ПРОПЕДЕВТИКА МЕТОДІВ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В ПРОЦЕСІ ВИКЛАДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИКА» У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ І-ІІ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ

Гроза В.А.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний авіаційний університет,
Лещинський О.Л.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету,
Томащук О.П.,
кандидат пед. наук, доцент,
Національний авіаційний університет,
Тихонова В.В.,
викладач,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету

Розглядається питання пропедевтики методів поліноміальної апроксимації в процесі викладання дисципліни «Математика» майбутнім програмістам. Розроблено комплекс різноманітних вправ для проведення пропедевтичної роботи.

Рассматривается вопрос пропедевтики понятия полиномиальной аппроксимации в процессе преподавания дисциплины «Математика» будущим программистам. Разработан комплекс разнообразных упражнений для проведения пропедевтической работы.

Propaedeutics of the polynomial approximation concept during teaching the discipline “Mathematics” for future programmers has been considered. A complex of multiform exercises for preliminary training has been proposed.

Навчальний план підготовки молодших спеціалістів-програмістів містить дисципліну «Чисельні методи», в межах якої розглядається модуль «Поліноміальна інтерполяція». Метою вивчення цього модуля є ознайомлення студентів з класичними інтерполяційними многочленами Лагранжа і Ньютона, інтерполяційною схемою Ейткена, многочленами Чебишова і Фур'є. У процесі вивчення цього модуля майбутні програмісти повинні зрозуміти, що в основі більшості чисельних методів математичного аналізу лежить заміна однієї функції $f(x)$ (невідомої, частково відомої або відомої) іншою функцією $y(x)$, «близькою» до $f(x)$, над якою можна легко виконувати ті чи інші математичні операції. Таку заміну називають апроксимацією або наближенням функції $f(x)$ функцією $y(x)$.

Для того, щоб побудувати деяку змістову теорію апроксимації функцій, як правило, відповідають на такі запитання:

1. Що відомо про функцію $f(x)$?

   а) форма задання (аналітичний вираз, таблиця значень, графік функції);

   б) степінь гладкості, можливість знаходження значень похідних функції $f(x)$, розташування відомих точок в області визначення функції $f(x)$, в якій області відомі значення функції $f(x)$ і чи можна їх задавати (встановлювати) в області зацікавленості.

2. Якому класу функцій повинна належати функція $y(x)$? Які додаткові умови накладаються на $y(x)$, що виокремлюють її з даного класу?

3. Що розуміти під поняттям «функція $y(x)$ «близька» до функцій $f(x)$» (тобто який критерій узгодженості між цими функціями)?

Таким чином, задача апроксимації функції $f(x)$ функцією $y(x)$ складається з побудови для заданої функції $f(x)$ такої функції $y(x)$, що $f(x) \approx y(x)$. Відповіді на запитання першої групи передбачають вивчення лівої частини вказаної наближеної рівності, другої групи – правої частини, а третьої групи обґрунтовують і уточнюють зміст символу «≈». Для молодших спеціалістів-програмістів стандарт їхньої освіти дає відповідь на другу групу запитань. У процесі викладання дисципліни «Чисельні методи» в якості апроксимуючих функцій $y(x)$ розглядають, як правило, лише многочлени (поліноми) або, як виняток, функції, складені з многочленів. У порівнянні з іншими класами функцій, які використовують в теорії наближень (тригонометричні, показникові, раціональні функції), для обчислювальної математики многочлени привабливі тим, що вони є «мінімальними» функціями своїх параметрів (коефіцієнтів) і обчислення цих коефіцієнтів зводиться до виконання скінченої кількості арифметичних операцій додавання та множення.

Як показує досвід викладання, теорія апроксимації функцій сприймається студентами досить важко, засвоюється формально, без особливого розуміння подальшого використання. Тому автори даної статті створили певний методико-пропедевтичний комплекс, спрямований на покращення засвоєння студентами окремих питань цієї теорії. Цей комплекс може бути включений у дисципліну «Математика», яка викладається майбутнім молодшим спеціалістам-програмістам на І-ІІ курсах, при повторенні тем «Функція», «Рівняння та нерівності». Розпочати вказаний комплекс можна з такої теореми.

Теорема 1. Квадратне рівняння $x^2 + px + q = 0$ зі спряженими коренями $x_1 = a + b\sqrt{d}$ і $x_1 = a - b\sqrt{d}$ ($a, b, d \in \mathbb{Z}$) має цілі коефіцієнти p і q.

Доведення. За теоремою Вієта маємо:

$$p = -(x_1 + x_2) = -\left(a + b\sqrt{d} + a - b\sqrt{d}\right) = -2a \in \mathbb{Z},$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = \left(a + b\sqrt{d}\right) \cdot \left(a - b\sqrt{d}\right) = a^2 - b^2 d \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 1. Записати зведене квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, одним із коренів якого є число $x_1 = 6 + \sqrt{35}$.

Розв'язання. Щоб коефіцієнти p і q зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ були цілими числами, в якості другого кореня візьмемо число $x_2 = 6 - \sqrt{35}$ (див. теорему 1). Тоді одержимо квадратне рівняння $x^2 - 12x + 1 = 0$ з цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа x_1 і x_2.

Відповідь: $x^2-12x+1=0$.

Обчислення значення функції у заданій точці часто спрощується, якщо попередньо побудувати многочлен, значення якого у цій точці дорівнює нулю.

Приклад 2. Обчислити значення функції $f(x)=x^4-11x^3-10x^2-11x+18$ у точці $x_0=6-\sqrt{35}$.

Розв'язання. Число $x_0=6-\sqrt{35}$ є коренем рівняння $x^2-12x+1=0$. Тому справедлива рівність $x_0^2-12x_0+1=0$, звідки $x_0^2=12x_0-1$. Тоді

$$x_0^3=x_0^2\cdot x_0=(12x_0-1)\cdot x_0=12x_0^2-x_0=12(12x_0-1)-x_0=143x_0-12;$$

$$x_0^4=x_0^3\cdot x_0=(143x_0-12)\cdot x_0=143x_0^2-12x_0=143(12x_0-1)-12x_0=1704x_0-143.$$

Отже, $f(x_0)=1704x_0-143-11(143x_0-12)-10(12x_0-1)-11x_0+18=17$.

Відповідь: 17.

Приклад 3. Обчислити значення функції $f(x)=x^8+\dfrac{1}{x^8}$ у точці $x_0=1+\sqrt{2}$.

Розв'язання. Оскільки число $x_0=1+\sqrt{2}$ є коренем рівняння $x^2-2x-1=0$, то справедлива рівність $x_0^2-2x_0-1=0$, звідки $x_0^2-1=2x_0$, $x_0-\dfrac{1}{x_0}=2$. Тоді

$$\left(x_0-\frac{1}{x_0}\right)^2=2^2,\ x_0^2-2+\frac{1}{x_0^2}=4,\ x_0^2+\frac{1}{x_0^2}=6;$$

$$\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\right)^2=6^2,\ \ x_0^4+2+\frac{1}{x_0^4}=36,\ x_0^4+\frac{1}{x_0^4}=34;$$

$$\left(x_0^4+\frac{1}{x_0^4}\right)^2=34^2,\ \ x_0^8+2+\frac{1}{x_0^8}=1156,\ x_0^8+\frac{1}{x_0^8}=1154.$$

Отже, $f(x_0)=x_0^8+\dfrac{1}{x_0^8}=1154$.

Відповідь: 1154.

Приклад 4. Чи задовольняє число $x_0=\sqrt{47}-\sqrt{30}$ нерівність $x^2+11x-17>0$?

Розв'язання. Складемо зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа $x_0=\sqrt{47}-\sqrt{30}$ і $x_1=-\sqrt{47}-\sqrt{30}$.

$$p=-(x_0+x_1)=-\left(\sqrt{47}-\sqrt{30}-\sqrt{47}-\sqrt{30}\right)=2\sqrt{30};$$

$$q=x_0\cdot x_1=\left(\sqrt{47}-\sqrt{30}\right)\left(-\sqrt{47}-\sqrt{30}\right)=-(47-30)=-17.$$

Отже, маємо таке квадратне рівняння: $x^2+2\sqrt{30}x-17=0$. Оскільки число x_0 є коренем цього рівняння, то справедлива рівність $x_0^2+2\sqrt{30}x_0-17=0$. Тоді, враховуючи, що $2\sqrt{30}=\sqrt{120}<11$ і $x_0>0$, правильною є нерівність

$$0=x_0^2+2\sqrt{30}x_0-17<x_0^2+11x_0-17.$$

А це означає, що число $x_0=\sqrt{47}-\sqrt{30}$ задовольняє нерівність $x^2+11x-17>0$.

Приклад 5. Довести, що значення виразу $A=\left(7+\sqrt{48}\right)^{17}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{17}$ є цілим числом, яке кратне 14.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що значення виразу A є цілим числом.

Числа $x_1=7+\sqrt{48}$ і $x_2=7-\sqrt{48}$ є коренями квадратного рівняння $x^2-14x+1=0$. Тому $x_1^2=14x_1-1$ і $x_2^2=14x_2-1$.

Знайдемо рекурентне співвідношення для виразу $y_n=x_1^n+x_2^n$, $n\in\{0\}\cup N$.

$y_0=x_1^0+x_2^0=1+1=2$;

$y_1=x_1+x_2=14$;

$y_2=x_1^2+x_2^2=(14x_1-1)+(14x_2-1)=14(x_1+x_2)-2=14y_1-y_0$;

$y_3=x_1^3+x_2^3=x_1\cdot x_1^2+x_2\cdot x_2^2=x_1\cdot(14x_1-1)+x_2\cdot(14x_2-1)=14\left(x_1^2+x_2^2\right)-(x_1+x_2)=14y_2-y_1$;

…………………………………………………………………………………………

$y_n=x_1^n+x_2^n=x_1^{n-2}\cdot x_1^2+x_2^{n-2}\cdot x_2^2=x_1^{n-2}\cdot(14x_1-1)+x_2^{n-2}\cdot(14x_2-1)=$

$=14\left(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}\right)-\left(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}\right)=14y_{n-1}-y_{n-2}$.

Останнє співвідношення вказує, що всі значення $y_n\in\mathbb{Z}$, а тому $A=y_{17}=x_1^{17}+x_2^{17}\in\mathbb{Z}$.

Доведемо, що коли n – непарне натуральне число, то $y_n \vdots 14$. Використаємо метод математичної індукції.

Якщо $n=1$, то $y_1=x_1^1+x_2^1=14\vdots 14$.

Припустимо, що $y_n\vdots 14$ при деякому непарному значення $n=2k-1$ ($k>1$), тобто $y_{2k-1}\vdots 14$. Доведемо, що $y_n\vdots 14$ при $n=2k+1$:

$y_{2k+1}=x_1^{2k+1}+x_2^{2k+1}=x_1^{2k-1}\cdot x_1^2+x_2^{2k-1}\cdot x_2^2=x_1^{2k-1}(14x_1-1)+x_2^{2k-1}(14x_2-1)=$

$=14x_1^{2k}-x_1^{2k-1}+14x_2^{2k}-x_2^{2k-1}=14\left(x_1^{2k}+x_2^{2k}\right)-\left(x_1^{2k-1}+x_2^{2k-1}\right)$.

Оскільки $14\left(x_1^{2k}+x_2^{2k}\right)\vdots 14$ і за припущенням $\left(x_1^{2k-1}+x_2^{2k-1}\right)\vdots 14$, то $y_{2k+1}\vdots 14$.

Отже, згідно з принципом математичної індукції $y_n\vdots 14$ при будь-яких непарних натуральних значеннях n. Тому $A=y_{17}=\left(x_1^{17}+x_2^{17}\right)\vdots 14$, що і треба було довести.

Нагадаємо, що справедлива відповідна теорема Вієта для рівнянь третього степеня: якщо x_1, x_2, x_3 – корені зведеного кубічного рівняння $x^3+px^2+qx+r=0$, то справедливі рівності:

$$x_1+x_2+x_3=-p,$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q,$$

$$x_1x_2x_3=-r.$$

Також справедлива теорема, обернена до теореми Вієта.

Приклад 6. Числа x, y, z задовольняють умови:

$$x+y+z=a,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}\ (a\neq 0).$$

Довести, що серед чисел x, y, z є два взаємно протилежні числа.

Розв'язання. З рівності $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ маємо: $\frac{yz+xz+xy}{xyz}=\frac{1}{a}$.

Складемо зведене кубічне рівняння, коренями якого є числа x, y, z.

$$p=-(x+y+z)=-a,\quad q=yz+xz+xy=\frac{xyz}{a}=-\frac{r}{a}.$$

Отже, маємо таке кубічне рівняння $t^3-at^2-\frac{r}{a}t+r=0$.

Оскільки $t^3-at^2-\frac{r}{a}t+r=0 \Leftrightarrow t^2(t-a)-\frac{r}{a}(t-a)=0 \Leftrightarrow (t-a)\left(t^2-\frac{r}{a}\right)=0$, то $t=a$ – один із коренів кубічного рівняння. Тому a збігається з одним із чисел x, y, z.

Припустимо, що $z=a$. Тоді з рівності $x+y+z=a$ випливає, що $x+y=0$, тобто $x=-y$. А це і треба було довести.

Перейдемо до розв'язування систем алгебраїчних рівнянь.

Приклад 7. Сума трьох цілих чисел x, y, z дорівнює нулю. Довести, що існує таке ціле число t, що справджується рівність $2x^4+2y^4+2z^4=t^2$.

Розв'язання. Нехай $t^3+pt^2+qt+r=0$ – кубічне рівняння, коренями якого є цілі числа x, y, z. Тоді $p=-(x+y+z)=0$ і кубічне рівняння набуває вигляду $t^3+qt+r=0$.

Оскільки x, y, z корені рівняння $t^3+qt+r=0$, то справедливі рівності:

$$x^3+qx+r=0,\ y^3+qy+r=0,\ z^3+qz+r=0.$$

Домноживши ці рівності на $2x, 2y, 2z$ відповідно і додавши, одержимо:

$$2x^4+2y^4+2z^4+2q\left(x^2+y^2+z^2\right)+2r(x+y+z)=0,$$

$$2x^4+2y^4+2z^4+2q\left(x^2+y^2+z^2\right)=0,$$

$$2x^4+2y^4+2z^4=-2q\left((x+y+z)^2-2xy-2xz-2yz\right),\ 2x^4+2y^4+2z^4=4q(xy+xz+yz),$$

$$2x^4+2y^4+2z^4=4q^2,\ 2x^4+2y^4+2z^4=(2q)^2.$$

Отже, існує $t=2q\in\mathbb{Z}$ таке, що справедлива рівність $2x^4+2y^4+2z^4=t^2$. А це і треба було довести.

Задачі типу: «Довести, що значенням виразу $(21,3)^3+(56,4)^3+(23,3)^3-83972,268$ є число, що ділиться націло на 101» є частковими випадками більш загальної задачі.

Приклад 8. Довести, що вираз $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ділиться націло на вираз $x+y+z$.

Розв'язання. Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3+pt^2+qt+r=0$, коренями якого є числа x, y, z. Тоді справедливі рівності:

$$x^3+px^2+qx+r=0\,,\ y^3+py^2+qy+r=0\,,\ z^3+pz^2+qz+r=0\,.$$

Додавши ці рівності, одержимо: $x^3+y^3+z^3+p\left(x^2+y^2+z^2\right)+q\left(x+y+z\right)+3r=0$. Врахувавши, що $x+y+z=-p$ і $xyz=-r$, перетворимо ліву частину цієї рівності:

$$x^3+y^3+z^3+p\left(x^2+y^2+z^2\right)+q\left(x+y+z\right)+3r=$$

$$x^3+y^3+z^3+p\left(x^2+y^2+z^2\right)-pq+3r=x^3+y^3+z^3-3xyz+p\left(x^2+y^2+z^2-q\right).$$

Отже, $x^3+y^3+z^3-3xyz+p\left(x^2+y^2+z^2-q\right)=0$, звідки

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=-p\left(x^2+y^2+z^2-q\right), \qquad (1)$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right).$$

З останньої рівності випливає, що вираз $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ділиться націло на вираз $x+y+z$. А це і треба було довести.

Розглянемо приклади систем нелінійних рівнянь.

Приклад 9. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ x^3+y^3+z^3=20. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язання. Нехай $\left(x;y;z\right)$ – розв'язок системи (2). Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3+pt^2+qt+r=0$, коренями якого є числа x,y,z. Тоді за теоремою Вієта маємо:

$$p=-\left(x+y+z\right)=-2\,,\ q=xy+yz+zx=\frac{\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{2}=\frac{2^2-14}{2}=-5\,.$$

Домножимо перше рівняння системи (2) на q, друге – на p і всі три рівняння додамо:

$$x^3+px^2+qx+y^3+py^2+qy+z^3+pz^2+qz=20+14p+2q\,. \qquad (3)$$

Оскільки $p=-2, q=-5$, то $20+14p+2q=20-28-10=-18$.

Враховуючи, що числа x,y,z є коренями рівняння $t^3+pt^2+qt+r=0$, маємо:

$$x^3+px^2+qx=-r\,,\ y^3+py^2+qy=-r\,,\ z^3+pz^2+qz=-r\,.$$

Отже, рівність (3) набуває вигляду: $-r-r-r=-18$, звідки $r=6$.

Таким чином, маємо кубічне рівняння $t^3-2t^2-5t+6=0$, коренями якого є числа x,y,z. Розв'яжемо це рівняння:

$$t^3-2t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow t^3-t^2-t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow t^2\left(t-1\right)-\left(t^2+5t-6\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2\left(t-1\right)-\left(t-1\right)\left(t+6\right)=0 \Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t^2-t-6\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=-2, \\ t=3. \end{array}\right.$$

Отже, $1,-2,3$ – корені кубічного рівняння $t^3-2t^2-5t+6=0$, а тому $\left(1;-2;3\right)$ – один із розв'язків системи (2). Оскільки кожне із рівнянь системи (2) є симетричним відносно невідомих x, y, z, то розв'язками цієї системи також є: $(1; 3; -2)$, $(-2; 1; 3)$, $(-2; 3; 1)$, $(3; -2; 1)$, $(3; 1; -2)$.

Відповідь: $(1; -2; 3)$, $(1; 3; -2)$, $(-2; 1; 3)$, $(-2; 3; 1)$, $(3; -2; 1)$, $(3; 1; -2)$.

Приклад 10. Розв'язати систему

$$\begin{cases} xyz = 1, \\ x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) = 0, \\ 8x^3 + 8y^3 + 8z^3 = 73. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язання. Перетворимо систему (4):

$$\begin{cases} xyz = 1, \\ x + y + z = xy + yz + zx, \\ 8\left(x^3 + y^3 + z^3\right) = 73. \end{cases} \tag{5}$$

Нехай $(x; y; z)$ – розв'язок системи (4), а, отже, розв'язок системи (5). Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$, коренями якого є числа x, y, z. Тоді за теоремою Вієта маємо:

$$r = -xyz = -1,\ p = -(x + y + z) = -(xy + yz + zx) = -q\ .$$

Отже, одержуємо рівняння $t^3 + pt^2 - pt - 1 = 0$, звідки маємо:

$$t^3 - 1 + pt(t-1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2 + t + 1\right) + pt(t-1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2 + (p+1)t + 1\right) = 0\,.$$

Одним із коренів кубічного рівняння є $t = 1$. Отже, одне із чисел x, y, z дорівнює 1. Нехай $x = 1$. Тоді із системи (4) маємо:

$$\begin{cases} yz = 1, \\ 8\left(1 + y^3 + z^3\right) = 73, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{1}{z^3} + z^3 = \dfrac{73}{8} - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{z}, \\ z^3 + \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{65}{8} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{8z^6 - 65z^3 + 8}{8z^3} = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши останнє рівняння системи, одержимо: $z_1 = 2$, $z_2 = \dfrac{1}{2}$. Тоді $y_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = 2$. Отже, $\left(1; \dfrac{1}{2}; 2\right)$, $\left(1; 2; \dfrac{1}{2}\right)$ – розв'язки системи (4). Оскільки кожне із рівнянь системи (4) є симетричним відносно невідомих x, y, z, то розв'язками цієї системи також є: $\left(\dfrac{1}{2}; 1; 2\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}; 2; 1\right)$, $\left(2; 1; \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(2; \dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Відповідь: $\left(1; \dfrac{1}{2}; 2\right)$, $\left(1; 2; \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}; 1; 2\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}; 2; 1\right)$, $\left(2; 1; \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(2; \dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Приклад 11. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=3, \\ x^5+y^5+z^5=1. \end{cases} \qquad (6)$$

Розв'язання. Нехай $(x;y;z)$ – розв'язок системи (6). Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3+pt^2+qt+r=0$, коренями якого є числа x, y, z. Тоді за теоремою Вієта маємо:

$$p=-(x+y+z)=-1,\ q=xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=\frac{(-1)^2-3}{2}=-1.$$

Отже, одержуємо рівняння $t^3-t^2-t+r=0$, звідки $t^3=t^2+t-r$. Тоді

$$t^4=t^3\cdot t=(t^2+t-r)\cdot t=t^3+t^2-rt=(t^2+t-r)+t^2-rt=2t^2+(1-r)t-r,$$

$$t^5=t^4\cdot t=(2t^2+(1-r)t-r)\cdot t=2t^3+(1-r)t^2-rt=2(t^2+t-r)+(1-r)t^2-rt=$$

$$=(3-r)t^2+(2-r)t-2r.$$

Оскільки числа x, y, z є коренями кубічного рівняння, то справедливі рівності:

$$\begin{cases} x^5=(3-r)x^2+(2-r)x-2r, \\ y^5=(3-r)y^2+(2-r)y-2r, \\ z^5=(3-r)z^2+(2-r)z-2r. \end{cases}$$

Додавши ці три рівності і врахувавши, що $x^5+y^5+z^5=1$, $x^2+y^2+z^2=3$, $x+y+z=1$, одержимо:

$$1=(3-r)(x^2+y^2+z^2)+(2-r)(x+y+z)-6r,\quad 1=(3-r)\cdot 3+(2-r)\cdot 1-6r,\quad r=1.$$

Отже, маємо таке кубічне рівняння: $t^3-t^2-t+1=0$. Розв'яжемо його:

$$t^3-t^2-t+1=0 \iff t^2(t-1)-(t-1)=0 \iff (t-1)(t^2-1)=0 \iff (t-1)^2(t+1)=0.$$

Отже, $t_1=1$, $t_2=1$, $t_3=-1$ – корені кубічного рівняння. Тоді $(1;1;-1)$ – один із розв'язків системи (6). Оскільки кожне із рівнянь системи (6) є симетричним відносно невідомих x, y, z, то розв'язками цієї системи також є: $(1;-1;1)$, $(-1;1;1)$.

Відповідь: $(1;1;-1)$, $(1;-1;1)$, $(-1;1;1)$.

Приклад 12. Розкласти на множники вираз $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$.

Розв'язання. Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3+pt^2+qt+r=0$, коренями якого є числа a, b, c, де $a=x-y, b=y-z, c=z-x$. Тоді $a+b+c=0$ і за теоремою Вієта маємо: $p=-(a+b+c)=0$.

Враховуючи рівність (1), доведену в розв'язанні прикладу 8, маємо:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=-p(a^2+b^2+c^2-q).$$

Оскільки $p=0$, то з останньої рівності одержуємо: $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, звідки $a^3+b^3+c^3=3abc$ або $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.

Відповідь: $\left(x-y\right)^3+\left(y-z\right)^3+\left(z-x\right)^3=3\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$.

Приклад 13. Довести тотожність

$$\left(x-y\right)^5+\left(y-z\right)^5+\left(z-x\right)^5=5\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right).$$

Розв'язання. Розглянемо зведене кубічне рівняння $t^3+pt^2+qt+r=0$, коренями якого є числа a,b,c, де $a=x-y, b=y-z, c=z-x$. Тоді $a+b+c=0$ і за теоремою Вієта маємо: $p=-\left(a+b+c\right)=0$. Отже, кубічне рівняння має вигляд $t^3+qt+r=0$.

Оскільки числа a,b,c є коренями рівняння $t^3+qt+r=0$, то справедливі рівності:

$$\begin{cases} a^3+qa+r=0, \\ b^3+qb+r=0, \\ c^3+qc+r=0. \end{cases}$$

Домноживші ці рівності на a^2,b^2,c^2 відповідно і додавши, одержимо:

$$a^5+b^5+c^5+q\left(a^3+b^3+c^3\right)+r\left(a^2+b^2+c^2\right)=0,$$

звідки

$$a^5+b^5+c^5=-q\left(a^3+b^3+c^3\right)-r\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$
$$=-q\left(a^3+b^3+c^3\right)-r\left(\left(a+b+c\right)^2-2ab-2ac-2bc^2\right)=$$
$$=-q\left(a^3+b^3+c^3\right)-r\left(0^2-2q\right)=-q\left(a^3+b^3+c^3-2r\right).$$

Врахувавши, що $a^3+b^3+c^3=3abc$ (див. розв'язання прикладу 12), одержимо:

$$a^5+b^5+c^5=-q\left(3abc-2r\right)=-q\left(-3r-2r\right)=5qr=-5\left(ab+bc+ac\right)\left(abc\right)=$$
$$=-5\left(\left(x-y\right)\left(y-z\right)+\left(y-z\right)\left(z-x\right)+\left(x-y\right)\left(z-x\right)\right)\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)=$$
$$=5\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right).$$

Отже, $\left(x-y\right)^5+\left(y-z\right)^5+\left(z-x\right)^5=5\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)$, що і треба було довести.

Список використаної літератури

1. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обычные дифференциальные уравнения): Учебное пособие для вузов. – М.: ООО «Издательский дом» «Оникс 21 век», 2005. – 400 с.
2. Курляндчик Л.Д., Фомин С.В. Теорема Виета и вспомогательный многочлен // Квант. – 1984. – №12. – С.14-16.
3. Фомин С.В. Разложение на множители // Квант. – 1984. – №7. – С.23.