МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им.А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ЗИНЬКО Петр Николаевич

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ОТЫСКАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

№ 01.01.02. Дифференциальные и интегральные уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1975

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им.А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

ЗИНЬКО Петр Николаевич

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ОТЫСКАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

№ 01.01.02. Дифференциальные и интегральные
уравнения

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1975

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом институте им.А.М.Горького

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор С.Ф.ФЕЩЕНКО
кандидат физико-математических наук И.В.БЕЙКО

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор Ю.М.ЕРМОЛЬЕВ
кандидат физико-математических наук А.Г.НАКОНЕЧНЫЙ

Ведущее предприятие - Институт физики и математики АН Литовской ССР.

Автореферат разослан " " ____________ 197__ г.

Защита диссертации состоится " " ____________ 197__ г. в часов на заседании Совета физико-математического факультета КГПИ им.А.М.Горького по присуждению ученых степеней.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале института.

Отзывы просим присылать по адресу:
252030, г.Киев-30, ул.Пирогова, 9.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Важное место в современной теории дифференциальных уравнений занимают вопросы связанные с изучением дифференциальных уравнений в контингенциях вида

$$\frac{dx}{dt} \in \Phi(x(t), t).$$

Среди множества решений уравнения в контингенциях большой практический интерес представляют экстремальные решения, т.е. абсолютно непрерывные функции $x(t)$, удовлетворяющие почти всюду уравнению в контингенциях и доставляющие экстремум заданному функционалу. Методы отыскания таких решений разрабатываются как в самой теории дифференциальных уравнений так и в многих смежных областях / в теории оптимального управления, дифференциальных играх, вариационном исчислении/.

Настоящая диссертационная работа содержит исследования по этому направлению, которые по существу лежат на стыке теории дифференциальных уравнений и математической кибернетики.

В последнее время большое внимание приделяется конфликтным задачам управления / такие задачи обединяют термином дифференциальные игры /. В работах Н.Н.Красовского, Л.С.Понтрягина, Е.Ф.Мищенко, М.С.Никольского, Б.Н.Пшеничного, А.И.Субботина, И.В.Бейко, А.Б.Куржанского, Ю.С.Осипова, В.Е.Третьякова, В.Н.Ушакова и др. авторов рассматриваются различные подходы к решению задач теории дифференциальных игр, дается их качественный анализ и возможные пути приближенного решения. Вопросы существования решения дифференциальной игры и вопросы сходимости решения многошаговой игры к решению дифференциальной исследовали Л.Берковиц, П.Варайя, В.Флеминг, А.Фридман и др..

Поведение реального объекта функционирующего в естественных условиях характеризуется некоторой неопределенностью. Описание таких систем при помощи хорошо известных детерминированных подходов не всегда плодотворно и не отражает действительной картины функционирования объекта. Таким образом, необходимость разработки стохастической теории систем вызвана насущными потребностями практики управления.

Ю.М.Ермольевым и его учениками получено ряд важных результатов по численным методам решения задач управления объектами, уравнения движения которых содержат элемент ω вероятностного пространства.

В реферируемой работе рассматриваются конфликтные задачи об управлении объектами, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими элемент ω вероятностного пространства. Разработка численных методов решения задач управления связана с конечно-разностной аппроксимацией, что в свою очередь приводит к исследованию алгоритмов стохастического программирования. В данной работе рассматриваются некоторые аспекты реализации этих алгоритмов на вычислительных машинах.

Диссертация состоит из введения и двух глав.

В первом параграфе даются постановки задач и намечаются возможные способы их решения. Пусть движение объектов описывается системами дифференциальных уравнений, зависящими от элемента ω некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$:

$$\frac{dx}{dt} = f^{(1)}(t, x, u, \omega), \quad x(t_0) = x_0, \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = f^{(2)}(t, y, v, \omega), \quad y(t_0) = y_0, \qquad (2)$$

где управляющие воздействия $u(t)$ и $v(t)$ почти при каждом $t \in [t_0, T]$ удовлетворяют условиям

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in V. \qquad (3)$$

Распределение ω считается неизвестным. При почти каждом ω допустимые управления $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ и $v(t)$, $t \in [t_0, T]$ определяют траектории $x(t|u,\omega)$ и $y(t|v,\omega)$, которые называют реализациями процесса или выборочными траекториями. Качество выбранных управлений $u(t)$ и $v(t)$ на заданном интервале времени $[t_0, T]$ определяется функционалом

$$J(u(t), v(t)) = M\int_0^T \varphi(x(t|u,\omega), y(t|v,\omega), u(t), v(t), t, \omega)\,dt +$$

$$+ Mh(x(T|u,\omega), y(T|v,\omega), \omega), \qquad (4)$$

где M - оператор математического ожидания.

Объект x выбором допустимого управления $u(t)$ стремится максимизировать, а объект y, наоборот, выбором допустимого управления $v(t)$ стремится минимизировать функционал $J(u, v)$.

Если существует область, в которую объекты (I) и (2) не должны заходить, то предполагая, что объект y знает какой стратегией $v(t) = v(x(t|u,\omega), y(t|v,\omega), t)$ будет пользоваться x на интервале $[t_0, T]$, мы исходную задачу сводим к решению стохастической задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Предположим теперь, что управляющие воздействия на системы (I), (2) объекты x и y определяют согласно следующих параметрических функций:

$$u(t) = u(x(t|u,\omega), y(t|v,\omega), \overset{\circ}{p}, t), \quad p \in P,$$
$$v(t) = v(x(t|u,\omega), y(t|v,\omega), \overset{\circ}{q}, t), \quad q \in Q.$$

Каждый из объектов не знает, какой именно параметр выбрал противник. Считаем, что функции $u(x, y, p, t)$, $v(x, y, q, t)$ и выпуклые компакты $P \subset R_r$, $Q \subset R_n$ таковы, что ограничения (3) не нарушаются. Тогда решение задачи (I) - (4) сводится к решению непрерывной минимаксной задачи стохастического программирования.

В § 2 рассматривается стохастическая задача, оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z, u, \omega), \; z(t_0) = z_0, \quad u \in U, \qquad (5)$$

$$J(u(t)) = M\int_0^T h(z(t|u,\omega), u(t), t, \omega)\,dt + $$
$$+ M\varphi(z(T|u,\omega),\omega) \longrightarrow \min_u , \qquad (6)$$

$$Mg_j(z(t|u,\omega), u(t), t, \omega) \leq 0, \; j = 1,\dots,l. \qquad (7)$$

Так же как это сделано В.В.Хоменюком в детерминированном случае, мы составляем функцию Лагранжа

$$L(u(t), p(t)) = \int_0^T Mh(z(t|u,\omega), u(t), t, \omega)\,dt +$$
$$+ M\varphi(z(T|u,\omega),\omega) + \int_0^T (p(t), Mg(z(t|u,\omega), u(t), t, \omega)\,dt.$$

Для отыскания седловой точки функции $L(u,p)$ предлагается стохастический аналог метода Эрроу-Гурвица и в случае строгой выпуклости по u функции Лагранжа доказывается его сходимость.

В § 3 рассматриваются методы решения непрерывной минимаксной задачи стохастического программирования

$$\min_{x\in X} \max_{y\in Y} MF(x, y, \omega), \qquad (9)$$

где X - выпуклый компакт в R_n, Y - замкнутое ограниченное множество в R_m. Так же как это сделано В.Ф.Демьяновым в детерминированном случае, на множестве Y определяем последовательность сеток $\{G_\nu\}$, обладающую свойством плотности в $\mathcal{Y}$, и при каждом значении N решаем дискретную стохастическую минимаксную задачу:

$$\varphi_N(x) = \max_{i\in[0:N]} MF(x, y_N^i, \omega) \longrightarrow \min_{x\in X} . \quad (10)$$

Для решения задачи (10) используются аналоги алгоритмов стохастического программирования, предложенных Ю.М.Ермольевым и Е.А.Нурминским. Предельные точки последовательности $\{x_N\}$, образованной решениями задачи (10), являются решением задачи (9).

Однако, такой метод решения задачи (9) малоэффективный, так как при каждом N приходится решать задачу (10), причем N неограниченно возрастает. Предлагается модификация предложенного выше метода.

Строим последовательность сеток $\{G_{N_s}\}$, обладающую свойством плотности на $\mathcal{Y}$, причем каждая последующая сетка содержит все точки предыдущей с сохранением нумерации точек и предполагаем, что для произвольного $y\in\mathcal{Y}$ расстояние от y до ближайшей точки сетки G_{N_s} не превышает число $K\rho_s^{1+\gamma}$ $(0<K<\infty, \gamma>0, s=0,1,\dots)$. Алгоритм определяется следующим образом:

А. Выбирается $x^0\in X$; N_0; z_i^0, $i\in[0:N_0]$.

Б. Находится

$$x^{s+1}(\omega) = \pi_X\left(x^s(\omega) - \rho_s \nabla_x F(x^s(\omega), y_{N_s}^{i_s}, \omega^s)\right),$$

где

$$i_s\in J_s(\omega),\ J_s(\omega) = \left\{i : i\in[0:N_s],\ z_i^s = \max_{i\in[0:N_s]} z_i^s\right\}.$$

В. Определяются величины z_i^{s+1}, $i\in[0:N_{s+1}]$:

а) $z_i^{s+1}(\omega) = z_i^s(\omega) + \sigma_s\left(F(x^s, y_{N_s}^i, \omega^s) - z_i^s(\omega)\right)$,

$0 \le \sigma_s \le 1$ для всех $i \in [0 : N_s]$;

б) $z_j^{s+1}(\omega) = \hat{z}(y^j_{N_{s+1}})$ для всех $j \in [N_s + 1 : N_{s+1}]$,

где $\hat{z}(y^j_{N_{s+1}})$, $j \in [N_s + 1 : N_{s+1}]$ равно $z_i^s(\omega)$ при таком $i \in [0 : N_s]$, которое отвечает точке $y^i_{N_s}$ сетки G_{N_s}, принадлежащей шару радиуса $K\rho_{s+1}$ ь из центром в точке $y^j_{N_{s+1}}$ и имеющей наименьший индекс i.

Теорема 4.2. Пусть выполняются условия:

1. $MF(x,y,\omega)$ и $\nabla_x MF(x,y,\omega)$ – непрерывны на $X \times Y$.
2. $MF(x,y,\omega)$ при каждом $y \in Y$ выпукла вниз по x.
3. $\nabla_x MF(x,y,\omega)$ удовлетворяет условию Липшица по x

$$\| \nabla_x MF(x,y,\omega) - \nabla_x MF(\bar{x},y,\omega) \| \le L \| x - \bar{x} \| ,\ L < \infty .$$

4. $MF(x,y,\omega)$ удовлетворяет условию Липшица по y

$$| MF(x,y,\omega) - MF(x,\bar{y},\omega) | \le L_1 \| y - \bar{y} \| ,\ L_1 < \infty .$$

5. $$M|F(x,y,\omega)|^2 < \infty ,\ M\| \nabla_x F(x,y,\omega) \|^2 < \infty .$$

6. $$\sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s^2 < \infty ,\ \sum_{s=0}^{\infty} \rho_s = \infty ,\ \rho_s / \sigma_s \xrightarrow[s \to \infty]{} 0 ,\ \rho_{s+1}/\rho_s \xrightarrow[s \to \infty]{} 1 .$$

7. $$\lim_{n \to \infty} \sum_{s=n}^{k} \sigma_s = \infty ,\ (k - n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty .$$

Тогда алгоритм А – В сходится в том смысле, что почти для всех ω предельные точки последовательности $\{x^s(\omega)\}$, порожденной алгоритмом А – В , принадлежат множеству решений задачи (9) .

В § 4 решается одна задача преследования для случая систем линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\omega)x + B(t,\omega)u ,\ x(t_0) = x_0 ;\ u \in U ,$$

$$\frac{dy}{dt} = C(t,\omega)y + \mathcal{D}(t,\omega)v, \quad y(t_0) = y_0, \quad v \in V.$$

Предполагается, что на некотором интервале $[t_0, T']$ почти при каждом ω выполняется условие

$$G_x(t,\omega) \cap G_y(t,\omega) = \varnothing, \quad \forall t \in [t_0, T'],$$

где $G_x(t,\omega), G_y(t,\omega)$ – соответственно области достижимости объектов x и y в момент t. Вводится функционал $\rho(t,u,\omega)$, определяющий расстояние от точки $x(t|u,\omega)$ до множества $G_y(t,\omega)$. Задача преследователя (объекта x) состоит в том, чтобы найти наибольшее значение $T = T^*$ и управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, T^*]$, удовлетворяющие условию

$$M \max_{t\in[t_0,T^*]} \rho(t,u^*,\omega) = \min_u M \max_{t\in[t_0,T^*]} \rho(t,u,\omega) \leqslant \rho_0,$$

где число $\rho_0 > 0$ такое, что $\| x_0 - y_0 \| < \rho_0$.

Следуя методике Н.Н.Красовского, применяемой в детерминированном случае задач сближение – уклонения, исходная задача сводится к решению последовательности минимаксных задач на фиксированном интервале времени, каждая из которых решается при помощи метода обобщенного стохастического градиента.

В § 5 рассматривается процесс обучения

$$x^{n+1} = (1 - \alpha_n)x^n + \alpha_n \xi^n, \quad x^1 \in R_r, \qquad \text{(II)}$$

где $\{\xi^n\}$ – заданная последовательность случайных векторов. Используя условия сходимости алгоритмов стохастического программирования, полученные Е.А.Нурминским, доказываются теоремы обобщающие результаты $W.\ Hansa$ на случай последовательности зависимых случайных векторов.

<u>Теорема 5.2.</u> Пусть последовательность случайных векторов

$\{\xi^n\}$ такова, что имеют место условия:

$$\| M\xi^{n+1} - M\xi^n \| \leq c_2 \beta_n , \quad c_2 < \infty , \quad n = 1, 2, \dots ,$$

$$M \| \xi^n \|^2 \leq c_1 < \infty , \quad \beta_n / \alpha_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Тогда если параметры α_n выбрать такими, что $0 \leq \alpha_n \leq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$, то процесс (II) с вероятностью единица сходится к $M\xi^n$, т.е. справедливо

$$\lim_{n \to \infty} \| x^n - M\xi^n \| \overset{п.н.}{=} 0 .$$

При использовании вычислительных машин для решения задач управления, дифференциальные уравнения, описывающие поведение системы, так или иначе заменяются разностными, в результате чего исходная экстремальная задача заменяется конечномерной задачей стохастического программирования. В связи с чем во второй главе рассматривается следующая задача стохастического программирования

$$Mf(x, \omega) \longrightarrow \min_{x \in R_m} . \qquad (I2)$$

Решение весьма широкого круга задач (I2) оказалось практически осуществимым с помощью итеративного метода Ю.М.Ермольева / названного в его работах методом стохастического квазиградиента /:

$$x^{n+1} = x^n - \lambda_n \xi^n , \quad x^1 \in R_m , \qquad (I3)$$

который предъявляет практически реализуемые требования к последовательности случайных векторов $\{\xi^n\}$.

Именно, если выполняются условия

$$M(\xi^n / x^1, x^2, \dots x^n) = c_n \nabla Mf(x^n, \omega) + b_n ,$$

$$c_n \geq l_n , \quad \| b_n \| \leq \tau_n , \quad \lambda_n \geq 0, \quad l_n \geq 0 ,$$

$$\tau_n / l_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n l_n = \infty , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \tau_n < \infty ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{m} D(\xi_i^n / x^1, x^2, \dots, x^n) \leq B < \infty,$$

то Ю.М.Ермольевым доказана сходимость последовательности $\{x^n\}$ с вероятностью единица к решению задачи (I2).

В реферируемой работе проводится дальнейшее исследование возможностей алгоритма (I3) на случай постоянного λ_n / т.е. при нарушении условия $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$ /.

В параграфе 6 доказано следующее утверждение:

Следствие 6.3. Если случайная последовательность $\{x^n\}$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям:

$$x^{n+1} = x^n - \lambda \xi^n, \quad x^1 \in R_m, \tag{I4}$$

$$\xi^n = \nabla f(x^n, \omega), \tag{I5}$$

и $\nabla f(x, \omega)$ с вероятностью I удовлетворяет условиям:

$$\|\nabla f(x, \omega)\| \leq T < \infty, \quad \forall x \in R_m, \tag{I6}$$

$$\|\nabla f(x, \omega) - \nabla f(\bar{x}, \omega)\| \leq L \|x - \bar{x}\|, \; L < \infty, \tag{I7}$$

то для всех λ, N определяемых согласно формул

$$N = \left[\frac{16 m^2 2^{\tau} L^{\tau} T^{2\tau + 4}}{(1-\alpha)^{\tau+2} \|\nabla F(x^1)\|^{2\tau+4}} \right] + 1,$$

$$\lambda = (1-\alpha) \|\nabla F(x^1)\|^2 / 2LNT^2$$

(символ $[t]$ обозначает целую часть числа t, $F(x) = Mf(x, \omega)$, α - произвольное действительное число, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 1 \\ \alpha > 1 - 2LT^2 / \|\nabla F(x^1)\|^2, \end{cases}$$

τ - произвольное положительное число), с вероятностью

$$P \geq 1 - ((1-\alpha)\|\nabla F(x^1)\|^2 / 2LT^2)^{\tau}$$

выполняется неравенство

$$F(x^{N+1}) \leq F(x^1) - \alpha(1-\alpha)\|\nabla F(x^1)\|^4 / 2LT^2 .$$

Анализ приведенных выше формул показывает, что число α надо выбирать по возможности ближе к 1/2, а если это возможно, то положить $\alpha = 1/2$.

В § 7 исследуется аналог метода стохастического квазиградиента, т.е. когда в (14)

$$\xi^n(\omega) = c\nabla f(x^n, \omega^n) + \zeta^n , \quad c > 0 , \tag{16}$$

где $\{\zeta^n\}$ - последовательность независимых случайных векторов. Сначала рассматривается случай произвольной последовательности независимых случайных векторов $\{\zeta^n\}$, а после - случай последовательности одинаково распределенных независимых случайных векторов.

Пусть ζ^n - реализации случайного вектора $\zeta(\omega)$. Тогда имеет место

<u>Следствие 7.2</u>. Пусть градиент функции $f(x, \omega)$ с вероятностью 1 удовлетворяет условиям (16), (17), а вектор $\zeta(\omega)$ таков, что с вероятностью 1

$$\|\zeta(\omega)\| \leq Q < \infty ,$$

и для некоторого α ($0 < \alpha \leq 1$) выполняется

$$\|a\| \leq c(1-\alpha)\|\nabla F(x^1)\| , \quad a = M\zeta(\omega) .$$

Тогда если числа λ и N выбрать равными

$$\mathcal{N} = \left[\frac{B_1 \|\nabla F(x^1)\|^2 (2A)^{\tau+2}}{((1-\beta)\alpha c \|\nabla F(x^1)\|^2)^{\tau+2}} \right] + 1 , \quad \tau > 0 ,$$

$$\lambda = (1-\beta)\alpha c \|\nabla F(x^1)\|^2 / 2A\mathcal{N} ,$$

где α и β удовлетворяют системам неравенств.

$$\begin{cases} 0 < \alpha \leq 1 \\ \alpha \leq 1 - \|a\| / c \|\nabla F(x^1)\| , \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \beta < 1 \\ \beta > 1 - 2A / \alpha c \|\nabla F(x^1)\|^2 , \end{cases}$$

A, B_1 - константы, определяемые через T, L, Q, c, m , то с вероятностью

$$P \geq 1 - ((1-\beta)\alpha c \|\nabla F(x^1)\|^2 / 2A)^{\tau}$$

выполняется неравенство

$$F(x^{\mathcal{N}+1}) \leq F(x^1) - \alpha^2 c^2 \beta (1-\beta) \|\nabla F(x^1)\|^4 / 2A .$$

Анализ приведенных выше формул показывает, что α надо выбирать по возможности ближе к I, а β - к I/2. Достаточно близкую к I вероятность можно получить за счет увеличения числа $\tau > 0$.

В § 8 для алгоритма (I4),(I5) изучается вопрос о выборе такого λ , чтобы с заданной вероятностью P ($P \geq 1 - \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon < 1$) за конечное число итераций точки, порожденные алгоритмом (I4), (I5), попадали в область, в которой норма градиента минимизируемой функции не превышает наперед выбранного числа $\delta > 0$.

Основные результаты диссертации докладывались на Ш Всесоюзной конференции по теории игр (Одесса, 1974), Республиканской научной конференции (Канев, 1974), семинарах в Институте математики АН УССР и опубликованы в следующих работах:

1. Применение метода стохастического градиента к решению некоторых минимаксных задач управления, Материалы научной конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе", вып.I, Канев, 1974.

2. Поиск гарантирующих стратегий в стохастической задаче уклонения, Тезисы докладов Ш Всесоюзной конференции по теории игр, Одесса, 1974.

3. Некоторые предельные теоремы и стохастические методы оптимизации, Сб."Приближенные методы математического анализа", изд-во КПИ, Киев, 1974.

4. Применение метода стохастического градиента к решению стохастических задач уклонения, Сб."Моделирование и оптимизация систем управления", изд-во КГУ, Киев, 1974.

Лаборатория фото-офсетной печати КГПИ им.А.М.Горького

Зак.290, тир.150 экз. БФ 22911