{t_0}^{t}\{\sqrt{p(t)} + \frac{1}{32}p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\},$$

$$x_1'(t) = p^{\frac{1}{4}}(t)\,\{-\sin\int_{t_0}^{t}\{\sqrt{p(t)} + \frac{1}{32}p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\}.$$

и

$$x_2(t) = p^{-\frac{1}{4}}(t)\,\{\sin\int_{t_0}^{t}\{\sqrt{p(t)} + \frac{1}{32}p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\},$$

$$x_2'(t) = p^{\frac{1}{4}}(t)\,\{\cos\int_{t_0}^{t}\{\sqrt{p(t)} + \frac{1}{32}p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\}.$$

Теорема 4.

Если функция $p(t)$ при достаточно большом t_0 удовлетворяет условиям:

$$p^{-\frac{11}{2}}(t)\,[p'(t)]^4 \in L(t_0, \infty), \quad p^{-\frac{7}{2}}(t)\,[p''(t)]^2 \in L(t_0, \infty),$$

$$p^{-\frac{9}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\, p''(t) \in L(t_0, \infty)$$

$$p^{-4}(t)\,p''(t)\,p'''(t) \in L(t_0, \infty), \quad p^{-\frac{7}{2}}(t)\,p'(t)\,p'''(t) \in L(\mathrm{t}, \infty),$$

$$p^{-\frac{5}{2}}(t)\,p^{\mathrm{IV}}(t) \in L(t_0, \infty),$$

$$p^{-1}(t)\,p'(t) \notin L(t_0, \infty), \quad p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2 \notin \mathrm{L}(t_0, \infty),$$

$$p^{-\frac{3}{2}}(t)\,p''(t) \notin L(t_0, \infty),$$

$$0 < p(t) < \infty \text{ при } t_0 \leqslant t < \infty,$$

то дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\,x = 0$$

имеет два линейно-независимых решения, для которых справедливы асимптотические формулы:

$$x_1(t) = p^{-\frac{1}{4}}(t)\left\{\cos \int\limits_{t_0}^{t} \left\{\sqrt{p(t)} + \frac{1}{32} p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\right\} dt + o(1)\right\},$$

$$x_1'(t) = p^{\frac{1}{4}}(t)\left\{-\sin \int\limits_{t_0}^{t} \left\{\sqrt{p(t)} + \frac{1}{32} p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\right\} dt + o(1)\right\}$$

и

$$x_2(t) = p^{-\frac{1}{4}}(t)\left\{\sin \int\limits_{t_0}^{t} \left\{\sqrt{p(t)} + \frac{1}{32} p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\right\} dt + o(1)\right\},$$

$$x_2'(t) = p^{\frac{1}{4}}(t)\left\{\cos \int\limits_{t_0}^{t} \left\{\sqrt{p(t)} + \frac{1}{32} p^{-\frac{5}{2}}(t)\,[p'(t)]^2\right\} dt + o(1)\right\}.$$

На примере дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(\ln t)^{\alpha}}{t^2}\,x = 0$$

мы показываем, что установленные нами теоремы могут определять асимптотическое поведение решений дифференциального уравнения (4) в то время, когда известные критерии оказываются неприменимыми.

В пятой главе проводится исследование асимптотического поведения решений линейного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^4x}{dt^4} - p(t)\,x = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

для которого, при различных предположениях относительно функции $p(t)$, устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 5.

Если функция $p(t)$ при достаточно большом t_0 удовлетворяет условиям:

$$p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2 \in L(t_0, \infty), \quad p^{-\frac{5}{4}}(t)\,p''(t) \in L(t_0, \infty),$$

$$p^{-1}(t)\,p'(t) \notin L(t_0, \infty), \; p(t) > 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < \infty,$$

то дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4x}{dt^4} - p(t)\,x = 0$$

имеет четыре линейно-независимых решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, для которых справедливы асимптотические формулы:

$$x_1(t) = p^{-\frac{3}{8}}(t)\,[\cos\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt + o(1)],$$

$$x_1'(t) = p^{-\frac{1}{8}}(t)\,[-\sin\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt + o(1)],$$

$$x_1''(t) = -p^{\frac{1}{8}}(t)\,[\cos\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt + o(1)],$$

$$x_1'''(t) = p^{\frac{3}{8}}(t)\,[\sin\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt + o(1)],$$

$$x_2(t) = p^{-\frac{3}{8}}(t)\,[\sin\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt + o(1)],$$

$$x_2'(t) = p^{-\frac{1}{8}}(t)\,[\cos\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt + o(1)],$$

$$x_2''(t) = -p^{\frac{1}{8}}(t)\,[\sin\int_{t}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt + o(1)],$$

$$x_2'''(t) = -p^{\frac{3}{8}}(t)\left[\cos\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt + o(1)\right],$$

$$x_3(t) = p^{-\frac{3}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt},$$

$$x_3'(t) = p^{-\frac{1}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt},$$

$$x''_3(t) = p^{\frac{1}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt},$$

$$x_3'''(t) = p^{\frac{3}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt},$$

$$x_4(t) = p^{-\frac{3}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{-\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt},$$

$$x_4'(t) = -p^{-\frac{1}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{-\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt},$$

$$x_4''(t) = p^{\frac{1}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{-\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt},$$

$$x_4'''(t) = -p^{\frac{3}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{-\int_{t_0}^{t} p^{\frac{1}{4}}(t)\,dt},$$

Теорема 6,

Если функция $p(t)$ при достаточно большом t_0 удовлетворяет условиям:

$$p^{-\frac{7}{2}}(t)\,[p'(t)]^3 \in L(t_0, \infty),\quad p^{-\frac{5}{2}}(t)\,p'(t)\,p''(t) \in L(t_0, \infty),$$

$$p^{-\frac{3}{2}}(t)\,p'''(t) \in L(t_0, \infty),\quad p^{-1}(t)\,p'(t) \notin L(t_0, \infty),$$

$$p(t) > 0 \text{ при } t_0 \leqslant t < \infty,$$

то дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4x}{dt^4} - p(t)\,x = 0$$

имеет четыре линейно-независимых решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, для которых справедливы асимптотические формулы:

$$x_1(t) = p^{-\frac{3}{8}}(t)\left[\cos\int_{t_0}^{t}\{p^{\frac{1}{4}}(t) - \frac{5}{128}\,p^{\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\right],$$

$$x_1'(t) = p^{-\frac{1}{8}}(t)\left[-\sin\int_{t_0}^{t}\{p^{\frac{1}{4}}(t) - \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\right],$$

$$x_1''(t) = -p^{\frac{1}{8}}(t)\left[\cos\int_{t_0}^{t}\{p^{\frac{1}{4}}(t) - \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\right],$$

$$x_1'''(t) = p^{\frac{3}{8}}(t)\left[\sin\int_{t_0}^{t}\{p^{\frac{1}{4}}(t) - \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\right],$$

$$x_2(t) = p^{-\frac{3}{8}}(t)\left[\sin\int_{t_0}^{t}\{p^{\frac{1}{4}}(t) - \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\right],$$

$$x_2'(t) = p^{-\frac{1}{8}}(t)\left[\cos\int_{t_0}^{t}\{p^{\frac{1}{4}}(t) - \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\right],$$

$$x_2''(t) = -p^{\frac{1}{8}}(t)\left[\sin\int_{t_0}^{t}\{p^{\frac{1}{4}}(t) - \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\right],$$

$$x_2'''(t) = -p^{\frac{3}{8}}(t)\left[\cos\int_{t_0}^{t}\{p^{\frac{1}{4}}(t) - \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\}\,dt + o(1)\right],$$

$$x_3(t) = p^{-\frac{3}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{\int_{t_0}^{t}\left\{p^{\frac{1}{4}}(t) + \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\right\}dt}$$

$$x_3'(t) = p^{-\frac{1}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{\int_{t_0}^{t}\left\{p^{\frac{1}{4}}(t) + \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\right\}}$$

$$x_3''(t) = p^{\frac{1}{8}}(t)\,[1 + o(1)]\,e^{\int_{t_0}^{t}\left\{p^{\frac{1}{4}}(t) + \frac{5}{128}\,p^{-\frac{9}{4}}(t)\,[p'(t)]^2\right\}dt}$$

$$x_3'''(t) = P^{\frac{3}{8}}(t)[1+o(1)]\, e^{\int\limits_{t_0}^{t}\left\{p^{\frac{1}{4}}(t)+\frac{5}{128}p^{-\frac{9}{4}}(t)[p'(t)]^2\right\}dt}$$

$$x_4(t) = p^{-\frac{3}{8}}(t)[1+o(1)]\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\left\{p^{\frac{1}{4}}(t)+\frac{5}{128}p^{-\frac{9}{4}}(t)[p'(t)]^2\right\}dt}$$

$$x_4'(t) = -p^{-\frac{1}{8}}(t)[1+o(1)]\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\left\{p^{\frac{1}{4}}(t)+\frac{5}{128}p^{-\frac{9}{4}}(t)[p'(t)]^2\right\}dt}$$

$$x_4''(t) = p^{\frac{1}{8}}(t)\,[1+o(1)]\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\left\{p^{\frac{1}{4}}(t)+\frac{5}{128}p^{-\frac{9}{4}}(t)[p'(t)]^2\right\}dt}$$

$$x_4'''(t) = -p^{\frac{3}{8}}(t)[1+o(1)]\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t}\left\{p^{\frac{1}{4}}(t)+\frac{5}{128}p^{-\frac{9}{4}}(t)[p'(t)]^2\right\}dt}$$

На примере дифференциального уравнения

$$\frac{d^4x}{dt^4} - \frac{(\ln t)^a}{t^4}x = 0$$

мы показываем, что установленные нами теоремы позволяют охватить более широкий класс дифференциальных уравнений, чем цитированные выше исследования.

Цитированная литература

1. И. М. Рапопорт, „О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений", изд. АН УССР, Киев, 1954 г.
2. N. Levinson, „The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations", Duke, Math. J., 15 (1948).
3. G. D. Birkhoff, „Boundary value aud expansion problems of ordinary linear differeutial equations", Trans. Amer. Math. Soc., 9 (1908).
4. J. Tamarkin, „Sur quelques points de la theorie des equations differentielles", Rend, di Palermo, 34 (1912).

БФ 09310. 18.VII 1956 г. Тип. КГПИ, Франко, 44. Зак. 681—100

екац