Ключевые слова: *качество образования, математические дисциплины, высшее аграрное учебное заведение, мониторинг, методические рекомендации.*

***Horda I. M. Methodical recommendations of monitoring conducting*.**

In the article the problem, which is connected with a need to measure and improve the quality of education in higher agrarian educational establishments, including mathematics, because mathematical disciplines are the basis for learning the most professional disciplines, forming qualitative general and professional training of students, is described. The development and implementation in higher agrarian educational establishments of monitoring system will help to solve this problem. The article deals with personal experience on monitoring of learning achievements of students in mathematics and management cathedral monitoring that are interconnected in higher agrarian educational establishments. Methodical recommendations are given to teachers and chiefs of agrarian educational establishments, who are interested in methods, means and methodology of monitoring copnducting. In particular, the peculiarities of the collection, storage, analysis, interpretation and presentation of the results of monitoring at each stage of the conducting are described.

Keywords: *quality of education, mathematical disciplines, higher agrarian educational establishment, monitoring, methodical recommendations.*

УДК 37.016:51

Жук І. В.
Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова (м. Київ, Україна)

РОЗВИТОК У СТАРШОКЛАСНИКІВ УМІНЬ ВИКОНУВАТИ НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

У статті описуються цілі і зміст вивчення наближених обчислень в темі “Похідна та її застосування”, наводяться приклади задач і вправ, що розвивають навички роботи з наближеними числами та величинами.

Ключові слова: *життєві компетентності, розвиток умінь, наближені значення чисел і величин, наближені обчислення, прикладні задачі.*

Згідно навчальної програми з математики для учнів 11 класу, вивчення тем “Похідна та її застосування”, “Інтеграл та його застосування” завершує функціональну лінію курсу алгебри і початків аналізу. Під час їх вивчення основна увага повинна приділятися змісту понять, їх геометричному та фізичному тлумаченню [1, с.9]. Саме через зміст понять похідної та інтеграла розв’язуються задачі прикладного характеру, спрямовані на формування життєвих компетентностей старшокласника, його професійне самовизначення. Проте розв’язання таких задач неможливе без застосування наближених обчислень (далі – НО).

Мета статті – розглянути цілі вивчення і зміст теми “Похідна та її застосування” в 11 класі для подальшої побудови методичної системи формування в учнів старшої школи умінь та навичок виконувати НО.

У дисертаційному дослідженні В. М. Кліндухової [2] була обґрунтована необхідність та розроблена методична система вивчення НО в основній школі. Серед науковців та методистів кінця ХХ – початку ХХІ століття вивчали питання впровадження НО у шкільний курс математики, зокрема в старших класах, З. І. Слєпкань, В. О. Швець, С. Є. Яценко та ін. Проте, незважаючи на серйозну потребу вивчення НО в школі, їх застосування до формування життєвих компетентностей учнів, в сучасній методиці недостатньо уваги приділяється проблемам впровадження НО у шкільний курс математики.

Враховуючи усе вищесказане, нині діючу навчальну програму [1] для учнів 11-го класу доцільно доповнити питаннями, пов'язаними із застосуванням методів НО, зокрема під час вивчення теми "Похідна та її застосування". Фрагмент експериментальної програми, яка містить питання НО, представлено у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

<table>
<tr><th colspan="2">ТЕМА 1. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ (26 ГОД)</th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Основна мета вивчення.</u> Ознайомити учнів з поняттям похідної функції, розкрити її геометричний та фізичний зміст. Сформувати уявлення про дотичну до графіка функції в заданій точці і на основі введеного поняття похідної вивести її рівняння. Виявити зв'язок між похідною та основними властивостями функції (монотонність, точки екстремуму, найбільше та найменше значення функції) та навчити застосовувати апарат похідної до дослідження функції та побудови її графіка. Сформувати уявлення про застосування поняття похідної до наближених обчислень під час розв'язання прикладних задач.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Методичні вказівки.</u> Під час вивчення теми поняття похідної вводиться через розв'язання задачі про визначення миттєвої швидкості та задачі про дотичну до графіка функції в заданій точці як граничне положення січної. Таким чином обґрунтовується фізичний та геометричний зміст похідної, що дозволяє вивести рівняння дотичної до графіка функції в заданій точці. Також на основі введеного поняття обґрунтовується формула для знаходження наближеного значення функції в заданій точці.
Вивчені правила знаходження похідних дають змогу пов'язати похідну функції та її властивості: монотонність, точки екстремуму функції, її найбільше та найменше значення. Уміння визначити властивості функцій застосовують здебільшого до побудови графіків функцій, розв'язування прикладних задач на знаходження найбільшого та найменшого значення функції, а також до наближеного розв'язування рівнянь.
Завершується вивчення теми прикладами застосування похідної до розв'язування прикладних задач, із використанням методів наближених обчислень та оцінкою отриманих результатів</td></tr>
<tr><th>Зміст навчального матеріалу</th><th>Вимоги до рівня навчальних досягнень учнів</th></tr>
<tr><td>[Неперервність та границя функції у точці.]
Задачі, що приводять до поняття похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної. Застосування похідної до наближеного обчислення значень елементарних функцій.
Таблиця похідних.
Похідна суми, добутку і частки функцій. Похідна складеної функції.
Наближені обчислення значень функції. Похідна в фізиці, техніці та економіці.
Застосування похідної до дослідження функцій та побудови графіків: зростання, спадання функції; екстремуми функції; найбільше і найменше значення функції на відрізку. Рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці.
[Розв'язання рівнянь графічним способом за допомогою комп'ютерних програм.]
Розв'язування задач прикладного змісту.</td><td>Пояснює геометричний та фізичний зміст похідної.
Знаходить приріст функції та наближене значення функції в заданій точці.
Формулює правила диференціювання, достатні умови зростання і спадання функції, умови екстремуму функції.
Називає похідні основних елементарних функцій.
Знаходить похідні функцій, користуючись таблицею похідних і правилами диференціювання.
Застосовує похідну для знаходження проміжків монотонності і екстремумів функції.
Обчислює найбільше і найменше значення функції на відрізку.
Розвязує прикладні задачі, що передбачають виконання дій над наближеними значеннями чисел та величин.
Оцінює точність отриманих розвязків.
Розв'язує нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.</td></tr>
</table>

Таким чином, з точки зору вивчення НО, вивчаючи тему "Похідна та її застосування", учнів слід навчити: обчислювати значення похідної функції в заданій точці для: а) точних значень аргументу х; б) наближених значень аргументу х; знаходити точні та наближені значення точок екстремумів і екстремуми функцій; знаходити проміжки монотонності функцій як точні та наближені розв'язки відповідних нерівностей;застосовувати формули наближених рівностей, що отримуються з використанням похідної. У класах з поглибленим вивченням математики навчити учнів застосовувати рівність $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0) \cdot \Delta x$ для знаходження наближених значень функції;досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки, використовуючи методи наближених обчислень під час виконання обчислень; розв'язувати практичні та прикладні задачі на застосування похідної, зокрема на знаходження найбільшого та найменшого значень функції з використанням методів наближених обчислень.

Застосування похідної до НО служить гарним фундаментом для пояснення матеріалу про дотичну до графіка функції, а також про дослідження функції за допомогою похідної. Як відомо, для будь якої неперервної функції $y = f(x)$ в точці x_0 виконується рівність $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. З іншого боку, якщо фіксованій точці x_0 надати приріст Δx, то для $x = x_0 + \Delta x$, буде справедливою рівність $f(x) \approx \lim_{x \to x_0} f(x)$, за умови, що $x \approx x_0$. Тоді можемо зробити висновок, що для неперервної у точці x_0 функції поблизу цієї точки виконується наближена рівність $f(x) \approx f(x_0)$. Якщо ж задана функція диференційована у цій точці, то $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. При $\Delta x \approx 0$, виконується рівність $f'(x_0) \approx \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, звідки $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Тоді $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$, звідки $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Використовуючи отриману рівність, можна отримати наближені формули, які використовуються для знаходження наближених значень функції.

Приклад 1. Знайдіть наближене значення функції $f(x) - \sqrt{x}$ в точці $x = 1{,}03; 9{,}018$.

Розв'язання. *I спосіб*. Скористаємося наближеною рівністю $\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{n} \cdot \Delta x$. Для $x = 1{,}03$ маємо, що $x_0 = 1; \Delta x = 0{,}03$. Тоді $\sqrt{1{,}03} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}03 = 1{,}015$. Для $x = 9{,}018$ маємо, що:

$$\sqrt{9{,}018} = \sqrt{9 + 0{,}018} = 3 \cdot \sqrt{1 + \frac{0{,}018}{9}} == 3\sqrt{1 + 0{,}002} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}002\right) =$$

$$3 \cdot 1{,}001 = 3{,}003$$

Таким чином, $\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015; \sqrt{9{,}018} \approx 3{,}003.$

Зауваження. Під час виконання завдання слід звернути увагу учнів на те, що якщо підкореневий вираз не є числом, близьким до одиниці, то спочатку з-під кореня виноситься множник таким чином, щоб підкореневий вираз був близьким до одиниці.

II спосіб. Скористаємося формулою $f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0) \cdot \Delta x$. Похідна функції $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Тоді для $x = 1{,}03$ знаходимо значення $x_0 = 1$ та

$\Delta x = 0{,}03$. Маємо: $f(x_0) = f(1) = \sqrt{1} = 1; f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 0{,}5.$ Звідси

$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0) \cdot \Delta x = 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}03 = 1{,}015.$

Для $x = 9{,}018$ аналогічно можна визначити $x_0 = 9$ та $\Delta x = 0{,}018$. Тоді $f(x_0) = f(9) = \sqrt{9} = 3;\ f'(x_0) = f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6};\ f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0) \cdot \Delta x = 3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}018 = 3{,}003.$ Таким чином, $\sqrt{1{,}03} \approx 1{,}015; \sqrt{9{,}018} \approx 3{,}003.$

Як видно з наведеного прикладу, наближені значення функції, розраховані як одним, так і іншим способом, рівні між собою. Перевага другого способу обчислень полягає в тому, що ним можна скористатися для знаходження наближеного значення довільної диференційованої функції в точках $x = x_0 + \Delta x$, для яких нескладно знайти значення $f(x_0)$ та $f'(x_0)$.

Дослідження властивостей функції за допомогою похідної передбачає знаходження точок екстремумів, проміжків монотонності функції. З цією метою, з точки зору наближених обчислень, слід згадати методи знаходження наближених коренів рівнянь, способи оцінки точності отриманих результатів. Згадані методи застосовуються також під час вивчення тригонометричних, показникових та логарифмічних рівнянь та нерівностей.

Приклад 2. Знайти проміжки монотонності функції та екстремуми функції $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$. Відповідь округліть до тисячних.

Розв'язання. Нехай задано функцію $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$. Областю її визначення є множина дійсних чисел. Обчислюємо похідну $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$. Знаходимо стаціонарні точки, розв'язуючи рівняння: $4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$=0.

Аналітичними методами корені такого рівняння знайти важко, тому застосовується графічний метод: за побудованим комп'ютерною програмою Advanced Grapher графіком функції $y = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 1$ визначаються її нулі (рис.1). Візуальне сприйняття графіка $y = f'(x)$ дозволяє визначити проміжок, на якому знаходяться стаціонарні точки. Комп'ютерна програма із наперед заданою точністю знаходить їх числові значення (рис. 1).

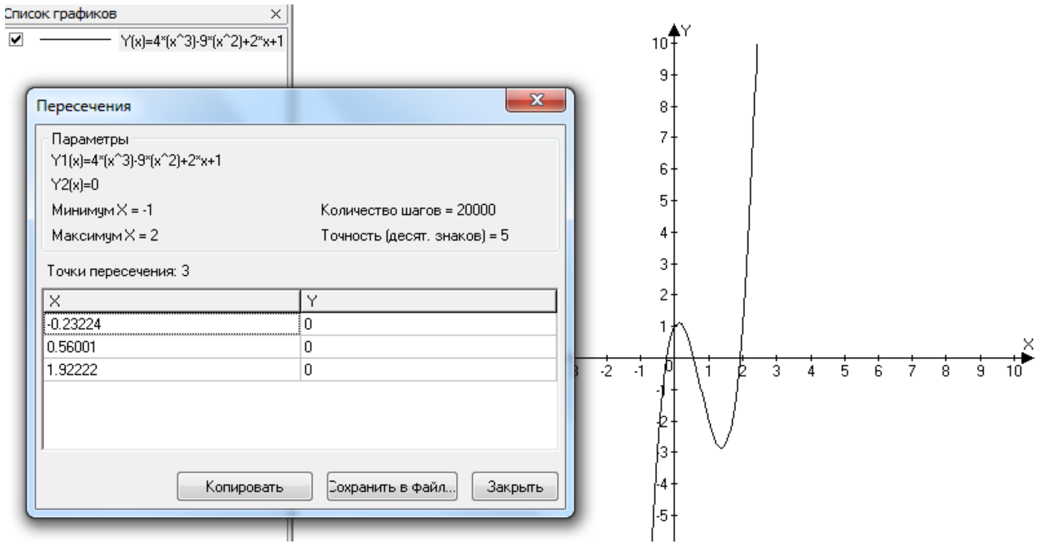

Рис. 1

За допомогою візуального сприйняття графіка визначається і поведінка самої функції $y=f(x)$: якщо графік $y=f'(x)$ розташований нижче осі абсцис, то функція спадна, і навпаки, якщо графік $y=f'(x)$ розташований вище осі абсцис, то функція зростаюча. Отже, функція $y=f(x)$ зростає на проміжках [–0,232;0,560] та [1,923; +∞); спадає на проміжках (–∞; –0,233] та [0,561;1,922].

Відповідь. $y=f(x)$ зростає при $x\in$[–0,232;0,560] та $x\in$ [1,923; +∞); $y=f(x)$ спадає при $x\in(-\infty;\ -0{,}233]$ та $x\in$[0,561;1,922].

Таким чином, можна зробити висновок, що ***під час дослідження функції на монотонність, зручно використовувати графічні ілюстрації, зроблені за допомогою комп'ютерних програм. Результати записуються у вигляді проміжків, для яких наближене значення лівого кінця проміжку завжди округлюється з надлишком, а значення правого – з недостачею. При цьому кінці проміжків включаються у відповідь і мають бути записані у квадратних дужках.***

Під час знаходження точок екстремуму доводиться здійснювати аналогічні до вище описаних кроків під час знаходження наближених розв'язків рівняння, після чого потрібно обчислити екстремуми функції. Їх значення знаходять за правилами знаходження значення функції при заданому значенні аргументу. Особливу увагу слід звернути на те, точними чи наближеними при цьому є знайдені значення відповідної точки екстремуму, і діяти за відповідним правилом. У завданнях такого типу для розрахунків достатньо застосовувати метод підрахунку правильних цифр.

Завершується вивчення теми розв'язуванням прикладних задач на застосування похідної та розв'язання прикладних задач. У діючих підручниках основна увага приділяється розв'язанню абстрактних задач, а другорядне місце займають вправи на знаходження найбільшого (найменшого) значення периметра чи площі деякої фігури. Таку систему задач і вправ слід доповнити різноманітними завданнями практичного змісту, які потребують застосування методів НО під час їх розв'язання.

Приклад 3. Електрична лампочка висить над центром круглого столу радіуса 0,70 м і дає силу світла I=160 кд. На якій висоті слід підвісити цю лампу, щоб на краю стола отримати найбільшу освітленість?

Розв'язання. Зобразимо рисунок до задачі. Позначимо джерело світла – лампочку точкою *B*, відстань від якої до поверхні стола визначається довжиною перпендикуляра до його площини *BA*, а точку на краю стола – точкою *D*. Тоді кут нахилу променя світла, який направлений на край стола визначатиметься кутом *BDA*=*φ*.

Як відомо з курсу фізики, величина освітленості *E* обернено пропорційна квадрату відстані *BD*=*d* до джерела світла і пропорційна синусу кута $\varphi = \angle BDA$ (рис. 2) нахилу променя світла до поверхні, що освітлюється: $E = I\frac{\sin\varphi}{d^2}$, де *I* – сила світла лампи. В умові задачі $I = 160$ кд.

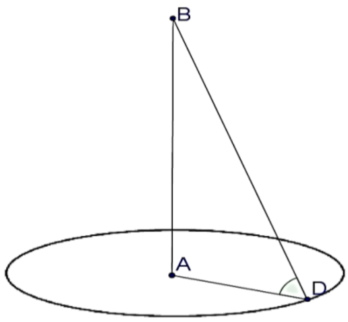

Рис. 2

Нехай довжина відрізка *BA* = *x* м. Тоді з утвореного прямокутного трикутника *BDA* за означенням синуса $\sin\varphi = \frac{x}{d}$. З теореми Піфагора $d = \sqrt{x^2 + r^2}$; $x \in (0; \infty)$, де $r = AD = 0{,}70$м – радіус стола.

Отже, $E = I \cdot \frac{x}{d^3} = \frac{I \cdot x}{(\sqrt{x^2+r^2})^3}$. Таким чином, практична задача зводиться до знаходження найбільшого значення функції $E(x)$ на проміжку $x \in (0; \infty)$.

Зауваження. Оскільки задача має практичний зміст, то числові величини, задані в умові, є наближеними. Тому доцільно розв'язати задачу в загальному вигляді, пам'ятаючи при цьому, що змінною величиною є x.

Похідна функції $E'(x) = I \cdot \frac{r^2 - 2x^2}{(x^2+r^2)^{5/2}}$. Критичні точки: $\frac{r^2 - 2x^2}{(x^2+r^2)^{5/2}} = 0$; $r^2 - 2x^2 = 0$; $x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$. Оскільки функція задана на множині додатних чисел, то існує лише одна критична точка $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$.. Очевидно, що при $x < \frac{r}{\sqrt{2}}$ функція зростає, при $x > \frac{r}{\sqrt{2}}$ функція спадає, тому $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ – шукане значення відстані, на якій повинна знаходитися лампа, щоб освітлення на краю стола було максимальним. Отже, $x = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}70}{\sqrt{2}} = 0{,}494974\ldots \approx 0{,}49$ (м).

Відповідь. На відстані 0,49 м від поверхні столу слід розмістити лампу, щоб освітлення на краю стола радіуса 0,70 м було найбільшим.

Також під час розв'язування завдань практичного змісту із застосуванням похідної слід звернути увагу учнів на задачі, в змісті яких йдеться про радіоактивний розпад; приріст населення; економічні процеси тощо.

Висновки. Отже, під час вивчення теми "Похідна та її застосування" учні не лише засвоюють техніку диференціювання, вивчають зв'язок між похідною та властивостями функцій, а й удосконалюють навички роботи з наближеними величинами, у них формується уявлення про використання похідної в інших науках, у реальному житті.

Використана література:

1. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. ІІ. Профільне навчання / упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. – Х. : Вид-во "Ранок", 2011. – 384 с. – (Факультативи та курси за вибором).
2. Кліндухова В. М. Вивчення наближених обчислень в основній школі : дис. канд. пед. наук : 13.00.02. – К., 2008. – 316 с.
3. Проект Державного стандарту базової та повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу : www.mon.gov.ua/images/files/.../standart.doc

References:

1. Zbirnyk prohram z matematyky dlia doprofilnoi pidhotovky ta profilnoho navchannia (u dvokh chastynakh). Ch. II. Profilne navchannia / uporiad. N. S. Prokopenko, O. P. Vashulenko, O. V. Yerhina. – Kh. : Vyd-vo "Ranok", 2011. – 384 s. – (Fakultatyvy ta kursy za vyborom).
2. Klindukhova V. M. Vyvchennia nablyzhenykh obchyslen v osnovnii shkoli : dys. kand. ped. nauk : 13.00.02. – K., 2008. – 316 s.
3. Proekt Derzhavnoho standartu bazovoi ta povnoi zahalnoi serednoi osvity [Elektronnyi resurs]. – Rezhym dostupu : www.mon.gov.ua/images/files/.../standart.doc

Жук И. В. Развитие у старшеклассников умений выполнять приближенные вычисления во время изучения производной.

В статье объясняется необходимость включения приближенных вычислений в школьный курс математики, в частности в старшей школе, во время изучения темы "Производная и ее применение". Рассматривается вопрос обновления содержания этой темы через использование методов приближенных вычислений для нахождения приближенных значений выражений, функций, нахождения приближенных решений уравнений и неравенств, решения прикладных задач. Приводятся примеры решения задач и упражнений, развивающих навыки работы с приближенными числами и величинами.

Ключевые слова: *жизненные компетентности, развитие умений, приближенные значения чисел и величин, приближенные вычисления, прикладные задачи.*

Zhuk I. V. The development of high school students skills to perform approximate calculations while

studying the derivative. The article describes the purpose and content of the study approximate calculations on "The Derivative and its applications" are examples of problems and exercises that develop skills and values approximate numbers.

Keywords: *life competences, skills development, approximate values of numbers and quantities approximate calculation, applications.*