МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ ЗАДАЧ ЗАСОБАМИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ У ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ МАГІСТРІВ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ОСВІТИ

Закусило А.І.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Касперський А.В.,
завідувач кафедри технічної фізики та математики,
доктор пед. наук, професор,
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Висвітлено роль і значення математичного моделювання в процесі пізнання і практичного використання явищ та процесів навколишнього світу. Обґрунтовано необхідність посилення фізико-математичного компонента фахової підготовки магістрів технологічної освіти. Наведено загальну схему і приклади розв'язування задач шляхом математичного моделювання засобами інтегрального числення.

Освещены роль и значение математического моделирования в процессе познания и практического использования явлений и процессов окружающего мира. Обоснована необходимость усиления физико-математического компонента профессиональной подготовки магистров технологического образования. Приведена общая схема и примеры решения задач путём математического моделирования средствами интегрального исчисления.

The role and significance of mathematical modelling in the process of cognition and practical use of phenomena and processes of surroundings are illustrated. The necessity of intensification of physics and mathematics component of the master of technological education training process has been proved. The general scheme and examples of task solutions by means of mathematical modelling by integral calculus has been given.

1. Математика є універсальною мовою, що широко використовується в усіх сферах людської діяльності. На сучасному етапі її значення у розвитку суспільства суттєво зростає. На протязі останніх декількох століть математика перетворилася з науки здебільшого теоретичної в науку з дуже широкою областю практичних застосувань. Розв'язування практичних задач пов'язане з їх формалізацією, тобто з необхідністю переведення їх на мову математичних символів, формул, відношень тощо.

Для успішної участі у сучасному суспільному житті фахівець повинен володіти певними математичними методами та навичками їх застосування до розв'язування практичних задач. Певної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає вивчення багатьох навчальних дисциплін, особливо технічних. Значні вимоги до володіння математикою у розв'язанні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах.

Розв'язування прикладних задач математичними методами підвищує інтерес майбутніх фахівців до вивчення математики. Оскільки застосування математики дає бажаний практичний результат, то математика стає "потрібною" майбутнім фахівцям. При розв'язувані подібних задач природно відбувається інтеграція різних навчальних дисциплін у процесі становлення сучасного фахівця-технолога. Розв'язування прикладних задач сприяє свідомому, якісному засвоєнню навчального матеріалу, активізує навчально-пізнавальну діяльність, створює умови для творчої самореалізації у процесі навчання. Розв'язування прикладних задач, безперечно, сприяє більш якісному засвоєнню математики, дозволяє здійснювати перенесення отриманих знань і умінь в ту чи іншу галузь, що у свою чергу, активізує інтерес до завдань прикладного характеру і вивчення математики в цілому.

2. Людство з давніх давен постійно *моделює* природні об'єкти, явища і процеси, оскільки моделі спрощують їх і допомагають людині глибше пізнати реальний світ. Більше того, будь-яка наука починається з розробки простих і адекватних моделей реальності.

Серед великої кількості різних моделей особливу роль відіграють *математичні моделі*. Так називають наближений математичний опис деякого реального об'єкта зовнішнього світу за допомогою математичної символіки у вигляді певних відношень, що замінює вивчення цього об'єкта складанням, розв'язуванням і дослідженням математичних задач. Вивчення явищ за допомогою математичних моделей називають *математичним моделюванням.* Суть математичної моделі полягає в тому, що складне, багатогранне явище реального світу замінюється його спрощеною схемою.

Отже, математична модель – це математичний об'єкт, що в процесі пізнання замінює об'єкт-оригінал, зберігаючи основні важливі для дослідження типові його риси. Інакше кажучи, це є наближений опис деякого явища зовнішнього світу мовою математики (за допомогою відповідних математичних об'єктів: рівнянь, нерівностей та їх систем тощо), що замінює вивчення цього явища дослідженням і розв'язуванням відповідної математичної задачі.

Математичне моделювання є потужним інструментом для дослідження різних процесів, який розширює творчі можливості фахівця у вирішенні цілого ряду професійних завдань, істотно підвищує його професійну кваліфікацію. Сучасному спеціалісту слід ґрунтовно знати математику, тобто не просто вміти використовувати її для простих розрахунково-обчислювальних операцій, а розуміти математичні методи дослідження та їх можливості. Тільки розуміння сутності математичного моделювання дозволяє ефективно використовувати цей метод у професійній діяльності.

Процес розв'язування прикладних задач починається з етапу математичного моделювання. Побудова математичної моделі є найбільш відповідальним і складним етапом розв'язування прикладної задачі. Реалізація цього етапу потребує багатьох важливих умінь: виділяти істотні фактори, що визначають досліджуване явище (процес); вибирати математичний апарат для побудови моделі; виділяти фактори, що викликають похибку при побудові моделі.

Важливо, що добре побудована математична модель часто дає деякі нові знання про об'єкт-оригінал. При цьому вміння працювати з однією математичною моделлю дає можливість знаходити розв'язання цілого ряду прикладних задач із різних галузей практичної діяльності людини.

У процесі розв'язування прикладної задачі звичайно виникає потреба побудови математичних моделей реальних об'єктів, про які йдеться в задачі. Математичні моделі реального процесу або об'єкта можуть бути подані у рівнянь, нерівностей та їх систем тощо. У реальному житті є багато задач, які, на перший погляд, не мають між собою нічого спільного. Але часто для їх розв'язування можна використовувати одну й ту саму математичну модель. Тому вміння працювати навіть з однією математичною моделлю дає можливість знаходити розв'язання різних прикладних задач.

Математичне моделювання дає можливість не тільки обчислити конкретне значення якоїсь величини, але й досліджувати об'єкт або процес, про який йдеться в задачі, аналізуючи зміни значень шуканої величини при певних варіаціях даних величин, які містяться в умові задачі.

Величезна роль математичного моделювання в процесі пізнання і практичного використання явищ та процесів навколишнього світу на сьогодні не викликає жодних сумнівів. Математичні моделі, за допомогою яких дослідження явищ зовнішнього світу зводиться до розв'язування математичних задач, займають провідне місце серед інших методів дослідження і дозволяють не тільки пояснити явища, які спостерігаються, а й заглянути туди, де ще в принципі не могло бути дослідних, експериментальних даних. Саме так було, наприклад, при проведенні перших атомних і водневих вибухів. Більше того, існують сфери людської діяльності, де проведення експериментів, одержання експериментальних результатів є принципово неможливим.

Математичне моделювання проникає сьогодні майже у всі сфери діяльності людини – в економіку і біологію, екологію і лінгвістику, медицину і психологію, історію і соціологію тощо. Чим складніше об'єкт дослідження, тим більше значення приділяється математичній моделі явища, яке досліджується. З'являється ціла ієрархія математичних моделей, кожна з яких описує явище, що вивчається, все глибше, ширше, всебічніше.

З огляду на вищесказане має місце нагальна необхідність посилення фізико-математичного компонента фахової підготовки магістрів технологічної освіти.

3. Сучасна фізика і техніка ефективно й суттєво використовує математичний апарат, тому володіння ним давно перетворилося на світовий стандарт вищої освіти. Звичайно, що оволодіння сучасними математичними методами як надбанням сучасної науки є необхідним і для вітчизняних фахівців-технологів.

Одним із найважливіших математичних понять, походження і розвиток яких пов'язані з розв'язуванням прикладних задач, є поняття *інтеграла*. Це поняття і побудований на його основі метод застосовуються сьогодні в найрізноманітніших галузях науково-практичної діяльності людини, в тому числі у фізиці, хімії, технічних дисциплінах тощо.

При розв'язуванні певного класу фізичних задач (обчислення роботи, маси тощо) ефективним є застосування визначеного інтеграла для моделювання таких задач. Мова йтиме про обчислення фізичних величин шляхом підсумовування нескінченно малих елементів (наприклад, при обчисленні роботи <u>змінної</u> сили, маси <u>змінної</u> густини тощо).

Традиційно практичне застосування інтеграла ілюструється обчисленням площ різних фігур, об'ємів геометричних тіл та деяких фізичних застосувань ([1-3]). Однак слід зазначити, що інтегральне числення дає багатий математичний апарат для моделювання і дослідження різних об'єктів, явищ та процесів, що відбуваються в багатьох галузях науки і техніки.

Існує цілий ряд задач, що мають важливе практичне значення, при розв'язуванні яких доцільно (а часто і необхідно) застосувати визначений інтеграл. При цьому потрібно користуватись ***загальною схемою*** застосування визначеного інтеграла для обчислення різних величин.

Нехай шукане значення A фізичної величини залежить від деякої змінної x, де $x \in [a,b]$. Розіб'ємо цей інтервал на n частинних інтервалів $[x_{i,} x_{i+1}]$ $(i = 0,1,2,...,n-1)$, де $x_0 = a,\ x_n = b$. Якщо значення A може бути одержане як сума тих величин, що відповідають всім частинним інтервалам $[x_{i,} x_{i+1}]$ розбиття інтервалу $[a,b]$, то кажуть, що ця величина має властивість адитивності. Такими величинами є площа, робота, шлях, статичний момент, момент інерції, сила тиску тощо.

Для обчислення таких величин є застосовною загальна схема, яка випливає з означення визначеного інтеграла як границі інтегральних сум. Згідно з цією схемою потрібно здійснити такі кроки:

1) Інтервал $[a,b]$ розбити на інтервали $[x_{i,} x_{i+1}]$ $(i = 0,1,2,...,n-1)$, де $x_0 = a,\ x_n = b$.

2) Знайти наближене значення шуканої величини A на i-му частинному інтервалі. При цьому можуть бути застосовані різні припущення. Наприклад, малі криволінійні ділянки можна замінити прямолінійними; змінну силу на малих ділянках шляху можна замінити постійною силою тощо.

3) Застосовуючи властивість адитивності шуканої величини, записати інтегральну суму, що виражає наближене значення шуканої величини:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

де $f(x)$ – функція, яка визначається умовою задачі.

4) В інтегральній сумі перейти до границі при прямуванні довжини найбільшого із частинних

інтервалів до нуля, тобто обчислити шукану величину у вигляді визначеного інтеграла:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \,.$$

4. Наведемо приклади розв'язування задач.

Задача 1. Знайти силу, з якою кільце масою M і радіусом R діє на матеріальну точку C масою m, яка лежить на прямій, що проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини, якщо відстань від точки C до центра кільця дорівнює a.

Розв'язування. Розіб'ємо кільце на елементарні ділянки Δl_i, вважаючи кожну таку ділянку матеріальною точкою, що має масу $M_i = \rho \Delta l_i$, де $\rho = \dfrac{M}{L} = \dfrac{M}{2\pi R}$ – лінійна питома густина, L – довжина кільця.

Якщо $\Delta\varphi_i$ – кут, що відповідає ділянці дуги Δl_i, то $\Delta l_i = R\Delta\varphi_i$.

Отже,

$$M_i = \rho\Delta l_i = \frac{M}{2\pi R}\Delta l_i = \frac{M}{2\pi R}R\Delta\varphi_i = \frac{M}{2\pi}\Delta\varphi_i \cdot$$

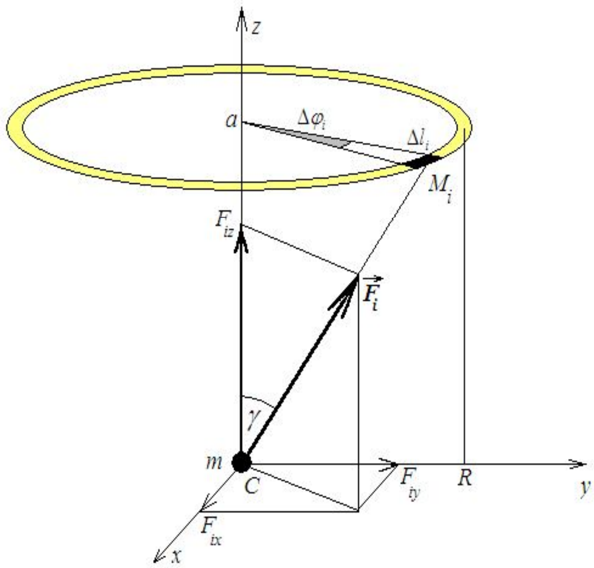

Рис. 1.

Знайдемо силу F_i взаємодії матеріальної точки C з малою ділянкою кільця Δl_i. Для цього подамо вектор $\vec{F}_i$ цієї сили у вигляді розкладу за базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k},$$

де F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекції вектора $\vec{F}_i$ на осі координат (рис. 1).

Шукана сила $\vec{F}$ є рівнодійною всіх елементарних сил $\vec{F}_{ix}, \vec{F}_{iy}, \vec{F}_{iz}$ і визначається так:

$$\vec{F} = \vec{i}\sum_{i=1}^{n} F_{ix} + \vec{j}\sum_{i=1}^{n} F_{iy} + \vec{k}\sum_{i=1}^{n} F_{iz}.$$

Очевидно, що внаслідок симетрії поставленої задачі

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.$$

Таким чином, величина шуканої сили взаємодії визначається як сума проекцій F_{iz} векторів $\vec{F}_i$ на вісь Oz. Знаходимо

$$F_{iz} = F_i \cos\gamma, \tag{1}$$

де γ – кут між віссю Oz і вектором $\vec{F}_i$, який є постійним для всіх $i = 1,2,\ldots,n$.

Із прямокутного трикутника COA маємо:

$$\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \cdot \tag{2}$$

Згідно із законом взаємодії двох точкових мас величина F_i визначається таким чином:

$$F_i \approx k\frac{m \cdot M_i}{r^2} = \frac{kmM}{(R^2 + a^2)2\pi}\Delta\varphi_i \cdot \tag{3}$$

Тоді, підставляючи (2) і (3) в (1), взявши суму по i, одержимо:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{\left(R^2+a^2\right)^3}}\Delta\varphi_i \cdot \tag{4}$$

Точним значенням величини сили взаємодії є границя, до якої прямує інтегральна сума (4), коли довжина найбільшої із частинних ділянок $\max \Delta l_i \to 0$, а тому і $\lambda = \max \Delta\varphi_i \to 0$:

$$F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{\left(R^2+a^2\right)^3}}\Delta\varphi_i = \int_0^{2\pi} \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{\left(R^2+a^2\right)^3}}d\varphi =$$

$$= \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{\left(R^2+a^2\right)^3}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{kmMa}{2\pi\sqrt{\left(R^2+a^2\right)^3}} \cdot 2\pi = \frac{kmMa}{\sqrt{\left(R^2+a^2\right)^3}}.$$

Відповідь: $\dfrac{kmMa}{\sqrt{\left(R^2+a^2\right)^3}}$.

Задача 2. Знайти момент інерції тіла, обмеженого параболоїдом обертання, відносно осі обертання, якщо радіус основи цього тіла дорівнює R, а висота H.

Розв'язування. Задане тіло обмежене поверхнею, що одержана в результаті обертання параболічного сегмента навколо осі Oz:

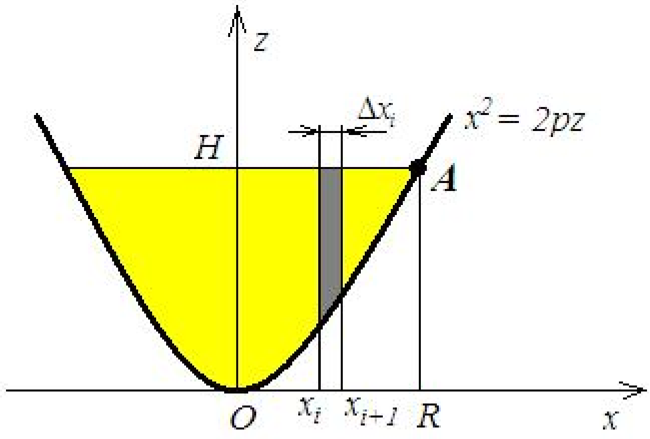

Рис. 2.

Рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2pz$.

Для визначення параметра p підставимо в рівняння параболи координати точки $A(R,H)$, що належить параболі (рис. 2). Тоді $R^2 = 2pH$, звідки $2p = \dfrac{R^2}{H}$, і рівняння параболи запишеться у вигляді $x^2 = \dfrac{R^2}{H}z$. Рівняння поверхні обертання ми одержимо, коли замінимо x^2 на $x^2 + y^2$, тобто рівняння заданого параболоїда обертання має вигляд:

$$z = \frac{H}{R^2}\left(x^2 + y^2\right).$$

При розв'язуванні задач на обчислення моменту інерції слід звернути увагу на те, що розбиття на елементарні ділянки слід проводити так, щоб всі точки i-ї ділянки знаходилися на приблизно однаковій відстані від осі обертання. У нашій задачі цього можна досягти, коли параболоїд обертання розбити системою кругових циліндрів, осі яких збігаються з віссю обертання Oz. Тоді всі точки параболоїда, які лежать між циліндрами радіусів x_i та x_{i+1}, будуть знаходитися на приблизно однаковій відстані від осі обертання внаслідок малості Δx_i. Маса виділеної ділянки визначається як маса циліндричного кільця товщиною Δx_i і висотою h_i, де

$$h_i = H - z(x_i,0) = H - \frac{H}{R^2}x_i^2 = \frac{H}{R^2}\left(R^2 - x_i^2\right).$$

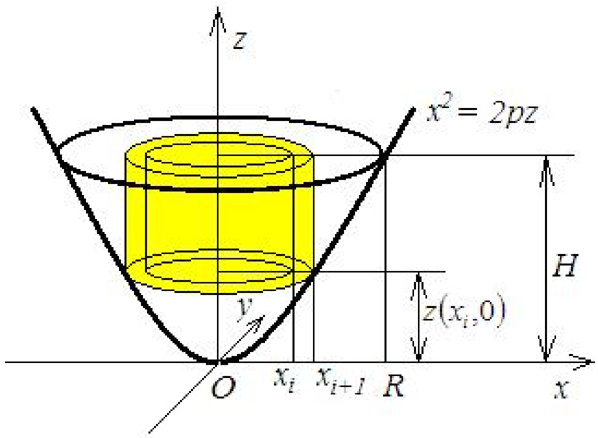

Рис. 3.

З огляду на зроблене розбиття виділену ділянку (рис. 3) можна розглядати як матеріальну точку, що має масу

$$m_i \approx \pi\left(x_i + \Delta x_i\right)^2 h_i - \pi x_i^2 \approx 2\pi x_i \Delta x_i h_i = 2\pi x_i \frac{H}{R^2}\left(R^2 - x_i^2\right)\Delta x_i .$$

Тоді момент інерції *i*-ї ділянки наближено дорівнює:

$$I_i \approx \frac{2\pi H}{R^2} x_i^3\left(R^2 - x_i^2\right)\Delta x_i .$$

Точне значення моменту інерції одержимо, коли візьмемо суму I_i за всіма $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ і перейдемо до границі в одержаній інтегральній сумі при $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$:

$$I = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=0}^{n-1} I_i = \int_0^R \frac{2\pi H}{R^2}\left(x^3R^2 - x^5\right)dx = \frac{2\pi H}{R^2}\left(\frac{x^4R^2}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^4 H}{6}.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi R^4 H}{6}$.

Список використаної літератури

1. Дороговцев А.Я. Інтеграл та його застосування. К.: Вища школа, 1974.
2. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: приклади і задачі. Посібник. – К: Академія, 2002. – 624 с.
3. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: Книга 1. – К.: Либідь, 2010. – 592 с.